## Folgen, Grenzwerte

### A2021

Es sei $(a_n)$ eine Zahlenfolge.
a. Geben Sie die Definition dafür an, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gilt.
b. Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen Null konvergiert. Beweisen Sie durch Anwendung der Definition aus a., dass die Folge $(b_n)$ mit $b_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ eine Nullfolge ist.
c. Beweisen Sie ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen: Sind $(a_n)$ und $(b_n)$ Nullfolgen, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.
d. Geben Sie Beispielfolgen $a_n$, $b_n$ an, die keine Nullfolgen sind, und deren Summenfolge eine Nullfolge bildet.

### A2020

Gegeben seien reelle Folgen $(a_n)$, $(b_n)$ und reelle Zahlen $a, b$.
a. Geben Sie die Definition dafür an, dass $(a_n)$ gegen $a$ konvergiert.
b. Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen $(a_n)$ und $(b_n)$, so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$
b1. Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$ wenn $(a_n)$ gegen $a$ und $(b_n)$ gegen $b$ konvergiert?
b2. Beweisen Sie den Satz.
b3. Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.
c. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(a_n)$ mit
$a_n = \dfrac{n^2 \cdot 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}$

### A2019

a. Gegeben sind eine reelle Folge $(a_n)$ und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$
a1. Geben Sie die Definition der Konvergenz $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
a2. Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge $(a_n)$ konvergent, so ist sie beschränkt.
a3. Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a2 und zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist.
b. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge: $(b_n)$ mit $b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

### A2018

a. Gegeben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:
a1. $(a_n)$ ist konvergent und $(b_n)$ ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
a2. $(a_n)$ ist konvergent und $(b_n)$ ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent
a3. $(a_n)$ ist divergent und $(b_n)$ ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
a4. $(a_n)$ ist divergent und $(b_n)$ ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent
b. Es seinen $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Was kann man über die Folge $(a_n * b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)
c. Es seinen $(a_n)$ eine gegen $a$ konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich $m$, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folgen $(a_n^m)$ konvergiert gegen $a^m$. *Hinweis:* Verwenden Sie die Aussage aus Teil b.

### A2017

Mit $(a_n)$ wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder $a_n, (n \in \mathbb{N})$ besitzt.
a. Es sei $(a_n)$ eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von $(a_n)$ geben $a$ an.
b. Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.
c. Sei $(b_n)$ eine Folge mit $|b_n| \leq \dfrac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(b_n)$ geben 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.
d. Sei $(c_n)$ eine Folge mit $|c_n| \leq \dfrac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie weiter die Folge $(d_n)$ definiert durch $d_1 = \dfrac{1}{2}, d_{n+1} = c_n \cdot d_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folgen $(d_n)$ gegen Null konvergiert.
*Hinweis:* Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

### A2016

Gegeben sei eine reelle Folge $(a_n)$ und eine reelle Zahl $a$.
a. Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge $(a_n)$ gegen a konvergiert, also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$
b.Weise Sie nach, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ gilt.
c. Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \dfrac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist $(a_n)$ konvergent gegen $a$, dann konvergiert auch $(b_n)$ gegen $a$.
d. Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge $(b_n)$ mit

$$b_n := \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n)$$

## Sonstige Aufgaben

### A1

a. Untersuchen Sie die nachstehend gegebene Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen.

$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{2n-2} \cdot \frac{2n^3+3n^2+5}{3n^4+2n^3+n^2+2}$

b. Gegeben sei eine konvergente Folge $a_n$ mit $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ die Ungleichung $a \geq 0$ gilt. *Hinweis:* Sie können beispielsweise die Annahme $a < 0$ zum Widerspruch führen.

### A2

Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{n^2}{2n^2+5}$.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Geben Sie die Definition der Aussage „$a_n$ konvergiert gegen a“ an.

c) Beweisen Sie für die oben angegebene Folge $a_n$ und den von Ihnen gefundenen Grenzwert $a$, dass die Definition von „$a_n$ konvergiert gegen a“ erfüllt ist.

### A3

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3} + \frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2}$

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-2} \quad (n \geq 2)$

c) $a_n = \frac{1+2+...+n}{n^2}$

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1}$

e) $a_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$

### A4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n})$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n})$