Aufgaben der Zertifikatsklausuren

A2020

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft
(*) $\quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y > 0$.
a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $f(2^n) = n \cdot f(2)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass $f(1) = 0$ gilt.
c) Beweisen Sie, dass $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Hinweise: Setzen Sie geeignete Werte für x, y in (*) ein. Im Aufgabenteil c) darf das Ergebnis aus b) verwendet werden, auch wenn Teil b) nicht gelöst wurde.

A2019

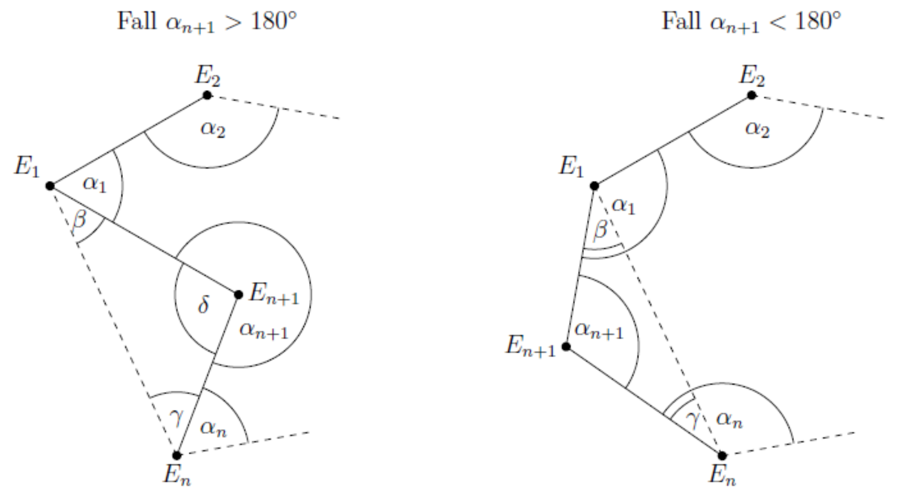
Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = 1 - x^{2^n}$.
a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass
$p_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.
b) Folgern Sie aus a), dass p_n außer $x = \pm 1$ keine weiteren Nullstellen besitzt ($n \in \mathbb{N}$).

A2018

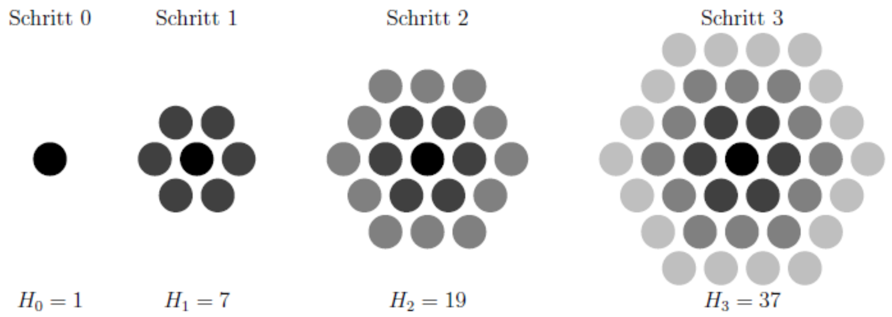
a) Gegeben sind vier positive reelle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$.
Beweisen Sie, dass dann $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$ gilt.
b) Gegeben sind $2n$ positive Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n b_1, b_2, ..., b_n > 0$ mit der Eigenschaft
$\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} ... \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$.
Beweisen Sie, dass $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + ... + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$

A2017

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein einfaches n-Eck hat n verschiedene Eckpunkte $E_1, ..., E_n$, die durch Kanten verbunden sind. Außerdem schneiden sich die Kanten nicht, und für die Innenwinkel $\alpha_1, ..., \alpha_n$ an den Ecken gilt: $\alpha_j \neq 0°, 180°, 360°$ für $j = 1, ..., n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summe S_n der Innenwinkel in einem einfachen n-Eck mit $n \geq 3$ gilt: $S_n = (n-2) \cdot 180°$. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt.
Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\alpha_{n+1} > 180°$ und $\alpha_{n+1} < 180°$. Verwenden Sie die in der jeweiligen Skizze eingezeichnete Hilfslinie.



A2016
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Sechseckszahlen $H_n (n = 0, 1, 2, ...)$. Wir betrachten dazu Anordnungen von Kreisen mit gleichem Radius, die schrittweise folgendermaßen erzeugt werden: Im Schritt 0 beginnen wir mit einem einzelnen Kreis, der im Schritt 1 wie unten skizziert durch Anlagerung von sechs weiteren Kreisen zu einer sechseckartigen Figur ergänzt wird. Nachfolgend wird im Schritt n + 1 die Figur aus dem Schritt n durch eine weitere äußere Lage von Kreisen zu einer noch größeren sechseckartigen Figur ergänzt, wobei sich die Länge der äußeren Seiten um jeweils eine Kugel erhöht. Die Sechseckzahl H_n entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der so erzeugten Figur im Schritt n.



a) Drücken Sie H_{n+1} durch H_n aus $(n = 0, 1, 2, ...)$
b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Sechseckzahl die Gleichung $H_n = 3n^2 + 3n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.
c) Zeigen Sie, dass die Summe der Sechseckzahlen gerade die Kubikzahlen $\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$ liefert $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Sie dürfen die Formel aus Teil b) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Sonstige Aufgaben

A1: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt rational, wenn sie sich als Bruch $a = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligen p, q und $q \neq 0$ darstellen lässt. Gegeben seien eine feste rationale Zahl $a \neq 0$ und eine beliebige reelle Zahl b. Folgender Satz soll untersucht werden: Ist b nicht rational, so ist auch $a \cdot b$ nicht rational.
a. Geben Sie Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.
b. Bilden Sie die Kontraposition.
c. Beweisen Sie den Satz.

A2: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$