

Partielle Integration**A1:** Berechne mithilfe partieller Integration

$$\text{a. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cdot \sin(x) dx \quad \text{b. } \int_0^3 \frac{2}{3} x \cdot e^{2x} dx \quad \text{c. } \int_0^4 x \cdot (x-2)^5 dx$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x \cdot \sin(x) dx &= [2x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(-\cos x) dx = -\frac{\pi}{4}\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ \text{b. } \int_0^3 \frac{2}{3} x \cdot e^{2x} dx &= \left[\frac{2}{3} x \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} dx \end{aligned}$$

A2: Berechne durch mehrfache Anwendung partieller Integration

$$\text{a. } \int_0^2 3x^2 \cdot e^x dx \quad \text{b. } \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx \quad \text{c. } \int_0^{\frac{5}{2}} x^2 \cdot (2x-5)^4 dx$$

A3: Bestimme eine Stammfunktion von f

$$\text{a. } f(x) = 2x \cdot \ln(x) \quad \text{b. } f(x) = x^2 \cdot \ln(x) \quad \text{c. } f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \ln(x)$$

A4: Berechne die Integrale

$$\text{a. } \int_0^{\pi} \cos^2(x) dx \quad \text{b. } \int_{-1}^1 \sin^2(\pi x) dx \quad \text{c. } \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \ln(x) dx$$

Lineare Substitution**A5:** Berechne die Integrale

$$\text{a. } \int_0^1 3e^{2x-1} dx \quad \text{b. } \int_1^2 (3-2x)^2 dx \quad \text{b. } \int_0^2 \sqrt{4x+1} dx$$

Logarithmische Integration**A6:** Berechne die Integrale

$$\text{a. } \int_0^1 \frac{2e^x}{2e^x+1} dx \quad \text{b. } \int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx \quad \text{c. } \int_1^2 \frac{x^2}{1-8x^3} dx$$

Substitution

$$\begin{aligned} \text{A7: a. } \int_0^{\pi/2} 3 \sin(x) \cos(x) dx &\quad \text{b. } \int_0^{14} \frac{1}{4+x^2} \cdot 2x dx \quad \text{c. } \int_{-1}^2 x(1+x^2)^3 dx \\ \text{d. } \int_1^e x^3 \ln(x^4) dx &\quad \text{e. } \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} dx \quad \text{f. } \int_2^4 \sqrt{x^2(20-x^2)} dx \end{aligned}$$

A8: Berechne die folgende Integrale zweimal: Einmal mit Substitution, dann mit partieller Integration.

$$\text{a. } \int_e^{e^2} \frac{1}{x} \ln(x) dx \quad \text{b. } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx$$

A9: Berechne die folgende Integrale

a. $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$ b. $\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+4x+4} dx$ c. $\int_1^{16} \frac{6}{2+\sqrt{x}} dx$ d. $\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}} dx$

A10: Bestimme eine Stammfunktion von f

a. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ b. $f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^x-2)^3}$

Partialbruchzerlegung

A11: Berechne die folgende Integrale

a. $\int_{-1}^1 \frac{3x+3}{(x-2)(x+7)} dx$ b. $\int_5^6 \frac{2}{(x-4)(x+1)} dx$ c. $\int_3^4 \frac{2x+2}{x(x-1)(x-2)} dx$

A12: Berechne die folgende Integrale

a. $\int_0^1 \frac{2x-4}{(x-3)^2} dx$ b. $\int_1^2 \frac{7x+7}{x^2-3x-10} dx$ c. $\int_0^1 \frac{9x^2+9x+9}{x^3-3x-2} dx$ d. $\int_3^5 \frac{x^2+4}{x^2-4} dx$
e. $\int_{-1}^0 \frac{4x^2-2x+2}{x^2-4x+3} dx$

Vermischtes

A13: Berechne mit einer geeigneten Methode

a. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{9x+3}{x^2-1} dx$ b. $\int_0^9 \frac{\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}} dx$ c. $\int_{-\pi}^{\pi} (x+3) \sin(x) dx$ d. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x-1}{e^x+1} dx$