常微分方程式

Contents

1. 導入

1.1. 微分方程式とは？

- 例 $f'' - 3f' - 4f = 0$ を満たす関数fは？
  解の例 $\longrightarrow f(t) = e^{4t},\ e^{-t}$
  (正確な解は，$f(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-t}$ (C_1, C_2:任意定数))

- これまでに習った微分方程式の例(不定積分)
  $\int f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow$ 微分して$f(x)$になる関数$F(x)$を求めている．つまり，$F'(x) = f(x)$という微分方程式を解いている．

1.2. この授業の目標

扱いやすいいくつかの微分方程式(変数分離系，定数係数線微分方程式)に対して手計算での解き方を学ぶ．

1.3. 注意

この授業では，x, y はたいていの場合，独立変数を持つ(未知)関数を表す．

$$\textit{Example}: \quad x' = \sin(x) \quad (x(t) = \cos(t) + C)$$

また，$x^{(n)}$ で x の n 階微分を表す．

1.3.1. ノートにおける囲いの意味

Def. 1.1: 定義
数学の概念の意味や内容を定めたもの．

Th. 1.1: 定理
正しいことが確かめられた数学の主張のうち重要なもの.

Prop. 1.1: 命題
定理よりも軽い(重要度が低い)主張のこと.

Cor. 1.1.1: 系
定理の結論から直ちに得られる主張.

Example: 例

Proof: 証明 □

2. 第一回講義(2024-04-09)

2.1. 常微分方程式

Def. 2.1: $x = x(t)$ を未知関数とする．

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0 \quad (F : n + 2 \text{ 変数関数})$$

という形の方程式を常微分方程式という．

Example:

1. $x'(t) = \cos(t) \Longleftrightarrow x(t) = \int \cos(t)\,\mathrm{d}t$
   $F(a, b, c) = -\cos(a) + C$
2. $x'' + 2tx' + x = e^t$
   $F(a, b, c, d) = -e^a + b + 2ac + d \quad (a = t, b = x, c = x', d = x'')$
3. $\begin{cases} {x_1}' = 2x_1 - 3x_2 \\ {x_2}' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$ (連立微分方程式)

Def. 2.2: 常微分方程式が n 階の導関数を含み，それ以上の高階の項を含まないとき， n 階の微分方程式という．

2.2. 初期値問題

Def. 2.3: n 階の方程式 $F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0$ の解であって，$x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, ..., x^{(n)}(t_0) = a_n \quad (t_0, a_i$ は定数)を満たすものを求めることを(初期条件に対する)初期値問題を解くという．

Example: $x'e^{-t}$ の解は $x(t) = -e^{-t} + C \quad (C : \text{任意定数})$
$\Downarrow$ 初期値問題
$x' = e^{-t}, x(0) = 0$ の解は，$x(t) = -e^{-1} + 1$
この初期値問題においては $x(0) = 0$ が初期条件．

Th. 2.1: (解の存在と一意性)
初期値問題

$$F\left(t, x, x', ..., x^{(n)}\right) = 0,\ x(t_0) = a_0, x'(t_0) = a_1, ..., x^{(n)}(t_0) = a_n$$

の解は (F がリプシッツ条件を満たすなら，t_0 の近傍で) ただ一つに定まる．

2.3. 変数分離形

Def. 2.4:

$$x' = f(t)g(x) \quad (f, g : \text{関数})$$

の形の方程式を変数分離形という.

Example: $x' = 2t \cdot e^x \quad (f(a) = 2a, g(a) = e^a)$

Prop. 2.1: g は 0 を値に持たないとする.

$$x' = f(t)g(x)$$

に対し, $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ とし, $H(x)$ を $h(x)$ の原始関数, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とする.

$$x' = f(t)g(x) \Longleftrightarrow H(x(t)) = F(t) + C \quad (\text{C:任意定数})$$

Proof:
まず, $x' = f(t)g(x) \implies H(x(t)) = F(t) + C$ を示す.
$x' = f(t)g(x)$ かつ $g \neq 0$ より, $\frac{1}{g(x(t))}x'(t) = f(t)$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{g(x(t))} x'(t) \, \mathrm{d}t = \int f(t) \, \mathrm{d}t \\ & \longrightarrow \int \frac{1}{g(x)} \, \mathrm{d}x = F(t) + C_1 \\ & \longrightarrow H(t) + C_2 = F(t) + C_1 \\ & \longrightarrow H(t) = F(t) + C \end{aligned}$$

よって, $x' = f(t)g(x) \implies H(x(t)) = F(t) + C$ が示された.
次に, $x' = f(t)g(x) \impliedby H(x(t)) = F(t) + C$ だが, $H(x(t)) = F(t) + C$ の両辺を t で微分すれば示される. □

Prop. 2.2: y は常に正, もしくは常に負の値をとる連続関数とする. このとき, $h(x) = \frac{1}{g(x)}$ の原始関数 $H(x)$ には逆関数が存在する. そして, 方程式 $x' = f(t)g(x)$ の解は, $x(t) = H^{-1}(F(t) + C)$ と表される.