① a) Beweis: Sei n gerade. Dann gilt: $n = 2k$ mit einem geeigneten $k \in \mathbb{N}$. Also ist $n^2 = 4k^2 = 2\cdot(2k^2)$. Damit ist n^2 gerade. $\square$

Kontraposition: Ist n^2 ungerade, dann ist auch n ungerade.

b) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: 6

Kontraposition: Ist eine Zahl nicht durch 12 teilbar, dann ist sie auch nicht durch 6 und 2 teilbar.

② siehe Folien.

③ I.A. $n=1$: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ✓

I.S. $\sum_{k=1}^{n+1} k = 1 + \dots + n + n+1 \underset{\text{I.S}}{=} \frac{(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ $\square$

④ I.A: $n=3$ $\quad 2\cdot 3+1 < 2^3$

$7 < 8$ ✓

I.S. $2(n+1)+1 = \underbrace{2n+1}_{\text{I.A.} < 2^n}+2 \underset{\text{I.A.}}{<} 2^n+2 < 2^n+2^n = 2^{n+1}$ $\square$

da $2 < 2^n$ für $n \geq 3$

⑤ $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{3}$, $a_3 = \sqrt{5}$, $a_4 = \sqrt{7}$, $a_5 = 3$, $a_6 = \sqrt{11}$

⑥ $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ $\quad n \geq 1$

⑦ a) $a_n = \frac{2n+1}{n+1}$. Der Grenzwert ist 2.

b) "a_n konvergiert gegen a" $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon$.

In Worten: Für jedes (noch so kleine) ε gibt es einen Folgenindex n_0, so dass alle alle Folgenglieder nach n_0 weniger als ε vom Grenzwert a entfernt sind.

c) Sei $\varepsilon > 0$. zu zeigen: es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$ für $\varepsilon > n_0$ (*)

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-(2n+2)}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$$

Wähle $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$. Dann gilt (*).

8 a) $\frac{2n^2+1}{3n^2+4n} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{4}{n}} \longrightarrow \frac{2}{3}$

b) $\frac{\sqrt{n^2+4n+2}+7n-7}{n-5} = \frac{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}+7-\frac{7}{n}}{1-\frac{5}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{8}$

9 $a_n = \sqrt{n^2-n} - \sqrt{n^2+3n} = \frac{n^2-n-(n^2+3n)}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{-4n}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+3n}}$

$= \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-4}{2} = \underline{-2}$