Komplexe Zahlen
link

A1: Bringe die folgenden Ausdrücke in die Form $a+bi$ mit $a,b\in\mathbb{R}$
a. $(2+3i)-(1-i)$ b. $(5-3i)\cdot(4-i)$ c. $(8+6i)^2$ d. $\frac{1}{i}$ e. $\frac{8+5i}{2-i}$
f. $\frac{1}{i}+\frac{3}{1+i}$ g. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i}$ h. $(1+i)^{10}$ i. $(\frac{1+i}{1-i})^{201}$

A2: Gegeben seien die komplexen Zahlen $z=3-2i, w=\frac{10}{1+2i}$. Berechne und gib das Ergebnis in der Form $a+ib$ an.
a. $z-w$ b. $\frac{z}{w}$ c. $\overline{w}$ d. $|z|$

A3: Gegeben seien die komplexen Zahlen $z=7-3i, w=\frac{1}{1+i}$. Berechne und gib das Ergebnis in der Form $a+ib$ an.
a. $z+w$ b. $z\cdot w$ c. $\overline{w}$ d. $|z|$

A4: Stelle M zeichnerisch in der gaußschen Zahlenebene dar.
$\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)\geq 2\wedge \mathrm{Im}(z)<1\}$

A5: Bestimme $\mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(w)$ für $w=\frac{1}{z^2}(z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$.

A6: Untersuche auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität.
a. $r:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto\overline{z}$
b. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, z\mapsto|z|$
c. $g:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_0^+, z\mapsto|z|$

A7: Beweise: Für alle $z,w\in\mathbb{C}\,(z=a+bi\,\text{mit}\,a,b\in\mathbb{R})$ gilt:
a. $\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$
b. $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ und $\mathrm{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$
c. $z\cdot\overline{z}=a^2+b^2$, d.h. $z\cdot\overline{z}$ ist reell und nicht negativ.

A8: Berechne: $50\cdot\mathrm{Im}(\overline{(2-4i)^{-1}})+\mathrm{Re}(|6+8i|)$.

A9: Beweise das sogenannte Parallelogrammgesetz und interpretiere es geometrisch:
$|z+w|^2+|z-w|^2=2\,|z|^2+2\,|w|^2$.

A10: Stelle folgende Punktmengen zeichnerisch in der gaußschen Zahlenebene dar und begründe deine Zeichnung.
a. $M_1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ bzw. $M_1^{'}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$
b. $M_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-i|=1\}$
c. $M_3=\{z\in\mathbb{C}\mid \frac{1}{2}\leq|z-i|<1\}$
d. $M_4=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-1|=|z+1|\}$
e. $M_5=\{z\in\mathbb{C}\mid \left|z^2\right|-2(z+\overline{z})=0\}$

A11: Skizziere die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der gaußschen Zahlenebene
a. $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\}$
b. $\{z\in\mathbb{C}\mid 1\leq|z|\leq 5\}$
c. $\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)=3\}$

A12: Berechne und schreibe das Ergebnis auch in der Form $a+ib$.
a. $\sqrt{-4}$ b. $\sqrt{-a}\,(a\in\mathbb{R})$ c. $\sqrt{16e^{3\pi i}}$ d. $\sqrt{5+12i}$ e. $\sqrt{3-4i}$.

A13: Belege durch ein Zahlenbeispiel, dass im Allgemeinen
$\sqrt{z\cdot w}\neq\sqrt{z}\cdot\sqrt{w}$ und $\sqrt{\frac{z}{w}}\neq\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{w}}$

A14: Zeige, dass gilt:
a. $\sqrt{z}$ ist genau dann reell (und nicht negativ), wenn $z\in\mathbb{R}_0^+$ ist.
b. $\sqrt{z}$ ist genau dann rein imaginär, wenn $z\in\mathbb{R}^-$ ist.

A15: Löse die folgenden quadratischen Gleichungen über $\mathbb{C}$.
a. $z^2-4z+5=0$ b. $5z^2-(5+10i)z-5+5i=0$

A16: Gib eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge $L=\{1-i,4+3i\}$ an. Kontrolliere dein Ergebnis.

A17: Gib die fünften Einheitswurzeln an und zeichne sie.

A18: Finde alle Lösungen von $z^6=-32+32\sqrt{3}i$ und zeichne sie.

A19: Stelle die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar:
a. $z=\frac{5}{1-i}$ b.$w=(1-\sqrt{3}i)^3$

A20: Stelle die folgenden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar:
a. $z=\frac{2}{1+i}$ b.$w=(1+\sqrt{5}i)^2$