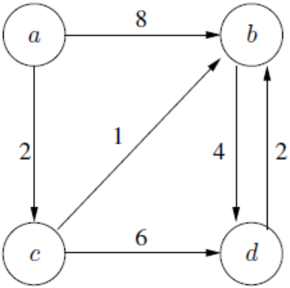
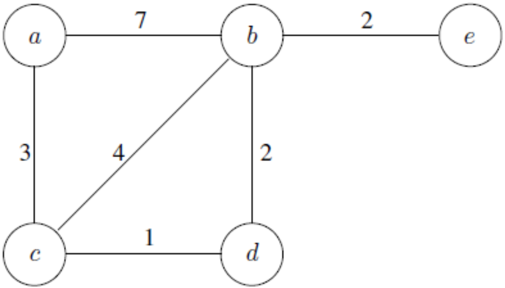
Informatik

Graphen: Begriffe, Adjazenzmatrix, Floyd-Warshall

Ein *Graph* besteht aus Knoten und Kanten. Er kann gerichtet oder ungerichtet sein. Die Kanten können gewichtet sein (Kosten).

Ein *Graph* besteht aus Knoten und Kanten. Er kann gerichtet oder ungerichtet sein. Die Kanten können gewichtet sein (Kosten).

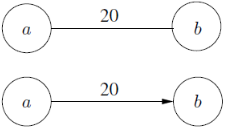




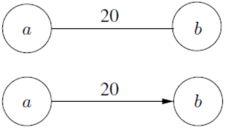
Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

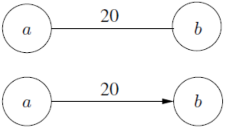
1. Orte



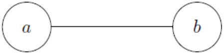
Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

1. Orte  Entfernungen, Kosten, Dauer

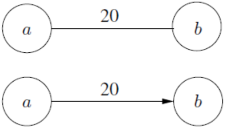
Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

1. Orte 

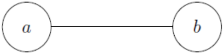
Entfernungen, Kosten, Dauer

2. Personen 

Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

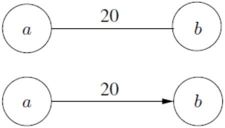
1. Orte 

Entfernungen, Kosten, Dauer

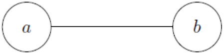
2. Personen 

ist verheiratet mit

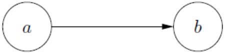
Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

1. Orte 

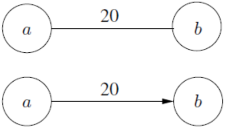
Entfernungen, Kosten, Dauer

2. Personen 

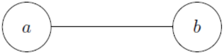
ist verheiratet mit

3. Ereignisse 

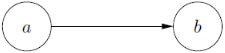
Mit Graphen können binäre Beziehungen zwischen Objekten modelliert werden. Die Objekte werden durch die Knoten, die Beziehungen durch die Kanten modelliert.

1. Orte 

Entfernungen, Kosten, Dauer

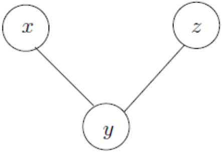
2. Personen 

ist verheiratet mit

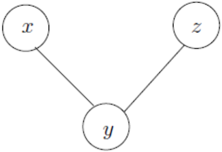
3. Ereignisse 

a muss vor b geschehen

Begriffe

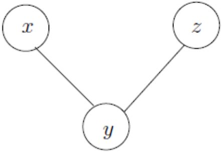


Begriffe



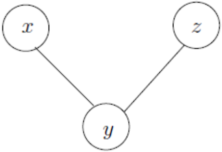
x ist zu y adjazent,

Begriffe



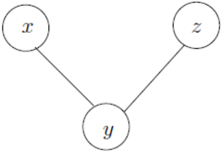
x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,

Begriffe



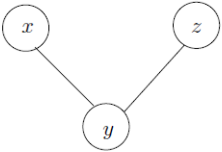
x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,

Begriffe

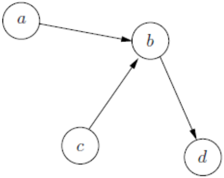


x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

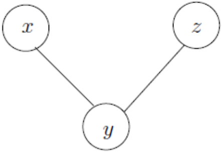
Begriffe



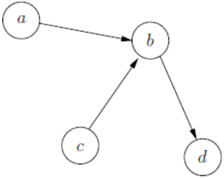
x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2



Begriffe

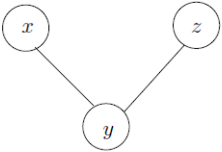


x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

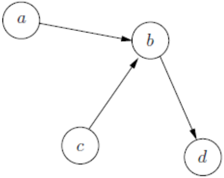


a ist Vorgänger von b,

Begriffe

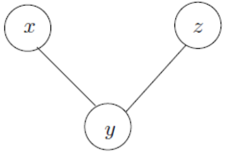


x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

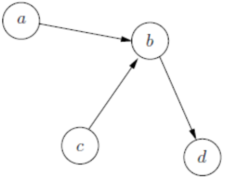


a ist Vorgänger von b,
b ist Nachfolger von a,

Begriffe

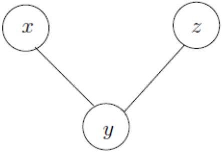


x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

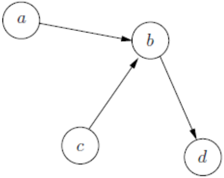


a ist Vorgänger von b,
b ist Nachfolger von a,
Eingangsgrad von b ist 2,

Begriffe

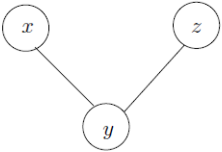


x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

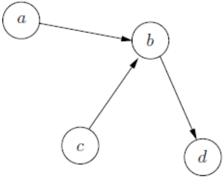


a ist Vorgänger von b,
b ist Nachfolger von a,
Eingangsgrad von b ist 2,
Ausgangsgrad von b ist 1

Begriffe



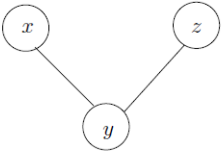
x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2



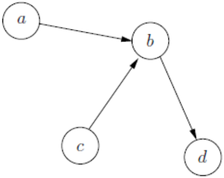
a ist Vorgänger von b,
b ist Nachfolger von a,
Eingangsgrad von b ist 2,
Ausgangsgrad von b ist 1

Ein *Weg* ist eine Folge von adjazenten Knoten.

Begriffe



x ist zu y adjazent,
x und y sind Nachbarn,
x und z sind unabhängig,
der Grad von y ist 2

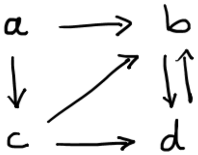


a ist Vorgänger von b,
b ist Nachfolger von a,
Eingangsgrad von b ist 2,
Ausgangsgrad von b ist 1

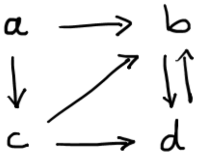
Ein *Weg* ist eine Folge von adjazenten Knoten.

Ein *Kreis* ist eine Weg, der zurück zum Startknoten führt.

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



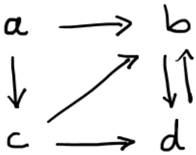
Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*

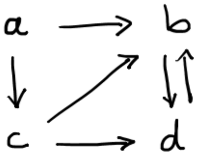


Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



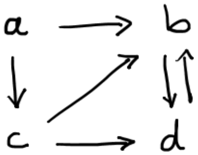
Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

```
G = [[0 ,  1 ,  1 ,  0] ,
     [0 ,  0 ,  0 ,  1] ,
     [0 ,  1 ,  0 ,  1] ,
     [0 ,  1 ,  0 ,  0]]
```

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

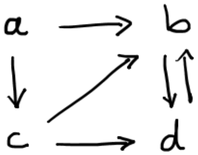
Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

```
G = [[0, 1, 1, 0],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 1, 0, 1],
     [0, 1, 0, 0]]
```

```
# gibt es Kante von a nach b?
```

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

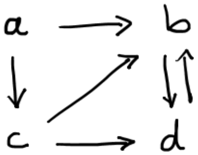
Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

```
G = [[0, 1, 1, 0],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 1, 0, 1],
     [0, 1, 0, 0]]
```

```
# gibt es Kante von a nach b?
>>> G[0][1] == 1
True
# alle Nachbarn von a
```

Implementation eine ungewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

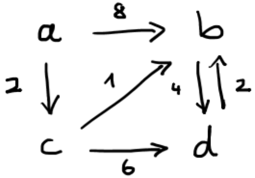
Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

	0	1	2	3
0	0	1	1	0
1	0	0	0	1
2	0	1	0	1
3	0	1	0	0

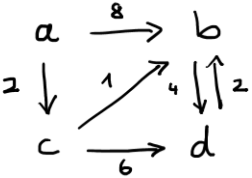
```
G = [[0, 1, 1, 0],
     [0, 0, 0, 1],
     [0, 1, 0, 1],
     [0, 1, 0, 0]]
```

```
# gibt es Kante von a nach b?
>>> G[0][1] == 1
True
# alle Nachbarn von a
>>> for k in [j for j in range(len(G)) if G[0][j] == 1]:
        print(k)
1
2
>>>
```

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



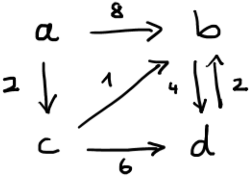
Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*

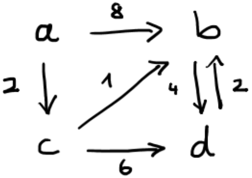


Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Nicht vorhandene Kanten haben Kosten:

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*

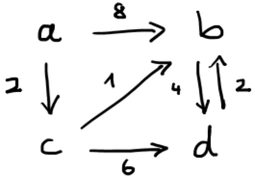


Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Nicht vorhandene Kanten haben Kosten: unendlich

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

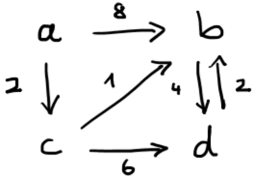
Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Nicht vorhandene Kanten haben Kosten: unendlich

```
inf = float('inf')
G = [[0,    8,    2, inf],
     [inf,  0, inf,    4],
     [inf,  1,    0,   6],
     [inf,  2, inf,    0]]

# Kosten von von a nach b
```

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

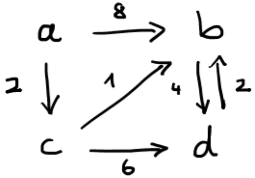
Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Nicht vorhandene Kanten haben Kosten: unendlich

```
inf = float('inf')
G = [[0,   8,   2, inf],
     [inf, 0, inf,   4],
     [inf, 1,   0,   6],
     [inf, 2, inf,   0]]

# Kosten von von a nach b
>>> G[0][1]
8
# alle Nachbarn von a
```

Implementation eine gewichteten Graphen durch eine *Adjazenzmatrix*



Wir ordnen jedem Knoten einen Index zu:

Index	0	1	2	3
Knoten	a	b	c	d

Nicht vorhandene Kanten haben Kosten: unendlich

```
inf = float('inf')
G = [[0,   8,   2, inf],
     [inf, 0, inf,   4],
     [inf, 1,   0,   6],
     [inf, 2, inf,   0]]

# Kosten von von a nach b
>>> G[0][1]
8
# alle Nachbarn von a
>>> for k in [j for j in range(len(G)) if j!=0 and G[0][j] < inf]:
        print(k)
1
2
```

Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.

Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.

Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.
Kein effizientes Verarbeiten der Nachbarn eines Knotens.

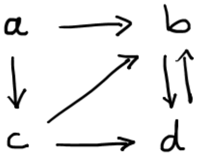
Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.
Kein effizientes Verarbeiten der Nachbarn eines Knotens.
Sinnvoll bei dicht besetzten Graphen, d.h. Graphen mit quadratisch vielen Kanten.

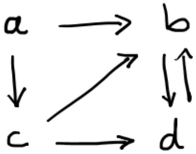
Analyse Implementation durch Adjazenzmatrizen:

Platzbedarf $= O(|V|^2)$.
Direkter Zugriff auf Kante (i, j) in konstanter Zeit möglich.
Kein effizientes Verarbeiten der Nachbarn eines Knotens.
Sinnvoll bei dicht besetzten Graphen, d.h. Graphen mit quadratisch vielen Kanten.
Sinnvoll bei Algorithmen, die wahlfreien Zugriff auf eine Kante benötigen.

Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.

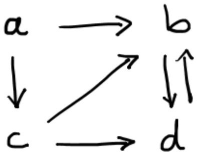


Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.




```
G = {'a':set('bc'),
     'b':set('d'),
     'c':set('bd'),
     'd':set('b')}
```

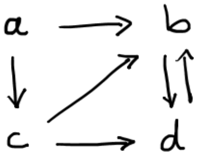
Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.




```
G = {'a':set('bc'),
     'b':set('d'),
     'c':set('bd'),
     'd':set('b')}
```

```
# gibt es Kante von a nach b
```

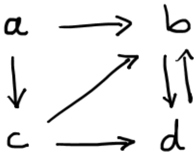
Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.




```
G = {'a':set('bc'),
     'b':set('d'),
     'c':set('bd'),
     'd':set('b')}
```

```
# gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
True
# alle Nachbarn von a:
```

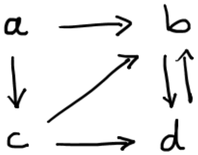
Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.




```
G = {'a':set('bc'),
     'b':set('d'),
     'c':set('bd'),
     'd':set('b')}
```

```
# gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
True
# alle Nachbarn von a:
>>> for v in G['a']:
    print(v)
c
b
# alle Knoten von G durchlaufen:
```

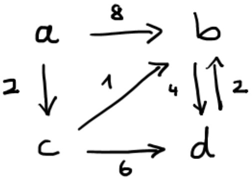
Implementation durch eines ungewichteten Graphen durch Adjazenzlisten, hier: Adjazenzmengen. Jedem Knoten wird in einem dictionary die Menge der Zielknoten der von ihm ausgehenden Kanten zugeordnet.



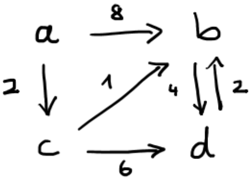

```
G = {'a':set('bc'),
     'b':set('d'),
     'c':set('bd'),
     'd':set('b')}
```

```
# gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
True
# alle Nachbarn von a:
>>> for v in G['a']:
    print(v)
c
b
# alle Knoten von G durchlaufen:
>>> for v in G:
        ....
```

Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.

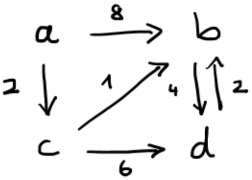


Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

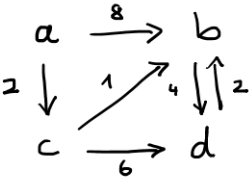
Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

```
# gibt es Kante von a nach b
```

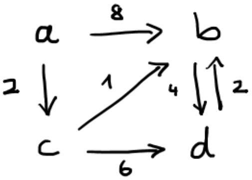
Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

```
 # gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
# die Kosten der Kante von a nach b:
```

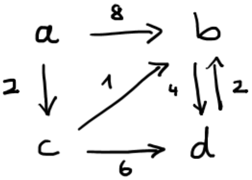
Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

```
 # gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
# die Kosten der Kante von a nach b:
>>> G['a']['b']
# alle Nachbarn von a
```

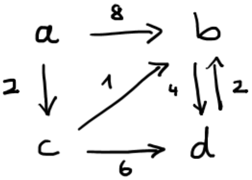
Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

```
 # gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
# die Kosten der Kante von a nach b:
>>> G['a']['b']
# alle Nachbarn von a
>>> for v in G['a']:    ....
# alle Knoten von G durchlaufen:
```

Implementation eines gewichteten Graphen durch ein dictionary von dictionaries. Jedem Knoten wird ein dictionary zugeordnet, die jeder ausgehenden Kante ihre Kosten zuordnet.




```
G = {'a': {'b':8, 'c':2},
     'b': {'d':4},
     'c': {'b':1, 'd':6},
     'd': {'b':2}}
```

```
 # gibt es Kante von a nach b
>>> 'b' in G['a']
# die Kosten der Kante von a nach b:
>>> G['a']['b']
# alle Nachbarn von a
>>> for v in G['a']:    ....
# alle Knoten von G durchlaufen:
>>> for v in G:   ....
```

Analyse Implementation durch Adjazenzlisten:

Analyse Implementation durch Adjazenzlisten:

Platzbedarf $= O(|E|)$.

Analyse Implementation durch Adjazenzlisten:

Platzbedarf $= O(|E|)$.
Bei Verwendung von Listen kein effizienter Zugriff auf Kante (x, y) möglich.

Analyse Implementation durch Adjazenzlisten:

Platzbedarf $= O(|E|)$.
Bei Verwendung von Listen kein effizienter Zugriff auf Kante (x, y) möglich.
Sinnvoll bei dünn besetzten Graphen, d.h. Graphen mit nur linear vielen Kanten.

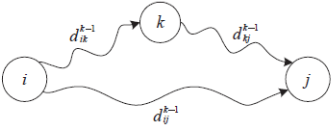
Analyse Implementation durch Adjazenzlisten:

Platzbedarf $= O(|E|)$.
Bei Verwendung von Listen kein effizienter Zugriff auf Kante (x, y) möglich.
Sinnvoll bei dünn besetzten Graphen, d.h. Graphen mit nur linear vielen Kanten.
Sinnvoll bei Algorithmen, die, gegeben ein Knoten x, dessen Nachbarn verarbeiten müssen.

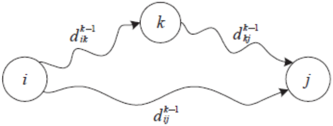
Der *Floyd-Warshall Algorithmus* löst das *all-pairs-shortest-path* Problem.

Der *Floyd-Warshall Algorithmus* löst das *all-pairs-shortest-path* Problem. Die Matrix D^k enthält die Kosten der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten i und j, die als Zwischenknoten nur die Knoten $0, 1, ..., k$ verwenden.

Der *Floyd-Warshall Algorithmus* löst das *all-pairs-shortest-path* Problem. Die Matrix D^k enthält die Kosten der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten i und j, die als Zwischenknoten nur die Knoten $0, 1, ..., k$ verwenden. Dann lässt sich $d_{i,j}^k$ errechnen durch das Minimum von $d_{i,j}^{k-1}$ und $d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}$.



Der *Floyd-Warshall Algorithmus* löst das *all-pairs-shortest-path* Problem. Die Matrix D^k enthält die Kosten der kürzesten Wege zwischen zwei Knoten i und j, die als Zwischenknoten nur die Knoten $0, 1, ..., k$ verwenden. Dann lässt sich $d_{i,j}^k$ errechnen durch das Minimum von $d_{i,j}^{k-1}$ und $d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}$.



Um die Kantenfolge zu rekonstruieren, wird gleichzeitig eine Folge von Matrizen P^k aufgebaut, die an Position $p_{i,j}^k$ den vorletzten Knoten auf dem kürzesten Weg von i nach j notiert, der nur über die Zwischenknoten $0, 1, ..., k$ läuft.

```python
def floyd (c):
    n = len(c)
    d = [[0]*n for j in range(n)]
    p = [[0]*n for j in range(n)]
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            d[i][j] = c[i][j]
            p[i][j] = i

    for k in range(n):
        for i in range(n):
            for j in range(n):
                tmp = d[i][k] + d[k][j]
                if tmp < d[i][j]:
                    d[i][j] = tmp
                    p[i][j] = p[k][j]
    return d, p

def printPath(p, i, j):
    if i == j: print(i,end='')
    else:
        printPath(p,i,p[i][j])
        print(' - ' + str(j),end='')
```