Aufgabe 4: Würfelglück

4.1 Lösungsidee

Ziel soll es sein, den Freunden eine verlässliche Auskunft über die Gewinnwahrscheinlichkeiten der einzelnen Würfel zu geben. Dafür bietet es sich an, einen *Monte-Carlo-Algorithmus*[8] zu verwenden, der für verschiedene Würfel jeweils eine große Anzahl von Partien zweier MENSCH-ÄRGERE-DICH-NICHT-Spieler simuliert. Je nachdem, wie oft ein Spieler mit einem Würfel gewinnt, kann dann eine Aussage über die Güte des Würfels getroffen werden.

Regeln

Besonders wichtig ist, dass der Algorithmus sehr genau den Regeln des Brettspiels entspricht, damit das Spiel der Freunde authentisch simuliert wird. Die Regeln werden deswegen hier nochmal zusammengefasst aufgeführt.

Zunächst gibt es die Regeln des Herstellers, die der Einfachheit halber im Wettbewerb angepasst wurden:

H1 Zum Spielen stehen vier Farben (schwarz, gelb, grün und rot) zur Verfügung. Gespielt wird auf einem Spielbrett mit insgesamt 40 Lauffeldern sowie 4 Zielfeldern der jeweiligen Farbe; genau wie im Materialverzeichnis beschrieben. Jede Farbe verfügt über ein markiertes Anfangsfeld sowie vier Figuren, genannt Steine.

H2 Jeder Spieler startet mit einem Spielstein auf dem Anfangsfeld (A-Feld), sowie den restlichen drei auf der Reservebank (B-Felder).

H3 Nach jeder Runde wechselt der startende Spieler (hier weichen die Regeln der Einfachheit halber und da es die Genauigkeit der ermittelten Werte erhöht vom Original ab, in welchem der Startspieler durch die höchste gewürfelte Zahl bestimmt wird).

H4 Ist ein Spieler am Zug, würfelt er und bewegt den vordersten Stein, der gezogen werden kann, um die Anzahl an geworfenen Augen in Richtung Ziel. Ausnahmen dieser Regel sind:

- Wenn ein Stein auf dem Anfangsfeld des Spielers steht und der Spieler noch nicht alle seine Steine auf dem Feld hat. Dann ist der Spieler, wenn möglich, gezwungen, das Anfangsfeld zu räumen und den blockierenden Stein zu bewegen.
- Wenn der Spieler eine 6 würfelt, muss er, wenn möglich, einen neuen Stein auf das Anfangsfeld stellen.
- Wenn der Spieler keinen Stein um die gewürfelte Anzahl Augen bewegen kann, verfällt sein Zug.

H5 Nach jedem Zug wird der Spieler gewechselt, außer, wenn eine 6 gewürfelt wurde.

H6 Ein Zug ist möglich, wenn entweder kein oder ein gegnerischer Stein auf dem Feld ist, auf das der Spieler ziehen möchte. Wenn ein gegnerischer Stein auf dem Feld ist, wird dieser geschlagen und vom Feld zurück auf die Reservebank gestellt.

[8] https://de.wikipedia.org/wiki/Monte-Carlo-Simulation

H7 Wenn ein Spieler mit einem Stein die ganze Laufbahn entlang gelaufen ist, so zieht er seine Figur in die Zielfelder weiter. Dort darf die Figur in den nächsten Zügen explizit weitergezogen und andere dürfen übersprungen werden.

H8 Wenn ein Spieler alle seine vier Steine in die vier Zielfelder gebracht hat, hat er das Spiel gewonnen.

Neben den im Wettbewerb festgelegten Regeln gibt es noch eine Besonderheit, über die man sich Gedanken machen muss: Bei einigen Würfelpaaren kann es zu einem sogenannten Deadlock des Spiels kommen. Das bedeutet, dass keiner der beiden Spieler mehr einen seiner Steine mit seinem Würfel ziehen kann. Hierfür sind mehrere Lösungen denkbar, in dieser Ausarbeitung wird das Spiel bei einem Feststecken beider Spieler als unentschieden gewertet. Denkbar ist beispielsweise auch, den zuerst feststeckenden Spieler verlieren zu lassen, oder den Gewinner in diesem Fall zu würfeln. Der Umgang mit diesem Problem sollte aber auf jeden Fall explizit beschrieben werden.

Da die Freunde womöglich mit anderen Regeln als denen des BWInf spielen, bietet es sich an, noch einige Variationen auszuprobieren. An vorderster Stelle steht jedoch die Simulation entsprechend den Regeln der Aufgabe. Regelvarianten dürfen nicht stattdessen, sondern nur in zusätzlichen Simulationen benutzt werden. Ein paar ausgewählte Variationen sind:

Z1 Der beginnende Spieler wird durch das Würfeln der höchsten Augenzahl in einer Vorrunde bestimmt.

Z2 Außerdem spielen die Freunde Anna, Barbara und Clemens zumindest zu dritt. Eine Spielsimulation mit drei oder vier Spielern und den unterschiedlichen Würfelkombinationen ist also ebenfalls denkbar.

Z3 Beim BWInf wird vorrangig der vorderste Stein gezogen, im echten Spiel werden die Spieler aber besonders hintere Steine ziehen, wenn sich dadurch ein gegnerischer Stein schlagen lässt. Eine Priorisierung von Schlagzügen ist also sehr sinnvoll.

Z4 Ebenfalls gängige Anpassungen sind, dass man nicht mit einem Spielstein auf dem Startblock startet,

Z5 dass man nach einer 6 dreimal würfeln darf, sobald man keinen Stein im Feld hat, oder

Z6 dass ein Rückwärtsschlagen, bei dem man Steine hinter sich schlägt, erlaubt ist.

Z7 Außerdem kann man ein Überhol- oder Zugverbot in den Zielfeldern einrichten.

Natürlich ist auch denkbar, eine tiefere Strategie der Spieler zu programmieren, allerdings ist dies hier nicht erfasst und wäre dann sehr spezifisch für die drei Freunde, die der Autor nicht persönlich kennt.

Spielfeldimplementation

Das Spielfeld kann dadurch implementiert werden, dass jeder Farbe ein Array o. Ä. mit vier Ganzzahleinträgen zugeordnet wird, das die Positionen seiner Steine speichert. Ein Zug kann dann durch Ändern der entsprechenden Einträge sehr leicht implementiert werden. Um die einzelnen Würfe der Spieler zu simulieren, wird ein gleichverteilter Pseudozufallszahlengenerator verwendet, der aus den gegebenen Augenzahlen (pseudo)zufällig eine auswählt. Diese Generatoren sind für die meisten Programmiersprachen bereits vorhanden und sollten genutzt werden.

Andere Implementationen, wie etwa das gesamte Spielfeld abzubilden, sind ebenfalls möglich, aber weniger effizient.

Der Spielablauf wurde realisiert, indem die vorher genannten Regeln des Wettbewerbs inklusive möglicher Zusatzregeln penibel eingehalten werden. Dadurch entsteht ein robustes Programm, welches für eine bestimmte Kombination geworfener Würfelaugen immer das selbe und entsprechend den Regeln korrekte Spiel simuliert.

Umsetzung der Simulation

In der Simulation von N Spielen im Zweispielermodus beginnen beide Spieler A und B abwechselnd und nehmen dann den Regeln entsprechend ihre Züge vor. Gezählt wird, wie viele Spiele G ein bestimmter Spieler, hier immer Spieler A, gewinnt. Seine Gewinnwahrscheinlichkeit $\hat{p}_A = G/N$ gibt dann an, mit welcher Wahrscheinlichkeit Spieler A mit seinem Würfel gegen Spieler B mit dessen Würfel gewinnt.

Es ist möglich, die erhaltenen Gewinnwahrscheinlichkeiten zu spiegeln: Wenn Spieler A mit Würfel 1 gegen Spieler B mit Würfel 2 in 75% der Fälle gewinnt, sollte Spieler A mit Würfel 2 gegen Spieler B mit Würfel 1 nur in 25% der Spiele gewinnen – vorausgesetzt, dass es keine Deadlocks (s. o.) gibt.

Um eine Rangliste der besten Würfel aufstellen zu können, berechnen wir die mittlere Gewinnwahrscheinlichkeit $\overline{p}_A$ gegen die anderen Würfel ohne sich selbst. Diese entspricht der Wahrscheinlichkeit, gegen einen uninformierten Gegner zu gewinnen, wenn dieser einen beliebigen anderen Würfel wählt. Den Würfel, der am häufigsten gewinnt, schätzen wir als den „besten“ ein.

Kennt man den Würfel seines Gegners, kann man natürlich direkt den gegen seine Wahl besten Würfel wählen; bei bekannten Vorlieben kann man mit den Wahrscheinlichkeiten seiner Auswahl gewichten. Denkbar wäre auch ein Ligasystem, um den besten Würfel zu bestimmen.

Laufzeit

Die Länge einzelner Spiele ist nicht vorhersehbar; eine konkrete Laufzeitanalyse anzufertigen, ist dadurch nicht direkt möglich. Da einzelne Spiele beliebig viele Züge benötigen können (denkbar wäre etwa, dass beide Spieler vor ihrem Ziel stehen und immer wieder eine unpassende Augenzahl zum Fertigstellen des Spiels werfen), gibt es keine maximale Laufzeit. Ermitteln wir eine mittlere Spiellänge I_{avg}, ist die Average-Case-Laufzeit $\mathcal{O}(I_{\text{avg}}N)$ linear in der Anzahl der Wiederholungen N.

Um ein Gefühl für die Spiellänge I der Simulationen zu erhalten, betrachten wir die Länge vieler simulierter Spiele, wie in Abbildung 4.1 dargestellt. Erwartungsgemäß streuen die Spiellängen relativ regelmäßig um den Mittelwert $I_{\text{avg}} = 108$.

Mathematische Gedanken zur Sicherheit des Ergebnisses

Dass unsere Methode funktioniert, verdanken wir dem *Gesetz der großen Zahlen*[9] aus der Stochastik. Es garantiert (vereinfacht gesagt), dass unsere Schätzung für die Gewinnwahrscheinlichkeit-

[9] https://de.wikipedia.org/wiki/Gesetz_der_großen_Zahlen

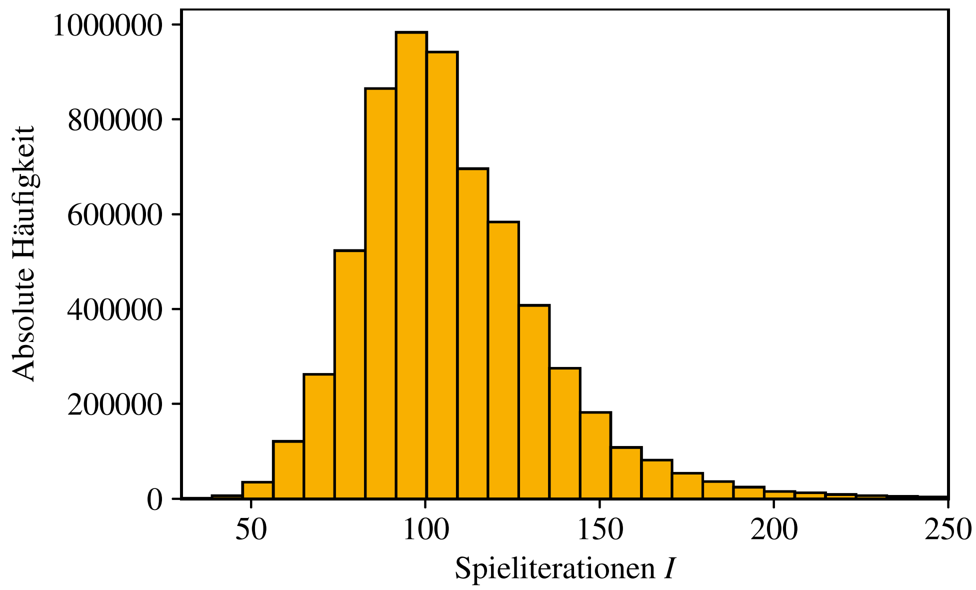

Abbildung 4.1: Verteilungsfunktion der Länge I von $N = 6250000$ Spielen mit den Würfeln aus `wuerfel0.txt` ohne den Würfel W_3. Das mittlere Spiel ist hier $I_{avg} = 108$ Züge lang, wobei das längste Spiel über $I_{max} = 503$ Züge ging.

lichkeiten immer genauer wird, je öfter wir unser Zufallsexperiment wiederholen. Als gewissenhafte Programmierer wollen wir den Freunden aber auch ungefähr sagen können, wie genau denn jetzt die erhaltenen Schätzwerte sind.

Dafür ist es wichtig, zwischen den Ergebnissen unserer Simulation und der wahren Gewinnwahrscheinlichkeit des Würfels zu unterscheiden. Je nachdem, wie unser Programm die einzelnen Spieler würfeln lässt, ergeben sich ganz unterschiedliche Spiele. Am Ende unseres Programms können also immer wieder andere Gewinnwahrscheinlichkeiten herauskommen, obwohl wir prinzipiell nichts geändert haben. Natürlich gibt es in der Realität aber eine konkrete, wahre Gewinnwahrscheinlichkeit der Würfel. Sie unterscheidet sich von unseren Simulationen dadurch, dass sie eben keine Schätzung ist und nicht vom (Pseudo)zufall der durchgeführten Simulationen abhängt.

Nun stellt sich die Frage: Wie nah ist diese Schätzung am wahren Wert?

In statistischer Sprechweise stellen wir die Frage nach der Sicherheit unserer Ergebnisse. Wir wollen also relativ sicher sagen können, dass die den Freunden gegebenen Werte beispielsweise um höchstens einen Prozentpunkt von den korrekten Werten abweichen. Eine genauere mathematische Auseinandersetzung mit dieser Frage folgt im nächsten Abschnitt; diese ist aber nicht für das Verständnis des grundlegenden Sachverhaltes notwendig und richtet sich nur an besonders Interessierte.

Um trotzdem die Genauigkeit einordnen zu können, wiederholen wir einfach oft unsere Simulation mit verschiedenen Startwerten und vergleichen die erhaltenen Gewinnwahrscheinlichkeitsschätzungen, wie in Abbildung 4.2. Dort ist der konkrete Verlauf der Schätzung einer Simulation sowie der resultierende Mittelwert von insgesamt 100 Simulationen dargestellt. Der für uns interessante Streubereich der Schätzungen ist in Gelb markiert und tatsächlich beobachten wir, dass dieser immer enger wird und die Schätzwerte der einzelnen Simulationen immer näher an einen gemeinsamen Mittelwert kommen. Die Garantie des *Gesetzes der großen Zahlen* scheint also bestätigt: die Schätzungen der einzelnen Simulationen streben mit mehr Wiederholungen immer genauer gegen einen gemeinsamen Schätzwert, der vermeintlich wahren Gewinnwahrscheinlichkeit.

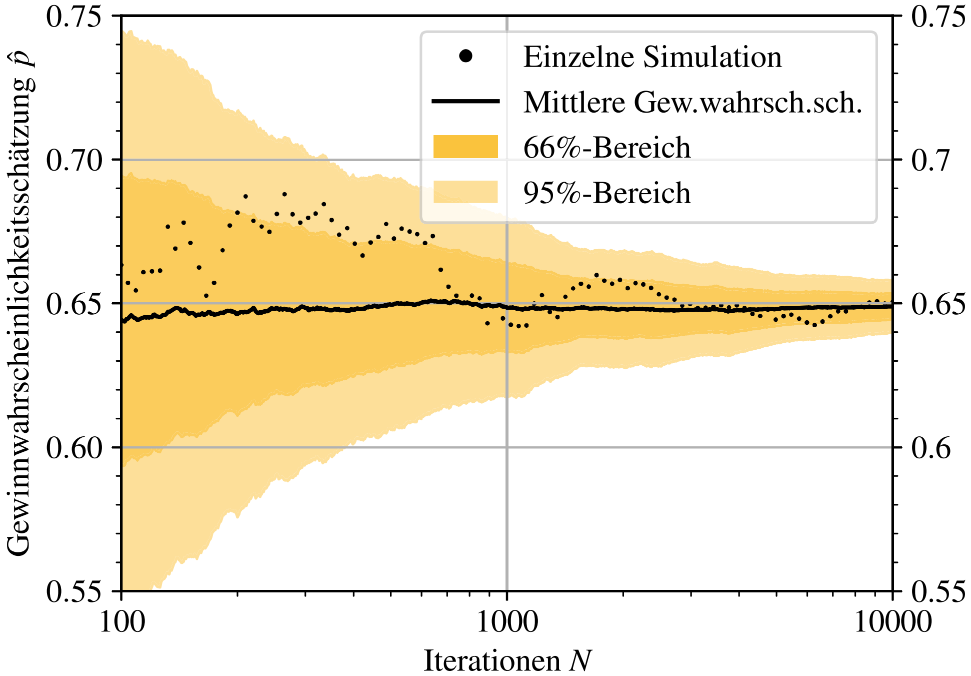

Abbildung 4.2: Verlauf von Erwartungswert und Streuung der mittleren Gewinnwahrscheinlichkeiten bei 100 simulierten Partien MENSCH-ÄRGERE-DICH-NICHT, wobei der Standardwürfel mit sechs Seiten gegen den mit zwölf Seiten spielt. Die geschätzte Gewinnwahrscheinlichkeit einer Simulation ist mit schwarzen Punkten dargestellt. Die Bereiche, in denen jeweils 66% bzw. 95% der Simulationen liegen, sind dunkel- bzw. hellgelb ausgefüllt.

Genauere mathematische Auseinandersetzung

Wir erinnern uns an die Fragestellung: Wie nah ist diese Schätzung am wahren Wert?

Um zu einer Antwort zu kommen, betrachten wir unsere Simulation als viele einzelne, stochastisch unabhängige Spiele, sogenannte *Bernoulli-Experimente*[10]. In jedem Spiel kann hierbei Spieler A entweder gewinnen oder verlieren (entsprechend würde Spieler B entweder verlieren oder gewinnen). Die wahre Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler A gewinnt, ist p. In unserer Simulation zählen wir, wie viele der N Spiele der Spieler A gegen seinen Gegner gewinnt; diese Zahl nennen wir G, die Anzahl gewonnener Spiele. Daraus können wir als Näherung für die wahre Wahrscheinlichkeit p eine Schätzung $\hat{p} = G/N$ aufstellen.

Mathematisch wollen wir nun die Standardabweichung der geschätzten Gewinnwahrscheinlichkeiten $\hat{p}$ von der wahren Gewinnwahrscheinlichkeit p abschätzen. Diese gibt an, wie weit unsere Schätzung in $2/3$ der Fälle beziehungsweise bei der doppelten Standardabweichung in 95% der Fälle vom wahren Wert abweicht. Oft wählt man tatsächlich die doppelte Standardabweichung, da mit 95% „fast jeder“ Fall abgedeckt ist, wir betrachten also das 2σ-*Signifikanzniveau*, unsere Ergebnisse haben damit eine Sicherheit von 95%. Außerdem müssen wir uns auf eine Genauigkeit Δ der Gewinnwahrscheinlichkeit einigen. Diese gibt an, wie weit die einzelnen

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_trial

Schätzungen im Rahmen unserer Sicherheit vom wahren Wert abweichen können; eine Genauigkeit von $\Delta = 1\%$ erscheint hierbei sinnvoll.

Der freie Parameter, den wir anpassen müssen, um unsere Genauigkeitsansprüche zu erfüllen, ist nun die Anzahl N von Wiederholungen unserer Simulation. Umso genauer das Ergebnis werden soll, umso mehr Wiederholungen müssen wir machen. Allerdings wollen die Freunde möglichst schnell anfangen, zu spielen, und nicht ewig auf ein Ergebnis warten. Die uns interessierende Größe ist die Standardabweichung unserer Schätzung[11] $\sigma_{\hat{p}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$ mit der Varianz eines einzelnen Spiels $\sigma = \sqrt{p(1-p)}$.

Unsere Bedingungen zusammengefasst, wollen wir also, dass die doppelte Abweichung des Mittelwertes $2\sigma_{\hat{p}} \leq \Delta$ kleiner oder gleich unserer gewünschten Genauigkeit ist. Entsprechend gilt mit $p(1-p) < \frac{1}{4}$

$$2\sigma_{\hat{p}} = 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} < \sqrt{\frac{1}{N}} \stackrel{!}{\leq} \Delta \implies N \geq \Delta^{-2} = 10000. \tag{4.1}$$

Wenn wir also ungefähr zehntausend Simulationen pro Würfelkombination spielen, können wir mit 95%-iger Sicherheit sagen, dass die erhaltenen Ergebnisse höchstens um einen Prozentpunkt abweichen.

Betrachten wir wieder Abbildung 4.2, so sehen wir, dass die Gewinnwahrscheinlichkeiten nach 10000 Iterationen tatsächlich um circa $\pm 1\%$ um den gemeinsamen Mittelwert streuen.

4.2 Beispiele

Für die vom BWInf vorgegebenen Regeln ergeben sich die hier aufgeführten Gewinnwahrscheinlichkeiten. Diese wurden entgegen der obigen Rechnung mit $N = 120000$ Iterationen ermittelt, um eine Genauigkeit von $\Delta = 0.3\%$ zu garantieren. Als Beispiele wurden die vom BWInf zur Verfügung gestellten Würfelschachteln gewählt.

Es sei nochmal darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse sehr empfindlich auf eine korrekte Implementation der Regeln reagieren. Schon kleine Ungenauigkeiten führen zu teilweise gravierenden Unterschieden, weswegen ein genauer Vergleich immer sehr schwierig ist. Ebenso maßgebend ist auch der Umgang mit den Deadlocks; um hier eine Vergleichbarkeit zu ermöglichen, ist in Tabelle 7 deren Quote für die Datei `wuerfel1.txt` aufgeführt.

Die Implementation der Beispiellösung braucht deutlich weniger als 1 s pro 10000 Iterationen; mehr als 10 s sollten für 10000 Iterationen nicht benötigt werden.

[11] https://de.wikipedia.org/wiki/Varianz_(Stochastik)#Summen_und_Produkte

		Würfel Sp. *B*							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. *A*	W_1	50,1	1,5	100,0	65,1	64,7	88,4	63,9	2
	W_2	98,5	49,8	100,0	98,6	96,7	99,0	98,6	1
	W_3	0,0	0,0	-	0,0	0,0	0,0	0,0	6
	W_4	35,1	1,5	100,0	50,3	51,5	79,3	53,5	3
	W_5	35,2	3,3	100,0	48,6	50,1	75,9	52,6	4
	W_6	11,7	1,1	100,0	20,8	23,9	49,8	31,5	5

Tabelle 3: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler *A* in Prozent für `wuerfel0.txt`. Die Würfel der Schachtel sind $W_1 = (1,2,3,4,5,6)$, $W_2 = (1,1,1,6,6,6)$, $W_3 = (1,2,3,4)$, $W_4 = (0,1,2,\ldots,8,9)$, $W_5 = (1,2,\ldots,11,12)$ und $W_6 = (1,2,\ldots,19,20)$.

		Würfel Sp. *B*							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. *A*	W_1	50,1	43,8	50,7	54,5	69,5	81,1	59,9	2
	W_2	56,4	50,0	51,8	54,5	66,0	74,7	60,7	1
	W_3	49,6	48,0	49,9	51,6	61,5	68,5	55,8	3
	W_4	45,4	45,5	48,7	50,0	59,5	65,7	53,0	4
	W_5	30,5	33,8	38,6	40,7	49,9	56,1	40,0	5
	W_6	18,8	25,2	31,4	34,3	44,0	50,0	30,7	6

Tabelle 4: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler *A* in Prozent für `wuerfel1.txt`. Die Würfel der Schachtel sind $W_1 = (1,2,3,4,5,6)$, $W_2 = (2,3,4,5,6,7)$, $W_3 = (3,4,5,6,7,8)$, $W_4 = (4,5,6,7,8,9)$, $W_5 = (5,6,7,8,9,10)$ und $W_6 = (6,7,8,9,10,11)$.

		Würfel Sp. *B*						
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. *A*	W_1	50,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,3	5
	W_2	99,1	50,2	3,8	0,1	0,0	25,8	4
	W_3	100,0	96,2	49,9	6,6	0,2	50,8	3
	W_4	100,0	99,9	93,3	50,0	8,3	75,4	2
	W_5	100,0	100,0	99,8	91,8	50,1	97,9	1

Tabelle 5: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler *A* in Prozent für `wuerfel2.txt`. Die Würfel der Schachtel sind $W_1 = (1,1,1,1,1,6)$, $W_2 = (1,1,1,1,6,6)$, $W_3 = (1,1,1,6,6,6)$, $W_4 = (1,1,6,6,6,6)$ und $W_5 = (1,6,6,6,6,6)$.

		Würfel Sp. B							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. A	W_1	49,9	70,8	65,9	79,8	77,2	93,2	77,4	1
	W_2	28,8	49,8	47,5	64,7	64,7	88,4	58,8	3
	W_3	33,9	52,7	50,3	65,1	64,5	87,0	60,6	2
	W_4	20,2	35,0	34,9	50,2	51,6	79,6	44,3	4
	W_5	22,8	35,2	35,5	48,3	49,9	75,8	43,5	5
	W_6	6,7	11,5	13,2	20,5	24,0	50,1	15,2	6

Tabelle 6: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler A in Prozent für `wuerfel3.txt`. Die Würfel der Schachtel sind $W_1 = (1,2,5,6)$, $W_2 = (1,2,3,4,5,6)$, $W_3 = (1,2,\ldots,7,8)$, $W_4 = (0,1,\ldots,8,9)$, $W_5 = (1,2,\ldots,11,12)$ und $W_6 = (1,2,\ldots,19,20)$.

Besonderheiten der Partien im Deadlock

Wie bereits erwähnt, ist es besonders wichtig, wie die Deadlocks im Spiel behandelt werden. In der folgenden Übersicht sind die Wahrscheinlichkeiten eines Deadlocks beim MENSCH-ÄRGERE-DICH-NICHT mit der Würfelschachtel aus `wuerfel1.txt` gegeben. Dass eine umfassende Diskussion der Auswirkungen tatsächlich wichtig ist, sieht man vor allem daran, dass teilweise die Hälfte der Spiele in einem Patt der beiden Spieler endet.

		Würfel Sp. B					
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6
Würfel Sp. A	W_1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	W_2	0,0	6,2	10,7	12,7	17,9	21,0
	W_3	0,0	10,7	19,0	23,0	31,5	36,9
	W_4	0,0	12,8	23,1	28,5	39,1	44,7
	W_5	0,0	17,7	31,6	39,3	54,3	62,5
	W_6	0,0	21,1	37,0	45,3	62,4	71,9

Tabelle 7: Häufigkeit eines Deadlocks in Prozent bei den verschiedenen Würfelpartien in `wuerfel1.txt`.

Werden einfach alle Partien ohne eindeutigen Sieger wiederholt, ergeben sich für die Beispielwürfel die folgenden Gewinnwahrscheinlichkeiten. Ihre Rangfolge ändert sich nicht.

		Würfel Sp. B							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. A	W_1	50,1	43,8	50,7	54,5	69,5	81,1	59,9	2
	W_2	56,4	50,1	52,0	55,1	69,5	81,2	62,8	1
	W_3	49,6	47,8	49,9	52,1	66,7	79,3	59,1	3
	W_4	45,4	44,8	48,3	50,0	65,7	78,4	56,5	4
	W_5	30,5	30,3	33,4	34,6	49,9	66,3	39,0	5
	W_6	18,8	18,6	20,5	21,4	34,0	50,2	22,7	6

Tabelle 8: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler A in Prozent für `wuerfel1.txt`, wenn alle Partien die im Deadock enden ignoriert werden.

Weitere Spielvariationen

In den folgenden Tabellen sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten bei einigen Spielvariationen dargestellt. Zwar ändern sich die globalen Rangfolgen nicht gravierend, im Detail ergeben sich aber trotzdem Verschiebungen in der Größe einiger Prozent. Damit ist noch einmal verdeutlicht, dass es sehr wichtig ist, die Regeln für einen fairen Vergleich genau zu beachten.

		Würfel Sp. B							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. A	W_1	50,1	1,5	100,0	65,1	64,7	88,4	64,0	2
	W_2	98,5	49,8	100,0	98,6	96,7	99,0	98,6	1
	W_3	0,0	0,0	-	0,0	0,0	0,0	0,0	6
	W_4	35,1	1,5	100,0	50,3	51,5	79,3	53,5	3
	W_5	35,2	3,3	100,0	48,6	50,1	75,9	52,6	4
	W_6	11,7	1,1	100,0	20,8	23,9	49,8	31,5	5

Tabelle 9: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler A in Prozent bei Standardregeln für `wuerfel0.txt`.

		Würfel Sp. B							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. A	W_1	50,0	0,8	100,0	72,0	71,7	91,1	67,1	2
	W_2	99,3	49,9	100,0	99,5	98,8	99,5	99,4	1
	W_3	0,0	0,0	-	0,0	0,0	0,0	0,0	6
	W_4	28,1	0,6	100,0	50,2	53,3	80,7	52,5	3
	W_5	28,2	1,2	100,0	46,7	50,0	76,5	50,5	4
	W_6	8,9	0,5	100,0	19,3	23,2	49,8	30,4	5

Tabelle 10: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler A in Prozent mit der Zusatzregel Z3 für `wuerfel0.txt`. Spieler priorisieren es nun, die Steine der anderen zu schlagen.

		Würfel Sp. B							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. A	W_1	50,2	1,0	100,0	69,4	70,8	92,4	66,7	2
	W_2	99,0	49,8	100,0	99,3	98,4	99,6	99,3	1
	W_3	0,0	0,0	-	0,0	0,0	0,0	0,0	6
	W_4	30,3	0,7	100,0	50,2	54,0	83,3	53,7	3
	W_5	29,1	1,6	100,0	46,0	50,0	78,8	51,1	4
	W_6	7,5	0,4	100,0	16,9	20,8	50,0	29,1	5

Tabelle 11: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler A in Prozent mit der Zusatzregel Z4 für `wuerfel0.txt`. Die Spieler starten nun nicht mehr mit einer Figur auf dem Feld.

		Würfel Sp. *B*							
		W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\overline{p}_A$	Pl.
Würfel Sp. *A*	W_1	50,1	1,5	100,0	60,8	56,5	84,1	60,6	2
	W_2	98,5	49,8	100,0	98,3	95,8	98,5	98,2	1
	W_3	0,0	0,0	-	0,0	0,0	0,0	0,0	6
	W_4	39,5	1,8	100,0	50,0	47,3	76,7	53,9	4
	W_5	43,3	4,2	100,0	52,6	49,9	75,8	55,2	3
	W_6	16,0	1,5	100,0	23,5	24,0	50,0	33,0	5

Tabelle 12: Gewinnwahrscheinlichkeiten von Spieler *A* in Prozent mit der Zusatzregel Z5 für `wuerfel0.txt`. Spieler ohne einen Stein auf dem Feld können nun dreimal versuchen, eine 6 zu würfeln.

4.3 Bewertungskriterien

Die Bewertungskriterien vom Bewertungsbogen werden hier erläutert (Punktabzug in []).

- [−1] **Modellierung ungeeignet**
  Die Darstellung des Spielfeldes und der Würfel sollte so gewählt werden, dass Spiele zwischen 2 Personen gut simuliert werden können. So sollte zum Beispiel ein Vergleich der Positionen zweier Spielfiguren in konstanter Zeit möglich sein.
- [−1] **Regeln nicht richtig umgesetzt**
  Das Spiel muss korrekt nach den Regeln des Herstellers und den ergänzenden BWINF-Regeln simuliert werden. Wenn mindestens eine wichtige Regel nicht beachtet wird, dann führt dies zu Punktabzug. Eine Regel ist wichtig, wenn es bei Nichteinhaltung zu signifikanten Abweichungen in den Gewinnwahrscheinlichkeiten kommt.
  Die Regeln lassen offen, was passiert, wenn kein Spieler mehr einen Zug machen kann, das Spiel also nicht endet, und sind in Sonderfällen nicht eindeutig. Wenn diese Fälle nicht beschrieben oder behandelt werden, führt das nicht zu Punktabzug.
- [−1] **Simulation unzureichend**
  Es muss jeder Würfel mit jedem anderen verglichen werden. Mindestens eine dreistellige Anzahl an Simulationen je Würfelpaar ist gefordert.
- [−1] **Verfahren bzw. Implementierung unnötig aufwendig oder ineffizient**
  Das Programm muss in angemessener Zeit für alle vorgegebenen Beispiele ein Ergebnis liefern können.
- [−1] **Beispiele fehlerhaft bzw. zu wenige oder ungeeignete Beispiele**
  Die Dokumentation soll Ergebnisse zu mindestens 3 der vorgegebenen Beispiele (`wuerfel0.txt` bis `wuerfel3.txt`) enthalten. Als Ergebnis werden sowohl eine Rangliste der Würfel (basierend auf ihrer gemittelten Gewinnwahrscheinlichkeit) als auch Tabellen mit Ergebnissen der paarweisen Vergleiche akzeptiert. Dabei sind ausnahmsweise auch Übersichten außerhalb der Dokumentation akzeptabel, sofern in der Dokumentation darauf verwiesen wird; eine Darstellung insbesondere der paarweisen Ergebnisse in einem Tabellendokument bietet sich bei dieser Aufgabe an. Da sehr viele Faktoren die Ergebnisse beeinflussen können, insbesondere die Anzahl der Simulationen pro Würfelpaar, können die dokumentierten Ergebnisse von den hier präsentierten etwas abweichen. Deutliche Abweichungen deuten allerdings auf Fehler hin.