Vertiefungskurs Mathematik

Folgen

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Manchmal lässt man eine Folge auch beim Index 0 beginnen.

Manchmal ist uns eine Folge durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

Manchmal ist uns eine Folge durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt eine Folge mit den Folgengliedern

Manchmal ist uns eine Folge durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt eine Folge mit den Folgengliedern
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Manchmal ist uns eine Folge durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt eine Folge mit den Folgengliedern
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Manchmal ist es schwierig, eine Formel für das n-te Folgenglied zu finden.
Eine Folge kann auch rekursiv beschrieben werden:

Manchmal ist uns eine Folge durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt eine Folge mit den Folgengliedern
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Manchmal ist es schwierig, eine Formel für das n-te Folgenglied zu finden. Eine Folge kann auch rekursiv beschrieben werden:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

Der Wert eines Folgenglieds wird durch Rückgriff auf frühere Folgenglieder festgelegt.

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind gleich.

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \ldots$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$(b_n) = 1, 1, 3, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{31}{17}, \frac{57}{31}, \frac{105}{57} \ldots$$

Die Folge (b_n) mit Dezimalzahlen:

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

Wir schreiben $b = \lim_{n \to \infty} b_n$

Es kann schwierig sein, den genauen Grenzwert zu berechnen. Für b_n ist es die Zahl:

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}$$

$$\approx 1,8392867552$$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, ...$ $\quad a_n = 5 + 7n$.
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einen konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96..$ $\quad a_n = 3 \cdot 2^n$.
Allgemeine Form einer geometrischen Folge: $a_n = a_0 \cdot q^n$.
Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.
Das geometrische Mittel zweier Zahlen a, b ist definiert als $\sqrt{a \cdot b}$.

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Damit drücken wir aus: Wir können mit a_n beliebig nahe an die 2 kommen, wenn wir n nur groß genug wählen.

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass a_n nicht mehr als ϵ von 2 entfernt ist, wenn nur $n > n_0$ ist.

Definition Grenzwert: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n) wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Besitzt eine Folge (a_n) eine Grenzwert a - auch *Limes* genannt - so sagt man, die Folge *konvergiert* gegen a und schreibt dafür $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $(a_n) \to a$ für $a \to \infty$.

Andere Formulierung: a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ϵ-Umgebung von a *fast alle* Elemente der Folge liegen.

Beispiel: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n$.
Wähle als n_0 eine Zahl mit $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$. $\square$

Beispiel: für $\epsilon = \frac{1}{100}$ wählen wir $n_0 = 98$. Alle Folgenglieder nach a_{98} haben den Abstand kleiner als $\frac{1}{100}$ zum Grenzwert 1.