Lista 4

1 Verificação de conceitos

1. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $u = (3, 4)$ e $v = (12, 9)$
2. Se $||u|| = 5$, $||v|| = 8$ e o ângulo entre os vetores u e v é $\theta = \pi/3$, calcule $||u - v||$
3. Verifique que os vetores pertencentes à reta $y = x$ são ortogonais ao vetor $v = (1, -1)$
4. O que é uma base ortonormal β de um espaço E? Qual é a relação entre as matrizez de passagem P_e^β e P_β^e?
5. Construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ que contenha o vetor $u = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

2 Exercícios

1. Seja F um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão r. O conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ ortogonais a qualquer vetor de F é chamado de complemento ortogonal de F e é denotado por $F^\perp$. Ou seja, $F^\perp = \{u \in E / \forall v \in F, < u, v >= 0\}$. Mostre que $F^\perp$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e que $dim(F^\perp) = n - r$.
2. Dois subespaços F e G de E são chamados de ortogonais se $\forall u \in F$ e $\forall v \in G$ temos que $< u, v >= 0$.
   (a) Exiba dois subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^3$ de dimensão 1.
   (b) Mostre que se F e G são subespaços ortogonais de E então $F \cap G = \{0\}$.
3. Seja F um subespaço de E de dimensão finita. Mostre que
   (a) Todo vetor w de E pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$
   (b) $(F^\perp)^\perp = F$
4. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas
   ( ) Se $u \neq 0$ e $< u, v >=< u, u >$ então $v = u$
   ( )
   ( ) O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$
   ( ) Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais
   ( ) O complemento ortogonal de um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ é uma reta
   ( ) Se F é um subespaço de E então $(F^\perp)^\perp = F$
5. O espaço F é o plano gerado pelos vetores $u = (2, 2, 1)$ e $v = (2, -3, 6)$.
   (a) Exiba uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenha u e v.
   (b) Calcule a projeção ortogonal de $w = (1, 1, 1)$ sobre u e sobre v
   (c) Escreva a matriz da projeção ortogonal de $w = (x, y, z)$ sobre F na base obtida na letra (a) e também na base canônica.
6. Aplique o processo de Gram-Schimidt nos vetores $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e encontre uma decomposição QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
7. Seja P^2 o espaço vetorial dos polinômios de grau até dois. Considere operação $< p, q >$ entre dois polinômios definida por $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.
   (a) Mostre que esta operação é um produto interno em P^2
   (b) Encontre uma base ortonormal (segundo este produto interno) de P^2 (que tal usar Gram-Schmidt?)