1 Verificação de Conceitos

1. Qual é a definição de uma matriz positiva definida? E semi-definida?
2. O que podemos dizer sobre os autovalores de uma matriz simétrica e positiva definida? E se a matriz não for simétrica?
3. Qual é a decomposição SVD da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$?

2 Exercícios I - papel e lápis

1. Verdadeiro ou falso
   (a) O conjunto das matrizes $n \times n$ positivas definidas é um cone convexo no espaço vetorial das matrizes $n \times n$
   (b) O conjunto das matrizes $n \times n$ positivas definidas é um subespaço do espaço das matrizes $n \times n$
   (c) Os elementos da diagonal principal de uma matriz positiva definida são números positivos.
   (d) Se uma matriz quadrada é diagonal dominante então ela é positiva definida.
   (e) Existe uma matriz positiva definida 2×2 com dois elementos negativos e dois positivos.
   (f) Se uma matriz $n \times n$ tem Se os determinantes dos menores principais de uma matriz M são todos positivos então $M > 0$. Se alternam o sinal então $M < 0$.
2. Seja $A_{n\times n}$ uma matriz diagonalizável e $p_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ seu polinômio característico. Mostre que se no polinômio $p_A(\lambda)$ substituirmos a variável λ por A então $p_A(A) = 0_{n\times n}$, isto é, obteremos a matriz nula (teorema de Cayley-Hamilton). O que podemos dizer sobre matrizes que não são diagonalizáveis?
3. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função que tem todas as segundas derivadas contínuas ($F \in C^2$). Mostre que se $x^* \in \mathbb{R}^n$ é um ponto onde a derivada se anula e a hessiana de F neste ponto tem todos os autovalores positivos então x^* é um ponto de máximo local de F.
4. Mostre que se a matriz A é simétrica e v é um autovetor de A então o complemento ortogonal do espaço gerado por v é invariante por A.
5. A decomposição em valores singulares (forma reduzida) da matriz da transformação $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ é $U = \begin{pmatrix} u_1|u_2|u_3|u_4 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $V = \begin{pmatrix} v_1|v_2|v_3|v_4 \end{pmatrix}$, onde as colunas u_i são vetores de $\mathbb{R}^5$ e as colunas v_i são vetores de $\mathbb{R}^4$.
   (a) Considere a função $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por $f(w) = \frac{\|Aw\|}{\|w\|}$. Exiba um vetor w^*que maximiza $f(w)$
   (b) Determine bases ortogonais para $N(A)$, $Im(A)$, $N(A^T)$ e $Im(A^T)$.
6. Calcule uma decomposição SVD da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Use esta decomposição para calcular a pseudo-inversa de A.
7. Considere os pontos $P_1 = (x_1, y_1), ..., P_n = (x_n, y_n)$. Queremos encontrar uma reta e um erro $y = ax + b + \varepsilon$ que melhor se ajustam aos pontos dados.
   (a) Mostre como podemos usar a decomposição em valores para encontrar os parâmetros a e b que minimizam $||\varepsilon||_2$ (a norma l^2 do erro).
   (b) Mostre como podemos usar a decomposição em valores para encontrar os parâmetros a e b que minimizam $||\varepsilon||_1$ (a norma l^1 do erro, i.e, a soma dos valores absolutos dos erros).

3 Exercícios II - você pode utilizar o computador para auxiliar nas contas

1. O arquivo Lobos.png contém uma imagem em preto e branco. Converta para uma matriz M onde cada entrada da matriz representa um tom de cinza.

   (a) Se cada pixel da imagem consome um byte, qual é o tamanho da imagem sem compressão?

   (b) Mostre que toda matriz $A_{m\times n}$ de posto r pode ser escrita como uma combinação linear positiva de r matrizes de posto 1 da seguinte forma: $A = \sigma_1 u_1 \cdot v_1^T + .. + \sigma_r u_r \cdot v_r^T$, onde os vetores u_i são ortonormais e os vetores v_i também são ortonormais.

   (c) Use o item anterior para fazer uma compressão que use $1/16$ do tamanho original da imagem.

2. O arquivo Pontos.csv contém as coordenadas x e y de 128 pontos dispostos em duas colunas. Encontre a reta r cuja soma das distâncias dos pontos à reta é a menor possível.

3. Monte uma matriz A 20×20 que tenha todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e todos os elementos acima da diagonal principal iguais a -1. Construa o vetor $x = (1, ..., 1)$ e o vetor $b = A \cdot x$. Agora faça uma pequena perturbação em b, isto é, gere o vetor $b2 = b + \delta b$, onde $\delta b = (0, 0, ..., 0.00001)$ (apenas a última coordenada tem o valor 0.00001). Resolva o sistema $A \cdot x2 = b2$. Compare o erro relativo de $x2$ com o erro relativo de $b2$. Qual é o vetor δb de módulo 0.00001 que pode gerar o maior erro relativo no vetor $x2$?

4. Considere um sistema linear $A \cdot x = b$. A matriz A é conhecida e o vetor b também, mas há erro δb embutido nos valores do vetor b. Neste caso vamos encontrar também um erro na solução x, ou seja, vamos resolver sistema que $A \cdot (x + \delta x) = b + \delta b$. Queremos saber qual é o erro relativo da solução quando comparado ao erro relativo em b.

   (a) Use a decomposição SVD de A para encontrar um valor C tal que $\frac{||\delta x||}{||x||} \leq C\frac{||\delta b||}{||b||}$. (número de condicionamento da matriz A)

   (b) Exiba um vetor tal que $\frac{||\delta x||}{||x||} = C\frac{||\delta b||}{||b||}$.