

A9

A9:

Berechne in \mathbb{Z}_{23} die folgenden Brüche:

a. $\frac{1}{5^{21}}$ b. $\frac{1}{10^{13}}$ c. $\frac{7}{10^{12}}$ d. $\frac{7}{22}$

Prüfe, ob die angegebene Zahl eine Primitivwurzel ist:

e. 4 in \mathbb{Z}_{13} f. 6 in \mathbb{Z}_{13}

$$a) \frac{1}{5^{21}} = 5^{-21} = 5^{22-21} = \underline{\underline{5}}$$

$$b) \frac{1}{10^{13}} = 10^{22-13} = 10^9 \\ = 10^8 \cdot 10^1 = 10 \cdot 2 = \underline{\underline{20}}$$

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100 = 8$$

$$10^4 = 64 = 18 = -5$$

$$10^8 = 25 = 2$$

$$c) \frac{7}{10^{12}} = 7 \cdot 10^{22-12} = 7 \cdot 10^{10} = 7 \cdot 10 \cdot 10^9 \\ = 70 \cdot 20 = 1 \cdot 20 = \underline{\underline{20}}$$

$$d) \frac{7}{22} = \frac{7}{-1} = -7 = \underline{\underline{16}}$$

$$e) 4^1 \equiv 4 \pmod{13}$$

$$4^2 \equiv 16 \equiv 3$$

$$4^3 \equiv 12$$

$$4^4 \equiv 9$$

$$4^5 \equiv 36 \equiv 10$$

$$4^6 \equiv 4 \cdot 10 \equiv 40 \equiv 1 \Rightarrow 4 \text{ keine Primitivwurzel in } \mathbb{Z}_{13}$$

$$f) 6^1 \equiv 6 \pmod{13}$$

$$6^2 \equiv 36 \equiv 10$$

$$6^3 \equiv 60 \equiv 8$$

$$6^4 \equiv 48 \equiv 9$$

$$6^5 \equiv 54 \equiv 2$$

$$6^6 \equiv 12$$

$$6^7 \equiv 20 \equiv 7$$

$$6^8 \equiv 16 \equiv 3$$

$$6^9 \equiv 18 \equiv 5$$

$$6^{10} \equiv 4$$

$$6^{11} \equiv 24 \equiv 11$$

$$6^{12} \equiv 14 \equiv 1$$

$\Rightarrow 6$ ist Primitivwurzel von \mathbb{Z}_{13}