A2

A2

Gegeben ist die Folge $a_n = \dfrac{n^2}{2n^2+5}$.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Geben Sie die Definition der Aussage „a_n konvergiert gegen a“ an.

c) Beweisen Sie für die oben angegebene Folge a_n und den von Ihnen gefundenen Grenzwert a, dass die Definition von „a_n konvergiert gegen a“ erfüllt ist.

a)

$$\frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{1}{2+\frac{5}{n^2}} \xrightarrow[\text{für } n\to\infty]{} \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : |a - a_n| < \varepsilon$

c) Sei $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{n^2}{2n^2+5} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{2n^2+5-2n^2}{4n^2+10} < \varepsilon$$

$$\frac{5}{\varepsilon} < 4n^2+10$$

$$\Uparrow \quad \frac{5}{\varepsilon} < 4n^2$$

$$\Uparrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n^2$$

$$\Uparrow \quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$

Setze $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$. Dann gilt: $\left|a_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ für $n > n_0$.