FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução da Lista 2

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

1. Quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais? Em caso afirmativo exiba uma base deste subespaço.

(a)

Sejam $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ pertencentes ao plano $2x + y - z = 0$, temos:

1) $2u_1 + u_2 - u_3 = 0$

2) $2v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$u + v = (u_{1+}v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

Somando 1) e 2) temos:

$$2(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) = 0, \text{ logo } u + v \text{ pertence ao plano.}$$

Fazendo $a.u$ obtemos:

$$a.u = (au_1, au_2, au_3)$$

Multiplicando a dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o plano dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

(b)

Sejam $p = a_1.u + b_1.v + c_1.w$ e $q = a_2.u + b_2.v + c_2.w$ combinações lineares de u , v e w :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $p + q$ obtemos:

$$r = p + q = ((a_1 + a_2).u, (b_1 + b_2).v, (c_1 + c_2).w)$$

Temos que r também é uma combinação linerar de u , v e w e portanto pertence ao conjunto dado. (1)

Fazendo $a.p$ obtemos:

$$r = a.p = aa_1.u + ab_1.v + ac_1.w$$

Temos que r também é uma combinação linerar de u , v e w e portanto pertence ao conjunto dado. (2)

De (1) e (2) temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

(c) Não é subespaço vetorial, pois não contém a origem e dessa forma não atende à condição necessária para ser subespaço.

(d) Sejam $u = (u_1, r+u_1, 2r+u_1, 3r+u_1, \cdots, (n-1)r+u_1)$ e $v = (v_1, p+v_1, 2p+v_1, 3p+v_1, \cdots, (p-1)r+v_1)$ pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$w = u + v =$$
$$(u_1+v_1, (r+p)+u_1+v_1, 2(r+p)+u_1+v_1, 3(r+p)+u_1+v_1, \cdots, (n-1)(r+p)+u_1+v_1)$$

onde w é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão $r + p$ e elemento incial $u_1 + v_1$, logo $u + v$ pertence ao conjunto.

Fazendo $a.u$ obtemos:

$$w = a.u = (a.u_1, ar + a.u_1, 2ar + a.u_1, 3ar + a.u, \cdots, (n-1)ar + u_1)$$

onde w é um vetor tal que as coordenadas são uma progressão aritmética de razão $a.r$ e elemento inicial $a.u_1$, logo $a.u$ pertence ao conjunto.

Multiplicando a dos dois lados de 1) temos:

$$2(a.u_1) + (a.u_2) - (a.u_3) = 0, \text{ logo } a.u \text{ pertence ao plano.}$$

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Uma base para este sistema é:

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix})$$

(e) Sejam $u = (u_1, q.u_1, 2q.u_1, 3q.u_1, \cdots, (n{-}1)q.u_1)$ e $v = (v_1, p.v_1, 2p.v_1, 3p.v_1, \cdots, (n-1)p.v_1)$ pertencentes conjunto dado :

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ dado é também um subespaço vetorial:

Fazendo $u + v$ obtemos:

$$w = u + v =$$
$$(u_1 + v_1, q.u_1 + p.v_1, 2q.u_1 + 2p.v_1, 3q.u_1 + 3p.v_1, \cdots, (n-1)q.u_1 + (n-1)p.v_1)$$

Analisando w podemos perceber que ele só será um vetor cujas coordenadas são uma progressão geométrica se as progressões correspondetes a u e v possuírem a mesma razão. Logo o conjunto dado não é fechado para soma e consequentemente o conjunto dado não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

(f)Sejam u e v vetores pertencentes ao conjunto dado tal que $u^T = -u$ e $v^T = -v$.

Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das matrizes dado é também um subespaço vetorial:

Analisando $u + v$ para determinar se pertence ao conjunto:

$$(u + v)^T = u^T + v^T = -u + (-v) = -(u + v) \ (1)$$

De (1) temos que $u + v$ é uma amtriz anti-simétrica e pertence ao conjunto.

Analisando $a.u$ para determinar se pertence ao conjunto:

$$(a.u)^T = a.u^T = a.(-u) = -(a.u) \ (2)$$

De (2) temos que $a.u$ é uma amtriz anti-simétrica e pertence ao conjunto. Portanto, podemos concluir que o conjunto das matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial do espaço das matrizes.

Uma base para este sistema é um conjunto de (m-1).n/2 matrizes que possibilitam a variação de todos os elementos da diagonal principal e dos elementos acima da diagonal e fixam os elementos abaixo da diagonal, pois estes devem ser necessariamente anti-simétricos aos elementos acima da diagonal.

(g) O cojunto dado é um subconjunto do espaço das funções dadas por:

$$P(x) = (ax+b)(x-1)(x-2) = ax^3 + (b-3a)x^2 + (2a-3b)x + 2b$$

Podemos representar estes polinômios como vetores da forma:

$$(a, (b-3a), (2a-3b), 2b)$$

Considere os vetores $u = (a_1, (b_1-3a_1), (2a_1-3b_1), 2b_1)$ e $v = (a_2, (b_2-3a_2), (2a_2-3b_2), 2b_2)$Analisando as condições necessárias e suficientes para determinar se o subconjunto do espaço das funções dado é também um subespaço vetorial:

$u + v = (a_1 + a_2, [(b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2)], [(2(a_1 + a_2) - 3(b_1 + b_2)], 2(b_1 + b_2)) = [(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)](x-1)(x-2)$, logo $u + v$ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.

Fazendo $a.u$ obtemos:

$a.u = (a.a_1, a.(b_1 - 3a_1), a.(2a_1 - 3b_1), a.2b_1) = (a.a_1x + a.b_1)(x-1)(x-2)$, logo $a.u$ pertence ao conjunto dos polinômios de grau até 3 e raízes 1 e 2.

Temos que o conjunto dado é um subespaço vetorial do espaço das funções.

$$\text{ger}(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix})$$

2. Explique por que podemos determinar uma base para o espaço coluna de uma matriz A coletando as colunas correspondentes às colunas que contém pivôs quando A é escalonada.

Podemos analisar este fato a partir do sistema associado à matriz A:

As colunas que não possuem pivôs são as colunas associadas às variáveis livres do sistema. Se este sistema possui variáveis livres e tem solução, então irá existir uma solução em que estas variáveis livres assumem o valor nulo (dado que podem assumir qualquer valor real). Sendo assim, as colunas que não possuem pivôs não fazem parte do conjunto gerador mínimo do espaço coluna de A e consequentemente também não pertencem a base do espaço coluna.

3. Exiba matrizes 2×2 com os seguintes núcleos (espaço nulo) e imagens (espaço coluna):

(a) Núcleo: reta y = x. Imagem: reta y = 2x

Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por ger$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

(b) Núcleo: reta y = 3x. Imagem: também a reta y = 3x

Se tivermos a matriz escalonada da forma:

$$\begin{bmatrix} (1) & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos um espaço nulo que se pede. A partir da imagem que se pede temos que a matriz pode ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

Tal que a base geradora do espaço coluna é dado por ger$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

Obs.: Os elementos da matriz assinalados entre ( ) são os pivôs.

4. Considere a base de R^2 $\beta = [u, v]$, onde $u = (1, 1)$ e $v = (2, 1)$.

(a) Se w tem coordenadas $(3, 5)$ na base β, quais são as coordenadas de w na base canônica? ($[w]_\beta = (3, 5)$ então $[w]_E = (?, ?)$)

A base canônica é dada por $E = [e_1, e_2]$, onde $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. As coordenas de w na base canônica podem ser encontradas fazendo:

$$w_E = Q_E^\beta . w_\beta$$

$$w_E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow w_E = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(b) Se z tem coordenadas $(1,2)$ na base canônica, quais são as coordenadas de w na base β? ($[z]_E = (1,2)$ então $[z]_\beta = (?,?)$)

$$w_\beta = Q_\beta^E . w_E$$

$$w_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow w_\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(c) Qual é a matriz de passagem da base β para a canônica? E da base canônica para a base β?

Matriz de passagem da base β para a canônica: Q_E^β

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de passagem da base canônica para a base β: $Q_\beta^E = Q_E^{\beta -1}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. Determine uma base$\beta = [u, v]$ de R^2 onde u pertence à reta$y = x$ e v é ortogonal à u.

Queremos encontrar os vetores u e v tais que$u$ pertence à reta $y = x$ e v pertence à reta $y = -x$:

Podemos portanto escolher os vetores $u = (1,1)$ e $v = (-1,1)$ para formar a base β.

(a) A projeção ortogonal sobre a reta $y = x$ no sistema de coordenadas definidas por β é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

A matriz I_E^β é formada pelos vetores u e v escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz I_β^E é formada pelos vetores da base canônica escritos na base β que é também a matriz inversa da matriz I_E^β :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz $[P]_E$ é:

$$[P]_E = I_E^\beta [P]_\beta I_\beta^E = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_E = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$