A6

A6:
Beweise die folgenden Aussagen:
a. Wenn $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$, dann $a + c \equiv b + d \mod m$.
b. Wenn $a \equiv b \mod m$, dann $-a \equiv -b \mod m$.
c. Wenn $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m$, dann $a \equiv c \mod m$.

a. $a \equiv b \mod m \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z}: \; a = b + k_1 m$

$c \equiv d \mod m \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{Z}: \; c = d + k_2 m$

$\Rightarrow a + c = b + d + \underbrace{(k_1 + k_2)}_{k' \in \mathbb{Z}} \cdot m$

$\Rightarrow a + c \equiv b + d \mod m$

b. $a \equiv b \mod m \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; a = b + km$

$\Rightarrow -a = -b - km \Rightarrow -a \equiv -b \mod m$

$k' = -k$

c. $a \equiv b \mod m \Rightarrow \exists k_1: \; a = b + k_1 m$

$b \equiv c \mod m \Rightarrow \exists k_2: \; b = c + k_2 m$

$\Big\} \; a = c + k_2 m + k_1 m = c + \underbrace{(k_2 + k_1)}_{k' \in \mathbb{Z}} m \Rightarrow a \equiv c \mod m$