FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

# Resolução da Lista 3

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

# 1 Verificação de Conceitos

**1. Qual é a definição de transformação linear?**

Uma transformação linear é um mapeamento $T : A \to B$ tal que
$1 - T(x + y) = T(x) + T(y)$, $x$, $y \in A$; $T(x)$, $T(y) \in B$
$2 - T(ax) = aT(x)$, $x \in A$; $T(x) \in B$

**2.** $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **é uma transformação linear. Sabendo que** $T(1, 0) = (1, 0, 1)$ **e** $T(0, 1) = (0, 2, -1)$ **calcule** $T(3, 5)$**.**

Temos os valores de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ nos valores da base canônica, temos a matriz $[T]$ associada:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(3,\ 5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**3. Se** $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ **é linear então existe uma matriz associada a esta transformação** $[T]$**. Quais são as dimensões desta matriz?**

$[T]_{mxn}$

**4. Verifique se as funções abaixo são lineares. Em caso afirmativo exiba a matriz associada (se possível).**

**(a)** $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x, y) = (x + y,\ x - y)$

Verificando se A satisfaz as propriedades de uma transformação linear:
1) $T(a + b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ ?
$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$
$A(b) = A(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, b_1 - b_2)$
$A(a) + A(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = A(a + b)$
2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2)$ ?
$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$
$A(\alpha a) = A(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha a_1 + \alpha a_2, \alpha a_1 - \alpha a_2) = \alpha(a_1 + a_2, a_1 - a_2) = \alpha A(a)$

Portando A é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$A(1,0) = (1,1)$; $A(0,1) = (1,-1)$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**(b)** $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x,y) = (x+y,\ 1)$

Verificando se B satisfaz a propriedade de soma de uma transformação linear:

1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$ ?

$B(a) = B(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 1)$

$B(b) = B(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, 1)$

$B(a) + AB(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 2) \neq (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 1) = B(a+b)$

Portando B não é uma transformação linear.

**(c)** $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x,y) = (x.y,\ y)$

Verificando se C satisfaz a propriedade do produto por escalar de uma transformação linear:

1) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2)$ ?

$C(a) = C(a_1, a_2) = (a_1 a_2, a_2)$

$C(\alpha a) = C(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha^2 a_1 a_2, \alpha a_2) \neq \alpha(a_1 a_2, a_2) = \alpha C(a)$

Portando C não é uma transformação linear.

**(d)** $D : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$**,** $D(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$

Verificando se D satisfaz as propriedades de uma transformação linear:

1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ ?

$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$

$D(b) = D(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_3$

$D(a) + D(b) = a_3 + b_3 = D(a+b)$

2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ?

$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$

$D(\alpha a) = D(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4) = \alpha a_3 = \alpha D(a)$

Portando D é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$D(1,0,0,0) = 0$; $D(0,1,0,0) = 0$; $D(0,0,1,0) = 1$; $D(0,0,0,1) = 0$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**(e)** $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**,** $E(x,\, y,\, z) = (x - z,\, x + y)$

Verificando se E satisfaz as propriedades de uma transformação linear:
1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$ ?
$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$
$E(b) = E(b_1, b_2, b_3) = (b_1 - b_3, b_1 + b_2)$
$E(a) + E(b) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2) + (b_1 - b_3, b_1 + b_2) = E(a+b)$
2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3)$ ?
$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$
$E(\alpha a) = E(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) = (\alpha a_1 - \alpha a_3, \alpha a_1 + \alpha a_2) = \alpha(a_1 - a_3, a_1 + a_2) = \alpha E(a)$

Portando E é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:
$E(1,0,0) = (1,1)$; $E(0,1,0) = (0,1)$; $D(0,0,1) = (-1,0)$;

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**(f)** $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**,** $F(x,\, y,\, z) = A(E(x,\, y,\, z))$

F é uma composição de transformações lineares e portanto é uma transformação linear (pode ser verificado pelas propriedades). Para encontrar a mariz associda fazemos:

$$[F] = [A][E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**5. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem uma matriz associada $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na base canônica. Qual é a matriz $[T]_\beta$ desta transformação na base $\beta = [u, v]$, onde $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$?**

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

A matriz $Q_E^\beta$ é formada pelos vetores $u$ e $v$ da base $\beta$ escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $Q_\beta^E$ é formada pelos vetores da base canônica escritos na base $\beta$ que é também a matriz inversa da matriz $Q_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**6. Determine a matriz da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que consiste na projeção ortogonal sobre o eixo Oy seguida de uma rotação em torno da origem por um ângulo de $\pi/4$.**

A matriz $T$ é a composição de duas transformações e pode ser encontrada através do produto destas transformações, sendo assim:

1) Projeção Ortogonal sobre o eixo Oy:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Rotação por um ângulo de $\pi/4$:

Relembrando:

A matriz de rotação de um ângulo $\theta$ em torno da origem é $R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$.

Tomando $\theta = \pi/4$, obtemos:

$$R(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz $T$ é:

$$T = R\left(\frac{\pi}{4}\right).P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

**7. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = b$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?**

Definição: Uma função $f$ é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contra-domínio.

No caso dado, a imagem da transformação linear $T$ é o espaço $\mathbb{R}^m$ e portanto possui dimenão $m$. Este fato indica que devemos ter $n \geq m$, pois a dimensão da imagem da função não pode ser maior do que a dimensão de seu domínio.

Podemos dizer que o sistema terá uma única solução (se $m = n$) ou infinitas soluções (se $n > m$ ), uma vez que, neste caso existirão variáveis livres, pois o número de colunas será maior do que o número de linhas da matriz. Sobre o posto da matriz podemos afirmar que será $m$ (número máximo de pivôs possível).

**8. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = 0$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?**

Definição: Uma função $f$ é injetiva se dados $x, y$ pertencentes ao seu domínio então $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Se a transformação linear é injetiva então podemos afirmar que o $[T] \cdot x = 0$ possui solução única $x = 0$ e $m \geq n$ , sendo que posto da matriz que pode ser no máximo $n$neste caso será igual a $n$ uma vez que a nulidade é zero.

# 2 Exercícios

**1. Considere duas matrizes, $A_{10x3}$ e $B_{3x9}$ e seja $C_{10\times 9}$ o produto: $C = A \cdot B$. Qual é a dimensão mínima do núcleo de C ? Qual é o posto máximo de C ?**

1- O posto de A é no máximo 3 e o posto de B também é no máximo 3. Por essa razão o posto máximo de C também é 3. (Lembre-se que o posto da matriz é o número de pivôs)

2 - $posto + nulidade = \#colunas\, da\, matriz \Rightarrow posto + nulidade = 9$

Se $posto \leq 3$,então a dimensão mínima do núcleo é 6.

Podemos observar de outra maneira:

$$C = A.B = A. \left[ \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \right]$$

O espaço coluna de C será o espaço gerado por:

$$C(AB) = ger(A.b_1, A.b_2, A.b_3)$$

onde $b_1, b_2$e $b_3$ são as colunas de $B$.

Todos os vetores $A.b_i$, $1 \leq i \leq 4$ são combinações lineares das colunas de A, logo:

$$C(AB) = ger(A.b_1, A.b_2, A.b_3) \subset ger(a_1, a_2, a_3)$$

onde $a_1, a_2$ e $a_3$ são as colunas de $A$. Dessa forma o posto de C que é a dimensão do espaço coluna de C é no máximo 3.

**2. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $T$ está completamente definida se forem conhecidas as imagens de $T$ nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1), ..., v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores $v_i$ e a matriz associada a $T$ ?**

Se $\beta$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então todo vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de $\beta$, se tomarmos v qualquer em $\mathbb{R}^n$:

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

Se $T$ é uma transformação linear então é verdade que:

$$T(v) = a_1 T(u_1) + a_2 T(u_2) + \ldots + a_n T(u_n)$$

Portanto, se conhecermos os valores da transformação linear nos vetores da base, podemos encontrar o valor da transformação para qualquer vetor do espaço e por essa razão podemos afirmar que $T$ está completamente definida.

Os vetores $v_i$ são por sua vez as colunas da matriz $[T]$ associada a $T$.

**3. Classifique como verdadeiro ou falso. Justifique sua classificação.**

**(a) Os vetores (1, 1, 1, 1), (2, 3, 0, 0) e (1, -1, 1, -1) são linearmente independentes.**

Verdadeiro.

Para verificar se os vetores são LI podemos utilizá-los para compor as linhas de uma matriz e verificar se é possível escaloná-la. Seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\begin{matrix} (1) & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & -2 \\ 0 & 0 & (-4) & -6 \end{matrix}$$

Observando a matriz obtida após o processo de eliminação podemos concluir que as linhas são independentes, pois caso não fossem alguma das linhas seria totalmente nula.

**(b) Os vetores (1,1,1,1), (2,3,0,0) e (1,-1,1,-1) formam uma base de $\mathbb{R}^4$ .**

Falso.

Para verificar a dimensão do espaço gerado por estes vetores podemos utilizá-los para compor as colunas de uma matriz e verificar a dimensão do espaço coluna da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao observar esta matriz podemos perceber que seu posto é no máximo 3 e portanto o espaço coluna desta matriz deverá ter no máximo dimensão 3. Sendo assim, não é possível que estes vetores sejam base para o $\mathbb{R}^4$.

**(c) O espaço E $\subset \mathbb{R}^4$ tem uma base$\beta = [(1,1,2,3),(0,1,0,-1)]$ e o espaço F $\subset \mathbb{R}^4$ tem uma base $\gamma = [(1,-1,2,5),(1,2,3,2)]$. São subespaços distintos de $\mathbb{R}^4$ .**

Verdadeiro.

Os espaços gerado pelas duas base são distintos. Para justificar isso podemos observar que não é possível escrever uma base em função dos vetores da outra.

Isso evidencia que as duas bases não pertencem ao mesmo subespaço, uma vez que a partir da base de um subespaço sempre deve ser possível escrever todos os vetores que pertencem a este subespaço.

**(d) Se o posto de $A_{101\times200}$ é 101, então o posto de $A^T$ necessariamente é 101.**

Verdadeiro.

Se o posto da matriz A é 101 isto significa que existem 101 linhas lineramente independentes em A. Estas linhas serão as colunas da matriz A transposta e poderão formar uma base para o espaço coluna da matriz A transposta. Logo o posto da matriz transposta irá necessariamente ser o posto de A.

Obs.: $posto(A^T) = dim(C(A^T)) = \#vetores\ da\ base\ para\ C(A^T)$.

**(e) Se as colunas de uma matriz são linearmente independentes então as linhas também são.**

Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo o processo de eliminação, encontramos a forma escalonada reduzida da matriz:

$$\begin{matrix} (1) & 2 & 3 \\ 0 & (-3) & -6 \\ 0 & 0 & (6) \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Neste exemplo temos três colunas LI, mas as linhas são LD, o que pode ser constatado devido à linha nula obtida.

**(f) As colunas de uma matriz formam uma base de sua imagem (espaço coluna).**

Falso. Apenas as colunas linearmente independentes de uma matriz formam uma base de sua imagem.

**(g) Seja $v$ um vetor não nulo de $\mathbb{R}^{10}$ . Considerando este vetor com uma matriz coluna, isto é, com 10 linhas e uma coluna a matriz $M = v \cdot v^T$ tem 10 linhas e 10 colunas e posto 1.**

Verdadeiro.

$$M = v.v^T$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} v_1 v^T \\ v_2 v^T \\ v_3 v^T \\ v_4 v^T \\ v_5 v^T \\ v_6 v^T \\ v_7 v^T \\ v_8 v^T \\ v_9 v^T \\ v_{10} v^T \end{bmatrix}$$

É possível perceber que todas as linhas são múltiplos de $v^T$ e e portanto combinações lineares umas das outras portanto o posto é 1.

**4. A transformação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo Ox.**

**(a) Determine a matriz de P (da base canônica na base canônica, isto é $[P]_E^E$)**

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**(b) Se $\beta = (1,1),(1,-1)$ determine as matrizes de mudança de base: $[Id]_E^\beta$ e $[Id]_\beta^E$ .**

A matriz $[Id]_E^\beta$ é formada pelos vetores $u$ e $v$ da base $\beta$ escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_\beta^E$ é formada pelos vetores da base canônica escritos na base $\beta$ que é também a matriz inversa da matriz $[Id]_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

**(c) Encontre a matriz de $P$ na base $\boldsymbol{\beta}$, isto é, $[P]_\beta^\beta$.**

$$[P]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [P]_E^E [Id]_E^\beta$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

**5. Determine a matriz da rotação em $\mathbb{R}^2$ em torno da origem por um ângulo $\theta$ nas coordenadas $\beta = [u, v]$, onde $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$.**

Queremos encontrar a matriz $[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [R(\theta)]_E^E [Id]_E^\beta$.
Conhecemos a matriz $[R(\theta)]_E^E$ :

$$[R(\theta)]_E^E = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_E^\beta$ é formada pelos vetores $u$ e $v$ da base $\beta$ escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_\beta^E$ é formada pelos vetores da base canônica escritos na base $\beta$ que é também a matriz inversa da matriz $[Id]_E^\beta$ :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E[R(\theta)]_E^E[Id]_E^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3sen\,\theta + cos\,\theta & 5sen\,\theta \\ -2sen\,\theta & cos\,\theta - 3sen\,\theta \end{bmatrix}$$

**6. Determine a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo Oz por um ângulo de $\theta$ na base canônica.**

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**7. Calcule (use o computador, por favor) a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$ .**

Para resolver este problema podemos encontrar uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$ em que o vetor $v$ seja o terceiro vetor da base. Ou seja, queremos uma base $\beta = [t, u, v]$.

Fazemos isso pois uma vez que tenhamos esta base podemos calcular a rotação por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, como se fosse uma rotação em torno do eixo Oz no sistema de coordenadas formado pelos vetores da base. Então utilizamos as matrizes de mudança de base para encontrar a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$ no sistema de coordenadas canônico.

Queremos então encontrar a matriz $[R_v(\frac{\pi}{6})]_E$:

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = I_E^\beta [R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta I_\beta^E$$

Entretanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta = R_z(\frac{\pi}{6}) = \begin{bmatrix} cos\,\frac{\pi}{6} & -sen\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ sen\,\frac{\pi}{6} & cos\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base que procuramos pode ser:

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-2)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

Sendo assim, a matriz $I_E^\beta$ é formada pelos vetores $t$, $u$ e $v$ da base $\beta$ escritos na base canônica:

$$I_E^\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz $I_\beta^E$ calculamos a inversa da matriz $I_E^\beta$ (computacionalmente!):

$$I_\beta^E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cos\,\frac{\pi}{6} & -sen\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ sen\,\frac{\pi}{6} & cos\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

**(a) Use a matriz obtida para calcular a rotação em torno do eixo definido pelo vetor $v$ por um ângulo de $\pi/6$ do ponto $Q = (1, 3, 2)$. Faça um gráfico no computador com os três eixos coordenados com o vetor $v$, o ponto $Q$ e o resultado da rotação $R(Q)$.**

Para e encontrar o resultado da rotação basta fazer $R(Q) = [R_v(\frac{\pi}{6})]_E.Q$.

**8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $T$ está completamente definida se forem conhecidas as imagens de $T$ nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1), ..., v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores $v_i$ e a matriz associada a $T$ ?**

Questão repetida. Igual ao exercício 2.

**9. Seja $E = C(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina o operador linear $A : E \to E$ pondo para cada $f \in E$, $A(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$. Determine o núcleo e a imagem do operador A.**

O núcleo do operador corresponde a todas as funções $n$ que satisfazem $n(x) = 0$.

$$N(\varphi(x)) = \{n(x) = 0/x \in \mathbb{R}\}$$

O espaço coluna do operador é composto por todas as funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, ou seja as funções que possuem primeira derivada contínua (funções diferenciáveis).

**10. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas**

**( ) Para todo operador linear $A : E \to E$, se $u \in N(A)$ e $v \in C(A)$ então $u \cdot v = 0$**

Falso.

Se $u \in N(A)$ então $A.u = 0$. Se $v \in C(A)$ então $A.x = v$ para algum $x \in E$. Temos:

$u.v = v^T u = (A.x)^T u = (x^T A^T)u = x^T(A^T u) = 0 \Leftrightarrow N(A) = N(A^T)$

Não podemos garantir que $N(A) = N(A^T)$ sempre é verdade.

**( ) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão $\geq$ 3**

Falso. O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão $\geq 2$.

Conseidere a equação:

$$posto(A) + nulidade(A) = \#colunas\, de\, A = 5$$

O posto de A é no máximo 3, logo a nulidade de A, neste caso deverá ser $\geq 2$.

**( ) Em todo grafo com $n$ vértices e $m$ arestas vale $\#ciclos\, independentes - \#componentes\, conexas = m - n$**

Verdadeiro.

Notação: $r$ é o posto de A; $n$ é o número de colunas da matriz de incidência e $m$ é o número de linhas da matriz de incidência.

$dim(N(A^T)) = m - r = \#ciclos\, independentes$

$r = n - dim(N(A)) = n - \#componentes\, conexas$

$m - n + \#componentes\, conexas = \#ciclos\, independentes$

$\Rightarrow \#ciclos\, independentes - \#componentes\, conexas = m - n$

**( ) O conjunto dos funcionais afins $t : R^n \to R$ $(t(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n)$ é um espaço vetorial**

Verdadeiro.

Precisamos verificar duas propriedades para identificar se este conjunto é um espaço vetorial:

1) Fecahdo para soma de vetores?

Sejam os funcionais afins $u(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ e $v(x_1, ..., x_n) = b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n$ temos que:

$$u(x_1, ..., x_n) + v(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n$$

$$u(x_1, ..., x_n) + v(x_1, ..., x_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_1 + ... + (a_n + b_n)x_n \in t : R^n \to R$$

2) Fechado por multiplicação por escalar?

Seja o funcional afim $u(x_1,...,x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ temos:

$$\alpha u(x_1,...,x_n) = \alpha(a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n)$$

$$\alpha u(x_1,...,x_n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x_1 + ... + \alpha a_nx_n \Rightarrow \alpha u(x_1,...,x_n) \in t : R^n \to R$$

**( ) O conjunto das transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é um espaço vetorial de dimensão $n$**

Verdadeiro.

A soma de duas transformações lineares é uma transformação linear. O produto de uma transformação linear por um escalar também é uma transformação linear. Portatnto o conjunto das transformações lineares é um espaço vetorial, entretanto sua dimensão $mn$.

**11. Determine uma base para a imagem e para o núcleo, quando possível, de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.**

**(a)** $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x,y) = (x-y, x-y)$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz A:

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1) & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

1) Podemos encontrar uma base para $C(A)$ encontrando a forma escalonada reduzida da matriz A e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(A) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Esta transformação não é sobrejetiva pois sua imagem $C(A)$ não é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}^2$.

2) Para encontrar uma base para $N(A)$ resolvemos o sistema $Ax = 0$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$N(A) = ger\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**(b)** $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B(x, y, z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz B:

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1) & 1/2 & 0 \\ 0 & (-1/4) & 1 \\ 0 & 0 & (9/2) \end{matrix}$$

1) Podemos encontrar uma base para $C(B)$ encontrando a forma escalonada reduzida da matriz B e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(B) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Esta transformação é sobrejetiva pois sua imagem $C(A)$ é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}^3$.

2) Para encontrar uma base para $N(B)$ resolvemos o sistema $Bx = 0$

Sabendo que o sistema tem uma solução única sabemos também que $N(B) = \{0\}$ podemos confirmar este fato calculando o espaço nulo a partir da matriz escalonada:

$$\frac{9}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$-\frac{1}{4}y + z = 0 \Rightarrow y = 4z = 0$$

$$x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$N(B) = \{(0,0,0)\}$$

**(c)** $C : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$, $C(X) = A \cdot X$**, onde** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(**$M_{2\times2}$ **é o espaço das matrizes 2×2)**

1) $C(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) $C(e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) $C(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4) $C(e_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

O espaço coluna da transformação C é o espaço gerado pelos vetores $C(e_1)$, $C(e_2)$, $C(e_3)$ e $C(e_4)$ que é o espaço $M_{2x2}$ e portanto esta transformação é sobrejetiva. O núcleo desta transformação possui apenas a matriz nula $N(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**(d)** $D : P_n \to P_{n+1}$**,** $D(p(x)) = x \cdot p(x)$ **(**$P_n$ **é o espaço dos polinômios de grau até** $n$**)**

O espaço colunas desta transformação é um subespaço do espaço dos polinômios de grau $n+1$ (espaço de dimensão $n+2$) com termo independente nulo e portanto este espaço possui dimensão $n+1$ e consequentemente o núcleo da transformação possui dimensão 1.

Uma base $\beta$ para o espaço coluna é formada pelos $n+1$ vetores $\beta_i$ com $n+2$ componentes tais que todos os vetores possuem a última componente igual a zero e cada vetor $\beta_i$, $1 \leq i \leq n+1$ possui a i-ésima componente igual a 1.

$\beta_1 = (1,0,...,0,0)$; $\beta_2 = (0,1,...,0,0)$; $\beta_3 = (0,0,1,...,0,0)$; $\cdots$ $\beta_{n+1} = (0,0,...,1,0)$;

Esta transformação não é sobrejetiva pois seu espaço coluna (dimensão $n+1$) não é isomorfo ao seu contradomínio (dimensão $n+2$) .

**12. Considere o espaço $P_n$ dos polinômios de grau até $n$. É verdade que ambas as transformações $D : P_n \to P_n$ e $I : P_n \to P_{n+1}$, dadas por $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x)$ e $I(p(x)) = \int_0^x p(t) \cdot dt$ são lineares (justifique)? Em caso afirmativo, exiba as matrizes destas transformações na base canônica de $P_n$ e descreva o núcleo e a imagem delas.**

As transformações são lineares e isto decorre diretamente das propriedades das funções derivada e integral.

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão $n-1$

$$C(D) = ger(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

e o núcleo

$$N(D) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

possui dimensão 2.

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão $n+1$

$$C(I) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

e o núcleo

$$N(I) = ger(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

possui dimensão 1.

**13. O arquivo MatrizIncidencia.csv que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se $A_{ij} = 1$ então a aresta i se inicia no vértice $j$. Se $A_{ij} = -1$ então a aresta i termina no vértice $j$. Deste modo em cada linha $i$ há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a $-1$ e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.**

**(a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computa- cional, claro!**

-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642

-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
-0.0574341 -0.1668833 -0.0100642
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
0.2337155 -0.0824204 0.0329232
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272
-0.0715459 -0.0052185 0.4948272

**(b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.**

O número de componetes conexas é dado pela dimensão do espaço nulo da matriz que é 3.

Obs: Para identificar os vértices que pertencem a cada componente devemos analisar as linhas que possuem coordenadas de mesmo valor de cada vetor da base geradora do espaço nulo.