L'Hospitalsche Regel – Aufgaben

① a) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} \overset{\text{ohne L'Hosp.}}{=} \lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 6$

mit L'Hosp. $= \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{1} = 6$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^4-3^4}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} 4x^3 = 108$

c) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x^3-3^3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x}{3x^2} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$

② a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{k/(1+kx)}{1} = k$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{1/(1+x)} = 1$

③ a) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{1/2\, x^{-1/2}}{1} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ln a}-e^{x\ln b}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln a\, e^{x\ln a}-\ln b\, e^{x\ln b}}{1} = \ln a-\ln b$

$= \ln\frac{a}{b}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ n\geq 2}} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1/x}{\frac{1}{n}x^{1/n-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{x^{1/n}} = 0$

④ a) $f(x) = \frac{\ln x - 1}{x-e}$ $\quad \lim\limits_{x\to e} f(x) = \lim\limits_{x\to e} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{e}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x} = 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}$ existiert nicht, da $\cos x$ immer zwischen ± 1 schwankt.

$\Rightarrow$ keine Aussage über $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ möglich.