

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA
MESTRADO 2016.1
ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES
Prof Moacyr

Resolução da Lista 4

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

ABRIL DE 2016

1 Verificação de Conceitos

1. Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $u = (3, 4)$ e $v = (12, 9)$

Calculando o cosseno do ângulo entre u e v : $u = (3, 4)$ e $v = (12, 9)$

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{3 \cdot 12 + 4 \cdot 9}{5 \cdot 15} = \frac{72}{75} = 0,96$$

2. Se $\|u\| = 5$, $\|v\| = 8$ e o ângulo entre os vetores u e v é $\theta = \pi/3$, calcule $\|u - v\|$

Queremos calcular $\|u - v\|$:

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \Rightarrow u \cdot v = \cos \frac{\pi}{3} \|u\| \cdot \|v\| = 0,5 \cdot 5 \cdot 8 = 20$$

$$\|u - v\|^2 = (u - v) \cdot (u - v) = \|u\|^2 - 2u \cdot v + \|v\|^2 \Rightarrow \|u - v\|^2 = 25 - 2 \cdot 20 + 64 = 49 \Rightarrow \|u - v\| = 7$$

3. Verifique que os vetores pertencentes à reta $y = x$ são ortogonais ao vetor $v = (1, -1)$.

Todo vetor u que está na reta $y = x$ pode ser escrito como $u = (x, x)$, fazendo $u \cdot v$:

$$u \cdot v = (x, x) \cdot (-1, 1) = x - x = 0 \Rightarrow u \cdot v = 0 \Rightarrow v \text{ é perpendicular a todo vetor } u \text{ da reta } y = x.$$

4. O que é uma base ortonormal β de um espaço E ? Qual é a relação entre as matrizes de passagem P_e^β e P_β^e ?

Uma base ortonormal β de um espaço E é um conjunto de vetores linearmente independentes que geram o espaço E , são ortogonais entre si e possuem norma igual a 1. Para uma base ortonormal β temos a seguinte relação: $P_e^\beta = P_\beta^e$.

5. Construa uma base ortonormal de \mathbb{R}^2 que contenha o vetor $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Temo o vetor $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Para construir uma base ortonormal que contenha u , temos que encontrar um vetor que seja ortogonal a u , tenha norma 1 e não seja uma combinação linear de u :

Primeiramente encontramos um vetor tal ortogonal a u e em seguida o normalizamos:

$$1) v = (v_1, v_2), u \cdot v = 0, 5v_1 + 0,5\sqrt{3}v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\sqrt{3}v_2, \text{ tome } v = (-\sqrt{3}, 1)$$

$$2) v' = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}, 1) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

E v' e u formam uma base ortonormal para \mathbb{R}^2 .

2 Exercícios

1. Seja F um subespaço de \mathbb{R}^n de dimensão r . O conjunto dos vetores de \mathbb{R}^n ortogonais a qualquer vetor de F é chamado de complemento ortogonal de F e é denotado por F^\perp . Ou seja, $F^\perp = \{u \in E / \forall v \in F, \langle u, v \rangle = 0\}$. Mostre que F^\perp é um subespaço de \mathbb{R}^n e que $\dim(F^\perp) = n - r$.

Seja $\beta = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ uma base ortonormal de F . Podemos estender esta base para formar a base $\gamma = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ de \mathbb{R}^n .

Os vetores $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ sempre devem existir e podemos constatar que eles formam uma base de F^\perp :

Tome um vetor v tal que $v \in \mathbb{R}^n$ e $v \in F^\perp$ podemos escrevê-lo como uma combinação linear dos vetores de γ ,

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_r u_r + a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n$$

Se $v \in F^\perp$ então v é ortogonal a todos os vetores $u_i \in \beta$, pois estes vetores pertencem a F . Então:

$$\forall u_i \in \beta, v \cdot u_i = 0 \Rightarrow (a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 + \dots + a_r u_r + a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n) \cdot u_i = a_i = 0$$

Portanto,

$$v = a_{r+1} u_{r+1} + \dots + a_n u_n$$

Segue que todos os vetores de F^\perp podem ser escritos como combinação linear dos vetores $\{u_{r+1}, \dots, u_n\}$ e portanto eles formam uma base de F^\perp e $\dim(F^\perp) = n - r$.

2. Dois subespaços F e G de E são chamados de ortogonais se $\forall u \in F$ e $\forall v \in G$ temos que $\langle u, v \rangle = 0$.

(a) Exiba dois subespaços ortogonais de \mathbb{R}^3 de dimensão 1.

$$\text{Reta: } t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Reta: } t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} / t \in \mathbb{R}$$

(b) Mostre que se F e G são subespaços ortogonais de E então $F \cap G = \{0\}$.

Suponha que exista um vetor $v \in F \cap G$ tal que $v \neq 0$. Se F e G são ortogonais e $v \in F \cap G$ então v é ortogonal a v , logo:

$$v \cdot v = 0 \Rightarrow \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ (contradição)}$$

Portanto, a interseção entre os subespaços ortogonais F e G contém apenas o vetor nulo.

3. Seja F um subespaço de E de dimensão finita. Mostre que

(a) Todo vetor w de E pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$

Seja w um vetor qualquer de E , podemos escrever:

$$w = \text{proj}_F(w) + (w - \text{proj}_F(w))$$

Para mostrar que todo vetor w pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$, basta mostrarmos que $\text{proj}_F(w) \in F$ e $w - \text{proj}_F(w) \in F^\perp$.

1) Da definição de projeção ortogonal sobre um subespaço sabemos que a projeção de w sobre F é uma combinação linear de vetores de uma base ortonormal de F e portanto esta projeção de w pertence ao subespaço F : $proj_F(w) \in F$.

2) Decorre também da construção de uma projeção ortogonal que $(w - proj_F(w)) \perp proj_F(w)$. (Isto pode ser conferido geometricamente). Logo, $w - proj_F(w) \in F^\perp$.

De 1) e 2) segue que w pode ser escrito como $w = u + v$, onde $u \in F$ e $v \in F^\perp$.

(b) $(F^\perp)^\perp = F$

Sejam $w \in F$ e $w' \in F^\perp$, da definição de complemento ortogonal, obtemos:

$$w.w' = 0 \Rightarrow w \in (F^\perp)^\perp \Rightarrow F \subseteq (F^\perp)^\perp \quad (1)$$

Suponha que exista um vetor $x \in (F^\perp)^\perp$ tal que $x \notin F$, do item a) podemos escrever:

$$x = w + w^\perp, \text{ tal que } w \in F \text{ e } w^\perp \in F^\perp$$

Se $x \in (F^\perp)^\perp$ e $w^\perp \in F^\perp$, então:

$$0 = x.w^\perp = w.w^\perp + w^\perp.w^\perp \Rightarrow 0 = x.w^\perp = 0 + w^\perp.w^\perp \Rightarrow 0 = w^\perp.w^\perp \Rightarrow w^\perp = 0 \Rightarrow x = w + 0 \Rightarrow x \in F \quad (2)$$

De (1) e (2) temos que $F = (F^\perp)^\perp$.

4. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

() Se $u \neq 0$ e $\langle u, v \rangle = \langle u, u \rangle$ então $v = u$

Falso. Contra-exemplo:

Tome $u = (1, 1)$ e $v = (2, 0)$ temos:

$$u.u = 1.1 + 1.1 = 2 \text{ e } u.v = 1.2 + 1.0 = 2 \Rightarrow u.u = u.v \text{ e } u \neq v$$

() O posto de uma matriz A é igual ao posto de $A^T A$

Verdadeiro.

Usando a fórmula: $\text{posto}(AB) = \text{posto}(B) - \dim(N(A) \cap R(B))$ (pg 210 do livro *Matrix analysis and applied linear algebra*), obtemos:

$$\text{posto}(A^T A) = \text{posto}(A) - \dim(N(A^T) \cap R(A))$$

Pelo teorema fundamental da álgebra linear: $N(A^T) = R(A)^\perp$, assim $N(A^T) \cap R(A)^\perp = \{0\} \Rightarrow \dim(N(A^T) \cap R(A)^\perp) = 0 \Rightarrow \text{posto}(A^T A) = \text{posto}(A)$.

() Se u e v são ortogonais e P é uma projeção ortogonal então Pu e Pv são ortogonais

Falso. Podemos encontrar um contra-exemplo para esta afirmação.

Tome dois vetores u e v do \mathbb{R}^2 , tal que u é da forma $t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e v $t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e seja P a projeção ortogonal sobre a reta $y = x$. Se calcularmos Pu e Pv obteremos dois vetores no eixo formado pelo vetor $t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e portanto paralelos e não ortogonais.

() **O complemento ortogonal de um vetor não nulo $u \in \mathbb{R}^3$ é uma reta**

Verdadeiro, pois dado um subespaço C de um espaço V , temos que $\dim(V) = \dim(C) + \dim(C^\perp)$. Fazendo, $V = \mathbb{R}^3$ e $C =$ um vetor não-nulo, então $\dim(C^\perp) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(C) = 3 - 1 = 2$, logo o subespaço C^\perp possui dimensão 2. Um subespaço de dimensão 2 em \mathbb{R}^3 é uma reta.

() **Se F é um subespaço de E então $(F^\perp)^\perp = F$**

Verdadeiro.

Sejam $y \in F$ e $w \in F^\perp$ temos :

$$y.w = w.y = 0 \implies y \in (F^\perp)^\perp \implies F \subseteq (F^\perp)^\perp (1)$$

Além disso:

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

$$\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim((F^\perp)^\perp)$$

Logo:

$$\dim(F) = \dim((F^\perp)^\perp) (2)$$

De (1) e (2), temos: $F = (F^\perp)^\perp$

Obs.: Esta solução foi feita considerando E de dimensão finita.

5. O espaço F é o plano gerado pelos vetores $u = (2, 2, 1)$ e $v = (2, -3, 6)$.

(a) Exiba uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenha u e v .

Os vetores u e v dados não são ortogonais, logo não é possível encontrar uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 que contenha u e v .

(b) Calcule a projeção ortogonal de $w = (1, 1, 1)$ sobre u e sobre v .

1) Projeção de w sobre u :

$$proj_u(w) = \left(\frac{w \cdot u}{u \cdot u} \right) u$$

$$proj_u(w) = \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (2, 2, 1)}{(2, 2, 1) \cdot (2, 2, 1)} \right) (2, 2, 1) = \frac{5}{9} (2, 2, 1)$$

1) Projeção de w sobre v :

$$proj_v(w) = \left(\frac{w \cdot v}{v \cdot v}\right)v$$

$$proj_v(w) = \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (2, -3, 6)}{(2, -3, 6) \cdot (2, -3, 6)}\right)(2, -3, 6) = \frac{5}{49}(2, -3, 6)$$

(c) Escreva a matriz da projeção ortogonal de $w = (x, y, z)$ sobre F na base obtida na letra (a) e também na base canônica.

Para calcular a projeção ortogonal P na base canônica devemos calcular a projeção ortogonal de w sobre cada um dos vetores e_1, e_2, e_3 .

$$proj_{e_1}(w) = \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (1, 0, 0)}{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)}\right)(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$$

$$proj_{e_2}(w) = \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0)}{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)}\right)(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$proj_{e_3}(w) = \left(\frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)}\right)(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$proj_F(w) = Pw = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. Aplique o processo de Gram-Schmidt nos vetores $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e encontre uma decomposição QR da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$e_1 = u_1 = (0, 0, 1);$$

$$e_2 = \frac{e'_2}{\|e'_2\|};$$

$$e'_2 = u_2 - proj_{e_1}(u_2) = u_2 - \frac{u_2 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} e_1 = (0, 1, 1) - \frac{(0, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)}{(0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)} (0, 0, 1) = (0, 1, 1) - (0, 0, 1) = (0, 1, 0), \implies e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = \frac{e'_3}{\|e'_3\|};$$

$$e'_3 = u_3 - \text{proj}_{e_2}(u_3) = u_3 - (u_3 \cdot e_2)e_2 - (u_3 \cdot e_1)e_1 = (1, 1, 1) - ((1, 1, 1) \cdot (0, 1, 0))(0, 1, 0) - ((1, 1, 1) \cdot (0, 0, 1))(0, 0, 1) = (1, 1, 1) - (1)(0, 1, 0) - (1)(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$$

A decomposição QR para a matriz A será:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Seja P^2 o espaço vetorial dos polinômios de grau até dois. Considere operação $\langle p, q \rangle$ entre dois polinômios de nida por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$.

(a) Mostre que esta operação é um produto interno em P^2

Para mostrar que esta operação é um produto interno devemos mostrar que ela satisfaz as propriedades do produto interno:

$$i) u \cdot v = v \cdot u$$

$$ii) (a \cdot u) \cdot v = a \cdot (u \cdot v) \forall a \in \mathbb{R}$$

$$iii) u \cdot u = \|u\|^2 \geq 0, u \cdot u = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$iv) u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v$$

$$v) u(v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

(b) Encontre uma base ortonormal (segundo este produto interno) de P^2 (que tal usar Gram-Schmidt?)

Para encontrar uma base ortonormal para P^2 devemos partir de três vetores de P^2 (representações de polinômios de grau até 2).

Podemos escolher os vetores $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$ que equivalem aos polinômios x^2 , $x^2 + x$ e $x + 1$.

1) O primeiro vetor já possui norma 1 e sendo assim será o primeiro vetor da nossa base que iremos chamar de base β , portanto:

$$\beta_1 = (1, 0, 0)$$

2) Seguindo o processo de Gram-Schmidt para encontrar β_2 :

$$\beta_2 = \beta_2 - \text{proj}_{\beta_1}(\beta_2) = (1, 1, 0) - \frac{(1, 1, 0)(1, 0, 0)}{(1, 0, 0)(1, 0, 0)}(1, 0, 0) = (0, 1, 0)$$

3) Seguindo o processo de Gram-Schmidt para encontrar β_3 :

$$\beta_3 = \beta_3 - \text{proj}_{\beta_1}(\beta_3) - \text{proj}_{\beta_2}(\beta_3) = (0, 1, 1) - \frac{(0, 1, 1)(1, 0, 0)}{(1, 0, 0)(1, 0, 0)}(1, 0, 0) - \frac{(0, 1, 1)(0, 1, 0)}{(0, 1, 0)(0, 1, 0)}(0, 1, 0) = (0, 0, 1)$$

Portanto, nossa base ortonormal para P^2 é:

$$\beta = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$$

Obs.: Nos passos 2 e 3 se encontrássemos que não possuem norma 1 seria necessário normalizá-los.