FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

MESTRADO 2016.1

ÁLGEBRA LINEAR E APLICAÇÕES

Prof Moacyr

Resolução da Lista 3

Monitora: KIZZY TERRA

RIO DE JANEIRO

MARÇO DE 2016

1 Verificação de Conceitos

1. Qual é a definição de transformação linear?

Uma transformação linear é um mapeamento $T : A \rightarrow B$ tal que
$1 - T(x + y) = T(x) + T(y)$
$2 - T(ax) = aT(x)$

2. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ **é uma transformação linear. Sabendo que** $T(1, 0) = (1, 0, 1)$ **e** $T(0, 1) = (0, 2, -1)$ **calcule** $T(3, 5)$**.**

Temos os valores de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ nos valores da base canônica, temos a matriz $[T]$ associada:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T(3,\, 5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ **é linear então existe uma matriz associada a esta transformação** $[T]$**. Quais são as dimensões desta matriz?**

$[T]_{mxn}$

4. Verifique se as funções abaixo são lineares. Em caso afirmativo exiba a matriz associada (se possível).

(a) $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$**,** $A(x, y) = (x + y,\, x - y)$

Verificando se A satisfaz as propriedades de uma transformação linear:
1) $T(a + b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$?
$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$
$A(b) = A(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, b_1 - b_2)$
$A(a) + A(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, a_1 + b_1 - a_2 - b_2) = A(a + b)$
2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2)$?
$A(a) = A(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, a_1 - a_2)$
$A(\alpha a) = A(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha a_1 + \alpha a_2, \alpha a_1 - \alpha a_2) = \alpha(a_1 + a_2, a_1 - a_2) = \alpha A(a)$

Portando A é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$A(1,0) = (1,1)$; $A(0,1) = (1,-1)$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x,y) = (x+y,\ 1)$

Verificando se B satisfaz a propriedade de soma de uma transformação linear:

1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2)$ e $b = (b_1, b_2)$?

$B(a) = B(a_1, a_2) = (a_1 + a_2, 1)$

$B(b) = B(b_1, b_2) = (b_1 + b_2, 1)$

$B(a) + AB(b) = (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 2) \neq (a_1 + a_2 + b_1 + b_2, 1) = B(a+b)$

Portando B não é uma transformação linear.

(c) $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x,y) = (x.y,\ y)$

Verificando se C satisfaz a propriedade do produto por escalar de uma transformação linear:

1) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2)$?

$C(a) = C(a_1, a_2) = (a_1 a_2, a_2)$

$C(\alpha a) = C(\alpha a_1, \alpha a_2) = (\alpha^2 a_1 a_2, \alpha a_2) \neq \alpha(a_1 a_2, a_2) = \alpha C(a)$

Portando C não é uma transformação linear.

(d) $D : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$**,** $D(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_3$

Verificando se D satisfaz as propriedades de uma transformação linear:

1) $T(a+b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ e $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$?

$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$

$D(b) = D(b_1, b_2, b_3, b_4) = b_3$

$D(a) + D(b) = a_3 + b_3 = D(a+b)$

2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)$?

$D(a) = D(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_3$

$D(\alpha a) = D(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \alpha a_4) = \alpha a_3 = \alpha D(a)$

Portando D é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:

$D(1,0,0,0) = 0$; $D(0,1,0,0) = 0$; $D(0,0,1,0) = 1$; $D(0,0,0,1) = 0$

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(e) $E : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**,** $E(x,\, y,\, z) = (x - z,\, x + y)$

Verificando se E satisfaz as propriedades de uma transformação linear:
1) $T(a + b) = T(a) + T(b)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3)$ e $b = (b_1, b_2, b_3)$?
$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$
$E(b) = E(b_1, b_2, b_3) = (b_1 - b_3, b_1 + b_2)$
$E(a) + E(b) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2) + (b_1 - b_3, b_1 + b_2) = E(a + b)$
2) $T(\alpha a) = \alpha T(a)$ onde $a = (a_1, a_2, a_3)$?
$E(a) = E(a_1, a_2, a_3) = (a_1 - a_3, a_1 + a_2)$
$E(\alpha a) = E(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3) = (\alpha a_1 - \alpha a_3, \alpha a_1 + \alpha a_2) = \alpha(a_1 - a_3, a_1 + a_2) = \alpha E(a)$

Portando E é uma transformação linear. Para escrever sua matriz basta encontrarmos os valores da transformação nos vetores da base canônica:
$E(1, 0, 0) = (1, 1)$; $E(0, 1, 0) = (0, 1)$; $D(0, 0, 1) = (-1, 0)$;

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$**,** $F(x,\, y,\, z) = A(E(x,\, y,\, z))$

F é uma composição de transformações lineares e portanto é uma transformação linear (pode ser verificado pelas propriedades). Para encontrar a mariz associda fazemos:

$$[F] = [A][E] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

5. A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tem uma matriz associada $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ na base canônica. Qual é a matriz $[T]_\beta$ desta transformação na base $\beta = [u, v]$, onde $u = (1, 1)$ e $v = (2, 1)$?

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

A matriz Q_E^β é formada pelos vetores u e v da base β escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz Q_β^E é formada pelos vetores da base canônica escritos na base β que é também a matriz inversa da matriz Q_E^β :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$[T]_\beta = Q_\beta^E [T]_E Q_E^\beta$$

$$[T]_\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

6. Determine a matriz da transformação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que consiste na projeção ortogonal sobre o eixo Oy seguida de uma rotação em torno da origem por um ângulo de $\pi/4$.

A matriz$T$ é a composição de duas transformações e pode ser encontrada através do produto destas transformações, sendo assim:

1) Projeção Ortogonal sobre o eixo Oy:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Rotação por um ângulo de $\pi/4$:

Relembrando:

A matriz de rotação de um ângulo θ em torno da origem é $R(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$.

Tomando $\theta = \pi/4$, obtemos:

$$R(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Portanto a matriz T é:

$$T = R\left(\frac{\pi}{4}\right).P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

7. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é sobrejetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = b$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?

Definição: Uma função f é sobrejetiva se sua imagem é igual ao seu contra-domínio.

Portanto a imagem da transformação linear T é o espaço $\mathbb{R}^m$. Este fato indica que devemos ter $n \geq m$, pois a dimensão da imagem da função não pode ser maior do que a dimensão de seu domínio. Podemos dizer que o sistema terá uma única solução (se$m = n$) ou infinitas soluções (se $n > m$), uma vez que, neste caso existirão variáveis livres, pois\ o número de colunas será maiordo que o número de linhas da matriz. Sobre o posto da matriz podemos afirmar que será m (número máximo de pivôs possível).

8. Se uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injetiva o que podemos dizer com relação ao sistema linear $[T] \cdot x = 0$? O que podemos dizer sobre o posto desta matriz?

Definição: Uma função f é injetiva se dados x, y pertencentes ao seu domínio então $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Se a transformação linear é injetiva então podemos afirmar que o $[T] \cdot x = 0$ possui solução única $x = 0$. Sendo assim devemos ter $m \geq n$ e o posto da matriz é n.

Não é possível existir uma transformação linear injetiva tal que a dimensão da imagem é menor do que a dimensão do domínio.

2 Exercícios

1. Considere duas matrizes, A_{10x3} e B_{3x9} e seja $C_{10\times9}$ o produto: $C = A \cdot B$. Qual é a dimensão mínima do núcleo de C ? Qual é o posto máximo de C ?

1- O posto de A é no máximo 3 e o posto de B também é no máximo 3. Por essa razão o posto máximo de C também é 3. (Lembre-se que o posto da matriz é o número de pivôs)

2 -posto + nulidade = #colunas da matriz $\Rightarrow$ posto + nulidade = 9

Se posto ≤ 3, então a dimensão mínima do núcleo é 6.

Podemos observar de outra maneira:

$$C = A.B = A. \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de C será o espaço gerado por:

$$C(AB) = ger(A.b_1, A.b_2, A.b_3)$$

onde b_1, b_2e b_3 são as colunas de B.

Todos os vetores $A.b_i$, $1 \leq i \leq 4$ são combinações lineares das colunas de A, logo:

$$C(AB) = ger(A.b_1, A.b_2, A.b_3) \subset ger(a_1, a_2, a_3)$$

onde a_1, a_2 e a_3 são as colunas de A. Dessa forma o posto de C que é a dimensão do espaço coluna de C é no máximo 3.

2. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que T está completamente definida se forem conhecidas as imagens de T nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1), ..., v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores v_i e a matriz associada a T ?

Se β é uma base de $\mathbb{R}^n$, então todo vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de β, se tomarmos v qualquer em $\mathbb{R}^n$:

$$v = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$$

Se T é uma transformação linear então é verdade que:

$$T(v) = a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_nT(u_n)$$

Portanto, se conhecermos os valores da transformação linear nos vetores da base, podemos encontrar o valor da transformação para qualquer vetor do espaço e por essa razão podemos afirmar que T está completamente definida.

Os vetores v_i são por sua vez as colunas da matriz $[T]$ associada a T.

3. Classifique como verdadeiro ou falso. Justifique sua classificação.

(a) Os vetores (1, 1, 1, 1), (2, 3, 0, 0) e (1, -1, 1, -1) são linearmente independentes.

Verdadeiro.

Para verificar se os vetores são LI podemos utilizá-los para compor as linhas de uma matriz e verificar se é possível escaloná-la. Seja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2$

$$\begin{matrix} (1) & 1 & 1 & 1 \\ 0 & (1) & -2 & -2 \\ 0 & 0 & (-4) & -6 \end{matrix}$$

Observando a matriz obtida após o processo de eliminação podemos concluir que as linhas são independentes, pois caso não fossem alguma das linhas seria totalmente nula.

(b) Os vetores (1,1,1,1), (2,3,0,0) e (1,-1,1,-1) formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

Falso.

Para verificar a dimensão do espaço gerado por estes vetores podemos utilizá-los para compor as colunas de uma matriz e verificar a dimensão do espaço coluna da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ao observar esta matriz podemos perceber que seu posto é no máximo 3 e portanto o espaço coluna desta matriz deverá ter no máximo dimensão 3. Sendo assim, não é possível que estes vetores sejam base para o $\mathbb{R}^4$.

(c) O espaço E $\subset \mathbb{R}^4$ tem uma base$\beta = [(1,1,2,3),(0,1,0,-1)]$ e o espaço F $\subset \mathbb{R}^4$ tem uma base $\gamma = [(1,-1,2,5),(1,2,3,2)]$. São subespaços distintos de $\mathbb{R}^4$.

Verdadeiro.

Os espaços gerado pelas duas base são distintos. Para justificar isso podemos observar que não é possível escrever uma base em função dos vetores da outra.

Isso evidencia que as duas bases não pertencem ao mesmo subespaço, uma vez que a partir da base de um subespaço sempre deve ser possível escrever todos os vetores que pertencem a este subespaço.

(d) Se o posto de $A_{101\times200}$ é 101, então o posto de A^T necessariamente é 101.

Verdadeiro.

Se o posto da matriz A é 101 isto significa que existem 101 linhas lineramente independentes em A. Estas linhas serão as colunas da matriz A transposta e poderão formar uma base para o espaço coluna da matriz A transposta. Logo o posto da matriz transposta irá necessariamente ser o posto de A.

Obs.: $posto(A^T) = dim(C(A^T)) = \#vetores\ da\ base\ para\ C(A^T)$.

(e) Se as colunas de uma matriz são linearmente independentes então as linhas também são.

Falso. Contra-exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Fazendo o processo de eliminação, encontramos a forma escalonada reduzida da matriz:

$$\begin{matrix} (1) & 2 & 3 \\ 0 & (-3) & -6 \\ 0 & 0 & (6) \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Neste exemplo temos três colunas LI, mas as linhas são LD, o que pode ser constatado devido à linha nula obtida.

(f) As colunas de uma matriz formam uma base de sua imagem (espaço coluna).

Falso. Apenas as colunas linearmente independentes de uma matriz formam uma base de sua imagem.

(g) Seja v um vetor não nulo de $\mathbb{R}^{10}$. Considerando este vetor com uma matriz coluna, isto é, com 10 linhas e uma coluna a matriz $M = v \cdot v^T$ tem 10 linhas e 10 colunas e posto 1.

Verdadeiro.

$$M = v.v^T$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \\ v_9 \\ v_{10} \end{bmatrix} v^T = \begin{bmatrix} v_1 v^T \\ v_2 v^T \\ v_3 v^T \\ v_4 v^T \\ v_5 v^T \\ v_6 v^T \\ v_7 v^T \\ v_8 v^T \\ v_9 v^T \\ v_{10} v^T \end{bmatrix}$$

É possível perceber que todas as linhas são múltiplos de v^T e e portanto combinações lineares umas das outras portanto o posto é 1.

4. A transformação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a projeção ortogonal sobre o eixo Ox.

(a) Determine a matriz de P (da base canônica na base canônica, isto é $[P]_E^E$)

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Se $\beta = (1,1),(1,-1)$ determine as matrizes de mudança de base: $[Id]_E^\beta$ e $[Id]_\beta^E$.

A matriz $[Id]_E^\beta$ é formada pelos vetores u e v da base β escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_\beta^E$ é formada pelos vetores da base canônica escritos na base β que é também a matriz inversa da matriz $[Id]_E^\beta$:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

(c) Encontre a matriz de P na base $\boldsymbol{\beta}$, isto é, $[P]_\beta^\beta$.

$$[P]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [P]_E^E [Id]_E^\beta$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[P]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

5. Determine a matriz da rotação em $\mathbb{R}^2$ em torno da origem por um ângulo θ nas coordenadas $\beta = [u, v]$, onde $u = (1,1)$ e $v = (2,1)$.

Queremos encontrar a matriz $[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [R(\theta)]_E^E [Id]_E^\beta$.
Conhecemos a matriz $[R(\theta)]_E^E$:

$$[R(\theta)]_E^E = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_E^\beta$ é formada pelos vetores u e v da base β escritos na base canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $[Id]_\beta^E$ é formada pelos vetores da base canônica escritos na base β que é também a matriz inversa da matriz $[Id]_E^\beta$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = [Id]_\beta^E [R(\theta)]_E^E [Id]_E^\beta = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta \\ sen\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R(\theta)]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 3sen\,\theta + cos\,\theta & 5sen\,\theta \\ -2sen\,\theta & cos\,\theta - 3sen\,\theta \end{bmatrix}$$

6. Determine a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo Oz por um ângulo de θ na base canônica.

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos\,\theta & -sen\,\theta & 0 \\ sen\,\theta & cos\,\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. Calcule (use o computador, por favor) a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Para resolver este problema podemos encontrar uma base ortonormal para o $\mathbb{R}^3$ em que o vetor v seja o terceiro vetor da base. Ou seja, queremos uma base $\beta = [t, u, v]$.

Fazemos isso pois uma vez que tenhamos esta base podemos calcular a rotação por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, como se fosse uma rotação em torno do eixo Oz no sistema de coordenadas formado pelos vetores da base. Então utilizamos as matrizes de mudança de base para encontrar a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ em torno do eixo definido pelo vetor $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ por um ângulo de $\theta = \frac{\pi}{6}$ no sistema de coordenadas canônico.

Queremos então encontrar a matriz $[R_v(\frac{\pi}{6})]_E$:

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = I_E^\beta [R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta I_\beta^E$$

Entretanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_\beta = R_z(\frac{\pi}{6}) = \begin{bmatrix} cos\,\frac{\pi}{6} & -sen\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ sen\,\frac{\pi}{6} & cos\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A base que procuramos pode ser:

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-2)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

Sendo assim, a matriz I_E^β é formada pelos vetores t, u e v da base β escritos na base canônica:

$$I_E^\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular a matriz I_β^E calculamos a inversa da matriz I_E^β (computacionalmente!):

$$I_\beta^E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\,\frac{\pi}{6} & -sen\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ sen\,\frac{\pi}{6} & cos\,\frac{\pi}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$[R_v(\frac{\pi}{6})]_E = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

(a) Use a matriz obtida para calcular a rotação em torno do eixo definido pelo vetor v por um ângulo de $\pi/6$ do ponto $Q = (1, 3, 2)$. Faça um gráfico no computador com os três eixos coordenados com o vetor v, o ponto Q e o resultado da rotação $R(Q)$.

Para e encontrar o resultado da rotação basta fazer $R(Q) = [R_v(\frac{\pi}{6})]_E.Q$.

8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear e $\beta = [u_1, u_2, ..., u_n]$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Mostre que T está completamente definida se forem conhecidas as imagens de T nos elementos da base, isto é, se forem conhecidos $v_1 = T(u_1), ..., v_n = T(u_n)$. Qual é a relação que existe entre os vetores v_i e a matriz associada a T ?

Questão repetida. Igual ao exercício 2.

9. Seja $E = C(\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Defina o operador linear $A : E \to E$ pondo para cada $f \in E$, $A(f) = \varphi$, onde $\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$. Determine o núcleo e a imagem do operador A.

O núcleo do operador corresponde a todas as funções n que satisfazem $n(x) = 0$.

$$N(\varphi(x)) = \{n(x) = 0/x \in \mathbb{R}\}$$

O espaço coluna do operador é composto por todas as funções de classe $C^1(\mathbb{R})$, ou seja as funções que possuem primeira derivada contínua (funções diferenciáveis).

10. Assinale verdadeiro ou falso, justificando as afirmativas

( ) Para todo operador linear $A : E \to E$, se $u \in N(A)$ e $v \in C(A)$ então $u \cdot v = 0$

Falso.

Se $u \in N(A)$ então $A.u = 0$. Se $v \in C(A)$ então $A.x = v$ para algum $x \in E$. Temos:

$u.v = v^T u = (A.x)^T u = (x^T A^T)u = x^T(A^T u) = 0 \Leftrightarrow N(A) = N(A^T)$

Não podemos garantir que $N(A) = N(A^T)$ sempre é verdade.

( ) O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão ≥ 3

Falso. O núcleo de toda transformação linear $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tem dimensão ≥ 2.

Conseidere a equação:

$$posto(A) + nulidade(A) = \#colunas\, de\, A = 5$$

O posto de A é no máximo 3, logo a nulidade de A, neste caso deverá ser ≥ 2.

( ) Em todo grafo com n vértices e m arestas vale $\#ciclos\, independentes - \#componentes\, conexas = m - n$

( ) O conjunto dos funcionais afins $t : R^n \to R$ $(t(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n)$ é um espaço vetorial

Verdadeiro.

Precisamos verificar duas propriedades para identificar se este conjunto é um espaço vetorial:

1) Fecahdo para soma de vetores?

Sejam os funcionais afins $u(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ e $v(x_1, ..., x_n) = b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n$ temos que:

$$u(x_1, ..., x_n) + v(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n + b_0 + b_1x_1 + ... + b_nx_n$$

$$u(x_1, ..., x_n) + v(x_1, ..., x_n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x_1 + ... + (a_n + b_n)x_n \in t : R^n \to R$$

2) Fechado por multiplicação por escalar?

Seja o funcional afim $u(x_1, ..., x_n) = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$ temos:

$$\alpha u(x_1, ..., x_n) = \alpha(a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n)$$

$$\alpha u(x_1, ..., x_n) = \alpha a_0 + \alpha a_1x_1 + ... + \alpha a_nx_n \Rightarrow \alpha u(x_1, ..., x_n) \in t : R^n \to R$$

( ) O conjunto das transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é um espaço vetorial de dimensão n

Verdadeiro.

A soma de duas transformações lineares é uma transformação linear. O produto de uma transformação linear por um escalar também é uma transformação linear. Portatnto o conjunto das transformações lineares é um espaço vetorial, entretanto sua dimensão mn.

11. Determine uma base para a imagem e para o núcleo, quando possível, de cada uma das transformações lineares abaixo e indique quais são sobrejetivas.

(a) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**,** $A(x, y) = (x - y, x - y)$

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz A:

$$\begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1) & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

1) Podemos encontrar uma base para $C(A)$ encontrando a forma escalonada reduzida da matriz A e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(A) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Esta transformação não é sobrejetiva pois sua imagem $C(A)$ não é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}^2$.

2) Para encontrar uma base para $N(A)$ resolvemos o sistema $Ax = 0$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

$$N(A) = ger \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$**,** $B(x, y, z) = (x + y/2, y + z/2, z + x/2)$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontrando a forma reduzida da matriz B:

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1) & 1/2 & 0 \\ 0 & (-1/4) & 1 \\ 0 & 0 & (9/2) \end{matrix}$$

1) Podemos encontrar uma base para $C(B)$ encontrando a forma escalonada reduzida da matriz B e pegando as colunas correspondentes as colunas da matriz escalonada que contém pivôs.

$$C(B) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

Esta transformação é sobrejetiva pois sua imagem $C(A)$ é igual ao seu contradomínio $\mathbb{R}^3$.

2) Para encontrar uma base para $N(B)$ resolvemos o sistema $Bx = 0$

Sabendo que o sistema tem uma solução única sabemos também que $N(B) = \{0\}$ podemos confirmar este fato calculando o espaço nulo a partir da matriz escalonada:

$$\frac{9}{2}z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$-\frac{1}{4}y + z = 0 \Rightarrow y = 4z = 0$$

$$x + \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$N(B) = \{(0,0,0)\}$$

(c) $C : M_{2\times2} \to M_{2\times2},\ C(X) = A \cdot X$**, onde** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(**$M_{2\times2}$ **é o espaço das matrizes 2×2)**

1) $C(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) $C(e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3) $C(e_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4) $C(e_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

O espaço coluna da transformação C é o espaço gerado pelos vetores $C(e_1)$, $C(e_2)$, $C(e_3)$ e $C(e_4)$ que é o espaço M_{2x2} e portanto esta transformação é sobrejetiva. O núcleo desta transformação possui apenas a matriz nula $N(C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $D : P_n \to P_{n+1}$**,** $D(p(x)) = x \cdot p(x)$ **(**P_n **é o espaço dos polinômios de grau até** n**)**

O espaço colunas desta transformação é um subespaço do espaço dos polinômios de grau $n+1$ (espaço de dimensão $n+2$) com termo independende nulo e portanto este espaço possui dimensão $n+1$ e consequentemente o núcleo da transformação possui dimensão 1.

Uma base β para o espaço coluna é formada pelos $n+1$ vetores β_i com $n+2$ componentes tais que todos os vetores possuem a última componente igual a zero e cada vetor β_i, $1 \leq i \leq n+1$ possui a i-ésima componente igual a 1.

$\beta_1 = (1,0,...,0,0)$; $\beta_2 = (0,1,...,0,0)$; $\beta_3 = (0,0,1,...,0,0)$; $\cdots$ $\beta_{n+1} = (0,0,...,1,0)$;

Esta transformação não é sobrejetiva pois seu espaço coluna (dimensão $n+1$) não é isomorfo ao seu contradomínio (dimensão $n+2$) .

12. Considere o espaço P_n dos polinômios de grau até n. É verdade que ambas as transformações $D : P_n \to P_n$ e $I : P_n \to P_{n+1}$, dadas por $D(p(x)) = \frac{dp}{dx}(x)$ e $I(p(x)) = \int_0^x p(t) \cdot dt$ são lineares (justifique)? Em caso afirmativo, exiba as matrizes destas transformações na base canônica de P_n e descreva o núcleo e a imagem delas.

As transformações são lineares e isto decorre diretamente das propriedades das funções derivada e integral.

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n-3 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-5 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão $n - 1$

$$C(D) = ger(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

e o núcleo

$$N(D) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

possui dimensão 2.

$$[I] = \begin{bmatrix} \frac{1}{n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{n-3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna desta transformação possui dimensão $n + 1$

$$C(I) = ger(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

e o núcleo

$$N(I) = ger(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix})$$

possui dimensão 1.

13. O arquivo MatrizIncidencia.csv que acompanha esta lista contém a matriz de incidência de uma rede direcionada (grafo), onde cada linha representa uma aresta e cada coluna um vértice. Se $A_{ij} = 1$ então a aresta i se inicia no vértice j. Se $A_{ij} = -1$ então a aresta i termina no vértice j. Deste modo em cada linha i há apenas uma entrada igual a 1 e uma entrada igual a -1 e todos demais elementos desta linha são iguais a zero.

(a) Encontre uma base para o núcleo da matriz de incidência. Você pode usar um pacote computa- cional, claro!

Este exercício foi resolvido utilizando-se a linguagem GNU Octave. O programa *exercicio13.m* utilizado encontra-se em anexo.

(b) Descreva quantas componentes conexas esta rede possui e quais são os vértices que pertencem a cada componente.

O número de componetes conexas é dado pela dimensão do espaço nulo da matriz que é 3.