

# 系統雙曲偏微分方程組邊界條件分析與估計

KTHFAN

January 20, 2022

## 1 簡介

雙曲偏微分方程，可用來描述弦的微小橫振動，經典的例子即為一維波動方程  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ 。

接下來，在第一個章節將會分析波方程  $u_t = cu_x$  之邊界條件穩定性條件。而在第二章節裡，則會利用第一章的結果探討系統雙曲偏微分方程組的邊界條件穩定性條件，並嘗試以跳蛙格式進行估計。

## 2 邊界條件分析

我們考慮一個波方程  $u_t = cu_x$  在  $[0, 2\pi]$  區間上，其中  $c > 0$ 。首先要注意的是，此處的波形會由右向左移動，如圖1所示，表示訊息是從右方邊界所傳來，因此我們需要知道  $u(2\pi, t)$  之邊界條件來估計此波方程。

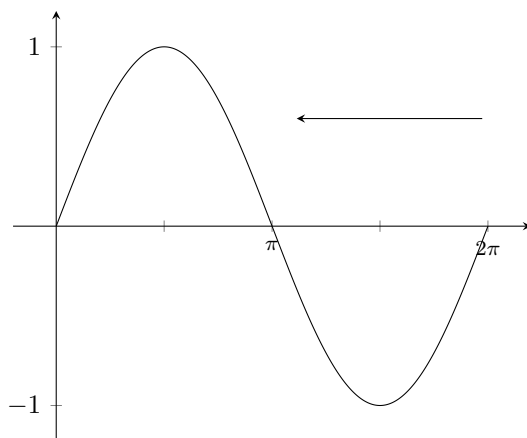


Figure 1: 波方程方向示意圖

有一個波方程定義如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} & x \in [0, 2\pi], c > 0 \\ u(2\pi, t) = g(t) & u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (1)$$

接下來需要設計一個計算格式進行估計。首先將區間  $[0, 2\pi]$  切出  $x_0, x_1, \dots, x_N$  共  $N$  個點，並將時間由數列  $t_0, t_1, \dots$  表示。為了方便表示，以下文章中將以  $u_j^n$  表示  $u$  在  $t = t_n$  和  $x = x_j$  的估計值。

在估計  $u_1, \dots, u_{N-1}$  時，我們對  $u_x$  項以中差法估計之。但是  $u_0$  與  $u_N$  為邊界的兩個點，無法以中差法近似，因此  $u_0$  改用前插法進行估計，至於  $u_N$  則以加入懲罰項的後差法估計之。

由於邊界條件的緣故，我們希望  $u_N$  能夠近似  $g(t)$ ，因此將  $u_N$  之估計進行修正。在這裡我們對  $u_N^n$  以及  $g(t_n)$  做一個加權，即以  $(1 - \alpha)u_N^n + \alpha g(t_n)$  來近似  $u_N^{n+1}$ ，因此將計算格式寫成：

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = c \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} \\ \frac{du_j}{dt} = c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \\ \frac{du_N}{dt} = c \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x} - \tau(u_N - g(t)) \end{cases}, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2)$$

其中  $\tau = \frac{\alpha c}{\Delta x}$ 。為了方便分析，格式(2)為半離散形式，在  $u_x$  項進行離散化，而  $u_t$  項則保持微分形式。

為了方便計算，將上述格式以矩陣來表示：

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = cD\mathbf{u} - \tau(u_N - g(t))e_N \quad (3)$$

$$\text{其中 } e_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, D = \frac{1}{2\Delta x} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

接下來將進行一系列操作來簡化上面的矩陣格式。首先，令一個矩陣  $H =$

$$\Delta x \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ 而此矩陣有一個特性，即 } HD + (HD)^T = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}。$$

接著對(3)左乘  $\mathbf{u}^T H$  以及對(3)轉置並右乘  $H^T \mathbf{u}$ ，得到

$$\begin{cases} \mathbf{u}^T H \frac{d\mathbf{u}}{dt} = c\mathbf{u}^T H D \mathbf{u} - \tau(u_N - g(t))\mathbf{u}^T H e_N \\ \frac{d\mathbf{u}^T}{dt} H^T \mathbf{u} = c\mathbf{u}^T D^T H^T \mathbf{u} - \tau(u_N - g(t))e_N^T H^T \mathbf{u} \end{cases}$$

，再將兩式相加，得到

$$\frac{d}{dt} E_D(t) = c(u_N^2 - u_0^2) - \tau \Delta x u_N (u_N - g(t)) \quad (4)$$

其中  $E_D(t) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} u_j^2 \begin{cases} c_0, c_1 = 2 \\ c_j = 1, j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$ 。已知  $E_D(t)$  代表系統在  $t$  時的能量，因此若能證明  $E_D(t)$  有限，則邊界條件對系統具有穩定性。

令  $\tau = \frac{2c}{\Delta x}$ ，則(4)能簡化成  $\frac{d}{dt}E_D(t) = c \left( -u_0^2 - (u_N - g(t))^2 + g(t)^2 \right) \leq cg(t)^2$ ，再對  $t$  做積分，得到

$$E_D(t) \leq E_D(0) + g(t)^2 \quad (5)$$

故此邊界條件在  $\tau = \frac{2c}{\Delta x}$  時，對系統具有穩定性。

相同的，以下方式予(6)為例，當  $c < 0$  時，波的方向將會由左往右傳遞，因此邊界條件  $v(0, t)$  應該給定，而利用半離散化進行邊界分析後，也會得到相同的結果，也就是令  $\tau = \frac{2c}{\Delta x}$ ，系統具有穩定性。

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -c \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} & x \in [0, 2\pi], c > 0 \\ v(0, t) = f(t) & v(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (6)$$

波方程(6)之估計格式為：

$$\begin{cases} \frac{dv_0}{dt} = c \frac{v_1 - v_0}{\Delta x} - \tau(v_0 - f(t)) \\ \frac{dv_j}{dt} = c \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2\Delta x} \\ \frac{dv_N}{dt} = c \frac{v_N - v_{N-1}}{\Delta x} \end{cases}, j = 1, 2, \dots, N-1 \quad (7)$$

### 3 應用於系統雙曲偏微分方程組

#### 3.1 穩定性

考慮一個系統方程組：

$$\begin{cases} u_t = cv_x \\ v_t = cu_x \\ u(x, 0) = \phi(x) & , v(x, 0) = \psi(x) \\ u(0, t) = f_1(t) & , v(0, t) = g_1(t) \\ u(2\pi, t) = f_2(t) & , v(2\pi, t) = g_2(t) \end{cases} \quad (8)$$

令  $w_1 = u + v$  和  $w_2 = u - v$ ，便可以得到

$$w_1 = cw_1 \quad (9)$$

$$w_2 = -cw_2 \quad (10)$$

$$w_1(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) \quad , w_2(x, 0) = \phi(x) - \psi(x)$$

$$w_1(2\pi, t) = f_2(t) + g_2(t) \quad , w_2(0, t) = f_1(t) - g_1(t)$$

注意到在上一章節討論過式(9)與式(10)在邊界條件的穩定性。因此將式(9)與式(10)分別代入格式(2)以及(7)進行半離散化。

令  $E_D(t; z) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{c_j} z_j^2 \begin{cases} c_0, c_1 = 2 \\ c_j = 1, j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$  為  $z$  在  $\tau = \frac{2c}{\Delta x}$  下的能量，接下來利用上一個章節的結論(5)，便得到

$$\begin{aligned} E_D(t; w_1) + E_D(t; w_2) &= 2(E_D(t; u) + E_D(t; v)) \\ &\leq 2(E_D(0; u) + E_D(0; v)) + (f_1(t) - g_1(t))^2 + (f_2(t) + g_2(t))^2 \end{aligned}$$

上式代表兩系統的能量總和是有界的，因此系統在邊界條件下具有穩定性。

### 3.2 跳蛙格式估計

以下面格式為波方程(1)的估計格式：

$$\frac{u_0^{n+1} - u_0^n}{\Delta t} = c \frac{u_1^n - u_0^n}{\Delta x} \quad (11)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (12)$$

$$\frac{u_N^{n+1} - u_N^n}{\Delta t} = c \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{\Delta x} - \tau(u_N^n - g(t)) \quad (13)$$

在經過 von Neumann 分析後，可以得出(11)和(12)在  $\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{c}$  時系統具有穩定性。至於波方程(6)也可以設計出類似的計算格式來估計之。

最後，回到系統方程組(8)上。將  $w_1 = u + v$  與  $w_2 = u - v$  以上述格式估計之，在利用估計出來的  $w_1$  與  $w_2$  反推回我們所要估計的波方程  $u$  和  $v$ ，便完成系統雙曲偏微分方程組(8)之估計，即：

$$\begin{cases} u_j^n = \frac{w_1^n + w_2^n}{2} \\ v_j^n = \frac{w_1^n - w_2^n}{2} \\ j = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

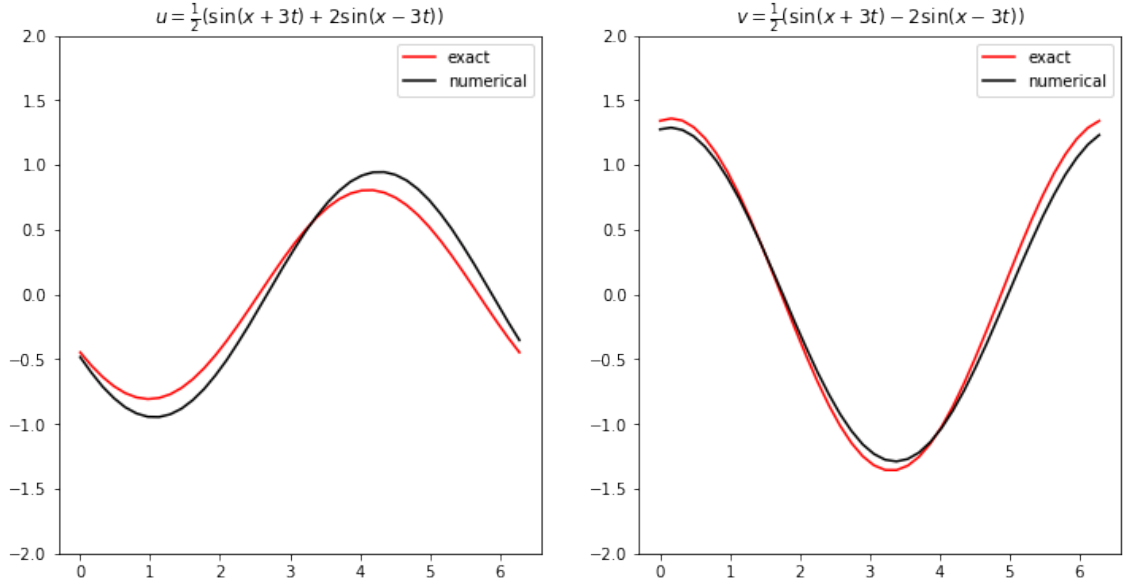


Figure 2:  $t = 30$ ,  $CFL = 0.3$ ,  $N = 40$ ,  $\tau = \frac{6}{\Delta x}$

## 4 結語

首先，第一章節分析了在給定不同  $u_x$  項之係數  $c$  下，其懲罰項  $\tau$  值應該取  $\frac{2c}{\Delta}$  使得系統在邊界條件下穩定。而波的前進方向也至關重要，因為其進方向將決定邊界條件應該在何處給定。

接著，在第二章裡，我們試著將系統雙曲偏微分方程組拆成兩個一階線性偏微分進行估計，在利用第一章的結果，發現邊界條件式具有穩定性的。最後透過跳蛙格式進行計算，完成系統雙曲偏微分方程組的估計。