Vertiefungskurs Mathematik

Beweismethoden

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: ‘Aus A folgt B’ oder ‘A impliziert B’ oder ‘Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr’.

Statt ‘A ist wahr’ sagt man auch ‘A gilt’.

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: 'Aus A folgt B' oder 'A impliziert B' oder 'Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr'.

Statt 'A ist wahr' sagt man auch 'A gilt'.

Man nennt dann A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*.

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: 'Aus A folgt B' oder 'A impliziert B' oder 'Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr'.

Statt 'A ist wahr' sagt man auch 'A gilt'.

Man nennt dann A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*.

Beim *direkten Beweis* geht man davon aus, dass A wahr ist und folgert durch eine Kette gültiger Argumente, dass dann auch B wahr ist.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Beweis: Da t die Zahlen a und b teilt, kann man a und b darstellen als $a = t \cdot k$ und $b = t \cdot l$ für geeignete $k, l \in \mathbb{Z}$.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Beweis: Da t die Zahlen a und b teilt, kann man a und b darstellen als $a = t \cdot k$ und $b = t \cdot l$ für geeignete $k, l \in \mathbb{Z}$. Damit gilt:
$a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Beweis: Da t die Zahlen a und b teilt, kann man a und b darstellen als $a = t \cdot k$ und $b = t \cdot l$ für geeignete $k, l \in \mathbb{Z}$. Damit gilt:
$a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$. Da $(k + l) \in \mathbb{Z}$, teilt t auch $a + b$. $\square$

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& t|a \wedge t|b \\
& \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : a = k \cdot t \wedge b = l \cdot t \\
& \Rightarrow a + b = k \cdot t + l \cdot t = (k+l) \cdot t \\
& \Rightarrow t|(a+b) \qquad \square
\end{aligned}$$

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a + b)$

Beweis:

$$\begin{aligned} & t|a \wedge t|b \\ & \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : a = k \cdot t \wedge b = l \cdot t \\ & \Rightarrow a + b = k \cdot t + l \cdot t = (k + l) \cdot t \\ & \Rightarrow t|(a + b) \qquad \square \end{aligned}$$

Die 'mathematische Etikette' verlangt, dass man viel Wert auf Begleittext legt und so wenig Folgepfeile und Junktoren wie möglich verwendet.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition:

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k + 1)^2$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Also ist n^2 ungerade. $\square$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1 \text{ für ein } t \in \mathbb{N}.$$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1.$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

> $m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
> $p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Ausklammern von p_k ergibt:
> $p_k \cdot (t - p_1 \cdot p_2 \cdot ...(\text{ohne } p_k)... \cdot p_n) = 1$.

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Ausklammern von p_k ergibt:
$p_k \cdot (t - p_1 \cdot p_2 \cdot ...(\text{ohne } p_k)... \cdot p_n) = 1$.

Das ist unmöglich, da p_k als Primzahl größer als 1 ist und der Term in der Klammer kein Bruch ist. $\square$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$. Daraus folgt $q^2 = 2 \cdot k^2$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$. Daraus folgt $q^2 = 2 \cdot k^2$, also ist q^2 gerade und damit auch q.

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$. Daraus folgt $q^2 = 2 \cdot k^2$, also ist q^2 gerade und damit auch q. Da p und q beide gerade sind, ist $\frac{p}{q}$ kein vollständig gekürzter Bruch

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$. Daraus folgt $q^2 = 2 \cdot k^2$, also ist q^2 gerade und damit auch q. Da p und q beide gerade sind, ist $\frac{p}{q}$ kein vollständig gekürzter Bruch, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Im Induktionsschritt nennt man die Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, Induktionsvoraussetzung (IV).

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 =$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=}$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:

$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=}$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) =$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{IV}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) =$$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) =$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{IV}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$

Beispiel:

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$
Also gilt Gleichung (1). $\square$