

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA  
MESTRADO 2016.1  
ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES  
Prof Moacyr

Resolução da Lista 2

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

**1. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Em caso afirmativo exiba uma base deste subespaço.**

(a)

Sejam  $u = (u_1, u_2, u_3)$  e  $v = (v_1, v_2, v_3)$  pertencentes ao plano  $2x + y - z = 0$ , temos:

$$1) 2u_1 + u_2 - u_3 = 0$$

$$2) 2v_1 + v_2 - v_3 = 0$$

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo  $u + v$  obtemos:

$$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Somando 1) e 2) temos:

$$2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0, \text{ logo } u + v \text{ pertence ao plano.}$$

Fazendo  $a.u$  obtemos:

$$a.u = (au_1, au_2, au_3)$$

Multiplicando  $a$  dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o plano dado é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

(b)

Sejam  $p = a_1.u + b_1.v + c_1.w$  e  $q = a_2.u + b_2.v + c_2.w$  combinações lineares de  $u$ ,  $v$  e  $w$ :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo  $p + q$  obtemos:

$$r = p + q = ((a_1 + a_2).u, (b_1 + b_2).v, (c_1 + c_2).w)$$

Temos que  $r$  também é uma combinação linear de  $u$ ,  $v$  e  $w$  e portanto pertence ao conjunto dado. (1)

Fazendo  $a.p$  obtemos:

$$r = a.p = aa_1.u + ab_1.v + ac_1.w$$

Temos que  $r$  também é uma combinação linear de  $u$ ,  $v$  e  $w$  e portanto pertence ao conjunto dado. (2)

De (1) e (2) temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(c) Não é subespaço vetorial, pois não contém a origem e dessa forma não atende à condição necessária para ser subespaço.

(d) Sejam  $u = (u_1, r + u_1, 2r + u_1, 3r + u_1, \dots, (n-1)r + u_1)$  e  $v = (v_1, p + v_1, 2p + v_1, 3p + v_1, \dots, (p-1)r + v_1)$  pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo  $u + v$  obtemos:

$$w = u + v = (u_1 + v_1, (r+p) + u_1 + v_1, 2(r+p) + u_1 + v_1, 3(r+p) + u_1 + v_1, \dots, (n-1)(r+p) + u_1 + v_1)$$

onde  $w$  é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão  $r + p$  e elemento inicial  $u_1 + v_1$ , logo  $u + v$  pertence ao conjunto.

Fazendo  $a.u$  obtemos:

$$w = a.u = (a.u_1, ar + a.u_1, 2ar + a.u_1, 3ar + a.u_1, \dots, (n-1)ar + a.u_1)$$

onde  $w$  é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão  $a.r$  e elemento inicial  $a.u_1$ , logo  $a.u$  pertence ao conjunto.

Multiplicando  $a$  dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}\right)$$

(e) Sejam  $u = (u_1, q.u_1, 2q.u_1, 3q.u_1, \dots, (n-1)q.u_1)$  e  $v = (v_1, p.v_1, 2p.v_1, 3p.v_1, \dots, (n-1)p.v_1)$  pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo  $u + v$  obtemos:

$$w = u + v = (u_1 + v_1, q.u_1 + p.v_1, 2q.u_1 + 2p.v_1, 3q.u_1 + 3p.v_1, \dots, (n-1)q.u_1 + (n-1)p.v_1)$$

Analisando  $w$  podemos perceber que ele só será um vetor cujas coordenadas são uma progressão geométrica se as progressões correspondetes a  $u$  e  $v$  possuírem a mesma razão. Logo o conjunto dado não é fechado para soma e consequentemente o conjunto dado não é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ .

(f) Sejam  $u$  e  $v$  vetores pertencentes ao conjunto dado tal que  $u^T = -u$  e  $v^T = -v$ .

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das matrizes dado é também um subespaço vetorial:

Analisando  $u + v$  para determinar se pertence ao conjunto:

$$(u + v)^T = u^T + v^T = -u + (-v) = -(u + v) \quad (1)$$

De (1) temos que  $u + v$  é uma matriz anti-simétrica e pertence ao conjunto.

Analisando  $a.u$  para determinar se pertence ao conjunto:

$$(a.u)^T = a.u^T = a.(-u) = -(a.u) \quad (2)$$

De (2) temos que  $a.u$  é uma matriz anti-simétrica e pertence ao conjunto. Portanto, podemos concluir que o conjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial do espaço das matrizes.

Uma base para este sistema é um conjunto de  $(m-1).n/2$  matrizes que possibilitam a variação de todos os elementos da diagonal principal e dos elementos acima da diagonal e fixam os elementos abaixo da diagonal, pois estes devem ser necessariamente anti-simétricos aos elementos acima da diagonal.

(g) O conjunto dado é um subconjunto do espaço das funções dadas por:

$$P(x) = (ax + b)(x - 1)(x - 2) = ax^3 + (b - 3a)x^2 + (2a - 3b)x + 2b$$

Podemos representar estes polinômios como vetores da forma:

$$(a, (b - 3a), (2a - 3b), 2b)$$

Considere os vetores  $u = (a_1, (b_1 - 3a_1), (2a_1 - 3b_1), 2b_1)$  e  $v = (a_2, (b_2 - 3a_2), (2a_2 - 3b_2), 2b_2)$ . Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das funções dado é também um subespaço vetorial:

$$u + v = (a_1 + a_2, [(b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2)], [(2(a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2)), 2(b_1 + b_2)] = [(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)](x - 1)(x - 2), \text{ logo } u + v \text{ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.}$$

Fazendo  $a.u$  obtemos:

$$a.u = (a.a_1, a.(b_1 - 3a_1), a.(2a_1 - 3b_1), a.2b_1) = (a.a_1x + a.b_1)(x - 1)(x - 2), \text{ logo } a.u \text{ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.}$$

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial do espaço das funções.

$$\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

**2. Explique por que podemos determinar uma base para o espaço coluna de uma matriz A coletando as colunas correspondentes às colunas que contém pivôs quando A é escalonada.**

O espaço coluna de uma matriz corresponde a todas as combinações lineares das colunas da matriz. Entretanto, para formar uma base deste espaço podemos coletar apenas as colunas correspondentes às colunas que contém pivôs quando A é escalonada, pois estas são as colunas linearmente independentes. As colunas que não possuem pivôs são as colunas associadas às variáveis livres do sistema e não adicionam informação à base do espaço coluna, pois são uma combinação linear das colunas que contém pivô.

**3. Exiba matrizes  $2 \times 2$  com os seguintes núcleos (espaço nulo) e imagens (espaço coluna):**

(a) Núcleo: reta  $y = x$ . Imagem: reta  $y = 2x$

Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por  $\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ .

(b) Núcleo: reta  $y = 3x$ . Imagem: também a reta  $y = 3x$

Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por  $\text{ger}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ .

Obs.: Os elementos da matriz assinalados entre ( ) são os pivôs.

**4. Considere a base de  $R^2$   $\beta = [u, v]$ , onde  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 1)$ .**

**(a) Se  $w$  tem coordenadas  $(3, 5)$  na base  $\beta$ , quais são as coordenadas de  $w$  na base canônica? ( $[w]_\beta = (3, 5)$  então  $[w]_E = (?, ?)$ )**

A base canônica é dada por  $E = [e_1, e_2]$ , onde  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . As coordenadas de  $w$  na base canônica podem ser encontradas fazendo:

$$w_E = Q_E^\beta \cdot w_\beta$$

$$w_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \implies w_E = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(b) Se  $z$  tem coordenadas  $(1, 2)$  na base canônica, quais são as coordenadas de  $w$  na base  $\beta$ ? ( $[z]_E = (1, 2)$  então  $[z]_\beta = (?, ?)$ )

$$w_\beta = Q_\beta^E \cdot w_E$$

$$w_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow w_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Qual é a matriz de passagem da base  $\beta$  para a canônica? E da base canônica para a base  $\beta$ ?

Matriz de passagem da base  $\beta$  para a canônica:  $Q_E^\beta$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de passagem da base canônica para a base  $\beta$ :  $Q_\beta^E = Q_E^{\beta-1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**5. Determine uma base  $\beta = [u, v]$  de  $R^2$  onde  $u$  pertence à reta  $y = x$  e  $v$  é ortogonal à  $u$ .**

Queremos encontrar os vetores  $u$  e  $v$  tais que  $u$  pertence à reta  $y = x$  e  $v$  pertence à reta  $y = -x$ :

Podemos portanto escolher os vetores  $u = (1, 1)$  e  $v = (-1, 1)$  para formar a base  $\beta$ .

(a) A projeção ortogonal sobre a reta  $y = x$  no sistema de coordenadas definidas por  $\beta$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

A matriz  $I_E^\beta$  é formada pelos vetores  $u$  e  $v$  escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $I_\beta^E$  é formada pelos vetores da base canônica escritos na base  $\beta$  que é também a matriz inversa da matriz  $I_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz  $[P]_E$  é:

$$[P]_E = I_E^\beta [P]_\beta I_\beta^E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[P]_E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$