Die Regel von L'Hospital

erlaubt uns die Berechnung von Grenzwerten, bei denen ∞ im Spiel ist.

z.B.: $x \cdot \ln x \qquad x \to 0^+$

$x \cdot e^{-x} \qquad x \to \infty$

$\frac{\ln x}{x} \qquad x \to \infty$

Bsp 1: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^{10}-1}{x^2-1} = *$

Einsetzen von $x = 1$ ergibt $\frac{0}{0}$ ("unbestimmte Form")

Wir können den lim berechnen, wenn wir Zähler und Nenner durch den Linearfaktor $(x-1)$ dividieren.

$* = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x^{10}-1)/(x-1)}{(x^2-1)/(x-1)} = **$ statt diese Polynomdivision durchzuführen interpretieren wir den Ausdruck als Differenzenquotient

$f(x) = x^{10}-1 \qquad \lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 10$

$f(1) = 0$

$g(x) = x^2-1 \qquad \lim\limits_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 2$

$g(1) = 0$

$\Rightarrow ** = 5$

Allgemein:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)/(x-a)}{g(x)/(x-a)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim\limits_{x \to a} \frac{g(x)-f(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$f(a) = g(a) = 0$

Diese Umformung gilt falls $g'(a) \neq 0$.

Die L'Hospitalsche Regel (1. Version)

Diese Regel erweitert die Möglichkeiten weiter. (Der Fall $g'(a) = 0$ kann u.U. auch noch mit abgedeckt werden).

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls $f(a) = g(a) = 0$ und falls der rechte Grenzwert existiert.

(hier wird nicht mehr verlangt, dass $g'(a) \neq 0$).

Bsp 2: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 2x} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\cos 5x}{2\cos 2x} = \dfrac{5}{2}$

Bsp 3: $\dfrac{\cos x - 1}{x^2} \underset{x\to 0}{\overset{\text{statt limes}}{\sim}} \dfrac{-\sin x}{2x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-\cos x}{2} \sim \dfrac{-\cos 0}{2} = -\dfrac{1}{2}$

weil dies exist
existiert auch der erste limes

L'Hospitalsche Regel (Erweiterung zu Version 1)

Diese Fälle sind erlaubt:

$f(a) = g(a) = 0$ (bisher)

$a = \pm\infty$

$f(a), g(a) = \pm\infty$

die rechte Seite existiert oder ist $\pm\infty$

L'Hospital anwendbar in den Fällen $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, a kann irgendwas sein, auch $\pm\infty$, die rechte Seite muss entweder existieren oder $\pm\infty$.

Bsp 4: $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x \cdot \ln x}_{0\cdot(-\infty)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x = 0$

das ist eine unbestimmte Form

$\frac{-\infty}{\infty}$

x geht schneller gegen 0 als ln x gegen $-\infty$ geht.

Bsp 5: $\lim\limits_{x\to\infty} x e^{-px} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^{px}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{p\cdot e^{px}} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

$p > 0$

$\frac{\infty}{\infty}$

x wächst langsamer gegen ∞ als e^{px} $(p>0)$.

Bsp 5': $\dfrac{e^{px}}{x^{100}}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

möglich: 100 mal L'Hospital anwenden.

besser: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{px}}{x^{100}} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{px}{100}}}{x}\right)^{100} = \left(\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{p}{100}\cdot e^{\frac{px}{100}}}{1}\right)^{100}$

$= \left(\frac{\infty}{1}\right)^{100} = \infty$

dies ist ein Beispiel für den Fall: die rechte Seite darf $\pm\infty$ sein.

e^{px} $(p>0)$ wächst schneller als jedes Polynom.

Bsp 6: $\dfrac{\ln x}{x^{1/3}} \underset{x\to\infty}{\sim} \dfrac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} \underset{x\to\infty}{\sim} 3x^{-1/3} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$\frac{\infty}{\infty}$

ln x wächst langsamer gegen unendlich als jedes x^p $(p>0)$.

Eine weitere unbestimmte Form: 0^0

Bsp7: $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$ $\quad x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x} \to e^0 = 1$

veränderlicher Exponent: unter Basis e.

Bsp8: $\dfrac{x^5 + 2x^4 + 1}{x^4 + 2} \xrightarrow{x \to \infty} \infty$ $\quad$ man könnte hier L'Hosp. anwenden. Aber die alte Methode (erweitern mit $\frac{1}{x^5}$) ist einfacher.

Bsp9: $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x + \sin x} \underset{\cdot \frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{1 + \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 0}} = 2$

L'Hosp.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{1 + \cos x}$ existiert nicht.

$\Rightarrow$ keine Aussage über den Ausgangsgrenzwert möglich.