1 Verificação de conceitos

1. Qual é a definição de transformação linear?

2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear. Sabendo que $T(1,0) = (1,0,1)$ e $T(0,1) = (0,2,-1)$ calcule $T(3,5)$.

3. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear então existe uma matriz associada a esta transformação $[T]$. Quais são as dimensões desta matriz?

4. Verifique se as funções abaixo são lineares. Em caso afirmativo exiba a matriz associada (se possível).

   (a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x+y, x-y)$
   (b) $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x+y, 1)$
   (c) $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x \cdot y, y)$
   (d) $D : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $D(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$
   (e) $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $E(x,y,z) = (x-z, x+y)$
   (f) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = A(E(x,y,z))$

5. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem uma matriz associada $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na base canônica. Qual é a matriz $[T]_\beta^\beta$ desta transformação na base $\beta = [u, v]$, onde $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$?

6. Determine a matriz da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que consiste na projeção ortogonal sobre o eixo Oy seguida de uma rotação em torno da origem por um ângulo de $\pi/4$.

7. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = b$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?

8. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = 0$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?

2 Exercícios

1. Considere duas matrizes, $A_{10\times 3}$ e $B_{3\times 9}$ e seja $C_{10\times 9}$ o produto: $C = A \cdot B$. Qual é a dimensão mínima do núcleo de C ? Qual é o posto máximo de C ?

2. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que T está completamente definida se forem conhecidas as imagens de T nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1)$, ... , $v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores v_i e a matriz associada a T ?

3. Classifique como verdadeiro ou falso. Justifique sua classificação.

   (a) Os vetores (1, 1, 1, 1), (2, 3, 0, 0) e (1, -1, 1, -1) são linearmente independentes.
   (b) Os vetores (1, 1, 1, 1), (2, 3, 0, 0) e (1, -1, 1, -1) formam uma base de $\mathbb{R}^4$.
   (c) O espaço $E \subset \mathbb{R}^4$ tem uma base $\beta = [(1,1,2,3), (0,1,0,-1)]$ e o espaço $F \subset \mathbb{R}^4$ tem uma base $\gamma = [(1,-1,2,5), (1,2,3,2)]$. São subespaços distintos de $\mathbb{R}^4$.
   (d) Se o posto de $A_{101\times 200}$ é 101, então o posto de A^T necessariamente é 101.
   (e) Se as colunas de uma matriz são linearmente independentes então as linhas também são.
   (f) As clunas de uma matriz formam uma base de sua imagem (espaço coluna).
   (g) Seja v um vetor não nulo de $\mathbb{R}^{10}$. Considerando este vetor com uma matriz coluna, isto é, com 10 linhas e uma coluna a matriz $M = v \cdot v^T$ tem 10 linhas e 10 colunas e posto 1.

4. A transformação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo Ox.

   (a) Determine a matriz de P (da base canônica na base canônica, isto é $[P]_E^E$)

   (b) Se $\beta = \{(1,1),(1,-1)\}$ determine as matrizes de mudança de base: $[Id]_E^\beta$ e $[Id]_\beta^E$.

   (c) Encontre a matriz de P na base β, isto é, $[P]_\beta^\beta$.

5. Determine a matriz da rotação em $\mathbb{R}^2$ em torno da origem por um ângulo θ nas coordenadas $\beta = [u, v]$, onde $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$

6. Determine a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo Oz por um ângulo de θ na base canônica.

7. Calcule (use o computador, por favor) a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$.

   (a) Use a matriz obtida para calcular a rotação em torno do eixo definido pelo vetor v por um ângulo de $\pi/6$ do ponto $Q = (1,3,2)$. Faça um gráfico no computador com os três eixos coordenados com o vetor v, o ponto Q e o resultado da rotação $R(Q)$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que T está completamente definida se forem conhecidas as imagens de T nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1)$, ... , $v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores v_i e a matriz associada a T ?

9. Seja $E = C(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina o operador linear $A : E \to E$ pondo para cada $f \in E$, $A(f) = \phi$, onde $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$. Determine o núcleo e a imagem do operador A.

10. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

    (   ) Para todo operador linear $A : E \to E$, se $u \in N(A)$ e $v \in C(A)$ então $u \cdot v = 0$

    (   ) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão ≥ 3

    (   ) Em todo grafo com n vértices e m arestas vale $\#ciclosindependentes - \#componentesconexas = m - n$

    (   ) O conjunto dos funcionais afins $t : R^n \to R$ $(t(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n)$ é um espaço vetorial

    (   ) O conjunto das transformações lineares $T : R^n \to R^m$ é um espaço vetorial de dimensão n

11. Determine uma base para a imagem e para o núcleo, quando possível, de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

    (a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x,y) = (x-y, x-y)$

    (b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B(x,y,z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$

    (c) $C : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $C(X) = A \cdot X$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($M_{2\times2}$ é o espaço das matrizes 2×2)

    (d) $D : P_n \to P_{n+1}$, $D(p(x)) = x \cdot p(x)$ (P_n é o espaço dos polinômios de grau até n)

12. Considere o espaço P_n dos polinômios de grau até n. É verdade que ambas as transformações $D : P_n \to P_n$ e $I : P_n \to P_{n+1}$, dadas por $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x)$ e $I(p(x)) = \int_0^x p(t) \cdot dt$ são lineares (justifique)? Em caso afirmativo, exiba as matrizes destas transformações de na base canônica de P_n e descreva o núcleo e a imagem delas.

13. O arquivo MatrizIncidencia.csv que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se $A_{ij} = 1$ então a aresta i se inicia no vértice j. Se $A_{ij} = -1$ então a aresta i termina no vértice j. Deste modo em cada linha i há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a -1 e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.

    (a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computacional, claro!

    (b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.