

# Vertiefungskurs Mathematik

## Integrationstechniken

# 1. Partielle Integration

Nach der Produktregel gilt:  $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$ .  
Wir bilden auf beiden Seiten Stammfunktionen und rechnen weiter:

$$\begin{aligned}\int (u(x) \cdot v(x))' dx &= \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \\ u(x) \cdot v(x) &= \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \\ \int u(x) \cdot v'(x) dx &= u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx\end{aligned}$$

Kurzform der partiellen Integration:  $\int uv' = uv - \int u'v$

Vereinbarung: alle vorkommenden Funktionen sollen stetig differenzierbar sein. Dadurch wird die Existenz aller auftretenden Integrale gesichert.

Beispiel 1:

$$\int_0^4 2xe^x dx \quad \text{Wir setzen } u = 2x, v' = e^x$$
$$\int_0^4 2xe^x dx = [2xe^x]_0^4 - \int_0^4 2e^x dx = 8e^4 - 0 - [2e^x]_0^4 =$$
$$8e^4 - 2e^4 + 2e^0 = 6e^4 + 2$$

Mögliche Kriterien für die Wahl von  $u, v$ :

Das Polynom sollte als  $u$  gewählt werden.

Der Faktor, der beim Ableiten 'einfacher' wird, sollte als  $u$  gewählt werden.

## Beispiel 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx \quad \text{Wir setzen } u = x^2, v' = \sin(x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) dx = [x^2(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x(-\cos(x)) dx$$

(Das letzte Integral berechnen wir wieder mit partieller Integration,  $u = 2x, v' = -\cos(x)$ )

$$= -\left(\frac{\pi^2}{4} \cdot 0 - 0\right) - ([2x(-\sin(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(-\sin(x)) dx) =$$

$$0 - (-\pi \cdot 1 + 0 - [2\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}) = -(-\pi - 0 + 2) = \pi - 2$$

Ist der eine Faktor ein Polynom vom Grad  $n$ , so muss man die partielle Integration  $n$ -mal durchführen, bis die Ableitung dieses Faktors eine Konstante ist.

### Beispiel 3

$$\int_a^b \ln(x) \, dx \quad \text{Wir setzen } u = \ln(x), v' = 1$$

$$\int_a^b \ln(x) \, dx = [x \ln(x)]_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} \, dx = [x \ln(x)]_a^b - [x]_a^b = [x \ln(x) - x]_a^b$$

Eine Stammfunktion von  $\ln(x)$  ist  $x \ln(x) - x$ .

$\ln(x)$  ist guter Kandidat für  $u$ .

## Beispiel 4

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx \quad \text{Wir setzen } u = \sin(x), v' = \cos(x)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cos(x) dx = [\sin(x) \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \sin(x) dx =$$
$$\frac{1}{2} [\sin^2(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

Bei trigonometrischen Funktionen steht manchmal auf beiden Seiten dasselbe Integral. Dann bringt man beide auf eine Seite und teilt durch 2.

## 2. Integration durch Substitution

### Lineare Substitution

Aus der Kettenregel folgt: Ist  $f$  eine verkettete Funktion mit  $f(x) = g(mx + b)$  und  $G$  Stammfunktion von  $g$ , dann ist  $F(x) = \frac{1}{m}G(mx + b)$  eine Stammfunktion von  $f$ .

Beispiele:

$$f(x) = \sin(2x) \Rightarrow \int f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$$

$$f(x) = (2x - 4)^3 \Rightarrow \int f(x) = \frac{1}{8}(2x - 4)^4 + c$$

## Logarithmische Integration

Aus der Kettenregel folgt: Eine Stammfunktion für  $\frac{g'(x)}{g(x)}$  ist  $\ln |g(x)|$ .

Beispiele:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow \int f(x) = \ln(1+x^2) + c$$

$$f(x) = \frac{6e^{2x}}{5+3e^{2x}} \Rightarrow \int f(x) = \ln(5+3e^{2x}) + c$$



## Integration durch Substitution

Die Kettenregel liefert:  $(F \circ u)' = f(u(x)) \cdot u'(x)$ .

Daraus ergibt sich:  $\int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = F \circ u$

Beispiel 1:  $\int \sin(x^2) 2x dx$ . Setze  $f(x) = \sin(x)$ ,  $u(x) = x^2$ . Es ergibt sich:

$$\int \sin(x^2) 2x dx = -\cos(x^2)$$

Das Verfahren wird in der Praxis einfacher durch das 'Rechnen' mit den Differentialen  $dx$  und  $du$ .

$$u = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \text{ Also gilt:}$$

$$\int \sin(x^2) 2x dx = \int \sin(u) 2x \frac{du}{2x} = \int \sin(u) du = -\cos(u) + c = -\cos(x^2) + c$$

Beispiel 2:

$$\int (2x^2 + 1)^3 4x \, dx, \quad u = 2x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x \Rightarrow dx = \frac{du}{4x}$$
$$\int (2x^2 + 1)^3 4x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + c = \frac{1}{4} (2x^2 + 1)^4 + c$$

Beispiel 3:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx, \quad u = 1 + x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx = \int \frac{1}{2\sqrt{u}} \, du = \sqrt{u} + c = \sqrt{1+x^2} + c$$

## Substitution bei bestimmten Integralen

Es gilt:

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = [F \circ u]_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

Beispiel:

$$\int_0^2 \frac{8x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx \quad u = x^4 + 9 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 4x^3 \Rightarrow dx = \frac{du}{4x^3}$$

$$\int_0^2 \frac{8x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx = \int_{u(0)}^{u(2)} \frac{2}{\sqrt{u}} du = [4\sqrt{u}]_9^{25} = 8.$$

Oder man berechnet erst das unbestimmte Integral, resubstituiert  $u$  und rechnet mit den ursprünglichen Grenzen:

$$\int \frac{8x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{u}} du = 4\sqrt{u} + c = 4\sqrt{x^4+9} + c$$

$$\int_0^2 \frac{8x^3}{\sqrt{x^4+9}} dx = \left[ 4\sqrt{x^4+9} \right]_0^2 = 8$$

Lineare Substitution und Logarithmische Integration sind Spezialfälle der Integration durch Substitution:

$$\begin{aligned} \int g(mx + c) dx \quad u = mx + c &\Rightarrow \frac{du}{dx} = m \Rightarrow dx = \frac{du}{m} \\ \int g(mx + c) dx &= \int \frac{g(u)}{m} du = \frac{1}{m} G(u) + c = \frac{1}{m} G(mx + b) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \quad u = g(x) &\Rightarrow \frac{du}{dx} = g'(x) \Rightarrow dx = \frac{du}{g'(x)} \\ \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + c = \ln |g(x)| + c \end{aligned}$$

## Integration durch Partialbruchzerlegung

Für jede gebrochenrationale Funktion lässt sich eine Stammfunktion bestimmen, indem man den Funktionsterm in eine geeignet Summe zerlegt. Für eine rationale Funktion  $f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$  gehen wir wie folgt vor:

1. Falls Zählergrad  $\geq$  Nennergrad, führe Polynomdivision durch:

$$f(x) = p_3(x) + \frac{p_4(x)}{p_2(x)}$$

2. Falls eine Nullstelle von  $p_2(x)$  auch eine Nullstelle von  $p_4(x)$ , kürze mit dem entsprechenden Linearfaktor.  $f(x) = p_3(x) + \frac{p_5(x)}{p_6(x)}$

3. Der Bruch  $\frac{p_5(x)}{p_6(x)}$  wird aufgespalten in eine Summe von Partialbrüchen: Jede einfache Nullstelle  $a$  des Nenners liefert einen Term  $\frac{A}{x-a}$ , jede doppelte Nullstelle  $b$  den Term  $\frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2}$ .

Hinweis: Wir beschränken uns auf höchstens doppelte Nullstellen im Nenner und betrachten auch nicht den Fall, dass ein Faktor im Nenner keine Nullstelle hat (z.B:  $x^4 + 1$ ).

Beispiel 1:  $\frac{5x+7}{(x-1)(x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}$

Koeffizientenvergleich:

$$5x + 7 = A(x + 5) + B(x - 1)$$

$$5x + 7 = (A + B)x + (5A - B)$$

LGS: (1)

$$A + B = 5$$

(2)

$$5A - B = 7$$

(1) + (2)

$$6A = 12$$

$$A = 2, B = 3$$

$$\int_2^8 \frac{5x+7}{(x-1)(x+5)} dx = \int_2^8 \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+5}$$

$$= [2 \ln |x-1| + 3 \ln |x+5|]_2^8 = 2 \ln 7 + 3 \ln 13 - 2 \ln 1 - 3 \ln 7 = -\ln 7 + 3 \ln 13$$

Bestimmung der Koeffizienten durch Betrachtung des Wachstumsverhaltens:

$$\frac{5x + 7}{(x - 1)(x + 5)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 5}$$

Wenn sich  $x$  der 1 nähert, explodiert der linke Term. Auf der rechten Seite spielt der Term mit dem  $B$  bei der Explosion keine Rolle, d.h. das  $A$  muss sich dem Term  $\frac{5x+7}{x+5}$  annähern, wenn dort die 1 eingesetzt wird. Das ergibt  $A = \frac{12}{6} = 2$ . Analog erhält man  $B = \frac{-18}{-6} = 3$ .



Beispiel 2:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2(x-5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-5}$$

$B$  und  $C$  lassen sich durch Betrachtung des Wachstumsverhaltens bestimmen:

$$C = \frac{5+3}{(5-1)^2} = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1+3}{1-5} = -1$$

$A$  ergibt sich durch den Vergleich des Koeffizienten für  $x^2$  (wenn die rechte Seite auf einen Bruchstrich gebracht wird).

$$0 = Ax^2 + Cx^2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$