Von Neumann 穩定性分析

KTHFAN

January 20, 2022

Contents

1 簡介

本次報告的目的爲比較波方程在使用前插法或後差法進行估計時，穩定性的情況，其中在本報告要討論的波方程 $u(x,t)$ 定義如下：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0 \tag{1}$$

$$u(x,0)=f(x)$$
$$u^{(p)}(0,t)=u^{(p)}(2\pi,t)$$

where $x\in[0,2\pi]$, $t\geq 0$.

2 估計波方程

使用差分法來估計(1)。首先，將(1)拆成兩個部分：

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{3}$$

在接下來的章節裡，我們將對(2)、(3)兩式分別做前插法、後差法，並比較上述四種方法的穩定性。

3 Upwind Scheme

3.1 波方程的數值計算格式

此法是對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ 進行前差法估計，對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 則是做後差法估計之。
因此得到

$$\frac{v_j^{n+1}-v_j^n}{\Delta t}+\frac{v_j^n-v_{j-1}^n}{\Delta x}=0 \tag{4}$$

where $v_j^0=f(x_j), x_j=\dfrac{2\pi j}{N+1}$, $v_{-1}^n=v_N^n$ $N\in\mathbb{N}$, $j=0,1,2,\ldots,N$.

3.2 Von Neumann 穩定性分析

假設 $v_j^n = \hat{v}_k^n e^{ikx_j}$，則

$$(4) = \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{v}_k^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{\hat{v}_k^n e^{ikx_j} - \hat{v}_k^n e^{ikx_{j-1}}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{v}_k^n \left(1 - \lambda \left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)\right) \Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}_k^0$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\hat{Q} = 1 - \lambda \left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)$。

根據上面推導，因爲 $\hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}_k^0$，所以若要系統穩定，條件 $\left|\hat{Q}\right| \leq 1$ 需要滿足，因此我們計算

$$\left|\hat{Q}\right|^2 = \left|1 - \lambda \left(1 - e^{-ik\Delta x}\right)\right|^2$$

$$\begin{aligned} &= \left|1 - \lambda (1 - \cos k\Delta x - i \sin k\Delta x)\right|^2 \\ &= 1 + 2\left(\lambda^2 - \lambda\right)(1 - \cos k\Delta x) \end{aligned}$$

已知 λ 對 $\left|\hat{Q}\right|^2$ 的影響爲

$$\begin{cases} 1 + 2\left(\lambda^2 - \lambda\right)(1 - \cos k\Delta x) > 1 & \text{if } \lambda > 1 \\ 1 + 2\left(\lambda^2 - \lambda\right)(1 - \cos k\Delta x) < 1 & \text{if } \lambda < 1 \\ 1 + 2\left(\lambda^2 - \lambda\right)(1 - \cos k\Delta x) = 1 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

根據上面推導，可得出

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \left|\hat{Q}\right| \leq \sqrt{1 + 2\lambda(\lambda - 1)(1 - \cos k\Delta x)} & \text{if } \lambda > 1 \\ \sqrt{1 + 2\lambda(\lambda - 1)(1 - \cos k\Delta x)} \leq \left|\hat{Q}\right| \leq 1 & \text{if } \lambda < 1 \\ \left|\hat{Q}\right| = 1 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases} \tag{5}$$

因此，當 $\lambda \leq 1$ 成立，系統具穩定性。

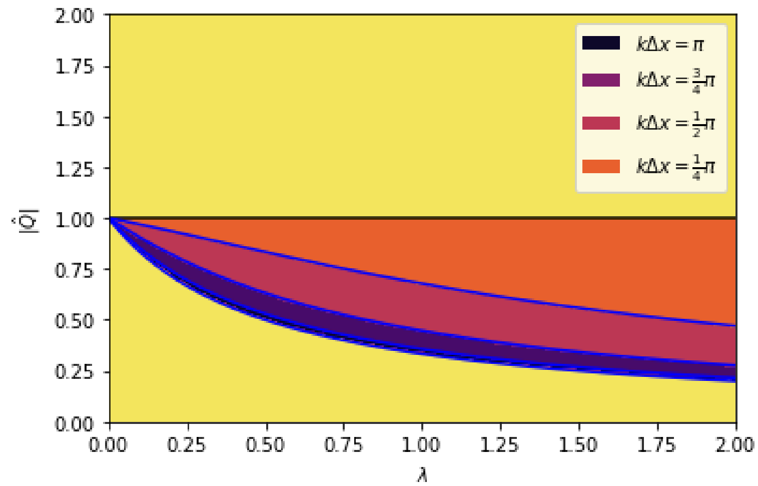

Figure 1: λ 與 $|\hat{Q}|$ 之間的關係

4 Downwind Scheme

4.1 波方程的數值計算格式

此法是對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$、$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 皆做前差法進行估計。因此得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} = 0 \tag{6}$$

where $v_j^0 = f(x_j), x_j = \dfrac{2\pi j}{N+1}, v_{-1}^n = v_N^n \ N \in \mathbb{N}, \ j = 0, 1, 2, \ldots, N.$

4.2 Von Neumann 穩定性分析

假設 $v_j^n = \hat{v}_k^n e^{ikx_j}$，則

$$(6) = \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{v}_k^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{\hat{v}_k^n e^{ikx_{j+1}} - \hat{v}_k^n e^{ikx_j}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{v}_k^n \left(1 - \lambda \left(e^{ik\Delta x} - 1\right)\right) \Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}_k^0$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\hat{Q} = 1 - \lambda \left(e^{ik\Delta x} - 1\right)$。

根據上面推導，因爲 $\hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}_k^0$，若要系統穩定，條件 $\left|\hat{Q}\right| \leq 1$ 需要滿足，因此我們計算

$$\begin{aligned}\left|\hat{Q}\right|^2 &= \left|1 - \lambda\left(e^{ik\Delta x} - 1\right)\right|^2 \\ &= \left|1 - \lambda\left(\cos k\Delta x + i\sin k\Delta x - 1\right)\right|^2 \\ &= 1 + 2\left(\lambda^2 + \lambda\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right)\end{aligned}$$

根據上面推導，可得出

$$1 \leq \left|\hat{Q}\right| \leq \sqrt{1 + 2\lambda\left(\lambda + 1\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right)} \tag{7}$$

由於 $2\lambda\left(\lambda+1\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) \geq 0$ 恆成立，因此，無論比例 λ 取多少，系統皆不具穩定性。

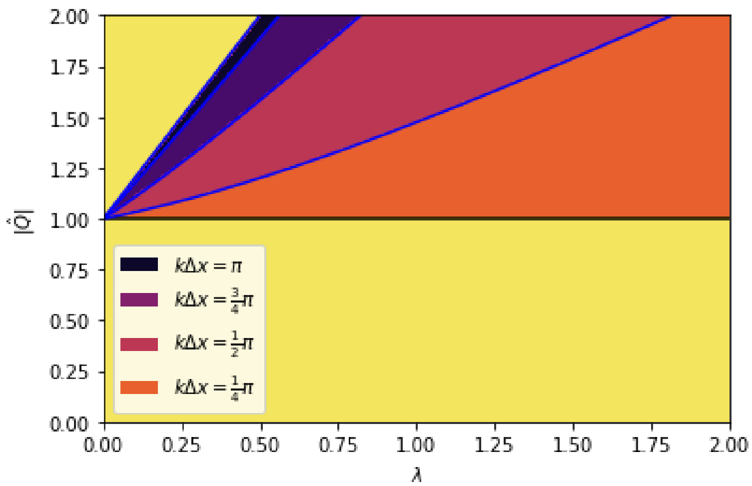

Figure 2: λ 與 $|\hat{Q}|$ 之間的關係

5 都做後差法

5.1 波方程的數值計算格式

此法是對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$、$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 皆做後差法進行估計。
因此得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} = 0 \tag{8}$$

where $v_j^0 = f(x_j), x_j = \dfrac{2\pi j}{N+1}\ v_{-1}^n = v_N^n\ N \in \mathbb{N},\ j = 0, 1, 2, \ldots, N.$

5.2 Von Neumann 穩定性分析

假設 $v_j^n = \hat{v}_k^n e^{ikx_j}$，則

$$(8) = \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{v}_k^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_{j-1}}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}_k^n = \hat{v}_k^{n+1}\left(\lambda\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) + 1\right) \Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}_k^0$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \hat{Q} = \dfrac{1}{\lambda\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) + 1}$。

根據上面推導，因爲 $\hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}_k^0$，因此若要系統穩定，條件 $\left|\hat{Q}\right| \leq 1$ 需要滿足。首先，我們證明 $\left|\lambda\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) + 1\right| \geq 1$ 是否成立，若成立，則表示其倒數 $\left|\hat{Q}\right|$ 將會小於等於 1。

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} = \left|\lambda\left(1 - e^{-ik\Delta x}\right) + 1\right|^2 = \left|\lambda\left(1 - \cos k\Delta x - i\sin k\Delta x\right) + 1\right|^2$$

$$= 1 + 2\left(\lambda^2 + \lambda\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right)$$

根據上面推導，由於 $2\lambda\left(\lambda + 1\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right) \geq 1$ 恆成立，因此我們得到

$$1 \leq \frac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} \leq 1 + 2\lambda\left(\lambda + 1\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + 2\lambda\left(\lambda + 1\right)\left(1 - \cos k\Delta x\right)}^{-1} \leq \left|\hat{Q}\right| \leq 1 \tag{9}$$

因此，無論比例 λ 取多少，系統皆具穩定性。

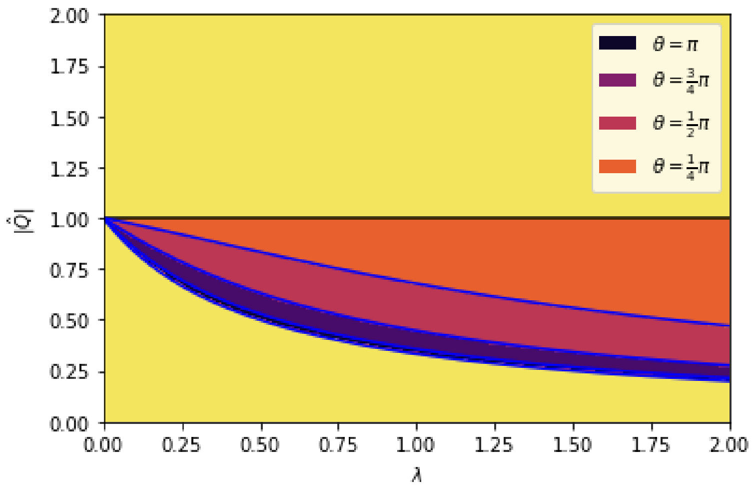

Figure 3: λ 與 $|\hat{Q}|$ 之間的關係

6 對 t 後差、對 x 前差

6.1 波方程的數值計算格式

此法是對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ 進行後差法估計，對 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ 則是做前差法估計之。因此得到

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \tag{10}$$

where $v_j^0 = f(x_j), x_j = \dfrac{2\pi j}{N+1}$ $v_{-1}^n = v_N^n$ $N \in \mathbb{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$.

6.2 Von Neumann 穩定性分析

假設 $v_j^n = \hat{v}_k^n e^{ikx_j}$，則

$$(10) = \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j} - \hat{v}_k^n e^{ikx_j}}{\Delta t} + \frac{\hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_{j+1}} - \hat{v}_k^{n+1} e^{ikx_j}}{\Delta x} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{v}_k^n = \hat{v}_k^{n+1} \left(\lambda \left(e^{ik\Delta x} - 1 \right) + 1 \right) \Rightarrow \hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1} \hat{v}_k^0$$

其中 $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\hat{Q} = \dfrac{1}{\lambda \left(e^{-k\Delta x} - 1 \right) + 1}$。

根據上面推導，因為 $\hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}_k^0$，因此若要系統穩定，條件 $\left|\hat{Q}\right| \leq 1$ 需要滿足。首先，我們證明 $\left|\lambda\left(e^{-k\Delta x}-1\right)+1\right| \geq 1$ 是否成立，若成立，則表示其倒數 $\left|\hat{Q}\right|$ 將會小於等於 1。

$$\frac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} = \left|\lambda\left(e^{-k\Delta x}-1\right)+1\right|^2 = \left|\lambda\left(\cos k\Delta x + i\sin k\Delta x - 1\right)+1\right|^2$$

$$= 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right)$$

又因為

$$\begin{cases} 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) > 1 & \text{if } \lambda > 1 \\ 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) < 1 & \text{if } \lambda < 1 \\ 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) = 1 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

因此得到

$$\begin{cases} 1 \leq \dfrac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} \leq 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) & \text{if } \lambda > 1 \\ 1 + 2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right) \leq \dfrac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} \leq 1 & \text{if } \lambda < 1 \\ \dfrac{1}{\left|\hat{Q}\right|^2} = 1 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{1+2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right)}^{-1} \leq \left|\hat{Q}\right| \leq 1 & \text{if } \lambda > 1 \text{ and } \lambda \neq 0.5 \\ 1 \leq \left|\hat{Q}\right| \leq \sqrt{1+2\left(\lambda^2-\lambda\right)\left(1-\cos k\Delta x\right)}^{-1} & \text{if } \lambda < 1 \\ \left|\hat{Q}\right| = 1 & \text{if } \lambda = 1 \end{cases} \tag{11}$$

因此，當 $\lambda \geq 1$ 成立，系統具穩定性。

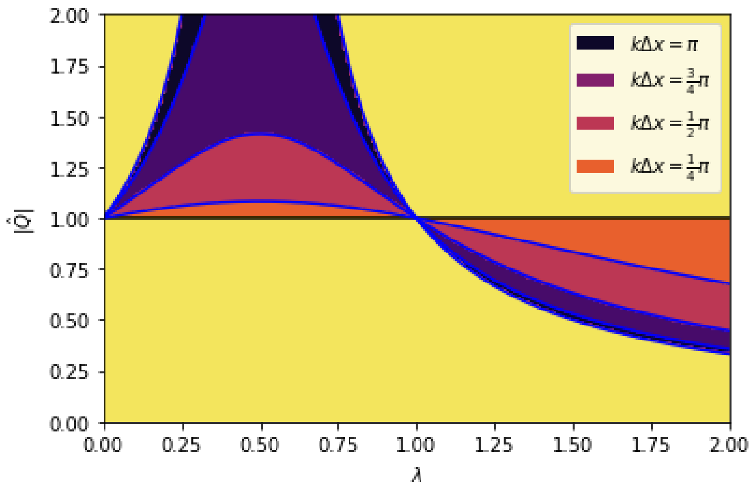

Figure 4: λ 與 $|\hat{Q}|$ 之間的關係

7 結論

在推導過程中，我們發現「Downwind Scheme」與「都做後差法」、「Upwind Scheme」與「對 t 後差、對 x 前差」之 $\left|\hat{Q}\right|^2$ 互爲倒數，因此出現「Upwind Scheme」在 $\left|\hat{Q}\right|^2 > 1$ 時不穩定、而「對 t 後差、對 x 前差」則是在 $\left|\hat{Q}\right|^2 < 1$ 時會不穩定。

其中值得注意的是，在使用「Upwind Scheme」並且設 $\lambda = 0.5$ 時，根據式子(5)以及圖1，看似會產生當 $\cos k\Delta x$ 靠近 -1 時，$\left|\hat{Q}\right| \approx 0$ 的情形，導致估計函數快速收斂到 $y = 0$ 上。但是因爲我們習慣將 Δx 取的夠小，因此實際情況上 λ 與 $|\hat{Q}|$ 之間的關係應該會類似圖1上、$\cos k\Delta x = \frac{1}{4}\pi$ 所顯示之 $|\hat{Q}|$ 非常接近 1 的情形。

我們可以利用上述的觀點判斷「都做後差法」與「Upwind Scheme」設 $\lambda < 1$ 下，何者的估計函數會更快收斂到 $y = 0$ 上。首先假設 Δx 取得夠小，接著比較圖 1 以及 3 可以發現，「都做後差法」之圖 3 ，其 $\left|\hat{Q}\right|$ 會隨著 λ 的增加快速遞減；至於在「Upwind Scheme」之圖 1 上，我們看到只要 $\lambda < 1$，其 $\left|\hat{Q}\right|$ 值都會很接近 1，因此根據假設「$\hat{v}_k^{n+1} = \hat{Q}^{n+1}\hat{v}_k^0$」，「都做後差法」之估計函數會比「Upwind Scheme」的估計函數更快收斂到 $y = 0$ 上。