인공지능을 위한
머신러닝 알고리즘

2. 선형 회귀 모델

Tacademy

CONTENTS

학습 목표

- 선형 회귀의 분류 원리에 대해 이해할 수 있다.
- 선형 회귀의 모델 파라미터를 계산할 수 있다.
- 모델이 가정하고 있는 선형성에 대해서 이해할 수 있다.

1. 선형 회귀 모델

회귀 모델의 정의

- 한 개의 종속 변수(**dependent variable**)와 설명 변수들(**explanatory variable(s)**)과의 관계를 모델링

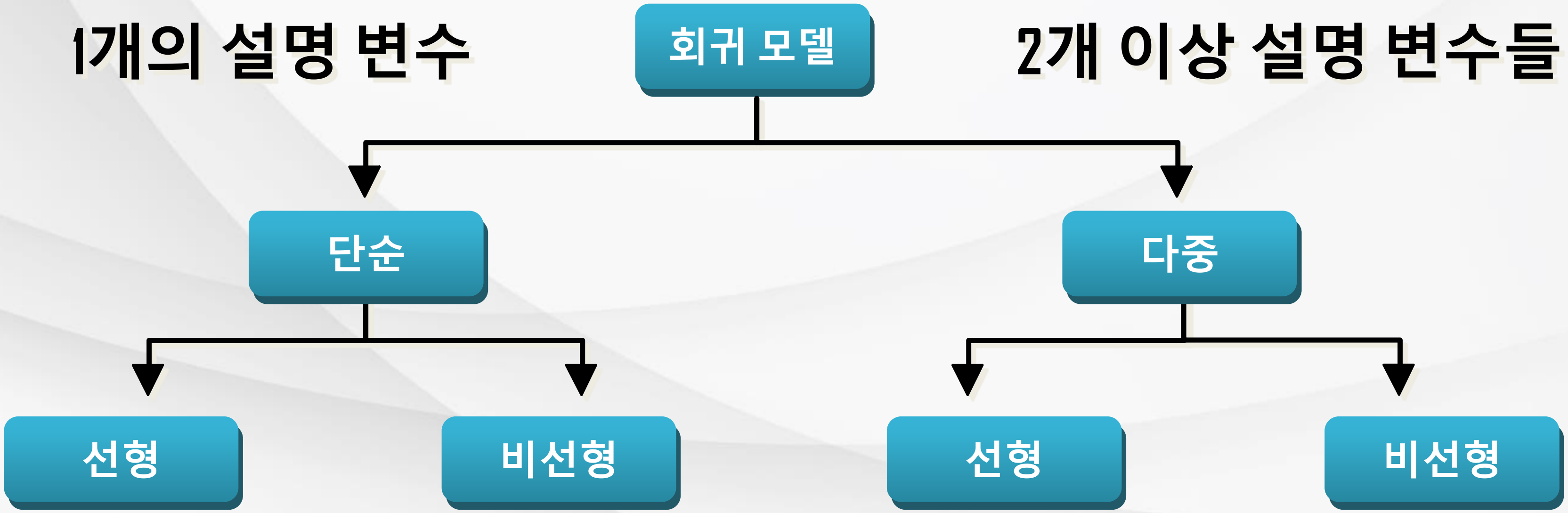
- 관계를 정의하기 위해 방정식 사용
  - 수치적(**numerical**) 종속 변수
  - 한 개 또는 그 이상의 수치적 설명 변수

- 예측 **&** 추정 시에 사용

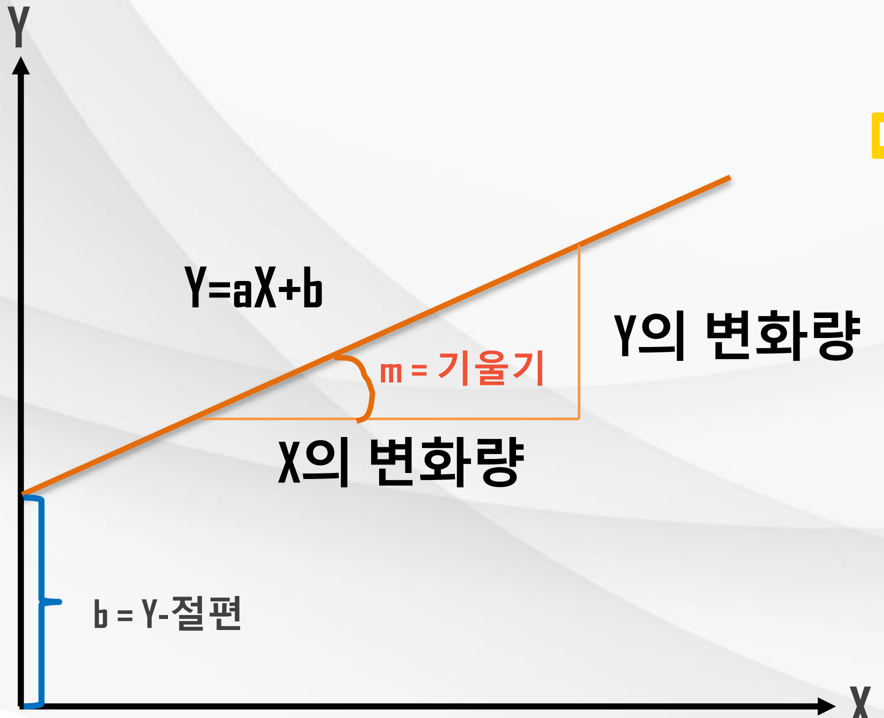
1. 선형 회귀 모델

Tacademy

회귀 모델의 종류들



선형성이란



예> Y=1/2X+3

변수들 사이 관계 - 선형 함수

Y절편

기울기

무작위 에러 (노이즈)

$$Y_i = \beta_o + \beta_i X_i + \varepsilon_i$$

종속 (응답) 변수

예> 와인 등급

독립 (설명) 변수

예> 날씨, 토양, 포도의 품질

회귀 모델의 예측 대상

모집단 (참값)

회귀 모델의 예측 대상

모집단 (참값)

무작위 샘플 (관측 값)

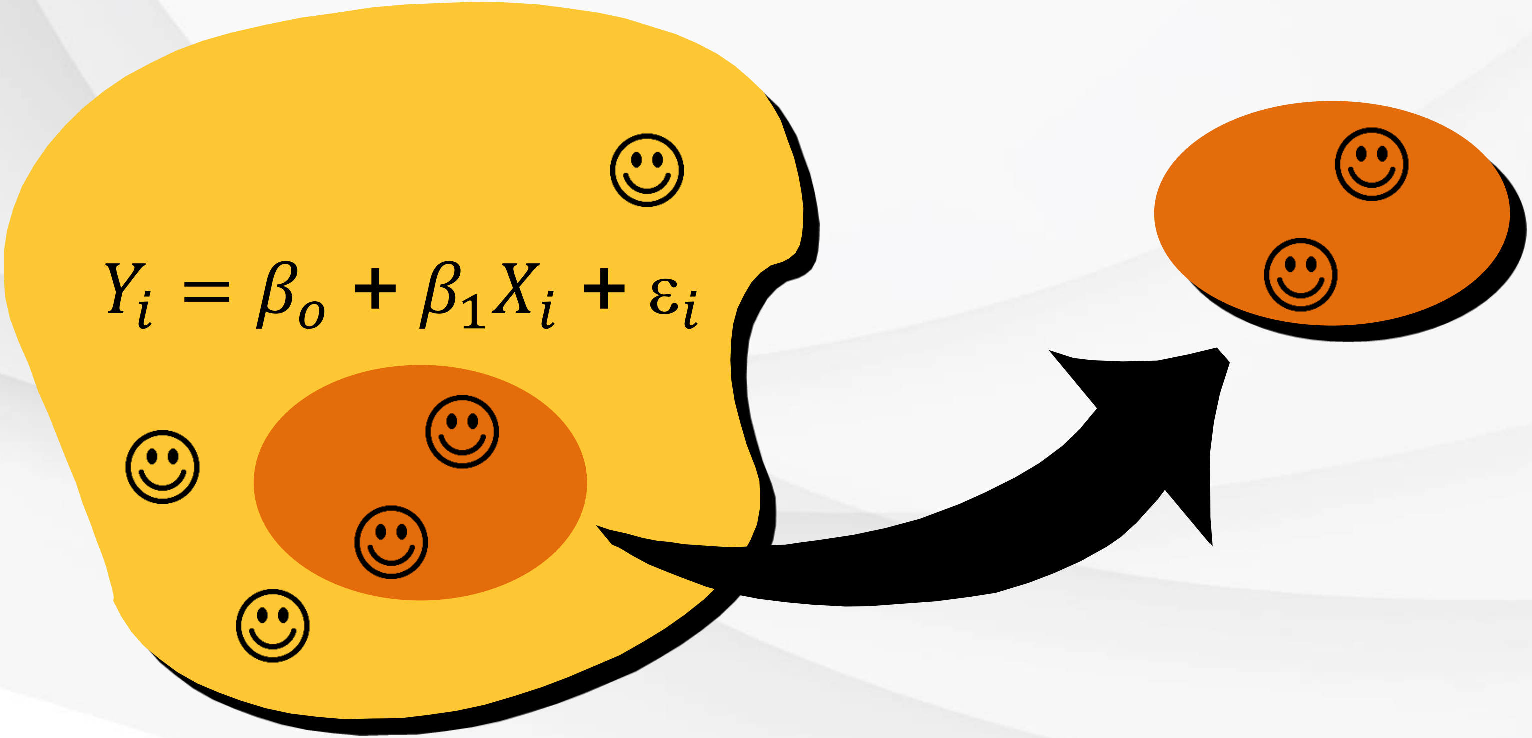
$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

실제 데이터 생성 규칙

회귀 모델의 예측 대상

모집단 (참값)

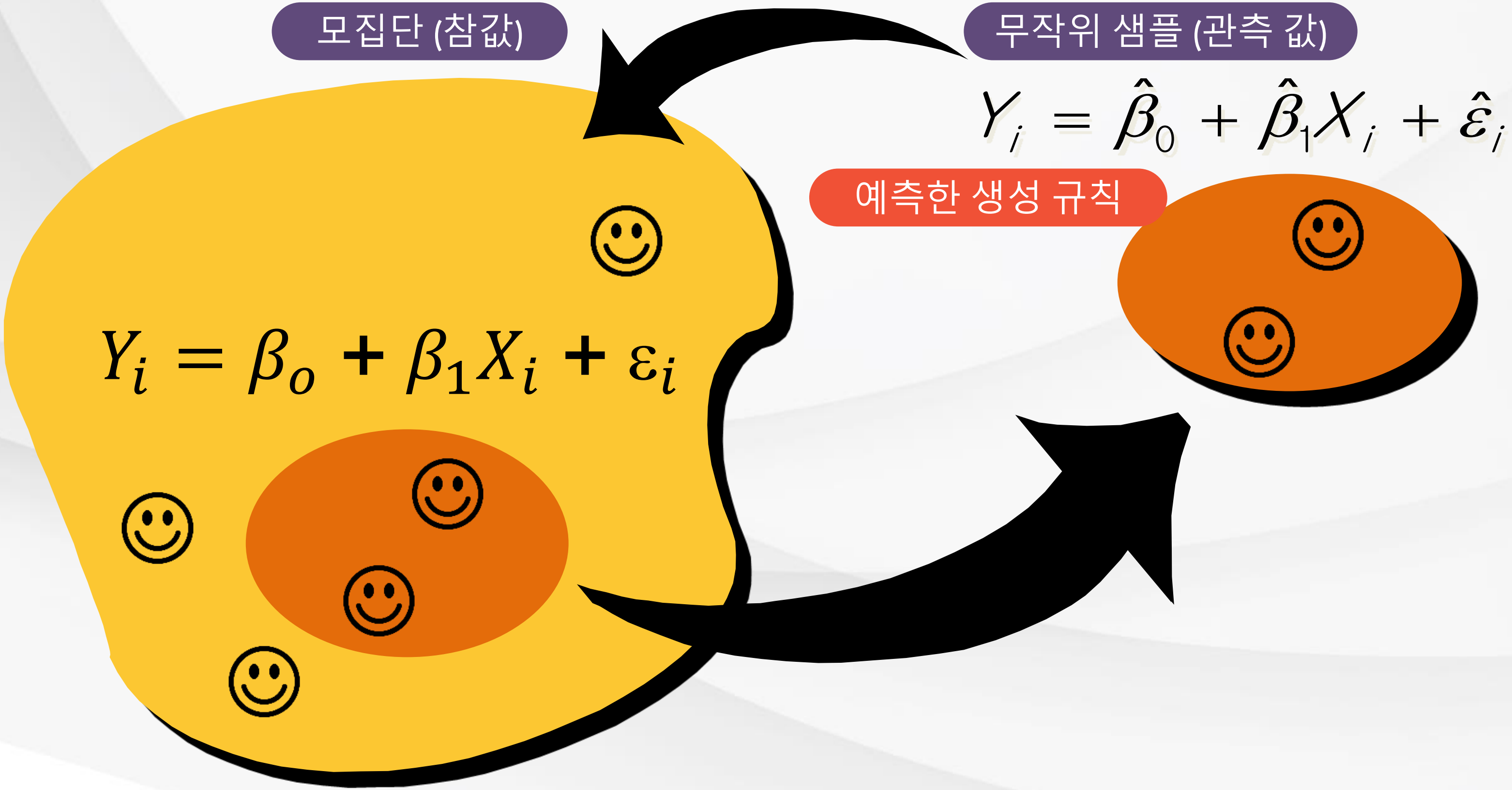
무작위 샘플 (관측 값)



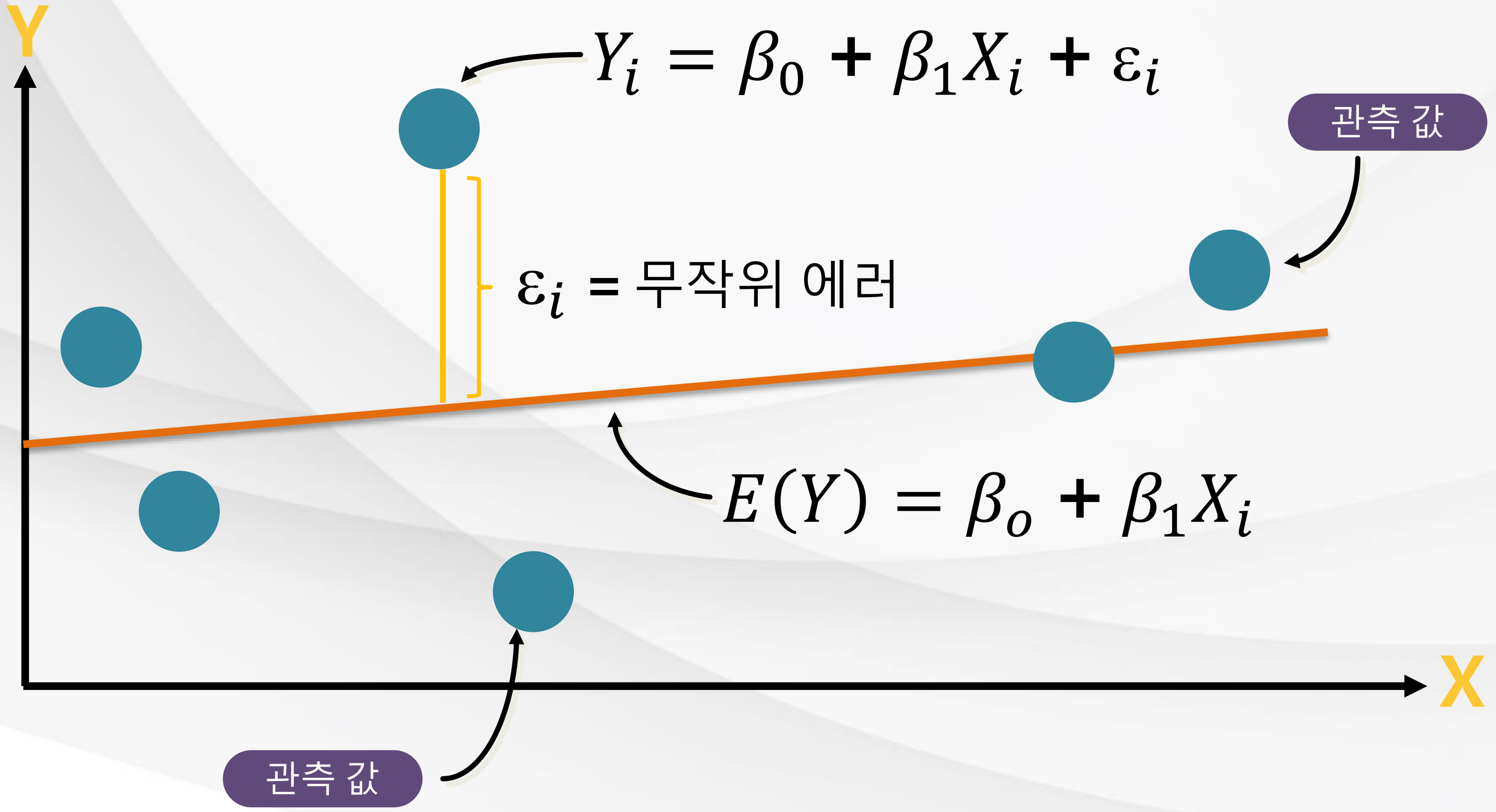
$$Y_i = \beta_o + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

1. 선형 회귀 모델

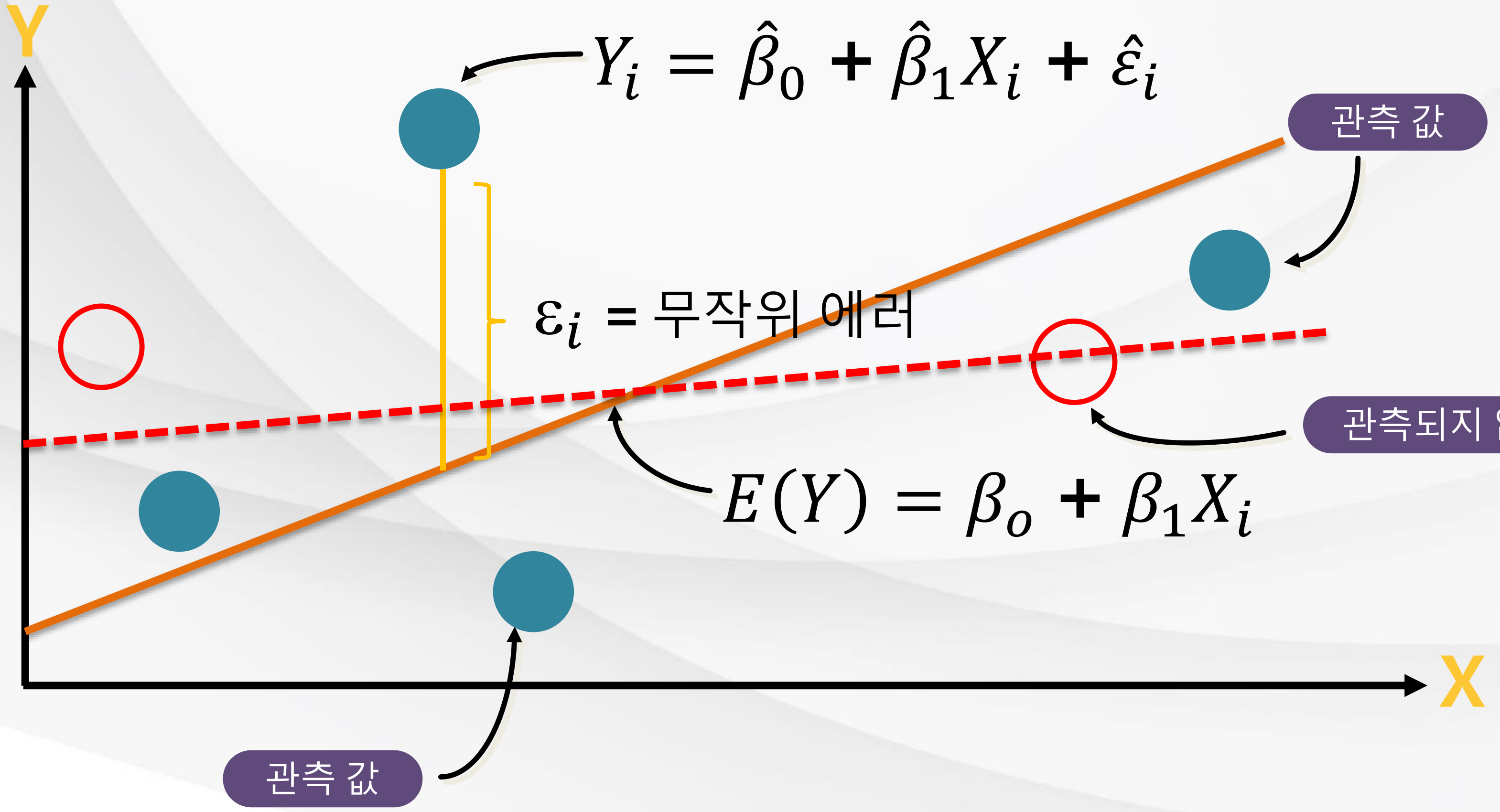
회귀 모델의 예측 대상



선형 회귀 모델의 확률적 관점



선형 회귀 모델의 확률적 관점



2. 파라미터 예측: 최소 제곱 방법

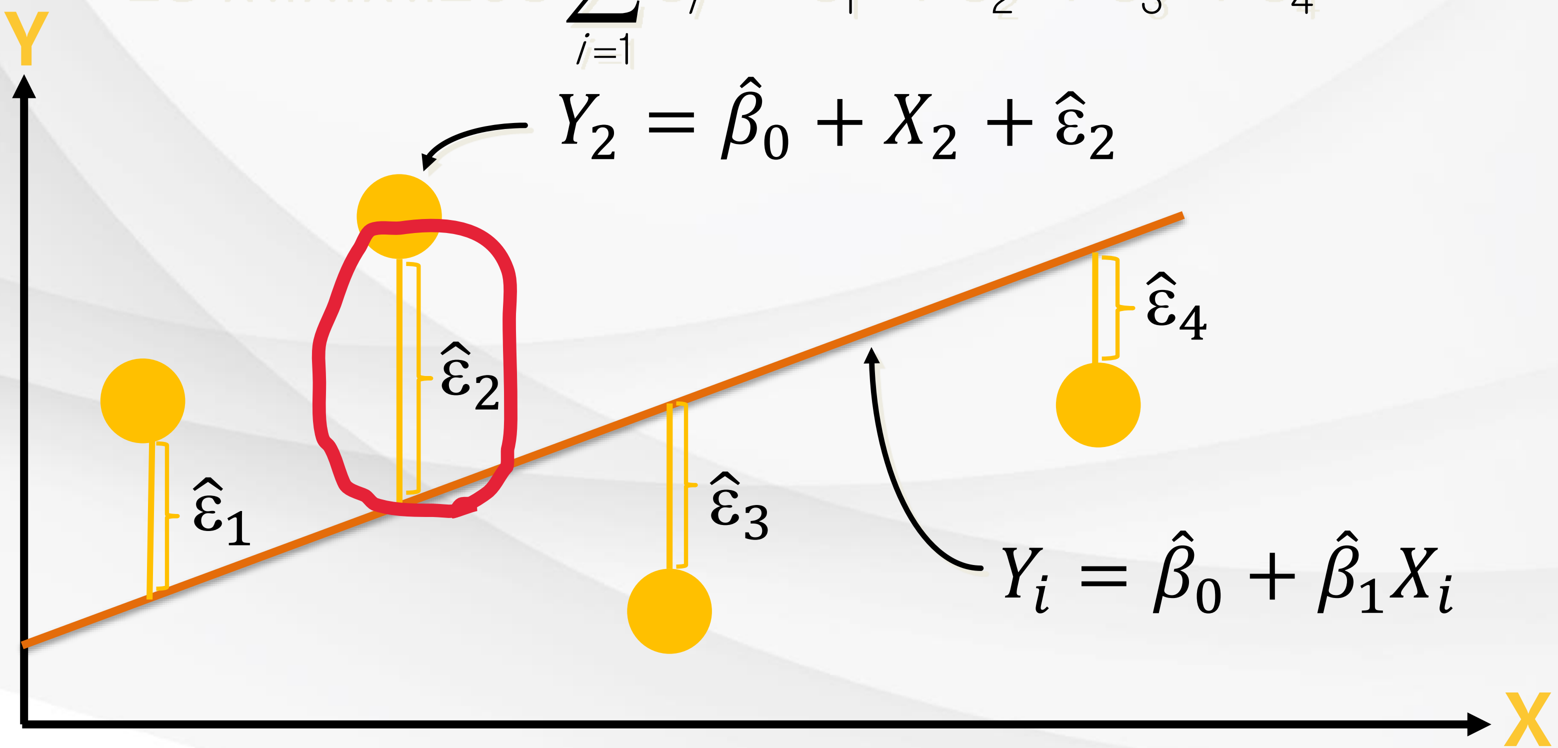
2. 파라미터 예측: 최소 제곱 방법

최소 제곱

- 최적의 모델은 실제 Y값과 예측된 Y값의 차이 (에러)가 최소가 되어야 함
- 에러의 값은 무조건 양수이어야 하므로 제곱을 시킴
- 최소 제곱 방법은 에러의 제곱의 합 **(Sum of the Squared Errors, SSE)**을 최소화 시킴

최소 제곱

$$\text{LS minimizes} \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \hat{\varepsilon}_1^2 + \hat{\varepsilon}_2^2 + \hat{\varepsilon}_3^2 + \hat{\varepsilon}_4^2$$



2. 파라미터 예측: 최소 제곱 방법

최소 제곱의 해

❖ 예측 방정식

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

❖ 기울기

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

❖ Y-절편

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Tacademy

Error => $\hat{\beta}, \hat{\beta}_0$

Y 절편 구하기

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$-2\sum(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)$

$\hat{\beta}_0$

$$0 = \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta_0} = \frac{\partial \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\partial \beta_0}$$

$$= -2(n\bar{y} - n\beta_0 - n\beta_1 \bar{x})$$

$-2(n\bar{y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}\bar{x})$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

2. 파라미터 예측: 최소 제곱 방법

기울기 구하기

Error

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

$$0 = \frac{\partial \sum \varepsilon_i^2}{\partial \beta_1} = \frac{\partial \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2}{\partial \beta_1}$$

$$-2\sum x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$= -2\sum x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)$$

$$= -2\sum x_i (y_i - \bar{y} + \beta_1 \bar{x} - \beta_1 x_i)$$

$$\beta_1 \sum x_i (x_i - \bar{x}) = \sum x_i (y_i - \bar{y})$$

$$\beta_1 \sum (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}}$$

$$-\frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

2. 파라미터 예측: 최소 제곱 방법

기울기와 y-절편의 의미

1. 기울기 ($\hat{\beta}_1$) - 추정된 Y 는 X 가 1 단위 증가할 때마다 $\hat{\beta}_1$ 만큼 변화

- 만약 $\hat{\beta}_1 = 2$인 경우, Y 는 X 가 1 단위 증가할 때마다 2씩 증가

2. Y-절편 ($\hat{\beta}_0$) - X = 0인 경우 Y 의 평균 값

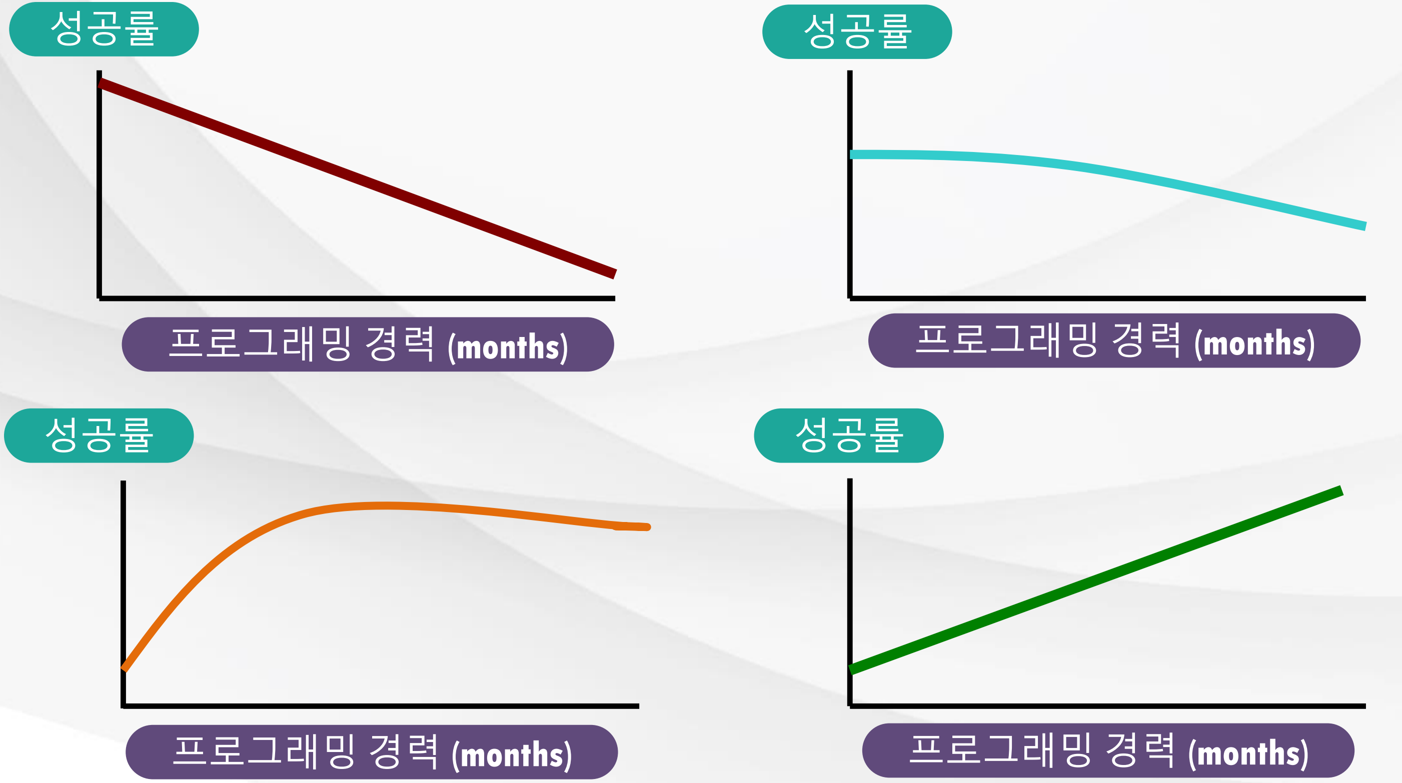
- 만약 $\hat{\beta}_0 = 4$인 경우, X 가 0일 때 Y 의 평균값은 4

3. 선형 회귀 모델로는 안 풀리는 문제들

3. 선형 회귀 모델로는 안 풀리는 문제들

무엇이 더 좋은 모델일까?

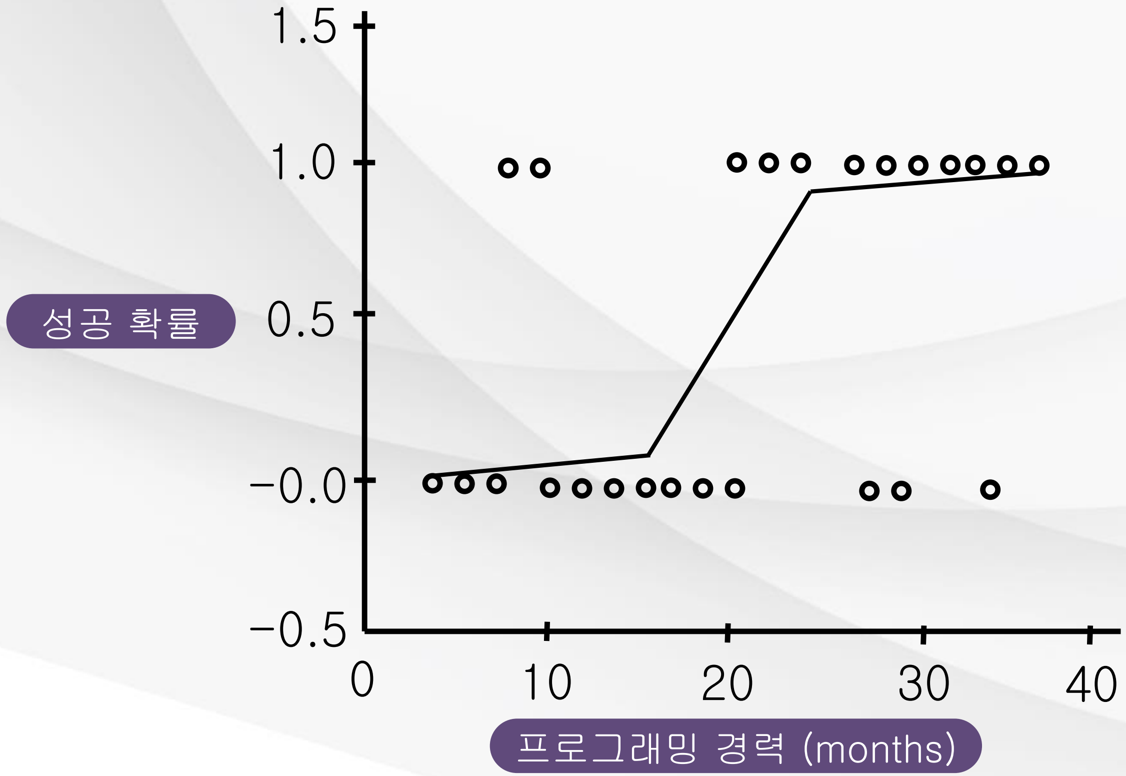
❖ 예> 프로그래밍 숙제의 성공 여부 예측



3. 선형 회귀 모델로는 안 풀리는 문제들

선형성의 한계

❖ 예> 프로그래밍 숙제의 성공 여부 예측



학습정리

학습정리

지금까지 [선형 회귀 모델]에 대해서 살펴보았습니다.

선형 회귀 모델

한 개의 종속 변수와 다수의 설명 변수들 사이의 관계를 선형 방정식으로 모델링 $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$

파라미터 예측: 최소 제곱 방법

$$\hat{\beta}_1 = \frac{SS_{xy}}{SS_{xx}} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

선형 문제로는 풀리지 않는 문제들

종속변수와 설명변수 사이 비선형 관계 존재