Vertiefungskurs Mathematik

Beweismethoden

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: 'Aus A folgt B' oder 'A impliziert B' oder 'Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr'.

Statt 'A ist wahr' sagt man auch 'A gilt'.

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: ‘Aus A folgt B’ oder ‘A impliziert B’ oder ‘Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr’.

Statt ‘A ist wahr’ sagt man auch ‘A gilt’.

Man nennt dann A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*.

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: ‘Aus A folgt B’ oder ‘A impliziert B’ oder ‘Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr’.

Statt ‘A ist wahr’ sagt man auch ‘A gilt’.

Man nennt dann A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*.

Beim *direkten Beweis* geht man davon aus, dass A wahr ist und folgert durch eine Kette gültiger Argumente, dass dann auch B wahr ist.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung:

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $t|a$ und $t|b$

Behauptung:

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a + b)$

Beweis:

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis: Es gilt $t|a$ und $t|b$

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis: Es gilt $t|a$ und $t|b$, d.h. es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot k = a$ und $t \cdot l = b$.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis: Es gilt $t|a$ und $t|b$, d.h. es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot k = a$ und $t \cdot l = b$.
Also gilt: $a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis: Es gilt $t|a$ und $t|b$, d.h. es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot k = a$ und $t \cdot l = b$.
Also gilt: $a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$, was $t|(a+b)$ bedeutet.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis: Es gilt $t|a$ und $t|b$, d.h. es gibt $k, l \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot k = a$ und $t \cdot l = b$.
Also gilt: $a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$, was $t|(a+b)$ bedeutet. $\square$

Der Beweis in Kurzform:

Voraussetzung: $t|a \wedge t|b$

$$\Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} : a = k \cdot t \wedge b = l \cdot t$$
$$\Rightarrow a + b = k \cdot t + l \cdot t = (k + l) \cdot t$$
$$\Rightarrow t|(a + b) \qquad \square$$

Der Beweis in Kurzform:

$$
\begin{aligned}
\text{Voraussetzung:} \quad & t|a \wedge t|b \\
& \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{N} : a = k \cdot t \wedge b = l \cdot t \\
& \Rightarrow a + b = k \cdot t + l \cdot t = (k + l) \cdot t \\
& \Rightarrow t|(a + b) \qquad \square
\end{aligned}
$$

Die 'mathematische Etikette' verlangt, dass man viel Wert auf Begleittext legt und so wenig Folgepfeile und Junktoren wie möglich verwendet.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition:

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

wobei wir $k' = 2k^2 + 2k$ setzen.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

wobei wir $k' = 2k^2 + 2k$ setzen. Somit ist n^2 ungerade.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1,$$

wobei wir $k' = 2k^2 + 2k$ setzen. Somit ist n^2 ungerade. $\square$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 \text{ für ein } t \in \mathbb{N}.$$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Ausklammern von p_k ergibt:
$p_k \cdot (t - p_1 \cdot p_2 \cdot ...(\text{ohne } p_k)... \cdot p_n) = 1$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Ausklammern von p_k ergibt:
$p_k \cdot (t - p_1 \cdot p_2 \cdot ...(\text{ohne } p_k) ... \cdot p_n) = 1$.

Das ist unmöglich, da p_k als Primzahl größer als 1 ist. $\square$

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Im Induktionsschritt nennt man die Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, Induktionsvoraussetzung (IV).

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 =$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=}$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$ (1)
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=}$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) =$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) =$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:

$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$
Also gilt Gleichung (1). $\square$