FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução dos Exercícios da Lista 5

KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MAIO DE 2016

1 Verificação de Conceitos

1. O conjunto F é o subespaço de R^3 gerado pelo vetor u = (1, −1, 2). Determine $F^{\perp}$

O conjunto F pode ser escrito como $F = \{c.u/c \in \mathbb{R},\, u = (1, -1, 2)\}$.

Assim para todo vetor $v = (v_1, v_2, v_3) \in F^{\perp}$ deve ser verdade que:

$$v.(c_1 u) = 0 \Rightarrow v_1.c_1 - v_2 c_1 + 2v_3 c_1 = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 + 2v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 - 2v_3$$

Assim, obtemos:

$$F^{\perp} = \{v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} / \, v_2,\, v_3 \,\epsilon\, \mathbb{R}\}$$

ou ainda

$$F^{\perp} = ger(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

2. O conjuto F é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém apenas o vetor nulo, $F = \{0\}$. Determine $F^{\perp}$

O conjunto $F^{\perp}$ é formado por todos os vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais aos vetores de F, isto é, todos os vetores cujo produto interno com os elementos de F é nulo. Neste caso, F só contém o vetor nulo e portanto $F^{\perp} = \mathbb{R}^3$.

3. O que é um autovalor λ de um operador linear T : $R^n \to R^n$? O que é um autovetor correspondente a este autovalor?

Dado um operador linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, um autovalor λ de T é tal que para um dado vetor x, $T(x) = \lambda x$ e x é dito autovetor de T correspondente a λ.

4. Se u = (1, −3) é um autovetor do operador T com autovalor λ = 5 então v = (10, −30) também é um autovetor de T. Qual é o autovalor correspondente?

O autovalor correspondente a v é o mesmo autovalor $\lambda = 5$ associado a u uma vez que $v = 10u$:

$$Au = \lambda u \Longrightarrow A(10u) \Longrightarrow \lambda(10u) \Longrightarrow Av = \lambda v$$

5. Quais são os autovalores e autovetores do operador T dado pela matriz $[T] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Uma vez que a matriz é diagonal seus autovalores são os elementos da diagonal $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -2$. Seus autovetores, por sua vez, são $u_1 = (1, 0)$ e $u_2 = (0, 1)$ associados a λ_1 e λ_2, respectivamente.

2 Exercícios I

1. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas:

( ) Uma transformação linear $A : E \to F$ é sobrejetiva se, e somente se, $dim(N(A)) = dim(E) - dim(F)$

Lista anterior.

( ) Para todo operador linear $A : E \to E$, tem-se $N(A) = Im(A)^{\perp}$

Falso.

Contra-exemplo:

$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C(A) = ger \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $N(A) = ger \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ não são espaços ortogonais.

( ) O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$

Verdadeiro.

Usando a fórmula: $posto(AB) = posto(B) - dimN(A) \cap R(B)$ (pg 210 do livro *Matrix analysis and applied linear algebra*), obtemos:

$$posto(A^T A) = posto(A) - dim(N(A^T) \cap R(A))$$

Pelo teorema fundamental da álgebra linear: $N(A^T) = R(A)^{\perp}$, assim $N(A^T) \cap R(A)^{\perp} = \{0\} \Longrightarrow dim(N(A^T) \cap R(A)^{\perp}) = 0 \Longrightarrow posto(A^T A) = posto(A)$.

( ) Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais

Falso. Podemos encontrar um contra-exemplo para esta afirmação.

Tome dois vetores u e v do $\mathbb{R}^2$, tal que é da forma $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e v $t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e seja P a projeção ortogonal sobre a reta $y = x$. Se calcularmosPu e Pv obteremos dois vetores no eixo formado pelo vetor $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e portanto paralelos e não ortogonais.

( ) O complemento ortogonal de um vetor não nulo u $\in \mathbb{R}^3$ é uma reta

Falso, pois dado um subespaço C de um espaço V, temos que $dim(V) = dim(C) + dim(C^{\perp})$. Fazendo, $V = \mathbb{R}^3$ e C = um vetor não-nulo, então $dim(C^{\perp}) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(C) = 3 - 1 = 2$, logo o subespaço $C^{\perp}$ possui dimenão 2. Um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ é um plano.

2. Enunciado incorreto!

Ao invés de $C(T^{\perp})$ devemos calcular $C(T^T)$ que ser'á o complemento ortogonal de $N(T)$.

3.

a) Seja w um vetor qualquer de E, podemos escrever:

$$w = proj_F(w) + (w - proj_F(w))$$

Para mostrar que todo vetor w pode ser escrito como $w = u + v, onde\, u \in F\, e\, v \in F^{\perp}$, basta mostrarmos que $proj_F(w) \in F$ e $w - proj_F(w) \in F^{\perp}$.

1) Da definição de projeção ortogonal sobre um subespaço sabemos eu a projeção de w sobre F é uma combinação linear de vetores de uma base ortonormal de F e portanto esta projeção de w pertence ao subespaço F: $proj_F(w) \in F$.

2) Decorre também da construção de uma projeção ortogonal que $(w - proj_F(w)) \perp proj_F(w)$. (Isto pode ser conferido geometricamente). Logo, $w - proj_F(w) \in F^{\perp}$.

De 1) e 2) segue que w pode ser escrito como $w = u + v, \, onde \, u \in F \, e \, v \in F$.

b) Sejam $w \in F$ e $w' \in F^{\perp}$, da definição de complemento ortogonal, obtemos:

$$w.w' = 0 \Rightarrow w \in (F^{\perp})^{\perp} \Rightarrow F \subseteq (F^{\perp})^{\perp} \; (1)$$

Suponha que exista um vetor $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ tal que $x \notin F$, do item a) podemos escrever:

$$x = w + w^{\perp}, \, tal \, que \, w \in F \, e \, w^{\perp} \in F^{\perp}$$

Se $x \in (F^{\perp})^{\perp} e \, w^{\perp} \in F^{\perp}$, então:

$$0 = x.w^{\perp} = w.w^{\perp} + w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow 0 = x.w^{\perp} = 0 + w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow 0 = w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow w^{\perp} = 0 \Rightarrow x = w + 0 \Rightarrow x \in F \; (2)$$

De (1) e (2) temos que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

4.

Os vetores para os quais a sua projeção sobre o plano dado é um múltiplo do próprio vetor, isto é, vetores para os quais $Pu = \lambda u$, serão necessariamente os vetores ortogonais ao plano, cuja projeção e nula e os vetores pertencentes ao plano, cuja projeção sobre o plano é o próprio vetor. Logo, os autovalores de P serão 0 e 1. O autovalor 1, por sua vez, terá mutltiplicidade algébrica e geométrica igual a 2 e estará associado a dois autovetores lineramente independentes pertencetes ao plano.

O autovetor associado ao autovalor nulo pode ser representado por qualquer vetor ortogonal ao plano o vetor (A, B, C) é um deles.

Para encontrar este dois autovetores LI, basta encontarmos dois vetores ortogonais pertencentes ao plano dado. Um exemplo para estes dois vetores é dado a seguir:

$$u = \left(1, \frac{B}{A}, -\frac{A^2 + B^2}{CA}\right) \, e \, v = \left(-\frac{B}{A}, 1, 0\right)$$

A matriz da transformação na base dos autovetores é dada pela matriz diagonal composta pelos autovalores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

Uma vez que a matriz A possui dimensão 2, seu polinômio característico é dado por:

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - traço(A).\lambda + det(A) = \lambda^2 - 10\lambda - 75$$

Logo,

$$\lambda_1 = 15\, e\, \lambda_2 = -5$$

Calculando os autovetores u e v a partir dos autovalores encontrados:

$$Au = \lambda u$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 15 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow u_1 = -2u_2 \Longrightarrow u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow 2v_1 = v_2 \Longrightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6.

A mudança de base que diagonaliza A é dada pela base formada pelos autovetores:

$$P_E^\beta = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A matriz diagonal nesta base é a matriz que contém os autovalores de A na diagonal principal:

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

7.

Se A não possui inversa e A é diagonalizável, temos:

$$det(A) = 0\,(1)$$

$$A = PDP^{-1} \Longrightarrow det(A) = det(P)det(D)det(P^{-1}) \Longrightarrow det(D) = 0$$

pois uma vez que P é inversível (existe P^{-1}) então $det(P^{-1}) \neq 0$ e $det(P) \neq 0$.

Se D é uma matriz diagonal então seu determinante é dado pelo produto dos elementos da diagonal principal, os quais são os autovalores de A, portanto para que o determinante de D seja nulo deve existir pelo menos um autovalor λ de A tal que $\lambda = 0$.

Parte 2:Seja λ autovalor de B temos:

$$Bx = \lambda x$$

se B é invertível:

$$B^{-1}Bx = B^{-1}\lambda x \Rightarrow x = B^{-1}\lambda x$$

$$\frac{1}{\lambda}x = B^{-1}x$$

$$B^{-1}x = \lambda^{-1}x$$

8.

Sejam λ_1 e λ_2 autovalores distintos de uma transformação A e sejam v_1 e v_2 seus autovetores correspondentes, temos:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 \ (1)$$

$$Av_2 = \lambda_2 v_2 \ (2)$$

Suponha que v_1 e v_2 não são linearmente independentes, então temos:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \Longrightarrow a_1 \neq 0 \, ou \, a_2 \neq 0$$

Sem perda de generalidade suponha $a_1 \neq 0$, então podemos escrever:

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 \ (3)$$

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$A(-\frac{a_2}{a_1} v_2) = \lambda_1 (-\frac{a_2}{a_1} v_2) \Longrightarrow Av_2 = \lambda_1 v_2 \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 (contradição)$$

Logo, se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de uma transformação A e v_1 e v_2 são seus autovetores correspondentes, v_1 e v_2 são linearmente independentes.

9.

Nesta questão é necessário mostrar que se a matriz A é simétrica e positiva definida então ela possui autovalores reais positivos e portanto pode existir uma matriz B tal que $B^2 = A = PDP^{-1}$.

Os autovalores reais positivos garantem que podemos calcular $D^{\frac{1}{2}}$ então:

$$B = PD^{\frac{1}{2}} P^{-1}$$

Para mostrar que os autovalores de A (positiva definida) são positivos (são reais porque A é simétrica) fazemos:

$$Av = \lambda v$$

$$v^T A v = v^T \lambda v$$

$$\lambda = \frac{v^T A v}{\|v\|^2} \Rightarrow \lambda > 0$$

10.

Calculando o polinômio característico de X, obtemos:

$$P_X(\lambda) = \lambda^2 - traço(X).\lambda + det(X) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

O polinômio característico possui duas raízes iguais a 1, isto é, a matriz X possui um autolvalor de multiplicidade algébrica 2. A partir destes autovalores e da matriz X não é possível encontrar dois autovetores que sejam linearmente independentes e por essa razão, não existe uma base que diagonaliza X, portanto X não pode ser diagonalizada.