FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução da Lista 4

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

ABRIL DE 2016

1 Verificação de Conceitos

1. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $u = (3,4)$ e $v = (12,9)$

Calculando o cosseno do ângulo entre u e v: $u = (3,4)$ e $v = (12,9)$

$$\cos\theta = \frac{u.v}{||u||.||v||} = \frac{3.12 + 4.9}{5.15} = \frac{72}{75} = 0,96$$

2. Se $||u|| = 5$, $||v|| = 8$ e o ângulo entre os vetores u e v é $\theta = \pi/3$, calcule $||u - v||$

Queremos calcular $||u - v||$:

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{u.v}{||u||.||v||} \Rightarrow u.v = \cos\frac{\pi}{3}||u||.||v|| = 0,5.5.8 = 20$$

$$||u-v||^2 = (u-v).(u-v) = ||u||^2 - 2u.v + ||v||^2 \Rightarrow ||u-v||^2 = 25 - 2.20 + 64 = 49 \Rightarrow ||u-v|| = 7$$

3. Verifique que os vetores pertencentes à reta $y = x$ são ortogonais ao vetor $v = (1,-1)$.

Todo vetor u que está na reta $y = x$ pode ser escrito como $u = (x,x)$, fazendo $u.v$:

$$u.v = (x,x).(-1,1) = x - x = 0 \Rightarrow u.v = 0 \Rightarrow v \text{ é perpendicular a todo vetor } u \text{ da reta } y = x.$$

4. O que é uma base ortonormal β de um espaço E? Qual é a relação entre as matrizes de passagem P_e^β e P_β^e ?

Uma base ortonormal β de um espaço E é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram o espaço E, são ortogonais entre si e possuem norma igual a 1. Para uma base ortonormal β temos a seguinte relação: $P_e^\beta = P_\beta^e$.

5. Construa uma base ortonormal de R2 que contenha o vetor $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Temo o vetor $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para construir uma base ortonormal que contenha u, temos que encontrar um vetor que seja ortogonal a u, tenha norma 1 e não seja uma combinação linear de u:

Primeiramente encontramos um vetor tal ortogonal a u e em seguida o normalizamos:

1) $v = (v_1, v_2)$, $u.v = 0,5v_1 + 0,5\sqrt{3}v_2 = 0 \Longrightarrow v_1 = -\sqrt{3}v_2$, tome $v = (-\sqrt{3}, 1)$

2) $v' = \frac{v}{||v||} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1) = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

E v' e u formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^2$.

2 Exercícios

1. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão r. O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ ortogonais a qualquer vetor de F é chamado de complemento ortogonal de F e é denotado por $F^\perp$. Ou seja, $F^\perp = \{u \in E / \forall v \in F, < u, v >= 0\}$. Mostre que $F^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e que $dim(F^\perp) = n - r$.

Seja $\beta = \{u_1, u_2, \cdots, u_r\}$ uma base ortonormal de F. Podemos estender esta base para formar a base $\gamma = \{u_1, \cdots, u_r, u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Os vetores $\{u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ sempre devem existir e podemos constatar que eles formam uma base de $F^{\perp}$:

Tome um vetor v tal que $v \in \mathbb{R}^n$ e $v \in F^{\perp}$ podemos escrevê-lo como uma combinação linear dos vetores de γ,

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n$$

Se $v \in F^{\perp}$ então vé ortogonal a todos os vetores $u_i \in \beta$, pois estes vetores pertencem a F. Então:

$$\forall u_i \in \beta,\, v.u_i = 0 \Rightarrow (a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \cdots + a_ru_r + a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n).u_i = a_i = 0$$

Portanto,

$$v = a_{r+1}u_{r+1} + \cdots + a_nu_n$$

Segue que todos os vetores de $F^{\perp}$ podem ser escritos como combinação linear dos vetores $\{u_{r+1}, \cdots, u_n\}$ e portanto eles formam uma base de $F^{\perp}$ e $dim(F^{\perp}) = n - r$.

2. Dois subespaços F eG de E são chamados de ortogonais se $\forall$u $\in$ F e $\forall$ v $\in$ G temos que $< u, v >= 0$.

(a) Exiba dois subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.

Reta: $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}$

Reta: $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}$

(b) Mostre que se F e G são subespaços ortogonais de E então $F \cap G = \{0\}$.

Suponha que exista um vetor $v \in F \cap G$ tal que $v \neq 0$. Se F e G são ortogonais e $v \in F \cap G$ então v é ortogonal a v, logo:

$$v.v = 0 \Rightarrow ||v||^2 = 0 \Rightarrow v = 0\,(contradição)$$

Portanto, a interseção entre os subespaços ortogonais F e G contém apenas o vetor nulo.

3. Seja F um subespaço de E de dimensão finita. Mostre que

(a) Todo vetor w de E pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^{\perp}$

Seja w um vetor qualquer de E, podemos escrever:

$$w = proj_F(w) + (w - proj_F(w))$$

Para mostrar que todo vetor w pode ser escrito como $w = u + v,\, onde\, u \in F\, e\, v \in F^{\perp}$, basta mostrarmos que $proj_F(w) \in F$ e $w - proj_F(w) \in F^{\perp}$.

1) Da definição de projeção ortogonal sobre um subespaço sabemos eu a projeção de w sobre F é uma combinação linear de vetores de uma base ortonormal de F e portanto esta projeção de w pertence ao subespaço F: $proj_F(w) \in F$.

2) Decorre também da construção de uma projeção ortogonal que $(w - proj_F(w)) \perp proj_F(w)$. (Isto pode ser conferido geometricamente). Logo, $w - proj_F(w) \in F^{\perp}$.

De 1) e 2) segue que w pode ser escrito como $w = u + v,\, onde\, u \in F\, e\, v \in F^{\perp}$.

(b) $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Sejam $w \in F$ e $w' \in F^{\perp}$, da definição de complemento ortogonal, obtemos:

$$w.w' = 0 \Rightarrow w \in (F^{\perp})^{\perp} \Rightarrow F \subseteq (F^{\perp})^{\perp} \ (1)$$

Suponha que exista um vetor $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ tal que $x \notin F$, do item a) podemos escrever:

$$x = w + w^{\perp},\, tal\, que\, w \in W\, e\, w^{\perp} \in W^{\perp}$$

Se $x \in (F^{\perp})^{\perp}$ $w^{\perp} \in W^{\perp}$, então:

$$0 = x.w^{\perp} = w.w^{\perp} + w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow 0 = x.w^{\perp} = 0 + w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow 0 = w^{\perp}.w^{\perp} \Rightarrow w^{\perp} = 0 \Rightarrow x = w + 0 \Rightarrow x \in W \ (2)$$

De (1) e (2) temos que $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

4. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

( ) Se $u \neq 0$ **e** $< u, v > = < u, u >$ **então** $v = u$

Falso. Contra-exemplo:

Tome u = (1, 1) e v = (2, 0) temos:

$$u.u = 1.1 + 1.1 = 2 \ e \ u.v = 1.2 + 1.0 = 2 \implies u.u = u.v \ e \ u \neq v$$

( ) O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$

Verdadeiro.

Usando a fórmula: $posto(AB) = posto(B) - dim N(A) \cap R(B)$ (pg 210 do livro *Matrix analysis and applied linear algebra*), obtemos:

$$posto(A^T A) = posto(A) - dim(N(A^T) \cap R(A))$$

Pelo teorema fundamental da álgebra linear: $N(A^T) = R(A)^{\perp}$, assim $N(A^T) \cap R(A)^{\perp} = \{0\} \implies dim(N(A^T) \cap R(A)^{\perp}) = 0 \implies posto(A^T A) = posto(A)$.

( ) Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais

Falso. Podemos encontrar um contra-exemplo para esta afirmação.

Tome dois vetores u e v do $\mathbb{R}^2$, tal que é da forma $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e v $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e seja P a projeção ortogonal dobre a reta $y = x$. Se calcularmosPu e Pv obteremos dois vetores no eixo formado pelo vetor $t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e portanto paralelos e não ortogonais.

( ) O complemento ortogonal de um vetor não nulo u $\in \mathbb{R}^3$ é uma reta

Verdadeiro, pois dado um subespaço C de um espaço V, temos que $dim(V) = dim(C) + dim(C^{\perp})$. Fazendo, $V = \mathbb{R}^3$ e C = um vetor não-nulo, então $dim(C^{\perp}) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(C) = 3 - 1 = 2$, logo o subespaço $C^{\perp}$ possui dimenão 2. Um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ é uma reta.

( ) Se F é um subespaço de E então $(F^{\perp})^{\perp} = F$

Verdadeiro.
$Sejam\, y \in F\, e\, w \in F^{\perp}\, temos:$

$$y.w = w.y = 0 \Longrightarrow y \in (F^{\perp})^{\perp} \Longrightarrow F \subseteq (F^{\perp})^{\perp}(1)$$

Além disso:

$$dim(E) = dim(F) + dim(F^{\perp})$$

$$dim(E) = dim(F^{\perp}) + dim((F^{\perp})^{\perp})$$

Logo:

$$dim(F) = dim((F^{\perp})^{\perp})\,(2)$$

De (1) e (2), temos: $F = (F^{\perp})^{\perp}$
Obs.: Esta solução foi feita considerando E de dimensão finita.

5. O espaço F é o plano gerado pelos vetores $u = (2, 2, 1)$ e $v = (2, -3, 6)$.

(a) Exiba uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e v.

Os vetores u e v dados não são ortogonais, logo não é possível encontrar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e v.

Atualização:
Comentário: Poderíamos considerar utilizar os vetores u e v para encontrar uma base ortonormal utilizando Gram- Schmidt (coragem, porque va dar bastante conta!!). Mas essa base não iria conter os vetores u e v e sim vetores u'e v', por isso dei a resposta acima.

(b) Calcule a projeção ortogonal de $w = (1, 1, 1)$ sobre u e sobre v.

1) Projeção de w sobre u:

$$proj_u(w) = (\frac{w.u}{u.u})u$$

$$proj_u(w) = (\frac{(1,1,1).(2,2,1)}{(2,2,1)(2,2,1)})(2,2,1) = \frac{5}{9}(2,2,1)$$

1) Projeção de w sobre u:

$$proj_v(w) = (\frac{w.v}{v.v})v$$

$$proj_v(w) = (\frac{(1,1,1).(2,-3,6)}{(2,-3,6).(2,-3,6)})(2,-3,6) = \frac{5}{49}(2,-3,6)$$

(c) Escreva a matriz da projeção ortogonal de $w = (x, y, z)$ sobre F na base obtida na letra (a) e também na base canônica.

Atualização:

Este item está bastante confuso. A Camilla Antunes levantou uns questionamentos pertinentes sobre esta questão e resolvi corrigi-la.

Aspectos importantes:

1) Eu tinha feito para o vetor específica w mas a questão pede para um vetor qualquer.

2) Acredito que para calcular a matriz da projeção ortogonal sobre F devemos na verdade calcular $A(A^TA)^{-1}A^T$ onde A é a matriz cujas colunas correspondem aos vetores que geram F. No caso dado, as colunas de A são u e v. (espero que o Moacyr tenha comentado sobre matriz de projeção ortogonal com vocês)

6. Aplique o processo de Gram-Schimidt nos vetores $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e encontre uma decomposição QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 = u_1 = (0,0,1)\,;$$

$$e_2 = \frac{e_2'}{||e_2'||};$$

$$e_2' = u_2 - proj_{e_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2.e_1}{e_1.e_1}e_1 = (0,1,1) - \frac{(0,1,1)(0,0,1)}{(0,0,1)(0,0,1)}(0,0,1) = (0,1,1)-(0,0,1) = (0,1,0), \implies e_2 = (0,1,0)$$

$$e_3 = \frac{e_3'}{||e_3'||};$$

$e_3' = u_3 - proj_{e_2}(u_3) = u_3 - (u_3.e_2)e_2 - (u_3.e_1)e_1 = (1,1,1) - ((1,1,1).(0,1,0)) * (0,1,0) - ((1,1,1).(0,0,1)) * (0,0,1) = (1,$

A decomposição QR para a matriz A será:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Seja P^2 o espaço vetorial dos polinômios de grau até dois. Considere operação $< p, q >$ entre dois polinômios de nida por $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

(a) Mostre que esta operação é um produto interno em P^2

Para mostrar que esta operação é um produto interno devemos mostrar que ela satisfaz as propriedades do produto interno:

$i)\, u.v = v.u$

$ii)\, (a.u).v = a.(u.v)\, \forall a \in \mathbb{R}$

$iii)\, u.u = \parallel u \parallel^2 \geq 0,\ u.u = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$iv)\, u.v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$

$v)\, u(v + w) = u.v + u.w$

(b) Encontre uma base ortonormal (segundo este produto interno) de P^2 (que tal usar Gram-Schmidt?)

Atualização:

Nessa questão eu tinha feito utilizando o produto interno comum entre vetores, mas evidentemente não é isso que a questão pede.

Para encontrar uma base ortonormal para P^2 devemos partir de três vetores de P^2 (representaçoões de polinômios de grau até 2).

Podemos escolher os vetores $u = (1,0,0)$, $v = (0,1,0)$ e $w = (0,0,1)$ que equivalem aos polinômios x^2, $x^2 + x$ e $x + 1$.

1) Precisamo que o primeiro vetor possua norma 1. Para isso devemos calcular:

$$\parallel (1,0,0) \parallel^2 = \int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx = \frac{1^5}{5} - \frac{-1^5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\parallel (1,0,0) \parallel = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Portanto o primeiro vetor da nossa base que iremos chamar de base β é:

$$\beta_1 = \frac{(1,0,0)}{\parallel (1,0,0) \parallel} = \frac{\sqrt{10}}{2}(1,0,0)$$

2) Seguindo o processo de Gram-Schmidt para encontrar β_2:

$$\beta_2^{'} = v - proj_{\beta_1}(v) = v - \frac{(v\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1$$

Calculando $v\beta_1$:

$$v\beta_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}\int_{-1}^{1} xx^2dx = \frac{\sqrt{10}}{2}\int_{-1}^{1} x^3dx = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{1^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4}\right) = 0$$

$$\beta_2^{'} = v - proj_{\beta_1}(v) = v - \frac{(v\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 = v - 0 = v$$

Logo,

$$\beta_2 = \frac{\beta_2^{'}}{\|\beta_2^{'}\|}$$

$$\| (0,1,0) \|^2 = \int\limits_{-1}^{1} xxdx = \frac{1^3}{3} - \frac{-1^3}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\| (0,1,0)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\beta_2 = \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = \frac{\sqrt{6}}{2}(0,1,0)$$

3) Seguindo o processo de Gram-Schmidt para encontrar β_3:

$$\beta_3^{'} = w - proj_{\beta_1}(w) - proj_{\beta_2}(w)$$

$$\beta_3^{'} = w - \frac{(w\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 - \frac{(w\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2$$

Calculando $w\beta_1$:

$$w\beta_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\beta_3^{'} = w - \frac{(w\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 - \frac{(w\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2$$

Calculando $w\beta_2$:

$$w\beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}\int_{-1}^{1} xdx = \frac{\sqrt{6}}{2}\left(\frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = 0$$

Logo,

$$\beta_3^{'} = w - \frac{(w\beta_1)}{(\beta_1\beta_1)}\beta_1 - \frac{(w\beta_2)}{(\beta_2\beta_2)}\beta_2 = (0,0,1) - \frac{\sqrt{10}}{3}\frac{\sqrt{10}}{2}(1,0,0) = (0,0,1) - \frac{10}{6}(1,0,0) = \left(\frac{-5}{3}, 0, 1\right) = \frac{1}{3}(-5,0,3)$$

$$\|\beta_3^{'}\|^2 = \frac{1}{9}\int_{-1}^{1}(-5x^2+3)(-5x^2+3)dx = \frac{1}{9}\int_{-1}^{1}(25x^4-30x^2+9)dx = \frac{1}{9}\left[\left(25\frac{1^5}{5} - 30\frac{1^3}{3} + 9.1\right) - \left(25\frac{-1^5}{5} - 30\frac{-1^3}{3} + 9\right.\right.$$

$$\|\beta_3^{'}\|^2 = \frac{1}{9}\left[\left(25\frac{1^5}{5} - 30\frac{1^3}{3} + 9.1\right) - \left(25\frac{-1^5}{5} - 30\frac{-1^3}{3} + 9.-1\right)\right] = \frac{2}{9}(5-10+9) = \frac{8}{9}$$

$$\|\beta_3^{'}\| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_3^{'}}{\|\beta_3^{'}\|} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{1}{3}(-5,0,3) = \frac{\sqrt{2}}{4}(-5,0,3)$$

Portanto, nossa base ortonormal para P^2 é:

$$\beta = [\beta_1, \beta_2, \beta_3] = \left[(\frac{\sqrt{10}}{2},0,0),\ (0,\frac{\sqrt{6}}{2},0),\ (\frac{-5\sqrt{2}}{4},0,\frac{3\sqrt{2}}{4})\right]$$