Lista 1

Revisão - Capítulo 1 do Strang

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Use eliminação gaussiana para verificar se o sistema $A \cdot x = b$, onde $b = [1, 2, 3, 1]^T$,tem solução.

   (b) Encontre a decomposição LU de A, ou seja, encontre uma matriz triangular inferior $L_{4\times4}$ e uma matriz a matriz triangular superior $U_{4\times3}$ tal que $A = LU$.

2. Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Strang, exercícios de revisão capítulo 1

1. Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas

   (a) Se A é invertível e se suas linhas são as linhas de B na ordem inversa então B é invertível.

   (b) Se A e B são simétricas então AB também é simétrica.

   (c) Se A e B são invertíveis então BA também é invertível.

   (d) Toda matrix não singular pode ser fatorada no produto $A = LU$ de uma matriz triangular inferior L e uma matriz triangular superior U.

2. Resolve $Ax = b$ resolvendo os sistemas triangulares $Lc = b$ e $Ux = c$, onde $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Que parte da matriz A^{-1} você obteve com este vetor b específico?

3. Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas

   (a) Se $L_1U_1 = L_2U_2$ (U triangular superior com elementos não nulos na diagonal e L triangular inferior com 1 na diagonal principal) então $L_1 = L_2$e $U_1 = U_2$

   (b) Se $A^2 + A = I$ então $A^{-1} = A + I$

   (c) Se todas as entradas da digonal principal de A são nulas então A é singular (não é invertível)

4. Escreva a matriz 2×2 que

   (a) Inverta o sentido de qualquer vetor

   (b) Projeto todo qualquer no eixo y

   (c) Rotacione todo vetor por 90^ono sentido anti-horário

   (d) Efetue uma reflexão de qualquer vetor em torno da reta $y = x$

Revisão - Capítulo 2 do Strang

1. (Strang) Quais são subespaços de R^∞?

   (a) As sequências como $(1, 0, 1, 0, ...)$ que contém infinitos zeros.

   (b) As sequências $(x_1,x_2,...)$ com todos os $x_j = 0$ de um ponto em diante.

   (c) Todas as sequências decrescentes: $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j

(d) As sequências convergentes: x_j tende a um limite quando $j \to \infty$

(e) As progressões aritméticas

(f) As progressões geométricas

2. (Strang) Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra-exemplo para as falsas.

   (a) Os vetores b que não estão no espaço coluna $C(A)$ formam um subespaço.

   (b) Se $C(A)$ contém apenas o vetor nulo então A é a matriz nula.

   (c) O espaço coluna de $2A$ é igual ao espaço coluna de A

   (d) O espaço coluna de $A - I$ é igual ao espaço coluna de A.

3. Considere uma matriz $A_{4\times 3}$.

   (a) Mostre que $N(A)$ (espaço nulo ou núcleo de A) é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Mostre que $C(A)$ (espaço coluna ou imagem de A) é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

   (c) Mostre que $F = \{x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}\}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ não é um espaço vetorial.

   (d) Uma variedade afim F de um espaço vetorial Vé um subconjunto de V tal que dados quaisquer dois elementos u e v de F a combinação linear $w = t \cdot u + (1-t) \cdot v$ também pertence a F, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Mostre o conjunto das soluções de um sistema linear $A_{m\times n}x = b$ (como o conjunto F do item (c)) é uma variedade afim de $\mathbb{R}^n$.

   (e) Seja F uma varidade afim de V. Mostre que dado qualquer elemento u_p de F a translação de F por $-u_p$ (definida por $T(F) = \{x - u_p / x \in F\}$) é um subespaço vetorial de V. Qual é o espaço vetorial correspondente à translação da varidade afim F do item (c)?