A2018

A2018

a. Gegeben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:

a1. (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent

a2. (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent

a3. (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent

a4. (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent

b. Es seinen $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $a = \lim_{x \to \infty} a_n$ und $b = \lim_{x \to \infty} b_n$. Was kann man über die Folge $(a_n * b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)

c. Es seinen (a_n) eine gegen a konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich m, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folgen (a_n^m) konvergiert gegen a^m. *Hinweis:* Verwenden Sie die Aussage aus Teil b.

a)

a1. $a_n = \frac{1}{n}$ $\quad b_n = n^2$

a2. $a_n = 0$ $\quad b_n = n$

a3. $a_n = b_n = n$

a4. $a_n = n$ $\quad b_n = \frac{1}{n}$

b) $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$

c) I.A.: $m = 1$ $\quad a_n$ konvergiert gegen a nach Voraussetzung.

I.S.: $\lim_{n \to \infty} a_n^{m+1} \underset{(b)}{=} \lim_{n \to \infty} a_n^m \cdot \lim_{n \to \infty} a_n \underset{\text{I.V.}}{=} a^m \cdot a = a^{m+1}$ ✓