1. (2 Punkte) Erstelle die Wahrheitstafel für folgenden Ausdruck: $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q))$

Lösung:

p	q	$p \wedge$	$\neg q$	$\rightarrow$	$(\neg p$	$\vee\, q)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1

2. (2 Punkte) Vereinfache in 3 Schritten: 1. DeMorgan, 2. Distributivgesetz, 3. Sonstiges
$\neg(p \vee q) \vee p$

Lösung:

$(\neg p \wedge \neg q) \vee p \Leftrightarrow (\neg p \vee p) \wedge (\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg q \vee p)$

3. (2 Punkte) Vereinfache in 3 Schritten: 1. Auflösung Pfeil, 2. DeMorgan, 3. Sonstiges
$(p \rightarrow \neg q) \vee (p \wedge q)$

Lösung:

$(\neg p \vee \neg q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow 1$

4. (2 Punkte) Beweise die Äquivalenz: $(a \wedge (a \vee b) \Leftrightarrow a)$

Lösung:
Zu zeigen $(a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a)$ ist Tautologie .

a	b	$a \wedge$	$(a \vee b)$	$\leftrightarrow$	a
0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

5. (2 Punkte) Formuliere die Kontraposition der folgenden Aussage:

   Wenn n eine ungerade natürliche Zahl ungleich 1 ist, dann lässt sich n darstellen als die Differenz von Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen.

> **Lösung:** Wenn eine natürliche Zahl sich nicht als Differenz von Quadraten zweier aufeinanderfolgender natürlichen Zahlen darstellen lässt, dann ist sie entweder 1 oder eine gerade Zahl.

6. (3 Punkte) Vor einem Fußballturnier fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Ausgang. Über die drei Favoriten A, B und C werden folgende vier Vermutungen geäußert:

   a. B gewinnt oder C gewinnt.
   b. Wenn B Zweiter wird, dann gewinnt A.
   c. Wenn B Dritter wird, dann gewinnt C nicht.
   d. A wird Zweiter oder B wird Zweiter.

   Am Ende des Turniers belegen die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze. Es stellt sich heraus, dass alle vier Vermutungen richtig waren. Welche Plätze erzielten A, B und C?

> **Lösung:**
>
> B Erster, A Zweiter, C Dritter.
> a. 1. Fall B gewinnt, dann folgt mit d. dass A Zweiter wird, also muss C Dritter sein. Die restliche Aussagen sind damit verträglich.

7. (4 Punkte) Gegeben sind die folgenden Aussagen :

   a. Kein Drache ist grün
   b. Für jeden Drachen gilt: Wenn er glücklich ist, dann kann er nicht fliegen.
   c. Alle Drachen, die fliegen können, sind entweder grün oder glücklich aber nicht beides.
   d. Wenn ein Drache ein grünes Kind hat, dann können alle seine Kinder fliegen.

   Formuliere die Aussagen prädikatenlogisch. Benutze dafür $X :=$ die Menge aller Drachen, $K(x) :=$ Menge aller Kinder des Drachen x, und die Aussagen $fl(x), gl(x), gr(x)$, deren Wahrheitswerte folgendermaßen definiert sind:

   - Die Aussage $fl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x fliegen kann,
   - Die Aussage $gl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x glücklich ist,
   - Die Aussage $gr(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x grün ist.

> **Lösung:**
>
> a. $\neg \exists x \in X : gr(x)$
> b. $\forall x \in X : (gl(x) \to \neg fl(x))$
> c. $\forall x \in X : (fl(x) \to (gr(x) \oplus gl(x))$
> d. $\forall x \in X : ((\exists y \in K(x) : gr(y)) \to \forall y \in K(x) : fl(y))$

8. (4 Punkte) Berechne die kartesische Form $a + ib$ für $\frac{1}{z}$:

   a. $z = 2 + i$ b. $z = 2\cos(\frac{\pi}{3}) + 2i\sin(\frac{\pi}{3})$

> **Lösung:**
>
> a. $\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$
>
> b. $\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$

9. (3 Punkte) Gib die Polardarstellung an für: $z = \frac{1}{2+2i}$

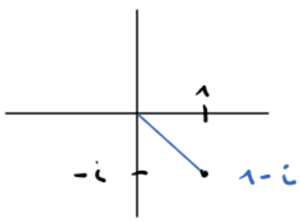
Lösung:

$w = 2+2i \quad |w| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \ \arg(w) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \ \arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow z = \frac{1}{w} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

10. (3 Punkte) Gib die kartesische und die Polardarstellung an für: $z = (1-i)^9$

Lösung:



$w = 1-i \Rightarrow |w| = \sqrt{2}, \ \arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

$|w^9| = (\sqrt{2})^9 = 16\cdot\sqrt{2}, \quad \arg(w^9) = -\frac{\pi}{4}$

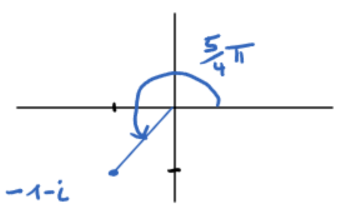
Polar: $z = 16\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Kartesisch: $z = 16\cdot\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 16-16i$

11. (3 Punkte) Berechne alle $z \in \mathbb{C}$ mit: $z^4 = (-1-i)$.

Lösung:

$z^4 = -1-i$



$|z^4| = \sqrt{2} \Rightarrow |z| = \sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$

$z_1 = \sqrt[8]{2}\cdot\left(\cos\frac{5}{16}\pi + i\sin\frac{5}{16}\pi\right)$

$\frac{2\pi}{4} = \frac{8}{16}\pi$ (um diesen Betrag kann das Argument erhöht werden)

$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{13}{16}\pi + i\sin\frac{13}{16}\pi\right)$

$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{21}{16}\pi + i\sin\frac{21}{16}\pi\right)$

$z_4 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{29}{16}\pi + i\sin\frac{29}{16}\pi\right)$

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summe:
Punkte:	2	2	2	2	2	3	4	4	3	3	3	30