Vertiefungskurs Mathematik

Folgen

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Definition Folge: Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n das n-te Folgenglied $a(n) \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben a_n für das n-te Folgenglied und (a_n) für die Folge.

Beispiel: $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$ ist eine Folge mit $a_4 = 3$.

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) = a_n$.

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Manchmal lässt man eine Folge beim Index 0 beginnen.

Eine Folge kann durch eine Formel für das n-te Folgenglied gegeben sein.

Eine Folge kann durch eine Formel für das n-te Folgenglied gegeben sein.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt die Folge

Eine Folge kann durch eine Formel für das n-te Folgenglied gegeben sein.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt die Folge
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Eine Folge kann durch eine Formel für das n-te Folgenglied gegeben sein.

$a_n = n^2 + 1$ beschreibt die Folge
$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10...$

Eine Folge kann rekursiv durch Rückgriff auf frühere Folgenglieder gegeben sein.

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$a_n = 2^n$ für $n \geq 0$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind gleich.

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \ldots$$

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \ldots$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, ...$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$(b_n) = 1, 1, 3, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{31}{17}, \frac{57}{31}, \frac{105}{57} ...$$

Wir nutzen die Tribonacci Folge (a_n), um daraus eine neue Folge (b_n) zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, ...$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$(b_n) = 1, 1, 3, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{31}{17}, \frac{57}{31}, \frac{105}{57} ...$$

Die Folge (b_n) mit Dezimalzahlen:

```
1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422
```

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

Wir schreiben $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

Wir schreiben $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Es kann schwierig sein, den genauen Grenzwert zu berechnen.

1.00000000000000
1.00000000000000
3.00000000000000
1.66666666666667
1.80000000000000
1.88888888888889
1.82352941176471
1.83870967741935
1.84210526315789
1.83809523809524
1.83937823834197
1.83943661971831
1.83920367534456
1.83930058284763
1.83929379809869
1.83928131922225
1.83928810384049
1.83928701345944
1.83928642063210
1.83928686638422

Die Folgenglieder b_n scheinen sich einem Grenzwert b anzunähern.

Wir schreiben $b = \lim_{n \to \infty} b_n$

Es kann schwierig sein, den genauen Grenzwert zu berechnen. Für b_n ist es die Zahl:

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \frac{1}{3}\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + \frac{1}{3}$$

$$\approx 1,8392867552$$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, \dots$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \qquad a_n =$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \qquad a_n = 5 + 7n.$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \dots \qquad a_n = 5 + 7n.$

Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \qquad a_n = 5 + 7n.$

Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.

Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, ...$ $a_n = 5 + 7n$.
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96..$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \quad a_n = 5 + 7n.$

Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.

Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.

$3, 6, 12, 24, 48, 96.. \quad a_n =$

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \quad a_n = 5 + 7n$.
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96.. \quad a_n = 3 \cdot 2^n$.

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, ...$ $\quad a_n = 5 + 7n$.
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96..$ $\quad a_n = 3 \cdot 2^n$.
Allgemeine Form einer geometrischen Folge: $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \quad a_n = 5 + 7n.$

Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.

Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.

$3, 6, 12, 24, 48, 96.. \quad a_n = 3 \cdot 2^n.$

Allgemeine Form einer geometrischen Folge: $a_n = a_0 \cdot q^n$.

Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **arithmetische Folge** ist ein Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.
$5, 12, 19, 26, 33, \ldots \quad a_n = 5 + 7n.$
Allgemeine Form einer arithmetischen Folge: $a_n = a_0 + d \cdot n$.
Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist ein Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.
$3, 6, 12, 24, 48, 96.. \quad a_n = 3 \cdot 2^n.$
Allgemeine Form einer geometrischen Folge: $a_n = a_0 \cdot q^n$.
Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.
Das geometrische Mittel zweier Zahlen a, b ist definiert als $\sqrt{a \cdot b}$.

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$

$a_1 =$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} =$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Damit drücken wir aus: Wir können mit a_n beliebig nahe an die 2 kommen, wenn wir n nur groß genug wählen.

Wir untersuchen die Folge $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$
$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$
$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben: $\lim_{n \to \infty} a_n = 2$.

Damit drücken wir aus: Wir können mit a_n beliebig nahe an die 2 kommen, wenn wir n nur groß genug wählen.

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass a_n nicht mehr als ϵ von 2 entfernt ist, wenn nur $n > n_0$ ist.

Definition Grenzwert: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n) wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Definition Grenzwert: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n) wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Besitzt eine Folge (a_n) eine Grenzwert a - auch *Limes* genannt - so sagt man, die Folge *konvergiert* gegen a und schreibt dafür $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ oder $(a_n) \to a$ für $a \to \infty$.

Definition Grenzwert: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert der Folge (a_n) wenn gilt:

$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$

Besitzt eine Folge (a_n) eine Grenzwert a - auch *Limes* genannt - so sagt man, die Folge *konvergiert* gegen a und schreibt dafür $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ oder $(a_n) \to a$ für $a \to \infty$.

Andere Formulierung: a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ϵ-Umgebung von a *fast alle* Elemente der Folge liegen.

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$.   Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

$$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n.$$

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n$.
Wähle als n_0 eine Zahl mit $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$. $\square$

Gegeben die Folge: $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Behauptung: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.
Wir müssen ein n_0 finden, so dass $|a_n - 1| < \epsilon$ für $n > n_0$.

$|a_n - 1| < \epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2)$
$\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n$.
Wähle als n_0 eine Zahl mit $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$. $\square$

Beispiel: für $\epsilon = \frac{1}{100}$ wählen wir $n_0 = 98$. Alle Folgenglieder nach a_{98} haben den Abstand kleiner als $\frac{1}{100}$ zum Grenzwert 1.

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen.

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen. Wir betrachten die ersten 7 Elemente der Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$$

```
1.00000000000000
1.50000000000000
1.41666666666667
1.41421568627451
1.41421356237469
1.41421356237310
1.41421356237310
```

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen. Wir betrachten die ersten 7 Elemente der Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$$

```
1.00000000000000
1.50000000000000
1.41666666666667
1.41421568627451
1.41421356237469
1.41421356237310
1.41421356237310
```

Die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$.

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen. Wir betrachten die ersten 7 Elemente der Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$$

```
1.00000000000000
1.50000000000000
1.41666666666667
1.41421568627451
1.41421356237469
1.41421356237310
1.41421356237310
```

Die Folge konvergiert gegen $\sqrt{2}$. Wenn man eine gute Näherung für $\sqrt{2}$ benötigt, muss man nur weit genug in der Folge fortschreiten.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = \sin(n)$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = \sin(n)$ ist eine beschränkte Folge.
Die Folge (a_n) mit $a_n = n \cdot \sin(\frac{\pi n}{2})$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, mit $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. S heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, mit $s \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. s heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = \sin(n)$ ist eine beschränkte Folge.
Die Folge (a_n) mit $a_n = n \cdot \sin(\frac{\pi n}{2})$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert. Wähle $\epsilon = 1$. Dann liegen in der ϵ-Umgebung $U = (a-1, a+1)$ fast alle Folgenglieder.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert. Wähle $\epsilon = 1$. Dann liegen in der ϵ-Umgebung $U = (a - 1, a + 1)$ fast alle Folgenglieder. Die endlich vielen Elemente außerhalb von U haben ein größtes und ein kleinstes Element.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert. Wähle $\epsilon = 1$. Dann liegen in der ϵ-Umgebung $U = (a - 1, a + 1)$ fast alle Folgenglieder. Die endlich vielen Elemente außerhalb von U haben ein größtes und ein kleinstes Element. Das sind die Schranken der Folge.

Satz: Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei (a_n) eine Folge und a ihr Grenzwert. Wähle $\epsilon = 1$. Dann liegen in der ϵ-Umgebung $U = (a - 1, a + 1)$ fast alle Folgenglieder. Die endlich vielen Elemente außerhalb von U haben ein größtes und ein kleinstes Element. Das sind die Schranken der Folge. Falls unterhalb oder oberhalb von U keine Elemente vorhanden sind, wählen wir den Rand von U als Schranke. $\square$

Grenzwertsätze: Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

(G1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Grenzwertsätze: Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

(G1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G2) Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist das Produkt der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

Grenzwertsätze: Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

(G1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G2) Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist das Produkt der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G3) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$, und die (ggf. erst ab einem Index $N > 1$ definierte) Quotientenfolge $(\dfrac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Grenzwertsätze: Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

(G1) Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G2) Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent und ihr Grenzwert ist das Produkt der Grenzwerte von (a_n) und (b_n):
$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(G3) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so sind fast alle $b_n \neq 0$, und die (ggf. erst ab einem Index $N > 1$ definierte) Quotientenfolge $(\dfrac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Man darf also den Limes in Summe, Produkt und Quotient zweier Folgen 'reinziehen', wenn(!) die Ausgangs-Folgen konvergent sind.

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:
$\pm x \leq |x|$ und $\pm y \leq |y|$

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:
$\pm x \leq |x|$ und $\pm y \leq |y|$ Also gilt:
$x + y \leq |x| + |y|$

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:
$\pm x \leq |x|$ und $\pm y \leq |y|$ Also gilt:
$x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

Lemma: Für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die *Dreiecksungleichung*

$|x + y| \leq |x| + |y|$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:
$\pm x \leq |x|$ und $\pm y \leq |y|$ Also gilt:
$x + y \leq |x| + |y|$ und $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$.
Insgesamt gilt also: $|x + y| \leq |x| + |y|$. $\square$.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\square$

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
□

Beweis von G2:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:

$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\square$

Beweis von G2:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt:

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq$
$|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n||(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|.$

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\square$

Beweis von G2:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt:
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq$
$|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n||(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|$.

Da (a_n) konvergiert, gibt es eine Schranke S mit der wir den ersten Summanden abschätzen können. $|a_n||(b_n - b)| \leq S|(b_n - b)|$.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

$\square$

Beweis von G2:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt:
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq$
$|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n||(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|$.

Da (a_n) konvergiert, gibt es eine Schranke S mit der wir den ersten Summanden abschätzen können. $|a_n||(b_n - b)| \leq S|(b_n - b)|$.

Wir wählen n_1 und n_2 so, dass beide Summanden für größere n kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ sind.

Beweis von G1:

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n > n_2$. Wir setzen n_0 als das Maximum von n_1 und n_2. Dann gilt für alle $n > n_0$:
$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
□

Beweis von G2:
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gilt:
$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq$
$|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n||(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|$.

Da (a_n) konvergiert, gibt es eine Schranke S mit der wir den ersten Summanden abschätzen können. $|a_n||(b_n - b)| \leq S|(b_n - b)|$.

Wir wählen n_1 und n_2 so, dass beide Summanden für größere n kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$ sind. Für $n > max\{n_1, n_2\}$ gilt dann:
$|a_n b_n - ab| \leq S|(b_n - b)| + |b||(a_n - a)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
□

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ ist streng monton wachsend.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ ist streng monton wachsend.

Die Folge (b_n) mit $b_n = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...$

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ ist streng monton wachsend.

Die Folge (b_n) mit $b_n = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...$ ist monton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Definition: Eine Folge (a_n) heißt **monoton wachsend**, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Gilt sogar $>$ anstelle von $\geq$, so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge (a_n) mit $a_n = n^2$ ist streng monton wachsend.

Die Folge (b_n) mit $b_n = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...$ ist monton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Andere Formulierung: Eine Folge ist monoton, wenn alle Folgenglieder in dieselbe Richtung gehen.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel:

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Beispiel: Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Mit vollständiger Induktion wir zeigen wir, dass (a_n) streng monoton wächst und beschränkt ist: $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Beispiel: Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Mit vollständiger Induktion wir zeigen wir, dass (a_n) streng monoton wächst und beschränkt ist: $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also hat (a_n) einen Grenzwert.

Satz (Montoniekriterium): Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Beispiel: Die Folge (a_n) sei gegeben durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$. Mit vollständiger Induktion wir zeigen wir, dass (a_n) streng monoton wächst und beschränkt ist: $0 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also hat (a_n) einen Grenzwert. Der Grenzwert erfüllt die Gleichung $x = \sqrt{x + 2}$, daraus berechnen wir den Grenzwert $a = 2$.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n) : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n) : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls n ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n) : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls n ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Zwei endliche Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Mengen herstellen kann.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n): 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls n ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Zwei endliche Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Mengen herstellen kann. Auf unendliche Mengen übertragen zeigt die Folge: Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n): 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, ...$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls n ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls n gerade} \end{cases}$$

Zwei endliche Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Mengen herstellen kann. Auf unendliche Mengen übertragen zeigt die Folge: Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Etwas Unendliches wird nicht notwendig kleiner, wenn man etwas wegnimmt.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung. Sei D die n-te Dezimalstelle von a_n.

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung. Sei D die n-te Dezimalstelle von a_n. Wir konstruieren eine Zahl x mit

$$\text{Die } n\text{-te Dezimalstelle von } x = \begin{cases} D+1, & \text{falls } D \leq 7, \\ D-1 & \text{falls } D = 8 \text{ oder } D = 9 \end{cases}$$

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung. Sei D die n-te Dezimalstelle von a_n. Wir konstruieren eine Zahl x mit

$$\text{Die } n\text{-te Dezimalstelle von } x = \begin{cases} D+1, & \text{falls } D \leq 7, \\ D-1 & \text{falls } D = 8 \text{ oder } D = 9 \end{cases}$$

Dann ist x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1

Exkurs: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge (a_n), in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes a_n hat eine Dezimalentwicklung. Sei D die n-te Dezimalstelle von a_n. Wir konstruieren eine Zahl x mit

$$\text{Die } n\text{-te Dezimalstelle von } x = \begin{cases} D+1, & \text{falls } D \leq 7, \\ D-1 & \text{falls } D = 8 \text{ oder } D = 9 \end{cases}$$

Dann ist x eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 , kann aber kein Element der Folge (a_n) sein, da es sich von jedem a_n in mindestens einer Dezimalstelle unterscheidet. $\square$