A2

A2: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Für alle natürlichen Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$$

$$\text{I.A}: \quad n=1: \quad (2-1)^2 = \frac{1\cdot(2+1)(2-1)}{3}$$

$$1 = \frac{3}{3} = 1 \quad ✓$$

$$\text{I.S.}: \quad \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} + (2n+1)^2 = \frac{n(2n+1)(2n-1)+3(2n+1)^2}{3} \quad (*)$$

$$(*) = n(4n^2-1)+3(4n^2+4n+1) = 4n^3-n+12n^2+12n+3$$

$$= 4n^3+12n^2+11n+3 \qquad (1)$$

Der Zähler der rechten Seite der zu beweisenden Gleichung für n+1:

$$(n+1)(2(n+1)+1)(2(n+1)-1) = (n+1)(2n+3)(2n+1)$$

$$= (2n^2+3n+2n+3)(2n+1) = 4n^3+10n^2+6n+2n^2+3n+2n+3$$

$$= 4n^3+12n^2+11n+3 \qquad (2)$$

$$(1) = (2) \qquad \text{q.e.d.}$$