1 Verificação de Conceitos

1. O conjunto F é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor $u = (1, -1, 2)$. Determine $F^\perp$.
2. O conjuto F é o subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contém apenas o vetor nulo, $F = \{0\}$. Determine $F^\perp$.
3. O que é um autovalor λ de um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? O que é um autovetor correspondente a este autovalor?
4. Se $u = (1, -3)$ é um autovetor do operador T com autovalor $\lambda = 5$ então $v = (10, -30)$ também é um autovetor de T. Qual é o autovalor correspondente?
5. Quais são os autovalores e autovetores do operador T dado pela matriz $[T] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2 Exercícios I - papel e lápis

1. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas
   ( ) Uma transformação linear $A : E \to F$ é sobrejetiva se, e somente se, $dim(N(A)) = dim(E) - dim(F)$
   ( ) Para todo operador linear $A : E \to E$, tem-se $N(A) = Im(A)^\perp$
   ( ) O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$
   ( ) Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais
   ( ) O complemento ortogonal de um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ é uma reta
2. A transformação T tem como domínio o espaço R^3, e seu espaço nulo é $N(T) = ger((1, 0, -1))$. Determine uma base para o espaço $C(T^\perp)$.
3. Seja F um subespaço de E de dimensão finita. Mostre que
   (a) Todo vetor w de E pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$
   (b) $(F^\perp)^\perp = F$
4. Seja $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a projeção ortogonal sobre o plano $Ax + By + Cz = 0$. Explique por que P tem dois autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Encontre um autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 0$ dois autovetores linearmente independentes correspondentes a $\lambda_2 = 1$. Descreva a matriz desta transformação na base dos autovetores.
5. Encontre os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$ sem ajuda de pacotes computacionais.
6. Qual é a mudança de base que diagonaliza $A = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -8 & -1 \end{pmatrix}$? Qual é a matriz diagonal nesta base?
7. Mostre que A não possui inversa se e somente se um autovalor de A é $\lambda = 0$. Mostre ainda que se B é invertível e λ é um autovalor de B então λ^{-1} é um autovalor de B^{-1}.
8. Mostre que se a transformação A tem dois autovalores distintos λ_1 e λ_2 então os autovetores correspondentes v_1 e v_2 são linearmente independentes.
9. Um operador Ade R^n é dito positivo denido se $(A \cdot v, v) > 0$ para todo $v \neq 0$. Se A é simétrico e positivo definido, mostre que existe um operador B tal que $B^2 = A$ e$BA = AB$ (raiz quadrada de A). Descreva um procedimento para obter uma raiz quadrada de um operador positivo denido A.
10. A matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pode ser diagonalizada? Justifique.
11. Teorema de Gerschgorin: dada uma matriz A de dimensões $m \times m$, todo autovalor de A está em um dos m discos do plano complexo de centro a_{ii} e raio $r_i = \sum_{j \neq 1} |a_{ij|}|$ (os centros dos discos são os elementos da diagonal principal e e raios são a soma dos elementos da linha i fora da diagonal principal).
    (a) Demonstre o teorema de Gershgorin. (Dica: dado um autovalor considere um autovetor correspondente cuja maior coordenada seja 1)
    (b) Uma matriz é dita diagonal dominante se para todas linha i vale $a_{ii} > \sum_{j \neq 1} |a_{ij|}|$. Use o teorema de Gershgorin para mostrar que uma matriz diagonal dominante é necessariamente invertível. (Este resultado é conhecido como Teorema de Levy-Desplanques).

3 Exercícios II - Parte do trabalho computacional

1. Use a projeção ortogonal para encontrar o plano $z = ax + by + c$ que melhor se ajusta aos pontos $P_1 = (0, 0, 0)$, $P_2 = (1, 0, 3)$, $P_3 = (0, 1, 2)$,$P_4 = (1, 1, 4)$ e $P_5 = (3, 2, 6)$, no sentido dos mínimos quadrados.

2. Dois robôs vão negociar um ativo. A cada rodada o robô vendedor estabelece o preço x do ativo e simultaneamente o robô comprador faz a oferta de compra do ativo pelo valor y . O negócio só se concretiza quando $x \leq y$, com o valor negociado sendo $(x + y)/2$. Suponha que os valores na primeira rodada sejam x_0 e y_0, com $x_0 > y_0$. Os robôs são programados para refazerem suas ofertas do seguinte modo: a cada período de negociação $k + 1$ o novo valor estabelecido por cada robô é:

$$x_{k+1} = x_k - (x_k - y_k)/3$$
$$y_{k+1} = y_k + (x_k - y_k)/4$$

   Use seus conhecimentos de autovalores e autovetores para decidir se haverá negociação e, em caso afirmativo, qual será o valor negociado.

3. Suponha o seguinte modelo de evolução da avaliação qualitativa do cenário de certo mercado: a cada período k a avaliação do cenário tem três estados possíveis: ruim, regular ou bom. O processo é markoviano, isto é, as probabilidades dos estados no próximo período $k+1$ dependem apenas do estado atual em k e não dos estados do passado. A matriz de transição dos estados é dada por $M = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$. Isto é, se o estado atual é ruim, $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, então a probabilidade do estado no próximo período ser ruim, regular ou boa é dada pelo vetor $x_1 = M \cdot x_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$. De modo geral, se as probabilidades dos estados no tempo k são dadas pelo vetor x_k então as probabilidades no tempo $k + 1$ são dadas pelo vetor $x_{k+1} = M \cdot x_k$

   (a) Mostre que toda matriz de transição de um processo markoviano tem um autovalor 1. (Matrizes quadradas com elementos não negativos onde cada coluna soma 1 são tambem chamadas de *matrizes estocásticas*).

   (b) Calcule as probabilidades de cada estado no período $k = 2$, sabendo que em $k = 0$ o estado é $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) Use o seu conhecimento de autovalores e autovetores para estimar quais devem ser as probabilidades de cada estado no período k quando k é muito grande. Como esta estimativa depende do estado inicial x_0?