常微分方程式

Contents

1. 導入

1.1. 微分方程式とは？

- 例 $f'' - 3f' - 4f = 0$ を満たす関数fは？
  解の例 $\longrightarrow f(t) = e^{4t},\ e^{-t}$
  (正確な解は，$f(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$ (C_1, C_2:任意定数))

- これまでに習った微分方程式の例(不定積分)
  $\int f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ 微分して$f(x)$になる関数$F(x)$を求めている．つまり，$F'(x) = f(x)$という微分方程式を解いている．

1.2. この授業の目標

扱いやすいいくつかの微分方程式(変数分離系，定数係数線微分方程式)に対して手計算での解き方を学ぶ.

1.3. 注意

この授業では，x, y はたいていの場合，独立変数を持つ(未知)関数を表す.

Example: $\quad x' = \sin(x) \quad (x(t) = \cos(t) + C)$

また，$x^{(n)}$ で x の n 階微分を表す.

2. 第一回講義(2024-04-09)

Definition 2.1: $x = x(t)$ を未知関数とする.

$$F\big(t, x, x', ..., x^{(n)}\big) = 0 \quad (F : n + 2 \text{ 変数関数})$$

という形の方程式を常微分方程式という.

Example:

1. $x'(t) = \cos(t) \Longleftrightarrow x(t) = \int \cos(t) \,\mathrm{d}t$
   $F(a, b, c) = -\cos(a) + C$
2. $x'' + 2tx' + x = e^t$
   $F(a, b, c, d) = -e^a + b + 2ac + d \quad (a = t, b = x, c = x', d = x'')$
3. $\begin{cases} {x_1}' = 2x_1 - 3x_2 \\ {x_2}' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$ (連立微分方程式)

Definition 2.2: 常微分方程式が n 階の導関数を含み，それ以上の高階の項を含まないとき， n 階の微分方程式という.

Definition 2.3: n 階の方程式 $F\big(t, x, x', ..., x^{(n)}\big) = 0$ の解であって， $x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, ..., x^{(n)}(t_0) = a_n \quad (t_0, a_i$ は定数)を満たすものを求めることを(初期条件に対する)初期値問題を解くという.

Example: $x' e^{-t}$ の解は $x(t) = -e^{-t} + C \quad (C : \text{任意定数})$

$\Downarrow$ 初期値問題

$x' = e^{-t}, x(0) = 0$ の解は，$x(t) = -e^{-1} + 1$

この初期値問題においては $x(0) = 0$ が初期条件.