

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS  
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA  
MESTRADO 2016.1  
ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES  
Prof Moacyr

Resolução da Lista 3

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

# 1 Verificação de Conceitos

## 1. Qual é a definição de transformação linear?

Uma transformação linear é um mapeamento  $T : A \rightarrow B$  tal que

$$1 - T(x + y) = T(x) + T(y), \quad x, y \in A; \quad T(x), T(y) \in B$$

$$2 - T(ax) = aT(x), \quad x \in A; \quad T(x) \in B$$

## 2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear. Sabendo que $T(1, 0) = (1, 0, 1)$ e $T(0, 1) = (0, 2, -1)$ calcule $T(3, 5)$ .

Temos os valores de  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  nos valores da base canônica, temos a matriz  $[T]$  associada:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(3, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

## 3. Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é linear então existe uma matriz associada a esta transformação $[T]$ . Quais são as dimensões desta matriz?

$$[T]_{m \times n}$$

## 4. Verifique se as funções abaixo são lineares. Em caso afirmativo exiba a matriz associada (se possível).

(a)  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A(x, y) = (x + y, x - y)$

Verificando se A satisfaz as propriedades de uma transformação linear:

1)  $T(a + b) = T(a) + T(b)$  onde  $a = (a_1, a_2)$  e  $b = (b_1, b_2)$  ?

$$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$$

$$A(b) = A(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, b_1 - b_2)$$

$$A(a) + A(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = A(a + b)$$

2)  $T(\alpha a) = \alpha T(a)$  onde  $a = (a_1, a_2)$  ?

$$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$$

$$A(\alpha a) = A(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha a_1 + \alpha a_2, \alpha a_1 - \alpha a_2) = \alpha(a_1 + a_2, a_1 - a_2) = \alpha A(a)$$

Portando A é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$$A(1, 0) = (1, 1); A(0, 1) = (1, -1)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**(b)**  $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = (x + y, 1)$

Verificando se B satisfaz a propriedade de soma de uma transformação linear:

$$1) T(a + b) = T(a) + T(b) \text{ onde } a = (a_1, a_2) \text{ e } b = (b_1, b_2) ?$$

$$B(a) = B(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 1)$$

$$B(b) = B(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, 1)$$

$$B(a) + B(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 2) \neq (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 1) = B(a + b)$$

Portando B não é uma transformação linear.

**(c)**  $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = (x.y, y)$

Verificando se C satisfaz a propriedade do produto por escalar de uma transformação linear:

$$1) T(\alpha a) = \alpha T(a) \text{ onde } a = (a_1, a_2) ?$$

$$C(a) = C(a_1, a_2) = (a_1 a_2, a_2)$$

$$C(\alpha a) = C(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha^2 a_1 a_2, \alpha a_2) \neq \alpha (a_1 a_2, a_2) = \alpha C(a)$$

Portando C não é uma transformação linear.

**(d)**  $D : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$

Verificando se D satisfaz as propriedades de uma transformação linear:

$$1) T(a + b) = T(a) + T(b) \text{ onde } a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \text{ e } b = (b_1, b_2, b_3, b_4) ?$$

$$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$$

$$D(b) = D(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_3$$

$$D(a) + D(b) = a_3 + b_3 = D(a + b)$$

$$2) T(\alpha a) = \alpha T(a) \text{ onde } a = (a_1, a_2, a_3, a_4) ?$$

$$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$$

$$D(\alpha a) = D(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4) = \alpha a_3 = \alpha D(a)$$

Portando D é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$$D(1, 0, 0, 0) = 0; D(0, 1, 0, 0) = 0; D(0, 0, 1, 0) = 1; D(0, 0, 0, 1) = 0$$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e)  $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $E(x, y, z) = (x - z, x + y)$

Verificando se E satisfaz as propriedades de uma transformação linear:

1)  $T(a + b) = T(a) + T(b)$  onde  $a = (a_1, a_2, a_3)$  e  $b = (b_1, b_2, b_3)$  ?

$$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$$

$$E(b) = E(b_1, b_2, b_3) = (b_1 - b_3, b_1 + b_2)$$

$$E(a) + E(b) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2) + (b_1 - b_3, b_1 + b_2) = E(a + b)$$

2)  $T(\alpha a) = \alpha T(a)$  onde  $a = (a_1, a_2, a_3)$  ?

$$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$$

$$E(\alpha a) = E(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) = (\alpha a_1 - \alpha a_3, \alpha a_1 + \alpha a_2) = \alpha(a_1 - a_3, a_1 + a_2) = \alpha E(a)$$

Portando E é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$$E(1, 0, 0) = (1, 1); E(0, 1, 0) = (0, 1); E(0, 0, 1) = (-1, 0);$$

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = A(E(x, y, z))$

F é uma composição de transformações lineares e portanto é uma transformação linear (pode ser verificado pelas propriedades). Para encontrar a matriz associada fazemos:

$$[F] = [A][E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**5. A transformação linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tem uma matriz associada  $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  na base canônica. Qual é a matriz  $[T]_\beta$  desta transformação na base  $\beta = [u, v]$ , onde  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 1)$ ?**

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

A matriz  $Q_E^\beta$  é formada pelos vetores  $u$  e  $v$  da base  $\beta$  escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $Q_\beta^E$  é formada pelos vetores da base canônica escritos na base  $\beta$  que é também a matriz inversa da matriz  $Q_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**6. Determine a matriz da transformação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que consiste na projeção ortogonal sobre o eixo Oy seguida de uma rotação em torno da origem por um ângulo de  $\pi/4$ .**

A matriz  $T$  é a composição de duas transformações e pode ser encontrada através do produto destas transformações, sendo assim:

1) Projeção Ortogonal sobre o eixo Oy:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Rotação por um ângulo de  $\pi/4$ :

Relembrando:

A matriz de rotação de um ângulo  $\theta$  em torno da origem é  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ .

Tomando  $\theta = \pi/4$ , obtemos:

$$R(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz  $T$  é:

$$T = R\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

**7. Se uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é sobrejetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear  $[T] \cdot x = b$ ? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?**

Definição: Uma função  $f$  é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contra-domínio.

No caso dado, a imagem da transformação linear  $T$  é o espaço  $\mathbb{R}^m$  e portanto possui dimensão  $m$ . Este fato indica que devemos ter  $n \geq m$ , pois a dimensão da imagem da função não pode ser maior do que a dimensão de seu domínio.

Podemos dizer que o sistema terá uma única solução (se  $m = n$ ) ou infinitas soluções (se  $n > m$ ), uma vez que, neste caso existirão variáveis livres, pois o número de colunas será maior do que o número de linhas da matriz. Sobre o posto da matriz podemos afirmar que será  $m$  (número máximo de pivôs possível).

**8. Se uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é injetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear  $[T] \cdot x = 0$ ? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?**

Definição: Uma função  $f$  é injetiva se dados  $x, y$  pertencentes ao seu domínio então  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$ .

Se a transformação linear é injetiva então podemos afirmar que o  $[T] \cdot x = 0$  possui solução única  $x = 0$  e  $m \geq n$ , sendo que posto da matriz que pode ser no máximo  $n$  neste caso será igual a  $n$  uma vez que a nulidade é zero.

## 2 Exercícios

**1. Considere duas matrizes,  $A_{10 \times 3}$  e  $B_{3 \times 9}$  e seja  $C_{10 \times 9}$  o produto:  $C = A \cdot B$ . Qual é a dimensão mínima do núcleo de  $C$ ? Qual é o posto máximo de  $C$ ?**

1- O posto de  $A$  é no máximo 3 e o posto de  $B$  também é no máximo 3. Por essa razão o posto máximo de  $C$  também é 3. (Lembre-se que o posto da matriz é o número de pivôs)

$$2 - \text{posto} + \text{nulidade} = \# \text{colunas da matriz} \Rightarrow \text{posto} + \text{nulidade} = 9$$

Se  $\text{posto} \leq 3$ , então a dimensão mínima do núcleo é 6.

Podemos observar de outra maneira:

$$C = A.B = A. \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de  $C$  será o espaço gerado por:

$$C(AB) = \text{ger}(A.b_1, A.b_2, A.b_3)$$

onde  $b_1, b_2$  e  $b_3$  são as colunas de  $B$ .

Todos os vetores  $A.b_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  são combinações lineares das colunas de  $A$ , logo:

$$C(AB) = \text{ger}(A.b_1, A.b_2, A.b_3) \subset \text{ger}(a_1, a_2, a_3)$$

onde  $a_1, a_2$  e  $a_3$  são as colunas de  $A$ . Dessa forma o posto de  $C$  que é a dimensão do espaço coluna de  $C$  é no máximo 3.

**2. Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear e  $\beta = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que  $T$  está completamente definida se forem conhecidas as imagens de  $T$  nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos  $v_1 = T(u_1), \dots, v_n = T(u_n)$ . Qual é a relação que existe entre os vetores  $v_i$  e a matriz associada a  $T$  ?**

Se  $\beta$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ , então todo vetor de  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de  $\beta$ , se tomarmos  $v$  qualquer em  $\mathbb{R}^n$ :

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

Se  $T$  é uma transformação linear então é verdade que:

$$T(v) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \dots + a_n T(u_n)$$

Portanto, se conhecermos os valores da transformação linear nos vetores da base, podemos encontrar o valor da transformação para qualquer vetor do espaço e por essa razão podemos afirmar que  $T$  está completamente definida.

Os vetores  $v_i$  são por sua vez as colunas da matriz  $[T]$  associada a  $T$ .

**3. Classifique como verdadeiro ou falso. Justifique sua classificação.**

**(a) Os vetores  $(1, 1, 1, 1)$ ,  $(2, 3, 0, 0)$  e  $(1, -1, 1, -1)$  são linearmente independentes.**

Verdadeiro.

Para verificar se os vetores são LI podemos utilizá-los para compor as linhas de uma matriz e verificar se é possível escaloná-la. Seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$$

$$\begin{array}{cccc} (1) & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & -2 \\ 0 & 0 & (-4) & -6 \end{array}$$

Observando a matriz obtida após o processo de eliminação podemos concluir que as linhas são independentes, pois caso não fossem alguma das linhas seria totalmente nula.

**(b) Os vetores  $(1,1,1,1)$ ,  $(2,3,0,0)$  e  $(1,-1,1,-1)$  formam uma base de  $\mathbb{R}^4$ .**

Falso.

Para verificar a dimensão do espaço gerado por estes vetores podemos utilizá-los para compor as colunas de uma matriz e verificar a dimensão do espaço coluna da matriz:



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao observar esta matriz podemos perceber que seu posto é no máximo 3 e portanto o espaço coluna desta matriz deverá ter no máximo dimensão 3. Sendo assim, não é possível que estes vetores sejam base para o  $\mathbb{R}^4$ .

**(c) O espaço  $E \subset \mathbb{R}^4$  tem uma base  $\beta = [(1, 1, 2, 3), (0, 1, 0, -1)]$  e o espaço  $F \subset \mathbb{R}^4$  tem uma base  $\gamma = [(1, -1, 2, 5), (1, 2, 3, 2)]$ . São subespaços distintos de  $\mathbb{R}^4$ .**

Verdadeiro.

Os espaços gerado pelas duas base são distintos. Para justificar isso podemos observar que não é possível escrever uma base em função dos vetores da outra.

Isso evidencia que as duas bases não pertencem ao mesmo subespaço, uma vez que a partir da base de um subespaço sempre deve ser possível escrever todos os vetores que pertencem a este subespaço.

**(d) Se o posto de  $A_{101 \times 200}$  é 101, então o posto de  $A^T$  necessariamente é 101.**

Verdadeiro.

Se o posto da matriz A é 101 isto significa que existem 101 linhas linearmente independentes em A. Estas linhas serão as colunas da matriz A transposta e poderão formar uma base para o espaço coluna da matriz A transposta. Logo o posto da matriz transposta irá necessariamente ser o posto de A.

Obs.:  $\text{posto}(A^T) = \dim(C(A^T)) = \# \text{vetores da base para } C(A^T)$ .

**(e) Se as colunas de uma matriz são linearmente independentes então as linhas também são.**

Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo o processo de eliminação, encontramos a forma escalonada reduzida da matriz:

$$\begin{array}{ccc} (1) & 2 & 3 \\ 0 & (-3) & -6 \\ 0 & 0 & (6) \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Neste exemplo temos três colunas LI, mas as linhas são LD, o que pode ser constatado devido à linha nula obtida.

**(f) As colunas de uma matriz formam uma base de sua imagem (espaço coluna).**

Falso. Apenas as colunas linearmente independentes de uma matriz formam uma base de sua imagem.

**(g) Seja  $v$  um vetor não nulo de  $\mathbb{R}^{10}$ . Considerando este vetor com uma matriz coluna, isto é, com 10 linhas e uma coluna a matriz  $M = v \cdot v^T$  tem 10 linhas e 10 colunas e posto 1.**

Verdadeiro.

$$M = v \cdot v^T$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} v_1 v^T \\ v_2 v^T \\ v_3 v^T \\ v_4 v^T \\ v_5 v^T \\ v_6 v^T \\ v_7 v^T \\ v_8 v^T \\ v_9 v^T \\ v_{10} v^T \end{bmatrix}$$

É possível perceber que todas as linhas são múltiplos de  $v^T$  e portanto combinações lineares umas das outras portanto o posto é 1.

4. A transformação  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a projeção ortogonal sobre o eixo Ox.

(a) Determine a matriz de P (da base canônica na base canônica, isto é  $[P]_E^E$ )

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se  $\beta = (1, 1), (1, -1)$  determine as matrizes de mudança de base:  $[Id]_E^\beta$  e  $[Id]_\beta^E$ .

A matriz  $[Id]_E^\beta$  é formada pelos vetores  $u$  e  $v$  da base  $\beta$  escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[Id]_\beta^E$  é formada pelos vetores da base canônica escritos na base  $\beta$  que é também a matriz inversa da matriz  $[Id]_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(c) Encontre a matriz de  $P$  na base  $\beta$ , isto é,  $[P]_\beta^\beta$ .

$$[P]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [P]_E^E [Id]_E^\beta$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

5. Determine a matriz da rotação em  $\mathbb{R}^2$  em torno da origem por um ângulo  $\theta$  nas coordenadas  $\beta = [u, v]$ , onde  $u = (1, 1)$  e  $v = (2, 1)$ .

Queremos encontrar a matriz  $[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [R(\theta)]_E^E [Id]_E^\beta$ .

Conhecemos a matriz  $[R(\theta)]_E^E$ :

$$[R(\theta)]_E^E = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

A matriz  $[Id]_E^\beta$  é formada pelos vetores  $u$  e  $v$  da base  $\beta$  escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz  $[Id]_\beta^E$  é formada pelos vetores da base canônica escritos na base  $\beta$  que é também a matriz inversa da matriz  $[Id]_E^\beta$  :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [R(\theta)]_E^E [Id]_E^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3\operatorname{sen} \theta + \cos \theta & 5\operatorname{sen} \theta \\ -2\operatorname{sen} \theta & \cos \theta - 3\operatorname{sen} \theta \end{bmatrix}$$

**6. Determine a matriz de rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo Oz por um ângulo de  $\theta$  na base canônica.**

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**7. Calcule (use o computador, por favor) a matriz de rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo definido pelo vetor  $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  por um ângulo de  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .**

Para resolver este problema podemos encontrar uma base ortonormal para o  $\mathbb{R}^3$  em que o vetor  $v$  seja o terceiro vetor da base. Ou seja, queremos uma base  $\beta = [t, u, v]$ .

Fazemos isso pois uma vez que tenhamos esta base podemos calcular a rotação por um ângulo de  $\theta = \frac{\pi}{6}$  em torno do eixo definido pelo vetor  $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ , como se fosse uma rotação em torno do eixo Oz no sistema de coordenadas formado pelos

vetores da base. Então utilizamos as matrizes de mudança de base para encontrar a matriz de rotação em  $\mathbb{R}^3$  em torno do eixo definido pelo vetor  $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$  por um ângulo de  $\theta = \frac{\pi}{6}$  no sistema de coordenadas canônico.

Queremos então encontrar a matriz  $[R_v(\frac{\pi}{6})]_E$ :

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = I_E^\beta [R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta I_\beta^E$$

Entretanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta = R_z(\frac{\pi}{6}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base que procuramos pode ser:

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 0)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -2)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

Sendo assim, a matriz  $I_E^\beta$  é formada pelos vetores  $t$ ,  $u$  e  $v$  da base  $\beta$  escritos na base canônica:

$$I_E^\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz  $I_\beta^E$  calculamos a inversa da matriz  $I_E^\beta$  (computacionalmente!):

$$I_\beta^E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(a) Use a matriz obtida para calcular a rotação em torno do eixo definido pelo vetor  $v$  por um ângulo de  $\pi/6$  do ponto  $Q = (1, 3, 2)$ . Faça um gráfico no computador com os três eixos coordenados com o vetor  $v$ , o ponto  $Q$  e o resultado da rotação  $R(Q)$ .

Para encontrar o resultado da rotação basta fazer  $R(Q) = [R_v(\frac{\pi}{6})]_E \cdot Q$ .

8. Seja  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear e  $\beta = [u_1, u_2, \dots, u_n]$  uma base de  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que  $T$  está completamente definida se forem conhecidas as imagens de  $T$  nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos  $v_1 = T(u_1), \dots, v_n = T(u_n)$ . Qual é a relação que existe entre os vetores  $v_i$  e a matriz associada a  $T$  ?

Questão repetida. Igual ao exercício 2.

9. Seja  $E = C(\mathbb{R})$  o espaço das funções contínuas  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Defina o operador linear  $A : E \rightarrow E$  pondo para cada  $f \in E$ ,  $A(f) = \varphi$ , onde  $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$ . Determine o núcleo e a imagem do operador  $A$ .

O núcleo do operador corresponde a todas as funções  $n$  que satisfazem  $n(x) = 0$ .

$$N(\varphi(x)) = \{n(x) = 0/x \in \mathbb{R}\}$$

O espaço coluna do operador é composto por todas as funções de classe  $C^1(\mathbb{R})$ , ou seja as funções que possuem primeira derivada contínua (funções diferenciáveis).

10. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

( ) Para todo operador linear  $A : E \rightarrow E$ , se  $u \in N(A)$  e  $v \in C(A)$  então  $u \cdot v = 0$

Falso.

Se  $u \in N(A)$  então  $A.u = 0$ . Se  $v \in C(A)$  então  $A.x = v$  para algum  $x \in E$ .  
Temos:

$$u.v = v^T u = (A.x)^T u = (x^T A^T) u = x^T (A^T u) = 0 \Leftrightarrow N(A) = N(A^T)$$

Não podemos garantir que  $N(A) = N(A^T)$  sempre é verdade.

( ) **O núcleo de toda transformação linear  $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem dimensão  $\geq 3$**

Falso. O núcleo de toda transformação linear  $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tem dimensão  $\geq 2$ .

Consideire a equação:

$$\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = \# \text{colunas de } A = 5$$

O posto de  $A$  é no máximo 3, logo a nulidade de  $A$ , neste caso deverá ser  $\geq 2$ .

( ) **Em todo grafo com  $n$  vértices e  $m$  arestas vale  $\# \text{ciclos independentes} - \# \text{componentes conexas} = m - n$**

Verdadeiro.

Notação:  $r$  é o posto de  $A$ ;  $n$  é o número de colunas da matriz de incidência e  $m$  é o número de linhas da matriz de incidência.

$$\dim(N(A^T)) = m - r = \# \text{ciclos independentes}$$

$$r = n - \dim(N(A)) = n - \# \text{componentes conexas}$$

$$m - n + \# \text{componentes conexas} = \# \text{ciclos independentes}$$

$$\Rightarrow \# \text{ciclos independentes} - \# \text{componentes conexas} = m - n$$

( ) **O conjunto dos funcionais afins  $t : R^n \rightarrow R$  ( $t(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ) é um espaço vetorial**

Verdadeiro.

Precisamos verificar duas propriedades para identificar se este conjunto é um espaço vetorial:

1) Fechado para soma de vetores?

Sejam os funcionais afins  $u(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$  e  $v(x_1, \dots, x_n) = b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$  temos que:

$$u(x_1, \dots, x_n) + v(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$$

$$u(x_1, \dots, x_n) + v(x_1, \dots, x_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_1 + \dots + (a_n + b_n)x_n \in t : R^n \rightarrow R$$

2) Fechado por multiplicação por escalar?

Seja o funcional afim  $u(x_1, \dots, x_n) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$  temos:

$$\alpha u(x_1, \dots, x_n) = \alpha(a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n)$$

$$\alpha u(x_1, \dots, x_n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x_1 + \dots + \alpha a_nx_n \Rightarrow \alpha u(x_1, \dots, x_n) \in t : R^n \rightarrow R$$

( ) O conjunto das transformações lineares  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um espaço vetorial de dimensão  $n$

Falso.

A soma de duas transformações lineares é uma transformação linear. O produto de uma transformação linear por um escalar também é uma transformação linear. Portanto o conjunto das transformações lineares é um espaço vetorial, entretanto sua dimensão  $mn$ .

**11. Determine uma base para a imagem e para o núcleo, quando possível, de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.**

(a)  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = (x - y, x - y)$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz A:

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & & \\ 1 & -1 & & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|cc} (1) & -1 & & \\ & 0 & 0 & \end{array}$$

1) Podemos encontrar uma base para  $C(A)$  encontrando a forma escalonada reduzida da matriz A e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(A) = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

Esta transformação não é sobrejetiva pois sua imagem  $C(A)$  não é igual ao seu contradomínio  $\mathbb{R}^2$ .

2) Para encontrar uma base para  $N(A)$  resolvemos o sistema  $Ax = 0$



$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$N(A) = \text{ger} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(b)**  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $B(x, y, z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz B:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & \Rightarrow & 1/2 & 0 & 1 & \Rightarrow & 0 & -1/4 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 & & 0 & 1 & 1/2 & & 0 & 1 & 1/2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & (1) & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 & \Rightarrow & 0 & (-1/4) & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & & 0 & 0 & (9/2) \end{array}$$

1) Podemos encontrar uma base para  $C(B)$  encontrando a forma escalonada reduzida da matriz B e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(B) = \text{ger} \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Esta transformação é sobrejetiva pois sua imagem  $C(A)$  é igual ao seu contradomínio  $\mathbb{R}^3$ .

2) Para encontrar uma base para  $N(B)$  resolvemos o sistema  $Bx = 0$

Sabendo que o sistema tem uma solução única sabemos também que  $N(B) = \{0\}$  podemos confirmar este fato calculando o espaço nulo a partir da matriz escalonada:

$$\frac{9}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$-\frac{1}{4}y + z = 0 \Rightarrow y = 4z = 0$$

$$x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$N(B) = \{(0, 0, 0)\}$$

(c)  $C : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ ,  $C(X) = A \cdot X$ , onde  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ( $M_{2 \times 2}$  é o espaço das matrizes  $2 \times 2$ )

$$\begin{aligned} 1) C(e_1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 2) C(e_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 3) C(e_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ 4) C(e_4) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O espaço coluna da transformação C é o espaço gerado pelos vetores  $C(e_1)$ ,  $C(e_2)$ ,  $C(e_3)$  e  $C(e_4)$  que é o espaço  $M_{2 \times 2}$  e portanto esta transformação é sobrejetiva. O núcleo desta transformação possui apenas a matriz nula  $N(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

(d)  $D : P_n \rightarrow P_{n+1}$ ,  $D(p(x)) = x \cdot p(x)$  ( $P_n$  é o espaço dos polinômios de grau até  $n$ )

O espaço colunas desta transformação é um subespaço do espaço dos polinômios de grau  $n + 1$  (espaço de dimensão  $n + 2$ ) com termo independente nulo e portanto este espaço possui dimensão  $n + 1$  e conseqüentemente o núcleo da transformação possui dimensão 1.

Uma base  $\beta$  para o espaço coluna é formada pelos  $n + 1$  vetores  $\beta_i$  com  $n + 2$  componentes tais que todos os vetores possuem a última componente igual a zero e cada vetor  $\beta_i$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$  possui a  $i$ -ésima componente igual a 1.

$$\beta_1 = (1, 0, \dots, 0, 0); \beta_2 = (0, 1, \dots, 0, 0); \beta_3 = (0, 0, 1, \dots, 0, 0); \dots \beta_{n+1} = (0, 0, \dots, 1, 0);$$

Esta transformação não é sobrejetiva pois seu espaço coluna (dimensão  $n + 1$ ) não é isomorfo ao seu contradomínio (dimensão  $n + 2$ ).

**12.** Considere o espaço  $P_n$  dos polinômios de grau até  $n$ . É verdade que ambas as transformações  $D : P_n \rightarrow P_n$  e  $I : P_n \rightarrow P_{n+1}$ , dadas por  $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x)$  e  $I(p(x)) = \int_0^x p(t) \cdot dt$  são lineares (justifique)? Em caso afirmativo, exiba as matrizes destas transformações na base canônica de  $P_n$  e descreva o núcleo e a imagem delas.

As transformações são lineares e isto decorre diretamente das propriedades das funções derivada e integral.

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão  $n-1$

$$C(D) = \text{ger} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

e o núcleo

$$N(D) = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

possui dimensão 2.

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão  $n + 1$

$$C(I) = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

e o núcleo

$$N(I) = \text{ger}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

possui dimensão 1.

**13.** O arquivo `MatrizIncidencia.csv` que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se  $A_{ij} = 1$  então a aresta  $i$  se inicia no vértice  $j$ . Se  $A_{ij} = -1$  então a aresta  $i$  termina no vértice  $j$ . Deste modo em cada linha  $i$  há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a  $-1$  e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.

(a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computacional, claro!

```
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
```

-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 -0.0574341 -0.1668833 -0.0100642  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 0.2337155 -0.0824204 0.0329232  
 -0.0715459 -0.0052185 0.4948272  
 -0.0715459 -0.0052185 0.4948272  
 -0.0715459 -0.0052185 0.4948272  
 -0.0715459 -0.0052185 0.4948272

**(b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.**

O número de componetes conexas é dado pela dimensão do espaço nulo da matriz que é 3.

Obs: Para identificar os vértices que pertencem a cada componente devemos analisar as linhas que possuem coordenadas de mesmo valor de cada vetor da base geradora do espaço nulo.