2020

A2020

Gegeben sind die Funktionen f und h mit $f(x) = (x+4)^2$ und $h(x) = \frac{1}{5}(x^2-4)$ für $x \in \mathbb{R}$.
a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und h und die Schnittpunke der Graphen von f und h.
b) Skizzieren Sie die Graphen $y = f(x)$ und $y = h(x)$, ihre Schnittpunkte und die Nullstellen von f und h in einem geeigneten Koordinatensystem.
c) Bestimmend Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{5}(x^2-4) \leq (x+4)^2$.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\sqrt{\frac{1}{5}(x^2-4)} \leq x+4$.

a) Nullstellen f: $x = -4$
$\underline{g}$: $x = +2$, $x = -2$

Schnittpunkte: $(x+4)^2 = \frac{1}{5}(x^2-4)$

$$x^2 + 8x + 16 = \frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}$$

$$\frac{4}{5}x^2 + 8x + \frac{84}{5} = 0 \quad | \cdot 5$$

$$4x^2 + 40x + 84 = 0 \quad | : 4$$

$$x^2 + 10x + 21 = 0$$

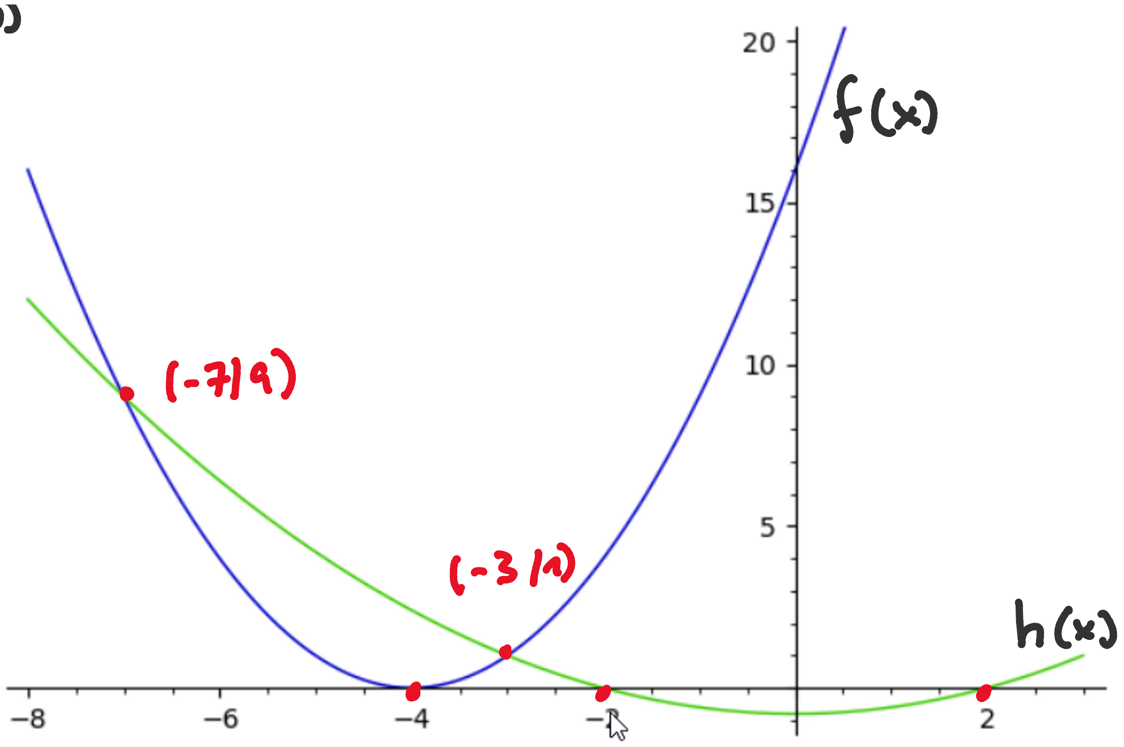
$$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2} = -5 \pm 2$$

$$x_1 = -7, \quad x_2 = -3$$

$f(-7) = 9$, $f(-3) = 1$
Schnittpunkte: $S_1 = (-7|9)$, $S_2 = (-3|1)$

b)

b)



c) $\frac{1}{5}(x^2-4) \leq (x+4)^2 \quad \Leftrightarrow \quad h(x) \leq f(x)$

$\mathbb{L} = (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$

d) $\sqrt{\frac{1}{5}(x^2-4)} \leq (x+4)$

Die Terme von d) sind die Wurzeln der Terme aus c). Das Ungleichheitszeichen bleibt erhalten, wenn beide Terme nicht negativ sind. Für negative Terme ist die Wurzel nicht definiert. Daher:

$\mathbb{L} = [-3, -2] \cup [2, \infty)$