FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução da Lista 1

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

Revisão - Capítulo 1 do Strang

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Use eliminação gaussiana para verificar se o sistema $A.x = b$, onde $b = [1, 2, 3, 1]^T$, tem solução.

Resolução do sistema $A.x = b$ por eliminação gaussiana:

$$\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

1) $L_2 \leftarrow L_2 - f_{21}L_1;\ f_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$
$\Rightarrow L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{array}{ccc:c} (1) & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

2) $L_3 \leftarrow L_3 - f_{31}L_1;\ f_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 3$
$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

$$\begin{array}{ccc:c} (1) & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

3) $L_4 \leftarrow L_4 - f_{41}L_1;\ f_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}} = 3$
$\Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1$

$$\begin{array}{ccc:c} (1) & 0 & 1 & 1 \\ 0 & (1) & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array}$$

4) $L_3 \leftarrow L_3 - f_{32}L_2;\ f_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 1$

$\Rightarrow L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$$\begin{array}{cccc:c} (1) & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & (1) & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & -2 & & -2 \end{array}$$

5) $L_4 \leftarrow L_4 - f_{42}L_2$; $f_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}} = 2$

$\Rightarrow L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$\begin{array}{cccc:c} (1) & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & (1) & -1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 \end{array}$$

Obs.: Os elementos da matriz assinalados entre ( ) são os pivôs que foram escolhidos durante a eliminação.

A partir da matriz escalonada encontrada podemos concluir que o sistema não possui solução, pois a última equação não pode ser verdadeira:

$$0.x + 0.y + 0.z = -2 \Rightarrow Absurdo$$

b) Encontre a decomposição LU de A, ou seja, encontre uma matriz triangular inferior L_{4x4} e uma matriz triangular U_{4x3} tal que $A = LU$.

A matriz U é a matriz triangular superior encontrada no processo de eliminação gaussinada (feito no item anterior), portanto:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz L é a matriz triangular inferior cujos elementos da diagonal principal são 1 e os elementos restantes são os coeficientes f_{ij} calculados na eliminação gaussiana:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ f_{21} & 1 & 0 & 0 \\ f_{31} & f_{32} & 1 & 0 \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar se o resultado está correto, fazemos $A = LU$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Determine a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Primeiramente iremos verificar se a matriz A possui inversa, através do cálculo do determinante: $detA = (1.1.2) + (0.0.1) + (-1.1.1) - (1.1.1) - (0.1.1) - (0. - 1.2) = 2 + 0 + (-1) - 1 - 0 - 0 = 0$

Uma vez que verificamos que o determinante de A é nulo, podemos afirmar que a matriz A não possui inversa. Entretanto, iremos verificar este resultado utilizando o método de Gauss-Jordan como segue:

$$\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \Longrightarrow \begin{array}{ccc:ccc} (1) & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \Longrightarrow \begin{array}{ccc:ccc} (1) & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

Pode-se observar que não é possível colocar a matriz A na forma reduzida, visto que a última linha foi totalmente zerada e assim, não é possível calcular a inversa pelo método de Gauss-Jordan. Cabe reaaltar, que este resultado já era esperado, visto que a matriz A possui determinante nulo e por essa razão podemos afirmar que esta matriz não possui inversa.

Strang, exercícios de revisão capítulo 1

1. Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra exemplo para as falsas

(a) Se A é invertível e se suas linhas são as linhas de B na ordem inversa então B é invertível.

Verdadeiro. Justificativa:

Opção 1: Se A é invertível então é não singular e $N(A)$ contém apenas o vetor nulo. Se as linhas B são apenas a permutação das linhas de A então as combinações lineares das colunas não se alteram, por essa razão $C(B) = C(A)$ e $N(B) = N(A) = 0$ portanto B também deverá ser não singular e invertível.

Opção 2: B pode ser escrita como o produto de A com matrizes de permutação não singulares e sendo assim deve ser uma matriz não singular.

(b) Se A e B são simétricas então AB também é simétrica.

Falso.

Se A e B são simétricas então $A = A^T$ e $B = B^T$. Assim:

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

Sabemos que o produto de matrizes não é comutativo e portanto BA pode ser diferente de AB, sendo assim a matriz AB não necessariamente será simétrica.

Contra exemplo:

Tome a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ calculando AB obtemos:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Se A e B são invertíveis então BA também é invertível.

Verdadeiro.

Se A e B são invertíveis então podemos tomar $X = A^{-1}B^{-1}$. Multiplicando BA por X, obtemos:

$$BAX = BA(A^{-1}B^{-1}) = BIB^{-1} = I$$

Portanto BA é invertível e sua inversa é a matriz $X = A^{-1}B^{-1}$.

(d) Toda matriz não singular pode ser fatorada no produto $A = LU$ de uma matriz triangular inferior L e uma matriz triangular superior U.

Verdadeiro.

Uma matriz não singular A de dimensão n é tal que $posto(A) = n$ e $dim(N(A)) = 0$ e portanto é possível utilizar eliminação gaussiana para resolver o sistema associado a esta matriz e consequentemente fatorá-la no produto de duas matrizes L (triangular inferior) e U(triangular superior).

2. Resolva $Ax = b$ resolvendo os sistemas triangulares $Lc = b$ e $Ux = c$, onde $A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Que parte da matriz A^{-1} você obteve com este vetor b específico?

1) Resolvendo o sistema $Lc = b$ utilizando o processo de substituição reversa, obtemos:

$$\begin{array}{rrrcl} 1x & +0y & +0z & = & 0 \\ 4x & +1y & +0z & = & 0 \\ 1x & +0y & +1z & = & 1 \end{array}$$

$$x = 0$$

$$4.0 + 1y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$1.0 + 0.0 + 1z = 1 \Rightarrow z = 1$$

Logo, $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2) Resolvendo o sistema $Ux = c$ utilizando o processo de substituição, obtemos:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x & +2y & +4z & = & 0 \\ 0x & +1y & +3z & = & 0 \\ 0x & +0y & +1z & = & 1 \end{array}$$

$$z = 1$$

$$y + 3.1 = 0 \Rightarrow y = -3$$

$$2x + 2(-3) + 4.1 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

Logo, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A parte da matriz A^{-1} obtida com o vetor específico $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ foi a terceira coluna. (Lembrar do processo de eliminação de Gauss-Jordan para encontrar inversa!)

3. Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra exemplo para as falsas

(a) Se $L_1U_1 = L_2U_2$ (U trinagular superior com elementos não nulos na diagonal e L triangular inferior com 1 na diagonal principal) então $L_1 = L_2$ e $U_1 = U_2$.

Verdadeiro. Justificativa:
Tome o produto $L_1U_1 = L_2U_2$, e multiplique à direita por U_1^{-1}:

$$L_1 = L_2U_2U_1^{-1}$$

.

Agora multiplique por L_2^{-1} à esquerda:

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$$

Perceba que o produto de matrizes $L_2^{-1}L_1$ resulta em uma matriz triangular inferior, ao passo que o produto de matrizes $U_2U_1^{-1}$ resulta em uma matriz triangular superior. Para que sejam iguais é necessário que o resultado do produto seja uma matriz diagonal D. Assim:

$$L_2^{-1}L_1 = D = U_2U_1^{-1}$$

Sabemos também que as diagonais das matrizes L_1 e L_2^{-1} possuem apenas elementos iguais a 1. Portanto:

$$L_2^{-1}L_1 = I = U_2U_1^{-1}$$

Sendo assim, temos que:

$$L_2^{-1}L_1 = I \Rightarrow L_1 = L_2$$

$$I = U_2U_1^{-1} \Rightarrow U_1 = U_2$$

(b) Se $A^2 + A = I$ então $A^{-1} = A + I$

Verdadeiro. Justificativa:

$$A^2 + A = I$$

Multiplicando por A^{-1} pela esquerda obtemos:

$$A^{-1}A^2 + A^{-1}A = A^{-1}I$$

$$A + I = A^{-1}$$

(c) Se todas as entradas da diagonal principal de A são nulas então A é singular (não é invertível).

Verdadeiro.

É possível mostrar que a afirmativa é verdadeira mostrando que existe vetor diferente do vetor nulo no espaço nulo de A e por essa razão, o sistema associado a matriz não possui uma única solução e a matriz não é invertível. Além disso, podemos argumentar que o posto da matriz A não é cheio e por isso ela também não pode ser invertível.

Escolhendo um vetor de N(A) diferente de nulo:

Tome o vetor e_1 cujo primeiro elemento é 1 e todos os outros elementos são zero. Pelas propriedades da matriz A é possível saber que $Ae_1 = 0$ e portanto $e_1 \in N(A)$.

4. Escreva a matriz 2x2 que:

(a) Inverta o sentido de qualquer vetor

Para que a matriz inverta o sentido de qualquer vetor sem alterá-lo ela deve preservar o valor absoluto dos elementos do vetor e inverter o seu sinal, para isso nossa matriz deve ser a matriz I_2 (identidade de ordem 2) com os sinais trocados:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Projeto todo vetor no eixo y

Para que a matriz projete qualquer vetor no eixo y sem alterá-lo devemos conservar a segunda coordenada do vetor e tornar a primera nula:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Rotacione todo vetor por 90^o no sentido anti horário

A matriz de rotação de um angulo θ no sentido anti-horário é:

$$R = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$$

Se $\theta = 90^o$:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(d) Efetue uma reflexão de qualquer vetor em torno da reta $y = x$

Basta calcular o valor desta transformação nos vetores da base canônica:

$$Reflex\tilde{a}o_{y=x}(e_1) = e_2$$

$$Refelxão_{y=x}(e_2) = e_1$$

$$Reflexão_{y=x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Revisão - Capítulo 2 do Strang

1. Quais são subespaços de R^{∞}?

(a) As sequências como (1,0,1,0, ...) que contem infinitos zeros

É subespaço vetorial, pois a soma(termo a termos) de duas sequências contém infinitos zeros e o produto de uma sequência por um escalar também contém infinitos zeros.

(b) As sequências como (x_1, x_2, ...) com todos os $x_j = 0$ de um ponto em diante

É subespaço vetorial, pois a soma(termo a termos) de duas sequências irá possuir apenas zeros de um ponto em diante e o produto de uma sequência por um escalar também irá possuir apenas zeros de um ponto em diante

(c) Todas as sequências decrescentes: $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j

Não é um subespaço vetorial, pois a multiplicação por um escalar negativo irá tornar as pertencentes ao subconjunto dado sequências crescentes.

(d) As sequências convergentes: x_j tende a um limite quando $j \to \infty$

É um subespaço vetorial.

A prova formal deve ser feita mostrando que ao somar duas sequências ou ao multiplicar uma sequência por um escalar, continua existindo um elemento da sequência a partir do qual todos os elementos subsequentes estão a um termo ε de um limite L para o qual a nova sequência (obtida a partir da soma de duas sequências ou da multiplicação de uma sequência por um escalar) converge.

(e) As progressões aritméticas

É um subespaço vetorial.

1) Se $a = (a_0, a_0 + q_1, a_0 + 2q_1, ...)$ e $b = (b_0, b_0 + q_2, b_0 + 2q_2, ...)$ são dois vetores dos espaço das P.A.s, sendo$a$ uma PA de razão q_1 e termo inicial a_o;e b uma PA de razão q_2 e termo inicial b_0, temos que a soma destes vetores irá resultar em uma PA $c = a + b = (a_0 + b_0,\ a_0 + b_0 + q_1 + q_2,\ a_0 + b_0 + 2q_1 + 2q_2, , ...)$ de razão $q_1 + q_2$e termo inicial $a_0 + b_0$, portanto c pertence ao espaço das PAs.

2) Seja $a = (a_0, a_0 + q_1, a_0 + 2q_1, ...)$ uma PA de razão q_1, temos que o produto deste vetor por um escalar irá resultar em uma PA $d = ka = (ka_0,\ ka_0 + kq_1,\ ka_0 + 2kq_1, ...)$ de razão kq_1e termo inicial ka_0, portanto d pertence ao espaço das PAs.

(f) As progressões geométricas

Não é um subespaço vetorial.

Pois a soma de duas progressões geométricas cujos termos inicias e as razões sejam distintas não irão resultar em uma progressão geométrica.

2. Verdadeiro ou Falso. Justifique as verdadeiras e apresente um contra exemplo para as falsas

(a) Os vetores b que não estão no espaço coluna $C(A)$ formam um subespaço

Verdadeiro.

Justificativa por contradição:

Imagine um vetor b que não está no espaço coluna de A. Se o conjunto dos vetores que não estão em $C(A)$ não é um subespaço isto significa que a sua multiplicação por um escalar, por exemplo, pode não pertencer ao conjunto, mas sim a $C(A)$.

Entretanto, caso este vetor multiplicado por um fator escalar pertencesse a $C(A)$ então o próprio vetor deveria pertencer a $C(A)$, dado que $C(A)$ é um subespaço. Logo o conjunto dos vetores que não estão em $C(A)$ deve ser fechado para a multiplicação por escalar.

Podemos pensar de maneira análoga sobre a soma de dois vetores que pertencem ao conjunto dos vetores que não estão no espaço coluna de A. A soma de dois vetores deste conjunto resultar em um vetor do espaço coluna de A, iria implicar na possibilidade de se somar dois vetores de fora do espaço coluna e produzir uma combinação linear das colunas de A o que não pode ser possível visto que os vetores que não estão no espaço coluna não podem ser obtido através da combinação linear das colunas. Portanto, o conjunto dos vetores que não estão em $C(A)$ também deve ser fechado para a soma de vetores. Sendo assim, podemos afirmar que este conjunto é um subespaço.

(b) Se $C(A)$ contém apenas o vetor nulo então A é a matriz nula

Verdadeiro. O espaço coluna de uma matriz é formada por todas as combinaçõeso lineares das colunas da matriz. Se este espaço contiver apenas o vetor nulo, isto significa que qualquer combinação das colunas deve dar nulo e isto só é possível se todas as colunas forem nulas.

(c) O espaço coluna de 2A é igual ao espaço coluna de A

Verdadeiro.

O espaço coluna de A é gerado pela base formada pelas colunas linearmente independentes de A. O espaço coluna da matriz 2A terá como base as mesmas colunas linearmente independentes de A multiplicadas por 2. No entanto, sabemos que um fator multiplicativo não altera o espaço gerado por uma base.

Podemos lembrar também que o espaço coluna é um subespaço vetorial e que portanto é fechado para a multiplicação por um escalar.

(d) O espaço coluna de A - I é igual ao espaco coluna de A

Falso. Subtrair A da matriz identidade altera as colunas da matriz A e por essa razão pode alterar também o conjunto de todas as combinações lineares obtidas a partir das colunas da matriz.

Contra-exemplo:

Tome a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ fazendo eliminação nessa matriz encontramos pivôs para todas as suas linhas e portanto seu espaço coluna possui dimensão 3.

No entanto, é possível perceber que a matriz $A - I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ possui apenas duas colunas independentes e portanto a dimensão do seu espaço coluna é 2.

Portanto, para este exemplo $C(A) \neq C(A - I)$

3.Considere uma matriz A_{4x3}

(a) Mostre que $N(A)$ (espaço nulo da matriz A) é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

O espaço nulo da matriz é formado pelo conjunto de vetores x tal que $A.x = 0$, x são vetores coluna com 3 componentes, sendo, portanto, vetores do $\mathbb{R}^3$.

Para mostrar que $N(A)$ é um subespaço fazemos:

1) Suponha dois vetores x, y em $N(A)$, temos: $A.x = 0$; $A.y = 0$

$A.x + A.y = 0 \Rightarrow A(x + y) = 0 \Rightarrow x + y \in N(A)$

2) Seja x em $N(A)$: $A.x = 0 \Rightarrow \alpha Ax = \alpha 0 = 0 \Rightarrow A(\alpha x) = 0 \Rightarrow \alpha x \in N(A)$

(b) Mostre que $C(A)$ (espaço coluna ou imagem da matriz A) é um subespaço de $\mathbb{R}^4$

O espaço coluna da matriz é formado pelo conjunto de vetores b tal que $A.x = b$, b são vetores coluna com 4 componentes, sendo, portanto, vetores do $\mathbb{R}^4$.

Para mostrar que $C(A)$ é um subespaço fazemos:

1) Suponha dois vetores b_1, b_2 em $C(A)$, temos: $A.x_1 = b_1$; $A.x_2 = b_2$

$A.x_1 + A.x_2 = b_1 + b_2 \Rightarrow A(x_1 + x_2) = b_1 + b_2 \Rightarrow b_1 + b_2 \in C(A)$

2) Seja b em $C(A)$: $A.x = b \Rightarrow \alpha Ax = \alpha b \Rightarrow A(\alpha x) = \alpha b \Rightarrow \alpha b \in C(A)$

(c) Mostre que $F = x \in \mathbb{R}^3 / A \cdot x = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ não é um espaço vetorial.

O conjunto F dos vetores x corresponde aos vetores do plano $x + y = 1$. Os vetores deste plano não forma um espaço vetorial uma vez que dados dois a, $b$vetores pertencentes a F, efetuando sua soma obtemos:

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

Temos: $a_1 + b_1 = 1$ e $a_2 + b_2 = 1$, logo $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = 2 \Rightarrow (a + b) \notin F$.

(d) Uma variedade afim F de um espaço vetorial V é um subconjunto de V tal que dados quaisquer dois elementos u e v de F a combinação linear $w = t \cdot u + (1 - t) \cdot v$ também pertence a F, qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. Mostre o conjunto das soluções de um sistema linear $A_{m \times n}x = b$(como o conjunto F do item (c)) é uma variedade afim de $\mathbb{R}^n$.

Para mostrar que o conjunto de soluções de um sistema linear $A.x = b$ é uma variedade afim, devemos mostrar que dados x, y pertencentes a este conjunto $(1 - t)x + ty$ também irá pertencer. Se x e y pertencem ao conjunto das soluções temos:

$$A.x = b \ (1)$$

$$A.y = b \ (2)$$

Multiplicando a eq. (1) por um escalar $(1 - t)$ dos dois lados obtemos:

$$(A.x)(1 - t) = b(1 - t)$$

Utilizando a lei associativa das matrizes, obtemos:

$$A.[x.(1 - t)] = b(1 - t) \ (1.1)$$

Multiplicando a eq. (2) por um escalar t dos dois lados obtemos:

$$(A.y)t = bt$$

Utilizando a lei associativa das matrizes, obtemos:

$$A.[y.t] = bt \ (2.1)$$

Somando as eq. (1.1) e (2.1), obtemos:

$$A.[x.(1 - t)] + A.[y.t] = b(1 - t) + bt \Longrightarrow A.[x.(1 - t) + yt] = b \ (3)$$

De (3) concluimos que $x.(1 - t) + yt$ também é solução do sistema e portanto o conjunto das soluções de um sistema linear $A.x = b$ é uma variedade afim.

Obs.: Caso o sistema não tenha soluções o conjunto também é uma variedade afim pois a propriedade$(1 - t)x + ty$ é satisfeita por vacuidade.

(e) Seja F uma varidade afim de V . Mostre que dado qualquer elemento u_p de F a translação de F por $-u_p$ (definida por $T(F) = x - u_p/x \in F$) é um subespaço vetorial de V . Qual é o espaço vetorial correspondente à translação da varidade afim F do item (c)?

Parte 1: Mostre que dado qualquer elemento u_p de F a translação de F por $-u_p$ (definida por $T(F) = x - u_p/x \in F$) é um subespaço vetorial de V .

Seja V uma variedade afim e seja V' a translação de V por $-u$ dada por $V' = v - u;\ u, v \,\epsilon\, V$, temos:

Fazendo $a.x'$ obtemos:

$$w' = a.x' = a.(x - u) = a.x - a.u + u - u = (a.x + (1 - a)u) - u$$

Para mostrar que $w' \epsilon\, T(F)$, devemos mostrar que $(a.x + (1-a)u)\ \epsilon F$:

Entretanto se x e u pertencem a F e F é uma variedade afim decorre imediatamente que $(a.x + (1-a)u)\ \epsilon F$ w portanto $w' = (a.x + (1-a)u)\ \epsilon\ T(F)$.

Dados x e $y\ \epsilon\ F$, temos x' e $y' \in T(F)$ tal que:

(1) $x' = x - u$

(2) $y' = y - u$

(3) $(1-t).x + t.y \in F$, t $\in \mathbb{R}$

Somando (1) e (2) , obtemos $x' + y'$:

$$w' = x' + y' = (x-u) + (y-u) = (x+y-u) - u$$

Para mostrar que $w' \epsilon\ T(F)$, devemos mostrar que $(x+y-u)\ \epsilon\ T(F) \subset V$:

$$w' = 2(x/2 + y/2 - u)$$

Tomando $t = 1/2$ em (3) temos que $p = x/2 + y/2\ \epsilon\ F$, logo$p - u\ \epsilon\ T(F)$ e $w' = 2.(p-u)$ também pertence a $T(F)$, pois mostramos acima que $T(F)$ é fechado para a multplicação por escalar.

Uma vez que provamos que $T(F)$ é fechado para soma e para a multplicação por escalar então $T(F)$ é um subespaço vetorial de V.

Parte 2: Qual é o espaço vetorial correspondente à translação da varidade afim F do item (c)?

Sabendo que os vetores de F devem satisfazer a equação $x + y = 1$, podemos tomar $u_p = [0\,1\,0]$, por exemplo e sendo $x = (x_1, x_2, x_3)$:

Obtemos a transformação $T(F) = (x_1, 1 - x_1, x_3) - (0,\ 1,\ 0) / x \in F \Rightarrow T(F) = \{(x_1, -x_1, x_3)\}$.