

1. (2 Punkte) Beweise mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

Lösung:

A	B	$\neg(\neg A \vee B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$			
0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0

2. (4 Punkte) Agnes, Bernd, Claudia, Daniela und Eduard wohnen jeweils in einer anderen Stadt. Die Städte sind: Ulm, Vechta, Wertheim, Xanten und Zwiesel. Die Aussagen a bis c sind alle drei falsch. Die Aussagen d und e sind beide richtig. Ordne den fünf Personen jeweils den Wohnort zu. (Deine Überlegungen müssen nachvollziehbar sein!)

- a: Agnes wohnt nicht in Xanten und nicht in Wertheim.
 b: Bernd wohnt nicht in Ulm und Claudia nicht in Zwiesel.
 c: Eduard wohnt in Wertheim.
 d: Daniela wohnt in Vechta oder in Zwiesel.
 e: Entweder wohnt Bernd in Xanten oder Eduard in Wertheim.

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
 a: \neg A_x \wedge \neg A_w & \neg a: A_x \vee A_w \quad (1) \\
 b: \neg B_u \wedge \neg C_z & \neg b: B_u \vee C_z \quad (2) \\
 c: E_w & \neg c: \neg E_w \quad (3) \\
 & d: D_v \vee D_z \quad (4) \\
 & e: B_x \oplus E_w \quad (5)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (5), (3) \Rightarrow B_x \Rightarrow C_z \Rightarrow D_v \\
 \quad \quad \quad (2) \quad \quad (4) \\
 B_x \Rightarrow A_w \\
 \quad \quad \quad (1)
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} (5), (3) \Rightarrow B_x \Rightarrow C_z \Rightarrow D_v \\ B_x \Rightarrow A_w \end{array}} \right\} \Rightarrow E_u$$

Agnes wohnt in Wertheim, Bernd in Xanten, Claudia in Zwiesel, Daniela in Vechta und Eduard in Ulm

3. (3 Punkte) Gegeben sei eine natürliche Zahl a. Formuliere zu folgendem Satz die Umkehrung, die Kontraposition und die Kontraposition der Umkehrung.
 Wenn a eine Quadratzahl ist, dann hat a eine ungerade Anzahl von Teilern.

Lösung: Umkehrung: Wenn a eine ungerade Anzahl von Teilern hat, dann ist a eine Quadratzahl.

Kontraposition: Wenn a eine gerade Anzahl von Teilern hat, dann ist a keine Quadratzahl.

Kontraposition der Umkehrung: Wenn a keine Quadratzahl ist, dann hat a eine gerade Anzahl von Teilern.

4. (3 Punkte) Gegeben sind die folgenden Aussagen:

- Jeder Drache kann fliegen.
- Es gibt einen glücklichen Drachen, die nicht grün ist.
- Alle glücklichen Drachen haben ein Kind, das fliegen kann.

Formuliere die Aussagen prädikatenlogisch. Benutze dafür $X :=$ die Menge aller Drachen, $K(x) :=$ Menge aller Kinder des Drachen x , und die Aussagen $fl(x)$, $gl(x)$, $gr(x)$, deren Wahrheitswerte folgendermaßen definiert sind:

- Die Aussage $fl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x fliegen kann,
- Die Aussage $gl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x glücklich ist,
- Die Aussage $gr(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x grün ist.

Lösung:

- $\forall x \in X : fl(x)$
- $\exists x \in X : (gl(x) \wedge \neg gr(x))$
- $\forall x \in X : (gl(x) \Rightarrow \exists y \in K(x) : fl(y))$

5. (3 Punkte) Berechne den ggT der Zahlen a und b und stelle ihn in der Form $ax + by$ dar: $a = 1890, b = 702$

Lösung:

a	b	q	r	x	y
1890	702	2	486	3	-8
702	486	1	216	-2	3
486	216	2	54	1	-2
216	54	4	0	0	1

$$1890 * 3 + 702 * -8 = 54$$

6. (3 Punkte) a. Zerlege die Zahlen 78 und 52 in Primfaktoren und bestimme damit ihren ggT.
 b. Bestimme - falls möglich - eine Lösung (x/y) der Gleichung: $78x + 52y = 4$

Lösung:

$$78 = 2 * 3 * 13$$

$$52 = 2 * 2 * 13$$

Der ggT von 78 und 52 ist 26. 26 ist nicht Teiler von 4. Also hat die Gleichung keine Lösung.

7. (4 Punkte) Finde möglichst viele Lösungen für: $51x + 39y = 9$

Lösung:

$$51x + 39y = 9 \quad | :3$$

$$17x + 13y = 3 \quad (1)$$

$$\text{ggT}(17, 13) = 1 \mid 3 \Rightarrow \text{Es gibt Lösungen}$$

$$\begin{array}{cccccc} a & b & q & r & x & y \\ 17 & 13 & 1 & 4 & -3 & 4 \\ 13 & 4 & 3 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$17(-3) + 13(4) = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{eine Lösung für (1) ist: } (-9/12)$$

$$\text{Weitere Lösungen: } (-9 + 13k \mid 12 - 17k) \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Kontrolle: } 17(-3) + 13(4) = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \text{eine Lösung für (1) ist: } (-9/12)$$

$$\text{Weitere Lösungen: } (-9 + 13k \mid 12 - 17k) \text{ für } k \in \mathbb{Z}$$

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe:
Punkte:	2	4	3	3	3	3	4	22