Vertiefungskurs Mathematik

Gleichungen und Ungleichungen

Lösungen für Gleichungen oder Ungleichungen können wir auf unterschiedliche Weisen angeben.

- Aufzählen der Lösungen: $x_1 = 2, x_2 = -3$
- Lösungsmenge in Mengenschreibeweise: $\mathbb{L} = \{2; -3\}$
- Mengenschreibeweise mit einer charakterisierenden Eigenschaft, z.B:
  $\mathbb{L} = \{k \mid k \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq k < 5\}$
  $\mathbb{L} = \{k \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq k < 5\}$
  $\mathbb{L} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- Angabe der Lösungsmenge als Intervall: $\mathbb{L} = (-1, 2]$

Polynomgleichungen

Eine reelle Polynomgleichung ist eine Gleichung, die man auf die Form $f(x) = 0$ mit einem Polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ mit reellen Koeffzienten $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, ..., n$ und $a_n \neq 0$, bringen kann. Dabei heißt n Grad der Gleichung. Eine reelle Zahl x heißt Lösung der Gleichung, wenn x eine Nullstelle des Polynoms f ist, also $f(x) = 0$ gilt.

Beispiele:

$\frac{3}{7}x + 5 = \frac{1}{2}$, $n = 1$, lineare Gleichung

$x^2 - 5x + 2 = 0$, $n = 2$, quadratische Gleichung

Für quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$ gibt es manchmal schnellere Lösungswege als die Anwendung der Mitternachtsformel.

1. Falls $c = 0$: Ausklammern und Satz vom Nullprodukt anwenden:

Beispiel: $2x^2 - 3x = 0$. Ausklammern ergibt $x(2x - 3) = 0$. Mit dem Satz vom Nullprodukt erhalten wir die Lösungen $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}$

2. In der *normierten Form (pq-Form)* ist $a = 0$.

Satz von Vieta: Hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen x_1 und x_2, so gilt: $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$

Beispiel: $3x^2 + 3x - 18 = 0$ bringen wir auf die normierte Form $x^2 + x - 6 = 0$. Der Satz von Vieta liefert uns $x_1 = -3, x_2 = 2$.