

# Vertiefungskurs Mathematik

Folgen

**Definition Folge:** Eine (reelle) Folge ist eine Abbildung  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , also eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl  $n$  das  $n$ -te Folgenglied  $a(n) \in \mathbb{R}$  zuordnet. Wir schreiben  $a_n$  für das  $n$ -te Folgenglied und  $(a_n)$  für die Folge.

Beispiel:  $(a_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$  ist eine Folge mit  $a_4 = 3$ .

Wir können eine Folge auch ansehen als eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(n) = a_n$ .

Wir können uns eine Folge vorstellen als eine Folge von Punkten auf der Zahlengeraden.

Manchmal lässt man eine Folge auch beim Index 0 beginnen.

Eine Folge kann durch eine algebraische Vorschrift gegeben.

$a_n = n^2 + 1$  beschreibt eine Folge mit den Folgengliedern  
 $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 10 \dots$

Manchmal ist es schwierig, eine Formel für das  $n$ -te Folgenglied zu finden.  
Eine Folge kann auch rekursiv beschrieben werden:

$$a_n = \begin{cases} 1, & n = 1, n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

Der Wert eines Folgenglieds wird durch Rückgriff auf frühere Folgenglieder festgelegt.

Zwei Folgen sind dann gleich, wenn sie mit dem gleichen Index starten und die entsprechenden Folgenglieder alle gleich sind. Dieselbe Folge kann uns auf unterschiedliche Arten gegeben sein.

$$a_n = 2^n \text{ für } n \geq 0$$

$$b_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 2 \cdot b_{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

Die Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind gleich.

Wir nutzen die Tribonacci Folge  $(a_n)$ , um daraus eine neue Folge  $(b_n)$  zu bauen.

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, 1, 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & \text{falls } n > 2 \end{cases}$$

$$(a_n) = 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, \dots$$

$$b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$(b_n) = 1, 1, 3, \frac{5}{3}, \frac{9}{5}, \frac{17}{9}, \frac{31}{17}, \frac{57}{31}, \frac{105}{57} \dots$$

Die Folge  $(b_n)$  mit Dezimalzahlen:

1.0000000000000000  
1.0000000000000000  
3.0000000000000000  
1.6666666666666667  
1.8000000000000000  
1.8888888888888889  
1.82352941176471  
1.83870967741935  
1.84210526315789  
1.83809523809524  
1.83937823834197  
1.83943661971831  
1.83920367534456  
1.83930058284763  
1.83929379809869  
1.83928131922225  
1.83928810384049  
1.83928701345944  
1.83928642063210  
1.83928686638422

Die Folgenglieder  $b_n$  scheinen sich einem Grenzwert  $b$  anzunähern.

Wir schreiben  $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

Es kann schwierig sein, den genauen Grenzwert zu berechnen. Für  $b_n$  ist es die Zahl:

$$\frac{1}{3} \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} - \frac{1}{3} \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \frac{1}{3} \\ \approx 1,8392867552$$

Eine **arithmetische Folge** ist eine Folge mit einer konstanten Differenz zwischen den Folgengliedern.

$$5, 12, 19, 26, 33, \dots \quad a_n = 5 + 7n.$$

Allgemeine Form einer arithmetischen Folge:  $a_n = a_0 + d \cdot n$ .

Jedes Folgenglied ist das arithmetische Mittel seiner Nachbarn.

Eine **geometrische Folge** ist eine Folge mit einem konstanten Quotienten zwischen den Folgengliedern.

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots \quad a_n = 3 \cdot 2^n.$$

Allgemeine Form einer geometrischen Folge:  $a_n = a_0 \cdot q^n$ .

Jedes Folgenglied ist das geometrische Mittel seiner Nachbarn.

Das geometrische Mittel zweier Zahlen  $a, b$  ist definiert als  $\sqrt{a \cdot b}$ .

Wir untersuchen die Folge  $a_n = \frac{6n+2}{3n+3}$

$$a_1 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$a_{1000} = \frac{6002}{3003} \approx 1.99866799866800$$

$$a_{1000000} = \frac{6000002}{3000003} \approx 1.99999866666800$$

Die Folge nähert sich der 2, wir schreiben:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

Damit drücken wir aus: Wir können mit  $a_n$  beliebig nahe an die 2 kommen, wenn wir  $n$  nur groß genug wählen.

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$ , so dass  $a_n$  nicht mehr als  $\epsilon$  von 2 entfernt ist, wenn nur  $n > n_0$  ist.



**Definition Grenzwert:** Eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  heißt Grenzwert der Folge  $(a_n)$  wenn gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Besitzt eine Folge  $(a_n)$  einen Grenzwert  $a$  - auch *Limes* genannt - so sagt man, die Folge *konvergiert* gegen  $a$  und schreibt dafür  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  $(a_n) \rightarrow a$  für  $a \rightarrow \infty$ .

Andere Formulierung:  $a$  heißt Grenzwert der Folge  $(a_n)$ , wenn in jeder (noch so kleinen)  $\epsilon$ -Umgebung von  $a$  *fast alle* Elemente der Folge liegen.

Gegeben die Folge:  $a_n = \frac{n+1}{n+2}$ . Behauptung:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

Beweis: Sei  $\epsilon > 0$ .

Wir müssen ein  $n_0$  finden, so dass  $|a_n - 1| < \epsilon$  für  $n > n_0$ .

$$\begin{aligned} |a_n - 1| < \epsilon &\Leftrightarrow 1 - \frac{n+1}{n+2} < \epsilon \Leftrightarrow (n+2) - (n+1) < \epsilon(n+2) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} < n+2 \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon} - 2 < n. \end{aligned}$$

Wähle als  $n_0$  eine Zahl mit  $n_0 \geq \frac{1}{\epsilon} - 2$ . □

Beispiel: für  $\epsilon = \frac{1}{100}$  wählen wir  $n_0 = 98$ . Alle Folgenglieder nach  $a_{98}$  haben den Abstand kleiner als  $\frac{1}{100}$  zum Grenzwert 1.

Folgen sind nützlich für näherungsweise Berechnungen. Wir betrachten die ersten 7 Elemente der Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{x_n}{2}$$

1.0000000000000000

1.5000000000000000

1.4166666666666667

1.41421568627451

1.41421356237469

1.41421356237310

1.41421356237310

Die Folge konvergiert gegen  $\sqrt{2}$ . Wenn man eine gute Näherung für  $\sqrt{2}$  benötigt, muss man nur weit genug in der Folge fortschreiten.

**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl  $S \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $a_n \leq S$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $S$  heißt dann obere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl  $s \in \mathbb{R}$  gibt, mit  $s \leq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $s$  heißt dann untere Schranke der Folge.

Die Folge heißt **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele: Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = \sin(n)$  ist eine beschränkte Folge.

Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = n \cdot \sin(\frac{\pi n}{2})$  ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

**Satz:** Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $a$  ihr Grenzwert. Wähle  $\epsilon = 1$ . Dann liegen in der  $\epsilon$ -Umgebung  $U = (a - 1, a + 1)$  fast alle Folgenglieder. Die endlich vielen Elemente außerhalb von  $U$  haben ein größtes und ein kleinstes Element. Das sind die Schranken der Folge. Falls unterhalb oder oberhalb von  $U$  keine Elemente vorhanden sind, wählen wir den Rand von  $U$  als Schranke. □

**Grenzwertsätze:** Für konvergente Folgen  $(a_n)$  und  $(b_n)$  gilt:

(G1) Die Summenfolge  $(a_n + b_n)$  ist konvergent und ihr Grenzwert ist die Summe der Grenzwerte von  $(a_n)$  und  $(b_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(G2) Die Produktfolge  $(a_n \cdot b_n)$  ist konvergent und ihr Grenzwert ist das Produkt der Grenzwerte von  $(a_n)$  und  $(b_n)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

(G3) Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , so sind fast alle  $b_n \neq 0$ , und die (ggf. erst ab einem Index  $N > 1$  definierte) Quotientenfolge  $(\frac{a_n}{b_n})$  konvergiert gegen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Man darf also den Limes in Summe, Produkt und Quotient zweier Folgen 'reinziehen', wenn(!) die Ausgangs-Folgen konvergent sind.

Zum Beweis der Grenzwertsätze benötigen wir:

**Lemma:** Für zwei reelle Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt die *Dreiecksungleichung*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis: Aus der Definition des Betrags folgt unmittelbar:

$\pm x \leq |x|$  und  $\pm y \leq |y|$  Also gilt:

$x + y \leq |x| + |y|$  und  $-(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|$ .

Insgesamt gilt also:  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

□.

## Beweis von G1:

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Dann gibt es  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$  für  $n > n_1$  und  $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$  für  $n > n_2$ . Wir setzen  $n_0$  als das Maximum von  $n_1$  und  $n_2$ . Dann gilt für alle  $n > n_0$ :

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

□

## Beweis von G2:

Sei  $\epsilon > 0$  gegeben. Es gilt:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n + a_n b - a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq \\ &|a_n(b_n - b)| + |(a_n - a)b| = |a_n|(b_n - b)| + |(a_n - a)||b|. \end{aligned}$$

Da  $(a_n)$  konvergiert, gibt es eine Schranke  $S$  mit der wir den ersten Summanden abschätzen können.  $|a_n|(b_n - b)| \leq S|(b_n - b)|$ .

Wir wählen  $n_1$  und  $n_2$  so, dass beide Summanden für größere  $n$  kleiner als  $\frac{\epsilon}{2}$  sind. Für  $n > \max\{n_1, n_2\}$  gilt dann:

$$|a_n b_n - ab| \leq S|(b_n - b)| + |b|(a_n - a)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□



**Definition:** Eine Folge  $(a_n)$  heißt **monoton wachsend**, wenn  $a_{n+1} \geq a_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Gilt sogar  $>$  anstelle von  $\geq$ , so heißt die Folge **streng monoton wachsend**.

Entsprechend ist **(streng) monoton fallend** definiert.

Eine Folge heißt **(streng) monoton**, wenn sie (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.

Beispiele: Die Folge  $(a_n)$  mit  $a_n = n^2$  ist streng monoton wachsend.

Die Folge  $(b_n)$  mit  $b_n = 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots$  ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.

Andere Formulierung: Eine Folge ist monoton, wenn alle Folgenglieder in dieselbe Richtung gehen.

**Satz (Montoniekriterium):** Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Statt eines formalen Beweises machen wir uns den Inhalt geometrisch plausibel: Da die Folge eine obere Schranke hat, hat sie auch eine kleinste obere Schranke. Das ist dann der Grenzwert.

Beispiel: Die Folge  $(a_n)$  sei gegeben durch  $a_1 = 1$  und  $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ . Mit vollständiger Induktion wir zeigen wir, dass  $(a_n)$  streng monoton wächst und beschränkt ist:  $0 \leq a_n \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Also hat  $(a_n)$  einen Grenzwert. Der Grenzwert erfüllt die Gleichung  $x = \sqrt{x + 2}$ , daraus berechnen wir den Grenzwert  $a = 2$ .

**Exkurs:** Gibt es eine Folge, die jede ganze Zahl enthält?

$(a_n) : 0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots$

$$a_n = \begin{cases} -\frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Zwei endliche Mengen haben gleich viele Elemente, wenn man eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen der beiden Mengen herstellen kann. Auf unendliche Mengen übertragen zeigt die Folge: Es gibt genauso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen.

Etwas Unendliches wird nicht notwendig kleiner, wenn man etwas wegnimmt.

**Exkurs:** Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl enthält?

Einfachere Version: Gibt es eine Folge, die jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 enthält?

Annahme: Es gibt Folge  $(a_n)$ , in der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorkommen. Jedes  $a_n$  hat eine Dezimalentwicklung. Sei  $D$  die  $n$ -te Dezimalstelle von  $a_n$ . Wir konstruieren eine Zahl  $x$  mit

Die  $n$ -te Dezimalstelle von  $x = \begin{cases} D + 1, & \text{falls } D \leq 7, \\ D - 1 & \text{falls } D = 8 \text{ oder } D = 9 \end{cases}$

Dann ist  $x$  eine reelle Zahl zwischen 0 und 1, kann aber kein Element der Folge  $(a_n)$  sein, da es sich von jedem  $a_n$  in mindestens einer Dezimalstelle unterscheidet. □