

Folgen, Grenzwerte**A2021**

Es sei (a_n) eine Zahlenfolge.

- Geben Sie die Definition dafür an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt.
- Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen Null konvergiert. Beweisen Sie durch Anwendung der Definition aus a., dass die Folge (b_n) mit $b_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ eine Nullfolge ist.
- Beweisen Sie ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen: Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.
- Geben Sie Beispielfolgen a_n, b_n an, die keine Nullfolgen sind, und deren Summenfolge eine Nullfolge bildet.

A2020

Gegeben seien reelle Folgen $(a_n), (b_n)$ und reelle Zahlen a, b .

- Geben Sie die Definition dafür an, dass (a_n) gegen a konvergiert.
- Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n) , so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$
 - Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$ wenn (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert?
 - Beweisen Sie den Satz.
 - Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.
- Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n^2 \cdot 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}$$

A2019

- Gegeben sind eine reelle Folge (a_n) und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$
 - Geben Sie die Definition der Konvergenz $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
 - Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge (a_n) konvergent, so ist sie beschränkt.
 - Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a2 und zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist.
- Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge: (b_n) mit $b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

A2018

- Gegeben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:
 - (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
 - (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent
 - (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
 - (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent

- Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Was kann man über die Folge $(a_n * b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)
- Es seien (a_n) eine gegen a konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich m , dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folge (a_n^m) konvergiert gegen a^m . *Hinweis:* Verwenden Sie die Aussage aus Teil b.

A2017

Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder $a_n, (n \in \mathbb{N})$ besitzt.

a. Es sei (a_n) eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von (a_n) geben a an.

b. Beweisen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.

c. Sei (b_n) eine Folge mit $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (b_n) gegen 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.

d. Sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie weiter die Folge (d_n) definiert durch $d_1 = \frac{1}{2}, d_{n+1} = c_n \cdot d_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folgen (d_n) gegen Null konvergiert. *Hinweis:* Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

A2016

Gegeben sei eine reelle Folge (a_n) und eine reelle Zahl a .

a. Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

b. Weise Sie nach, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

c. Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist (a_n) konvergent gegen a , dann konvergiert auch (b_n) gegen a .

d. Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n)$$

Orientierungsaufgaben**A1**

a. Untersuchen Sie die nachstehend gegebene Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen.

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{2n-2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + 5}{3n^4 + 2n^3 + n^2 + 2}$$

b. Gegeben sei eine konvergente Folge a_n mit $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ die Ungleichung $a \geq 0$ gilt. *Hinweis:* Sie können beispielsweise die Annahme $a < 0$ zum Widerspruch führen.

A2

Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 5}$.

a) Bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Geben Sie die Definition der Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ an.

c) Beweisen Sie für die oben angegebene Folge a_n und den von Ihnen gefundenen Grenzwert a , dass die Definition von „ a_n konvergiert gegen a “ erfüllt ist.

A3

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3} + \frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2}$

b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-2} \quad (n \geq 2)$

c) $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$

d) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1}$

e) $a_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$

A4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n})$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n})$