# Vertiefungskurs Mathematik

Zahlentheorie - Kongruenz und Restklassen

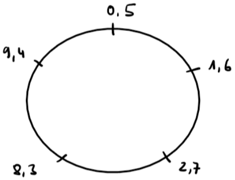
## Kongruenz

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Dann heißt *a kongruent zu b modulo m* geschrieben: $\quad a \equiv b \mod m, \quad$ falls $a - b$ durch $m$ teilbar ist.

## Kongruenz

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Dann heißt *a kongruent zu b modulo m* geschrieben: $\quad a \equiv b \bmod m, \quad$ falls $a - b$ durch $m$ teilbar ist.

Beispiel: $m = 5$




$1 \equiv 6 \bmod 5$

$2 \equiv 7 \equiv 12 \bmod 5$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a - b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a - b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \bmod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \bmod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.
(3) $\Rightarrow$ (1):

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Es gilt $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$ mit eindeutig bestimmten $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < m$.

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Es gilt $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$ mit eindeutig bestimmten $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < m$. Also ist $a - b$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Es gilt $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$ mit eindeutig bestimmten $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < m$. Also ist $a - b = (k_1 - k_2)m$

Satz: Folgende Aussagen sind äquivalent:
(1) $a \equiv b \mod m$
(2) $\exists k \in \mathbb{Z} : a = b + km$
(3) Beim Teilen durch $m$ lassen $a$ und $b$ denselben Rest.

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2): $a \equiv b \mod m$ heißt nach Definition $m|(a-b)$. Also gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $km = a - b$. Damit gilt: $a = b + km$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $r$ der Rest beim Teilen von $a$ durch $m$. Nach dem Satz vom Teilen mit Rest gibt es ein eindeutig bestimmtes $q \in \mathbb{Z}$ mit $a = qm + r$ und $0 \leq r < m$. Damit ist $b = a - km = qm + r - km = (q-k)m + r$. Also lässt auch $b$ beim Teilen durch m den Rest $r$.
(3) $\Rightarrow$ (1): Es gilt $a = k_1 m + r$ und $b = k_2 m + r$ mit eindeutig bestimmten $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < m$. Also ist $a - b = (k_1 - k_2)m$ und damit gilt $m|(a-b)$. $\square$

## Doppelte Verwendung von ‘mod’

‘mod’ wird auch als *modulo-Operator* verwendet.

$r = a \bmod b$ bedeutet: r ist der Rest bei der Division von a und b.

## Doppelte Verwendung von ‘mod’

‘mod’ wird auch als *modulo-Operator* verwendet.

$r = a \bmod b$ bedeutet: r ist der Rest bei der Division von a und b.

Beispiel:

$3 = 7 \bmod 2$ bedeutet: 3 ist Rest von 7 : 2 (das ist falsch)

## Doppelte Verwendung von ‘mod’

‘mod’ wird auch als *modulo-Operator* verwendet.

$r = a \bmod b$ bedeutet: r ist der Rest bei der Division von a und b.

Beispiel:

$3 = 7 \bmod 2$ bedeutet: 3 ist Rest von 7 : 2 (das ist falsch)
$3 \equiv 7 \bmod 2$ bedeutet: 3 ist kongruent zu 7 mod 2 (das ist wahr)

## Doppelte Verwendung von ‘mod’

‘mod’ wird auch als *modulo-Operator* verwendet.

$r = a \bmod b$ bedeutet: r ist der Rest bei der Division von a und b.

Beispiel:

$3 = 7 \bmod 2$ bedeutet: 3 ist Rest von 7 : 2 (das ist falsch)
$3 \equiv 7 \bmod 2$ bedeutet: 3 ist kongruent zu 7 mod 2 (das ist wahr)

Es gilt: $a \bmod m = b \bmod m \Leftrightarrow a \equiv b \bmod m$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \mod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \mod m \Rightarrow b \equiv a \mod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m \Rightarrow a \equiv c \mod m$ (Transitivität)

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \mod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \mod m \Rightarrow b \equiv a \mod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m \Rightarrow a \equiv c \mod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \mod m$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \mod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \mod m \Rightarrow b \equiv a \mod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m \Rightarrow a \equiv c \mod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \mod m$
(5) $a + c \equiv b + d \mod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \bmod m$, $a^3 \equiv b^3 \bmod m$, ...

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \bmod m$, $a^3 \equiv b^3 \bmod m$, ...

Beweis (nur 6): Aus der Voraussetzung folgt, es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 m$ und $c = d + k_2 m$.

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \bmod m$, $a^3 \equiv b^3 \bmod m$, ...

Beweis (nur 6): Aus der Voraussetzung folgt, es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 m$ und $c = d + k_2 m$. Dann ist $ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m)$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \bmod m$, $a^3 \equiv b^3 \bmod m$, ...

Beweis (nur 6): Aus der Voraussetzung folgt, es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 m$ und $c = d + k_2 m$. Dann ist $ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m) = bd + bk_2 m + k_1 md + k_1 k_2 m^2 =$

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \mod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \mod m \Rightarrow b \equiv a \mod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \mod m$ und $b \equiv c \mod m \Rightarrow a \equiv c \mod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \mod m$ und $c \equiv d \mod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \mod m$
(5) $a + c \equiv b + d \mod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \mod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \mod m$, $a^3 \equiv b^3 \mod m$, ...

Beweis (nur 6): Aus der Voraussetzung folgt, es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 m$ und $c = d + k_2 m$. Dann ist $ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m) = bd + bk_2 m + k_1 md + k_1 k_2 m^2 = bd + (bk_2 + k_1 d + k_1 k_2 m) \cdot m$.

## Rechenregeln für Kongruenzen

Satz: Die Relation 'kongruent modulo m' ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$.
(1) $a \equiv a \bmod m$ (Reflexivität)
(2) $a \equiv b \bmod m \Rightarrow b \equiv a \bmod m$ (Symmetrie)
(3) $a \equiv b \bmod m$ und $b \equiv c \bmod m \Rightarrow a \equiv c \bmod m$ (Transitivität)

Satz: Wenn $a \equiv b \bmod m$ und $c \equiv d \bmod m$, dann gilt:
(4) $-a \equiv -b \bmod m$
(5) $a + c \equiv b + d \bmod m$
(6) $a \cdot c \equiv b \cdot d \bmod m$
(7) $a^2 \equiv b^2 \bmod m$, $a^3 \equiv b^3 \bmod m$, ...

Beweis (nur 6): Aus der Voraussetzung folgt, es gibt $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k_1 m$ und $c = d + k_2 m$. Dann ist $ac = (b + k_1 m)(d + k_2 m) = bd + bk_2 m + k_1 md + k_1 k_2 m^2 = bd + (bk_2 + k_1 d + k_1 k_2 m) \cdot m$.
Das bedeutet: $ac \equiv bd \bmod m$ $\square$

**Beispiel**

$m = 7$

$73 + 155 \equiv$

## Beispiel

$m = 7$

$73 + 155 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \mod 7$

**Beispiel**

$m = 7$

$73 + 155 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \mod 7$
$73 \cdot 155 \equiv$

## Beispiel

$m = 7$

$73 + 155 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \mod 7$
$73 \cdot 155 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \mod 7$

## Beispiel

$m = 7$

$73 + 155 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \mod 7$
$73 \cdot 155 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \mod 7$
$73^{155} \equiv$

**Beispiel**

$m = 7$

$73 + 155 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \mod 7$
$73 \cdot 155 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \mod 7$
$73^{155} \equiv 3^{155} \equiv 5 \mod 7$

Nebenrechnung (alles mod 7):
$3^1 \equiv 3$
$3^2 \equiv 2$
$3^4 \equiv 4 \equiv 3^{16} \equiv 3^{64}$
$3^8 \equiv 2 \equiv 3^{32} \equiv 3^{128}$
$3^{155} = 3^{128+16+8+2+1} \equiv 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \equiv 32 \cdot 3 \equiv -3 \cdot 3 \equiv -9 \equiv 5$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten drei Ziffern ist durch 8 teilbar.
$9|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten drei Ziffern ist durch 8 teilbar.
$9|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 9 teilbar.
$10|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten drei Ziffern ist durch 8 teilbar.
$9|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 9 teilbar.
$10|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist eine 0.
$11|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten drei Ziffern ist durch 8 teilbar.
$9|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 9 teilbar.
$10|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist eine 0.
$11|n \Leftrightarrow$ die alternierende Quersumme ist durch 11 teilbar.
$12|n \Leftrightarrow$

## Teilbarkeitsregeln

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$2|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist gerade.
$3|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 3 teilbar.
$4|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten beiden Ziffern ist durch 4 teilbar.
$5|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist 5 oder 0.
$6|n \Leftrightarrow 2|n$ und $3|n$.
$7|n \Leftrightarrow$ die Zahl, die entsteht, wenn man das doppelte der letzten Ziffer von der Zahl ohne die letzte Ziffer abzieht, ist durch 7 teilbar.
$8|n \Leftrightarrow$ die Zahl aus den letzten drei Ziffern ist durch 8 teilbar.
$9|n \Leftrightarrow$ die Quersumme ist durch 9 teilbar.
$10|n \Leftrightarrow$ die letzte Ziffer ist eine 0.
$11|n \Leftrightarrow$ die alternierende Quersumme ist durch 11 teilbar.
$12|n \Leftrightarrow 3|n$ und $4|n$.

## Beispiele Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeit durch 7:

35881

## Beispiele Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \rightarrow 3586$

## Beispiele Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \to 3586 \to 346$

## Beispiele Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \to 3586 \to 346 \to 22$

## Beispiele Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \to 3586 \to 346 \to 22 \Rightarrow 7$ kein Teiler von 35881

Teilbarkeit durch 11:

355971

**Beispiele Teilbarkeitsregeln**

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \to 3586 \to 346 \to 22 \Rightarrow 7$ kein Teiler von 35881

Teilbarkeit durch 11:

$355971 : 1 - 7 + 9 - 5 + 5 - 3$

**Beispiele Teilbarkeitsregeln**

Teilbarkeit durch 7:

$35881 \to 3586 \to 346 \to 22 \Rightarrow 7$ kein Teiler von 35881

Teilbarkeit durch 11:

$355971 : 1 - 7 + 9 - 5 + 5 - 3 = 0 \Rightarrow 11|355971$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ...$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7:

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt
$n = 10 \cdot m + a_0$.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0$ mod 7.

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0 \mod 7$. Insgesamt gilt: $7|n \Leftrightarrow 7|2n$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv \text{Quersumme(n)} \mod 3$
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv \text{alternierende Quersumme(n)} \mod 11$
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0 \mod 7$. Insgesamt gilt: $7|n \Leftrightarrow 7|2n \Leftrightarrow -m+2a_0 \equiv 0 \mod 7$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0 \mod 7$. Insgesamt gilt:
$7|n \Leftrightarrow 7|2n \Leftrightarrow -m+2a_0 \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow m-2a_0 \equiv 0 \mod 7$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0 \mod 7$. Insgesamt gilt:
$7|n \Leftrightarrow 7|2n \Leftrightarrow -m+2a_0 \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow m-2a_0 \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow 7|(m-2a_0)$

Beweis der Teilbarkeitsregeln (für 3,9,11,7)

Es sei $n = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ die Dezimaldarstellung von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $0 \leq i \leq k$. Dann gilt
$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$

Teilbarkeit durch 3: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_k \equiv$ Quersumme(n) mod 3
Teilbarkeit durch 9 ebenso.
Teilbarkeit durch 11: $n \equiv a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + ... + a_k \cdot 10^k$
$\equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 ... \equiv$ alternierende Quersumme(n) mod 11
Teilbarkeit durch 7: Es sei $m$ die Zahl $n$ ohne die letzte Ziffer. Dann gilt $n = 10 \cdot m + a_0$. Also gilt auch: $2n = 20m + 2a_0$. Und damit gilt: $2n = 21m - m + 2a_0$. Daraus folgt: $2n \equiv -m + 2a_0 \mod 7$. Insgesamt gilt: $7|n \Leftrightarrow 7|2n \Leftrightarrow -m+2a_0 \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow m-2a_0 \equiv 0 \mod 7 \Leftrightarrow 7|(m-2a_0)\square$

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

Definition: Die *Restklasse* $\overline{a}$ von $a$ modulo $m$ ist definiert durch:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \bmod m\}$.

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

Definition: Die *Restklasse* $\overline{a}$ von $a$ modulo $m$ ist definiert durch:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \bmod m\}$.

Andere Schreibweise: $[a]$ statt $\overline{a}$.

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

Definition: Die *Restklasse* $\overline{a}$ von $a$ modulo $m$ ist definiert durch:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \bmod m\}$.

Andere Schreibweise: $[a]$ statt $\overline{a}$.

Beispiel: Die Restklassen modulo 5 sind

$\overline{0} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ....\}$
$\overline{1} =$

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

Definition: Die *Restklasse* $\overline{a}$ von $a$ modulo $m$ ist definiert durch:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \bmod m\}$.

Andere Schreibweise: $[a]$ statt $\overline{a}$.

Beispiel: Die Restklassen modulo 5 sind

$\overline{0} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ....\}$
$\overline{1} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ....\}$
$\overline{2} =$

## Restklassen

Betrachte alle Zahlen, die beim Teilen durch eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ denselben Rest lassen. Diese Zahlen werden zu einer Menge zusammengefasst, der Restklasse.

Definition: Die *Restklasse* $\overline{a}$ von $a$ modulo $m$ ist definiert durch:
$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \bmod m\}$.

Andere Schreibweise: $[a]$ statt $\overline{a}$.

Beispiel: Die Restklassen modulo 5 sind

$\overline{0} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ....\}$
$\overline{1} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ....\}$
$\overline{2} = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ....\}$
$\overline{3} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13....\}$
$\overline{4} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14....\}$

## Rechnen im Restklassenring

Die Menger aller Restklassen modulo m heißt *Restklassenring modulo m* geschrieben $\mathbb{Z}_m$.

## Rechnen im Restklassenring

Die Menger aller Restklassen modulo m heißt *Restklassenring modulo m* geschrieben $\mathbb{Z}_m$.

Beispiel: $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

## Rechnen im Restklassenring

Die Menger aller Restklassen modulo m heißt *Restklassenring modulo m* geschrieben $\mathbb{Z}_m$.

Beispiel: $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$
$\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$

## Rechnen im Restklassenring

Die Menger aller Restklassen modulo m heißt *Restklassenring modulo m* geschrieben $\mathbb{Z}_m$.

Beispiel: $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$
$\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $\overline{2} + \overline{3} = \overline{5} \quad \overline{7} + \overline{8} = \overline{15} = \overline{5}$

## Rechnen im Restklassenring

Die Menger aller Restklassen modulo m heißt *Restklassenring modulo m* geschrieben $\mathbb{Z}_m$.

Beispiel: $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

Definition: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$.
$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$
$\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $\overline{2} + \overline{3} = \overline{5} \quad \overline{7} + \overline{8} = \overline{15} = \overline{5}$
Es spielt keine Rolle, welcher Repräsentant der Restklasse für die Berechnung genommen wird. Addition und Multiplikation sind ‘wohldefiniert’.

## Verknüpfungstabellen

Die Verknüpfungstabelle für Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}_5$

| + | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 0 | 1 | 2 | 3 |

| * | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 1 | 3 |
| 3 | 0 | 3 | 1 | 4 | 2 |
| 4 | 0 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a - a} = \overline{0}$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m?  Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} =$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a - a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m?   Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m? Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$ :

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x$$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m? Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$ :

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x \Leftrightarrow$$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m? Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$ :

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x \Leftrightarrow x = \overline{3}$$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a - a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m? Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$ :

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x \Leftrightarrow x = \overline{3}$$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}}$$

Subtraktion: $\overline{a} - \overline{b} := \overline{a} + \overline{-b}$. Dann gilt: $\overline{a} - \overline{a} = \overline{a} + \overline{-a} = \overline{a-a} = \overline{0}$

Hilfsfrage für negative Restklassen: Wieviel fehlt vom Absolutbetrag zum nächsten Vielfachen von m?   Beispiel in $\mathbb{Z}_7$: $\overline{-25} = \overline{3}$

Division in $\mathbb{Z}_5$ :

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x \Leftrightarrow x = \overline{3}$$

$$\frac{\overline{2}}{\overline{3}} = x \Leftrightarrow \overline{2} = \overline{3} \cdot x \Leftrightarrow x = \overline{4}$$

Problem bei der Division in $\mathbb{Z}_4$ :

| * | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

$$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x$$

Problem bei der Division in $\mathbb{Z}_4$ :

| * | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x,$ es gibt kein x.

$\frac{\overline{2}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{2} = \overline{2} \cdot x$

Problem bei der Division in $\mathbb{Z}_4$ :

| * | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

$\frac{\overline{1}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{1} = \overline{2} \cdot x,$ es gibt kein x.

$\frac{\overline{2}}{\overline{2}} = x \Leftrightarrow \overline{2} = \overline{2} \cdot x,$ $x = \overline{1}$ oder $x = \overline{3}$, d.h. x ist nicht eindeutig.

## Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$

## Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x}$$

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x}$$

## Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x}$$

### Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \mod m$$

### Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \mod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht.

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht. Wir müssen also die diophantische Gleichung $bx + km = a$ lösen.

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht. Wir müssen also die diophantische Gleichung $bx + km = a$ lösen.

Falls $m$ Primzahl, dann ist $\mathrm{ggT}(m, b) = 1$.

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht. Wir müssen also die diophantische Gleichung $bx + km = a$ lösen.

Falls $m$ Primzahl, dann ist $\text{ggT}(m, b) = 1$. Dann hat die Gleichung für jedes $a$ eine Lösung $x_0$

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht. Wir müssen also die diophantische Gleichung $bx + km = a$ lösen.

Falls $m$ Primzahl, dann ist $\text{ggT}(m, b) = 1$. Dann hat die Gleichung für jedes $a$ eine Lösung $x_0$ und alle anderen Lösungen sind gegeben durch $x_0 + t \cdot m, t \in \mathbb{Z}$.

**Existenz von Brüchen in $\mathbb{Z}_m$**

$$\frac{\overline{a}}{\overline{b}} = \overline{x} \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{b \cdot x} \Leftrightarrow a \equiv bx \bmod m \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : km = a - bx$$

In der letzten Gleichung sind $a, b, m$ vorgegeben $k$ ist unbekannt und $x$ ist gesucht. Wir müssen also die diophantische Gleichung $bx + km = a$ lösen.

Falls $m$ Primzahl, dann ist $\text{ggT}(m, b) = 1$. Dann hat die Gleichung für jedes $a$ eine Lösung $x_0$ und alle anderen Lösungen sind gegeben durch $x_0 + t \cdot m, t \in \mathbb{Z}$. Dies sind die Elemente von $\overline{x_0}$.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$,

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

Merkregel: Wenn wir $\dfrac{\overline{1}}{\overline{a}}$ in $\mathbb{Z}_p$ suchen, dann lösen wir die Gleichung $ax + py = 1$. Es gilt dann: $\dfrac{\overline{1}}{\overline{a}} = \overline{x}$.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\frac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

Merkregel: Wenn wir $\frac{\overline{1}}{\overline{a}}$ in $\mathbb{Z}_p$ suchen, dann lösen wir die Gleichung $ax + py = 1$. Es gilt dann: $\frac{\overline{1}}{\overline{a}} = \overline{x}$.

Beispiel: Bestimme $\frac{\overline{1}}{\overline{7}}$ in $\mathbb{Z}_{11}$.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\dfrac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

Merkregel: Wenn wir $\dfrac{\overline{1}}{\overline{a}}$ in $\mathbb{Z}_p$ suchen, dann lösen wir die Gleichung $ax + py = 1$. Es gilt dann: $\dfrac{\overline{1}}{\overline{a}} = \overline{x}$.

Beispiel: Bestimme $\dfrac{\overline{1}}{\overline{7}}$ in $\mathbb{Z}_{11}$. Wir lösen die Gleichung $7x + 11y = 1$.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\frac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

Merkregel: Wenn wir $\frac{\overline{1}}{\overline{a}}$ in $\mathbb{Z}_p$ suchen, dann lösen wir die Gleichung $ax + py = 1$. Es gilt dann: $\frac{\overline{1}}{\overline{a}} = \overline{x}$.

Beispiel: Bestimme $\frac{\overline{1}}{\overline{7}}$ in $\mathbb{Z}_{11}$. Wir lösen die Gleichung $7x + 11y = 1$. Eine Lösung ist $x = -3, y = 2$.

**Satz vom Dividieren**: Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{Z}, b \in \{1, ..., p-1\}$, dann besitzt die Gleichung $\overline{b} \cdot \overline{x} = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_p$ genau eine Lösung $\overline{x}$, d.h. $\frac{\overline{a}}{\overline{b}} := \overline{x}$ ist definiert.

Merkregel: Wenn wir $\frac{\overline{1}}{\overline{a}}$ in $\mathbb{Z}_p$ suchen, dann lösen wir die Gleichung $ax + py = 1$. Es gilt dann: $\frac{\overline{1}}{\overline{a}} = \overline{x}$.

Beispiel: Bestimme $\frac{\overline{1}}{\overline{7}}$ in $\mathbb{Z}_{11}$. Wir lösen die Gleichung $7x + 11y = 1$. Eine Lösung ist $x = -3, y = 2$. Also gilt: $\frac{\overline{1}}{\overline{7}} = \overline{-3} = \overline{8}$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1$, $3^4 \equiv$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1$, $3^4 \equiv 81 \equiv 1$, $4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka}$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} =$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$. Wir entfernen $\overline{0a}$ aus $A$ und $\mathbb{Z}_p$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$. Wir entfernen $\overline{0a}$ aus $A$ und $\mathbb{Z}_p$. Das Produkt der restlichen Elemente muss gleich sein.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$. Wir entfernen $\overline{0a}$ aus $A$ und $\mathbb{Z}_p$. Das Produkt der restlichen Elemente muss gleich sein.
$\overline{1a} \cdot \overline{2a} \cdot ... \cdot \overline{(p-1)a} = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot ... \cdot \overline{p-1}$.

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$. Wir entfernen $\overline{0a}$ aus $A$ und $\mathbb{Z}_p$. Das Produkt der restlichen Elemente muss gleich sein.
$\overline{1a} \cdot \overline{2a} \cdot ... \cdot \overline{(p-1)a} = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot ... \cdot \overline{p-1}$. Wir dividieren durch $\overline{1}, \overline{2}, ...$ und erhalten: $\quad \overline{a}^{p-1} = \overline{1}$

**Kleiner Satz von Fermat:**
Sei $p$ Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ kein Vielfaches von $p$.
Dann gilt: $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ bzw. $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

Beispiel in $\mathbb{Z}_5$: $2^4 \equiv 16 \equiv 1, \quad 3^4 \equiv 81 \equiv 1, \quad 4^4 \equiv (-1)^4 \equiv 1$

Beweis: Setze $A = \{\overline{0a}, \overline{1a}, \overline{2a}, ..., \overline{(p-1)a}\} \subseteq \mathbb{Z}_p$. Wir zeigen zunächst $A = \mathbb{Z}_p$, indem wir zeigen, dass alle Elemente in $A$ verschieden sind.
Annahme: $\overline{ja} = \overline{ka}$ für ein $k > j$. Dann gilt:
$\overline{0} = \overline{ja} - \overline{ka} = \overline{ja - ka} = \overline{(j-k)a}$. Da $j - k \neq 0$ können wir dividieren und erhalten $\overline{a} = \frac{\overline{0}}{\overline{j-k}}$. Damit ist $a$ ein Vielfaches von p, im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $A = \mathbb{Z}_p$. Wir entfernen $\overline{0a}$ aus $A$ und $\mathbb{Z}_p$. Das Produkt der restlichen Elemente muss gleich sein.
$\overline{1a} \cdot \overline{2a} \cdot ... \cdot \overline{(p-1)a} = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot ... \cdot \overline{p-1}$. Wir dividieren durch $\overline{1}, \overline{2}, ...$ und erhalten: $\quad \overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ $\square$

**Primitivwurzeln**:

Definition: Ein Element $\overline{g} \in \mathbb{Z}_m$ heißt *Primitivwurzel*, falls durch $\overline{g}^k$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_m$ außer $\overline{0}$ dargestellt werden können.

**Primitivwurzeln**:

Definition: Ein Element $\overline{g} \in \mathbb{Z}_m$ heißt *Primitivwurzel*, falls durch $\overline{g}^k$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_m$ außer $\overline{0}$ dargestellt werden können.

Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
2^0 \equiv 1 \mod 7 & 3^0 \equiv 1 \mod 7 \\
2^1 \equiv 2 & 3^1 \equiv 3 \\
2^2 \equiv 4 & 3^2 \equiv 2 \\
2^3 \equiv 1 & 3^3 \equiv 6 \\
2^4 \equiv 2 & 3^4 \equiv 4 \\
2^5 \equiv 4 & 3^5 \equiv 5 \\
2^6 \equiv 1 & 3^6 \equiv 1
\end{array}$$

**Primitivwurzeln**:

Definition: Ein Element $\overline{g} \in \mathbb{Z}_m$ heißt *Primitivwurzel*, falls durch $\overline{g}^k$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_m$ außer $\overline{0}$ dargestellt werden können.

Beispiel:

| | |
|---|---|
| $2^0 \equiv 1 \mod 7$ | $3^0 \equiv 1 \mod 7$ |
| $2^1 \equiv 2$ | $3^1 \equiv 3$ |
| $2^2 \equiv 4$ | $3^2 \equiv 2$ |
| $2^3 \equiv 1$ | $3^3 \equiv 6$ |
| $2^4 \equiv 2$ | $3^4 \equiv 4$ |
| $2^5 \equiv 4$ | $3^5 \equiv 5$ |
| $2^6 \equiv 1$ | $3^6 \equiv 1$ |

$\overline{3}$ ist Primitivwurzel in $\mathbb{Z}_7$, $\overline{2}$ nicht.

**Primitivwurzeln**:

Definition: Ein Element $\overline{g} \in \mathbb{Z}_m$ heißt *Primitivwurzel*, falls durch $\overline{g}^k$ alle Elemente von $\mathbb{Z}_m$ außer $\overline{0}$ dargestellt werden können.

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
2^0 \equiv 1 \bmod 7 & 3^0 \equiv 1 \bmod 7 \\
2^1 \equiv 2 & 3^1 \equiv 3 \\
2^2 \equiv 4 & 3^2 \equiv 2 \\
2^3 \equiv 1 & 3^3 \equiv 6 \\
2^4 \equiv 2 & 3^4 \equiv 4 \\
2^5 \equiv 4 & 3^5 \equiv 5 \\
2^6 \equiv 1 & 3^6 \equiv 1
\end{array}
$$

$\overline{3}$ ist Primitivwurzel in $\mathbb{Z}_7$, $\overline{2}$ nicht.

Tritt bei $\overline{g}^k$ vor $\overline{g}^{p-1}$ die Restklasse $\overline{1}$ auf, so wiederholen sich die Restklassen. Es kann keine Primitivwurzel vorliegen.