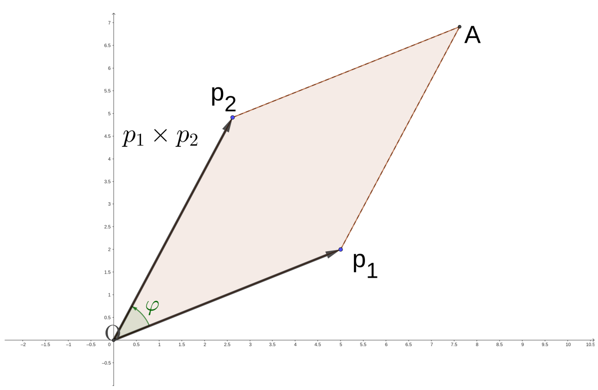
**ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

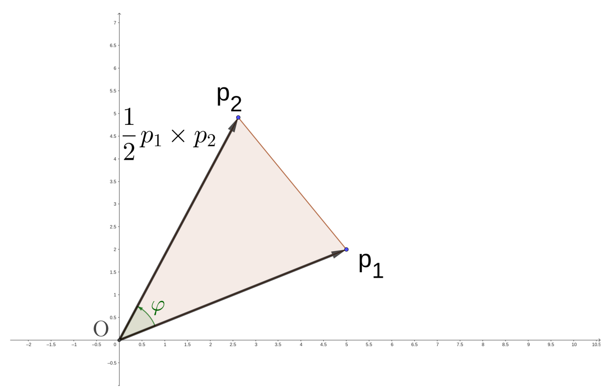
**2ο Σετ Ασκήσεων**

**Καλαμαράκης Θεόδωρος:** 2018030022

# Άσκηση 1

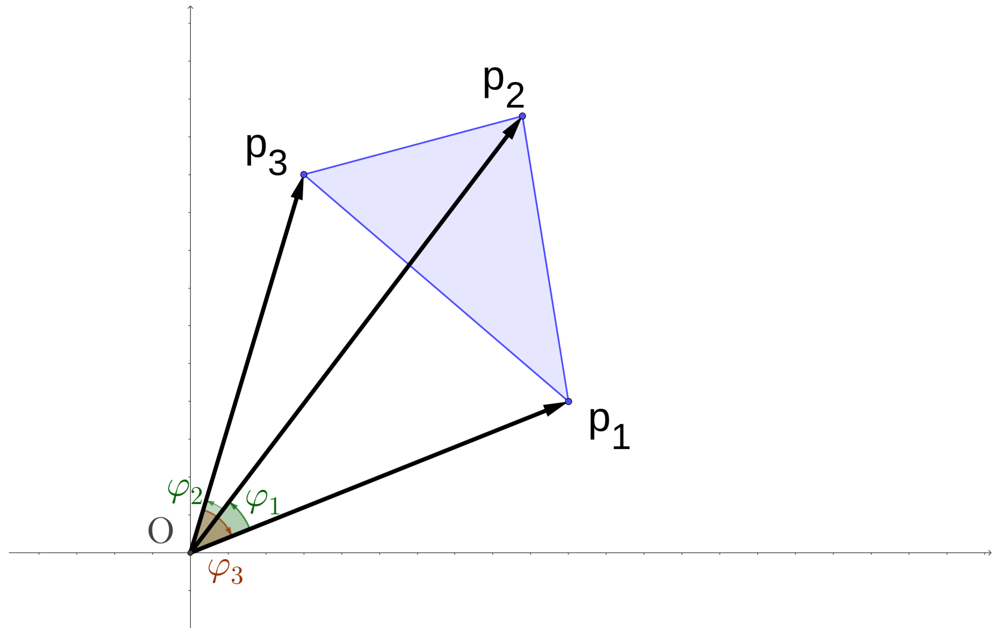
Γνωρίζουμε οτι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$, $(\mathbf{p_1} \times \mathbf{p_2})$ εκφράζει το προσήμασμένο εμβαδό το παραλληλογράμου που σχήματίζεται μέ πλεύρες τα $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}$, το οποίο είναι θετικό εάν η γωνία $\varphi$ είναι αριστερόστροφη και αρνητικό εάν είναι δεξιόστροφή (βλ. κάτω σχήμα αριστέρα)




Άρα το $\frac{1}{2}\mathbf{p_1} \times \mathbf{p_2}$ εκφράζει το προσημασμένο εμβαδό του τριγώνου $\mathbf{Op_1p_2}$ $(E(\mathbf{Op_1p_2}))$(βλ. πάνω σχήμα δεξιά)

Έστώ τα σημεία $p_1, p_2, p_3$ το παρακάτατω σχήματος




Έχουμε οτι :

- $\frac{1}{2} p_1 \times p_2 = |E(\mathbf{Op_1p_2})| > 0$ διότι η γωνία $\phi_1$ είναι αριστερόστροφη
- $\frac{1}{2} p_2 \times p_3 = |E(\mathbf{Op_2p_3})| > 0$ διότι η γωνία $\phi_2$ είναι αριστερόστροφη
- $\frac{1}{2} p_3 \times p_1 = -|E(\mathbf{Op_3p_1})| < 0$ διότι η γωνία $\phi_3$ είναι δεξιόστροφή

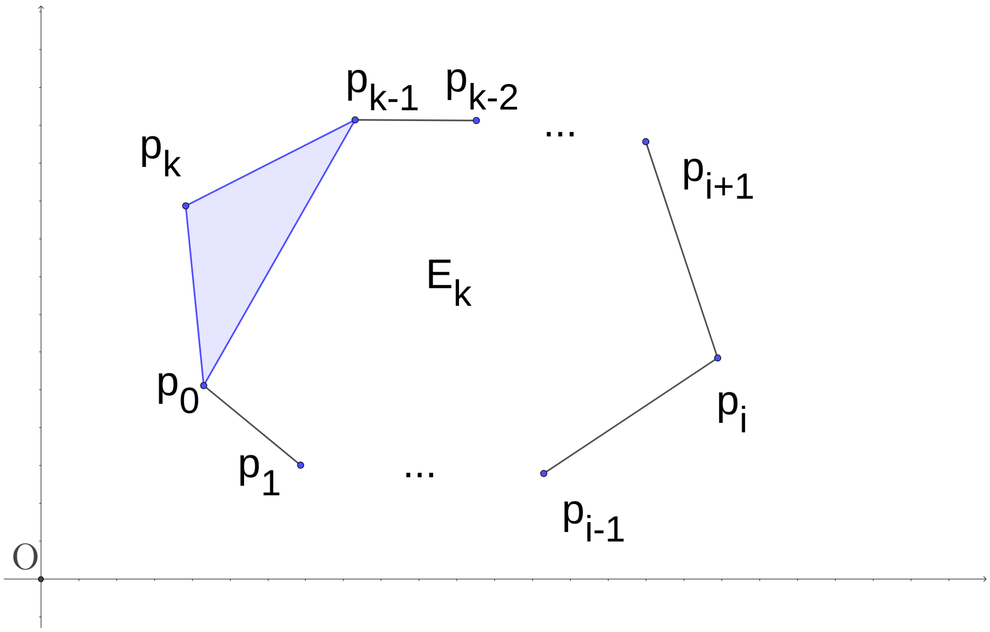
Άρα

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} p_i \times p_{i+1} = \frac{1}{2}(p_1 \times p_2 + p_2 \times p_3 + p_3 \times p_1) =$$

$$= |E(\mathbf{Op_1p_2})| + |E(\mathbf{Op_2p_3})| - |E(\mathbf{Op_3p_1})| = E(\mathbf{p_1p_2p_3})$$

Άρα επιβεβαιώνεται ο τύπος Meister-Gauss για τρία σημεία. Θα αποδείξουμε μέσω επαγωγής οτι ισχύει και για $n > 3$ σημεία.

Έστω οτι ισχυεί για $n = k$ σημειά, δηλαδή $E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k-1} p_i \times p_{i+1}$ με $p_k = p_0$. Τότε αρκει να δείξουμε οτι αν προσθέσουμε ένα ακομα σήμειο $\mathbf{p_k}$ θα ισχύει $E_{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k} p_i \times p_{i+1}$ με $p_{k+1} = p_0$




Βλέπουμε απο το παραπάνω σχήμα οτι

$$
\begin{aligned}
E_{k+1} &= E_k + E(\mathbf{p_{k-1}p_kp_0}) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-1} p_i \times p_{i+1} + \frac{1}{2}(p_{k-1}\times p_k + p_k \times p_0 + p_0 \times p_{k-1}) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-2} p_i \times p_{i+1} + \cancelto{0}{\frac{1}{2}p_{k-1}\times p_0 + \frac{1}{2}p_0 \times p_{k-1}} + \frac{1}{2}(p_{k-1}\times p_k + p_k \times p_0) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k-2} p_i \times p_{i+1} + \frac{1}{2}(p_{k-1}\times p_k + p_k \times p_0) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} p_i \times p_{i+1}
\end{aligned}
$$

Επομένως ισχυεί για $n = k+1$ και άρα ισχύει για κάθε $n \geq 3$

---

# Άσκηση 2

Αρχικά παρατηρούμε οτι σε ένα κανονικό πολύεδρο, το γινόμενο του πλήθους το εδρών $(F)$ με τον αριθμό των ακμών που περιβάλουν μια εδρα $(n)$ είναι ίσο με το διπλάσιο τουν συνολικού αριθμού ακμών του πολυέδρου $(E)$ δηλαδή $nF = 2E$. Ο λόγος είναι οτι όταν παίρνουμε το γινόμενο $nF$ οι κοίνες ακμές για δύο γειτονικές έδρες προσμετρούνται δύο φορές. Επίσης ισχύει οτι ο αριθμός των ακμών που συντρέχουν σε ένα κόμβο $(m)$ επί τον αριθμό των κόμβων $(V)$

είναι πάλι ίσο με $2E$ καθώς οι ακμές που ενώνουν δύο γειτονικούς κόμβους προσμετρούνται δύο φορές. Άρα καταλήγουμε με την σχέση

$$nF = mV = 2E \Rightarrow F = \frac{2E}{n},\ V = \frac{2E}{m}$$

Αντικαθιστώντας στο τύπο του ευκλείδη παίρνουμε

$$V - E + F = 2 \Leftrightarrow \frac{2E}{n} - E + \frac{2E}{m} = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{n} - 1 + \frac{2}{m} = \frac{2}{E} \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}$$
$$\xRightarrow{E>0} \frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$$

Για να υπάρχει μια έδρα πρέπει υποχρεωτικά $n \geq 3$ και για να υπάρχει το πολύεδρο πρεπει υποχρεωτικά $m \geq 3$. Άρα τα ζευγάρια $(n, m)$ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα είναι:

1. $n = 3$ και $m = 3$: Η κάθε έδρα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο και σε κάθε κόμβο συναντώνται τρείς έδρες (Τετράεδρο)

2. $n = 3$ και $m = 4$: Η κάθε έδρα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο και σε κάθε κόμβο συναντώνται τέσσερις έδρες (Οκτάεδρο)

3. $n = 3$ και $m = 5$: Η κάθε έδρα είναι ένα ισόπλευρο τρίγωνο και σε κάθε κόμβο συναντώνται πέντε έδρες (Είκοσαεδρο)

4. $n = 4$ και $m = 3$: Η κάθε έδρα είναι ένα τετράγωνο και σε κάθε κόμβο συναντώνται τρείς έδρες (Κύβος)

5. $n = 5$ και $m = 3$: Η κάθε έδρα είναι ένα πεντάγωνο και σε κάθε κόμβο συναντώνται τρείς έδρες (Δωδεκάεδρο)

Άρα σύνολο πέντε κανονικά πολύεδρα

---

# Άσκηση 3

**Για το πλήθος των διαγωνίων**:

Απο ένα κόμβο μπορουν να προκύψουν διαγώνιοι με όλους του άλλους κόμβους πλήν του εαυτού του και των δύο γειτόνων του, άρα $n - 3$ διαγώνιοι. Για $n$ κόμβους υπάρχουν $n(n - 3)$

διαγώνιοι. Παρατηρούμε οτι το πληθος των διαγωνίων είναι ανεξάρτητο απο το αν είναι συνεκτικό το πολύγονο ή απο το αν εχεί τρύπες.

**Για το πλήθος τών τριγώνων**:

Έστω οτι η μή συνεκτική περιοχή αποτελείται απο $p$ συνεκτικές περιοχές. Για την συνεκτική περιοχή $i$ $(1 \leq i \leq p)$ ορίζουμε $h_i$ το πλήθος τών τρυπών τις και $n_i$ το πλήθος των κόμβων του συνόρου της. Ορίζουμε επίσης $n_{i0}$ το πλήθος των κόμβων του εξωτερικού συνόρου της και $n_{ij}$ το πλήθος των κόμβων της τρύπας $j$ $(1 \leq j \leq h_i)$

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του εξωτερικού συνόρου είναι $(n_{i0} - 2)180^o$ ενώ το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών της τρύπας $j$ είναι $(n_{ij} + 2)180^o$. Αρα το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών της συνεκτικής περιοχής $i$ είναι:

$$(n_{i0} - 2)180^o + \sum_{j=1}^{h_i}(n_{ij} + 2)180^o = \left(\sum_{j=0}^{h_i} n_{ij} + 2h_i - 2\right)180^o = (n_i + 2h_i - 2)\,180^o$$

Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι $180^o$ άρα το πλήθος τών τριγώνων για τριγωνοποιήση της συνεκτικής περιοχής $i$ είναι

$$T_i = \frac{(n_i + 2h_i - 2)\,180^o}{180^o} = n_i + 2h_i - 2$$

Άρα το πλήθος των τριγώνων για την τριγωνοποιήση της μή συνεκτικής περιοχής θα είναι το άθροισμα των τριγώνων της της κάθε συνεκτικής δηλαδή:

$$\sum_{i=1}^{p} T_i = \sum_{i=1}^{p} n_i + 2h_i - 2 = \sum_{i=1}^{p} n_i + 2\sum_{i=1}^{p} h_i - 2p = n + 2h - 2p$$

---

# Άσκηση 4

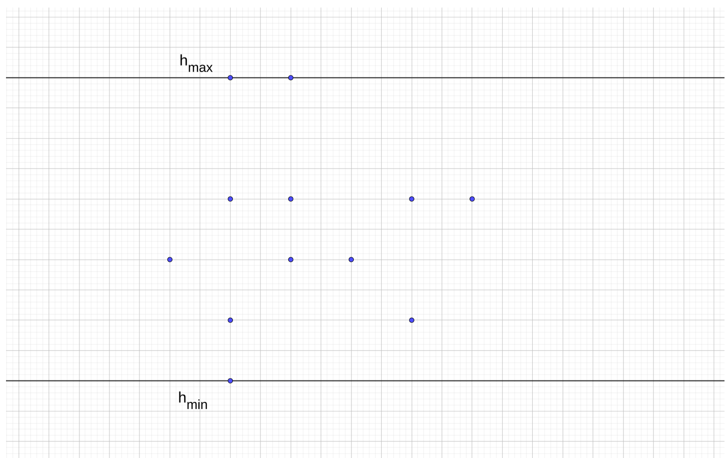
Στο αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, αντικαθιστώντας με $p = 1$ προκύπτει οτι το πλήθος τριγώνων της τριγωνοποιήσης για μια συνεκτική πολυγωνικη περιοχή με $n$ κόμβους και $h$ τρύπες είναι $n + 2h - 2$. Γνωρίζουμε επίσης οτι σε ένα απλό πολύγωνο με $n$ κόμβους και τριγωνοποιήση $n - 2$ τριγώνων, χρειάζονται το πολύ $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ guards. Άρα για πολύγωνο τριγωνοποιήσης $n + 2h - 2$ τριγώνων, θα χρειάζονται το πολύ $\lfloor \frac{n+2h}{3} \rfloor$ guards

---

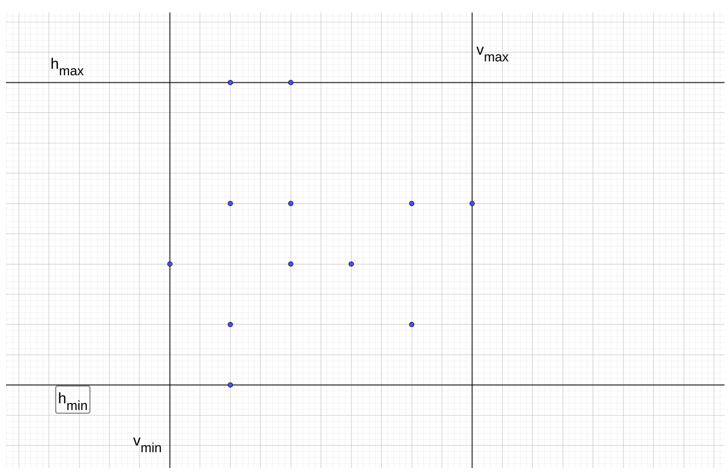
# Άσκηση 5

Ο ζητούμενος αλγόριθμος είναι ο εξής:

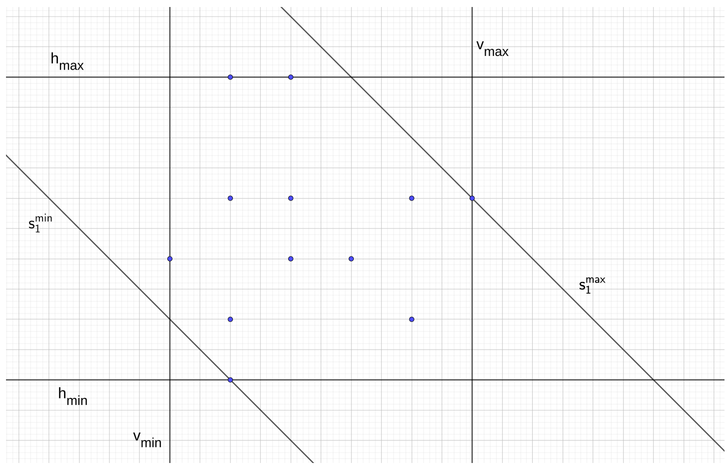
1. Αρχικά βρίσκουμε τα σημεία με την μέγιστη και ελαχιστη συνιστώσα στον κατακόρυφο άξονα $y_{max}$ και $y_{min}$ και υπολογίζουμε τις οριζόντιες ευθείες $h_{max} : y = y_{max}$ και $h_{min} : y = y_{min}$. Η εύρεση τών $y_{max}$ και $y_{min}$ μπόρει να γίνει σε χρόνο $O(n)$ με μια απλή αναζήτηση όλων των σημείων $p^{(i)}$ και βρίσκοντας το $\max_i\{p_y^{(i)}\}$ (και αντίστοιχα το $\min_i\{p_y^{(i)}\}$).



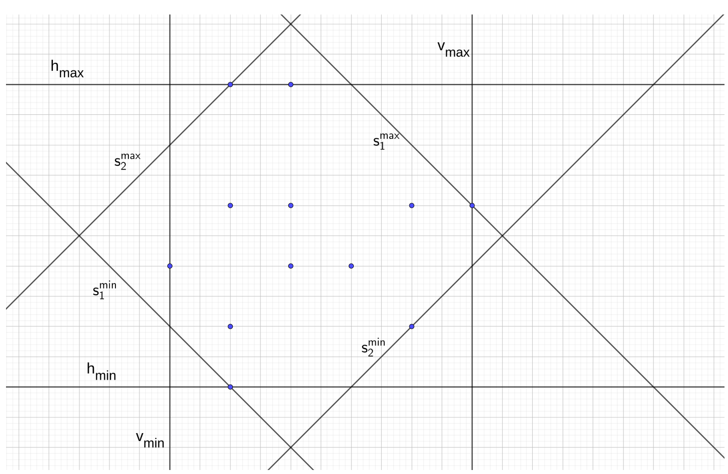

2. Βρίσκουμε τα σημεία με την μέγιστη και ελαχιστη συνιστώσα στον οριζόντιο άξονα $x_{max}$ και $x_{min}$ και υπολογίζουμε τις κάθετες ευθείες $v_{max} : x = x_{max}$ και $v_{min} : x = x_{min}$. Η εύρεση τών $x_{max}$ και $x_{min}$ μπόρει να γίνει πάλι σε χρόνο $O(n)$ με αναζήτηση όλων των σημείων $p^{(i)}$ και βρίσκοντας το $\max_i\{p_x^{(i)}\}$ (και αντίστοιχα το $\min_i\{p_x^{(i)}\}$).



3. Βρίσκουμε τα σημεία με την μέγιστη και ελαχιστη συνιστώσα στον άξονα $z_1$ με κλίση $+45^o$, $p^{z_1(max)}$ και $p^{z_1(min)}$ και υπολογίζουμε τις κάθετες στον άξονα $z_1$ ευθείες $s_1^{max} : y = -x + (p_y^{z_1(max)} + p_x^{z_1(max)})$ και $s_1^{min} : y = -x + (p_y^{z_1(min)} + p_x^{z_1(min)})$. Ο υπολογισμος των ευθειών $s_1^{max}$ και $s_1^{min}$ μπόρει να γίνει σε χρόνο $O(n)$ με αναζήτηση όλων των σημείων $p^{(i)}$ και βρίσκοντας το $\max_i\{p_y^{(i)} + p_x^{(i)}\}$ (και αντίστοιχα το $\min_i\{p_y^{(i)} + p_x^{(i)}\}$).



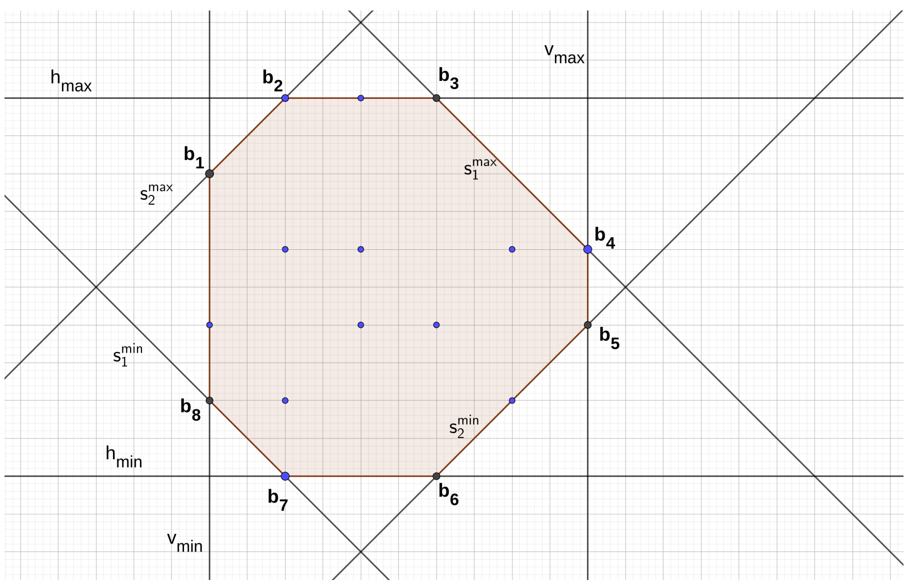

4. Βρίσκουμε τα σημεία με την μέγιστη και ελαχιστη συνιστώσα στον άξονα $z_2$ με κλίση $-45^o$, $p^{z_2(max)}$ και $p^{z_2(min)}$ και υπολογίζουμε τις κάθετες στον άξονα $z_2$ ευθείες $s_2^{max} : y = x + (p_y^{z_2(max)} - p_x^{z_2(max)})$ και $s_2^{min} : y = x + (p_y^{z_2(min)} - p_x^{z_2(min)})$. Ο υπολογισμος των ευθειών $s_2^{max}$ και $s_2^{min}$ μπόρει να γίνει σε χρόνο $O(n)$ με αναζήτηση όλων των σημείων $p^{(i)}$ και βρίσκοντας το $\max_i\{p_y^{(i)} - p_x^{(i)}\}$ (και αντίστοιχα το $\min_i\{p_y^{(i)} - p_x^{(i)}\}$).




5. Βρίσκουμε τα σημεια:

- $\mathbf{b_1}$: σημείο τομής της $v_{min}$ με $s_2^{max} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_2}$: σημείο τομής της $s_2^{max}$ με $h_{max} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_3}$: σημείο τομής της $h_{max}$ με $s_1^{max} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_4}$: σημείο τομής της $s_1^{max}$ με $v_{max} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_5}$: σημείο τομής της $v_{max}$ με $s_2^{min} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_6}$: σημείο τομής της $s_2^{min}$ με $h_{min} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_7}$: σημείο τομής της $h_{min}$ με $s_1^{min} \rightarrow O(1)$
- $\mathbf{b_8}$: σημείο τομής της $s_1^{min}$ με $v_{min} \rightarrow O(1)$

6. Το πολύγονο $[\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4}, \mathbf{b_5}, \mathbf{b_6}, \mathbf{b_7}, \mathbf{b_8}]$ είναι το ζητούμενο πολύγονο με την ελάχιστη περίμετρο που περιβάλει το σημεία του set $P$. Σημειώνουμε οτι κάποια απο τα σημειά $\mathbf{b_i}$ μπορεί να ταυτίζονται με τα γειτονικά τους




Η τελική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι

$$4O(n) + 8O(1) = O(n)$$

*Τα σημεία το παραδείγματος είναι τα ίδια με αυτά του παραδείγματος στην εκφώνηση της άσκησης