Vertiefungskurs Mathematik

Folgen

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Manchmal lässt man eine Folge beim Index 0 beginnen.

Eine Folge kann durch eine Formel für das n-te Folgenglied gegeben sein.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt die Folge
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Eine Folge kann rekursiv durch Rückgriff auf frühere Folgenglieder gegeben sein.

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind gleich.

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, ...$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$(b_n) = 1, 1, 3, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{31}{17}, \frac{57}{31}, \frac{105}{57} ...$$

Die Folge (b_n) mit Dezimalzahlen:

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

Wir schreiben $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Es kann schwierig sein, den genauen Grenzwert zu berechnen. Für b_n ist es die Zahl:

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}$$

$$\approx 1,8392867552$$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, ... \quad a_n = 5 + 7n.$
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96.. \quad a_n = 3 \cdot 2^n.$
Allgemeine Form einer geometrischen Folge: $a_n = a_0 \cdot q^n$.
Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.
Das geometrische Mittel zweier Zahlen a, b ist definiert als $\sqrt{a \cdot b}$.

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2.$

Damit drücken wir aus: Wir können mit a_n beliebig nahe an die 2 kommen, wenn wir n nur groß genug wählen.

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass a_n nicht mehr als ϵ von 2 entfernt ist, wenn nur $n > n_0$ ist.

Definition Grenzwert: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n) wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Besitzt eine Folge (a_n) eine Grenzwert a - auch *Limes* genannt - so sagt man, die Folge *konvergiert* gegen a und schreibt dafür $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $(a_n) \to a$ für $a \to \infty$.

Andere Formulierung: a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ϵ-Umgebung von a *fast alle* Elemente der Folge liegen.

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n.$
Wähle als n_0 eine Zahl mit $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$. □

Beispiel: für $\epsilon = \frac{1}{100}$ wählen wir $n_0 = 98$. Alle Folgenglieder nach a_{98} haben den Abstand kleiner als $\frac{1}{100}$ zum Grenzwert 1.

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen. Wir betrachten die ersten 7 Elemente der Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$$

```
1.00000000000000
1.50000000000000
1.41666666666667
1.41421568627451
1.41421356237469
1.41421356237310
1.41421356237310
```

Die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$. Wenn man eine gute Näherung für $\sqrt{2}$ benötigt, muss man nur weit genug in der Folge fortschreiten.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = \sin(n)$ ist eine beschränkte Folge.
Die Folge (a_n) mit $a_n = n \cdot \sin(\frac{\pi n}{2})$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert. Wähle $\epsilon = 1$. Dann liegen in der ϵ-Umgebung $U = (a - 1, a + 1)$ fast alle Folgenglieder. Die endlich vielen Elemente außerhalb von U haben ein größtes und ein kleinstes Element. Das sind die Schranken der Folge. Falls unterhalb oder oberhalb von U keine Elemente vorhanden sind, wählen wir den Rand von U als Schranke. $\square$

Grenzwertsätze: Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

(G1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G2) Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist das Produkt der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G3) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$, und die (ggf. erst ab einem Index $N > 1$ definierte) Quotientenfolge $(\dfrac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Man darf also den Limes in Summe, Produkt und Quotient zweier Folgen 'reinziehen', wenn(!) die Ausgangs-Folgen konvergent sind.

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:
$\pm x \leq |x|$ und $\pm y \leq |y|$ Also gilt:
$x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.
Insgesamt gilt also: $|x + y| \leq |x| + |y|$. $\square$.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\square$

Beweis von G2:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt:
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq$
$|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n||(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|$.

Da (a_n) konvergiert, gibt es eine Schranke S mit der wir den ersten Summanden abschätzen können. $|a_n||(b_n - b)| \leq S|(b_n - b)|$.

Wir wählen n_1 und n_2 so, dass beide Summanden für größere n kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ sind. Für $n > max\{n_1, n_2\}$ gilt dann:
$|a_n b_n - ab| \leq S|(b_n - b)| + |b||(a_n - a)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. $\square$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ ist streng monton wachsend.

Die Folge (b_n) mit $b_n = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...$ ist monton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Andere Formulierung: Eine Folge ist monoton, wenn alle Folgenglieder in dieselbe Richtung gehen.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Beispiel: Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Mit vollständiger Induktion wir zeigen wir, dass (a_n) streng monoton wächst und beschränkt ist: $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also hat (a_n) einen Grenzwert. Der Grenzwert erfüllt die Gleichung $x = \sqrt{x + 2}$, daraus berechnen wir den Grenzwert $a = 2$.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n) : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls n ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Zwei endliche Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Mengen herstellen kann. Auf unendliche Mengen übertragen zeigt die Folge: Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Etwas Unendliches wird nicht notwendig kleiner, wenn man etwas wegnimmt.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung. Sei D die n-te Dezimalstelle von a_n. Wir konstruieren eine Zahl x mit

Die n-te Dezimalstelle von $x = \begin{cases} D+1, & \text{falls } D \leq 7, \\ D-1 & \text{falls } D = 8 \text{ oder } D = 9 \end{cases}$

Dann ist x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 , kann aber kein Element der Folge (a_n) sein, da es sich von jedem a_n in mindestens einer Dezimalstelle unterscheidet. $\square$