Lösungsmengen

Lösungen zu Gleichung und Ungleichungen geben wir in Mengenschreibweise oder mittels Intervallen an.

Ganzrationale Gleichungen

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$
mit $a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$ heißt Polynom n-ter Ordnung.

Ein Polynom p hat eine Nullstelle in x_0 genau dann, wenn es ein Polynom g gibt mit:
$p(x) = (x - x_0)g(x)$. Den Term $(x - x_0)$ nennen wir einen *Linearfaktor* von p.

Ein Polynom n-ter Ordnung hat maximal n Nullstellen.

Zur Bestimmung der Nullstellen von Polynomen höherer Ordnung kann man oft eine der Nullstellen raten und durch *Polynomdivision* eine Gleichung niederen Grades erhalten.

Der Graph eines Polynoms kann häufig durch die Betrachtung des globalen Verhaltens und der Nullstellen konstruiert werden.

Bruchgleichungen

An den Nullstellen des Nenners ist ein Bruchterm nicht definiert. Die Nennernullstellen sind also nicht in der Definitionsmenge enthalten. Errechnete Lösungen, die nicht in der Definitionsmenge liegen, gehören nicht zur Lösungsmenge.

Ein Bruchterm ist Null, wenn der Zähler Null ist.

Beim Lösen einer Bruchgleichung wird meist mit einem gemeinamen Nenner multipliziert.

Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind, sind im Graphen der Funktion Polstellen. Das Verhalten des Graphen können wir durch Punktproben in der Nähe der Polstellen bestimmen.

Bei einer Partialbruchzerlegung der Form $\frac{cx + d}{(x + a)(x + b)} = \frac{A}{x + a} + \frac{B}{x + b}$ können wir A und B mittels Koeffizientenvergleich oder mittels *Betrachtung der explodierenden Terme* bestimmen.

Betragsgleichungen

$|a|$ lässt sich als Abstand von a zum Nullpunkt auf interpretieren.
$|a - b|$ lässt sich als Abstand zwischen a und b interpretieren.

In Betragsgleichungen lösen wir die Beträge durch Fallunterscheidung auf. Die verschiedenen Fälle erhalten wir, indem wir betrachten, wann die Terme in den Beträgen ihre Vorzeichen ändern.

Wurzelgleichungen

Das Quadrieren einer Gleichung ist keine Äquivalenzumformung. Deshalb muss am Ende des Lösungsweges eine Probe gemacht werden.

Ungleichungen

Auch mit Ungleichungen können wir mit Äquivalenzumformungen durchführen. Bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.