ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

1ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Άσκηση 1

Ο αλγόριθμος που υλοποιεί την αναζήτηση range query σε binary search tree είναι ο παρακάτω

Range query search in binary search tree

function Range query($node, low, high, query$)
  if $node$ is null **then**
    return
  if $low < node.value$ **then**
    RANGE QUERY($node.left, low, high, query$)
  if $low \leq node.value \leq high$ **then**
    $query$.append($node.value$)
  if $node.value < high$ **then**
    RANGE QUERY($node.right, low, high, query$)

Ο αλγόριθμος αρχικά, εκτελεί αναζήτηση στο δέντρο προκειμένου να βρεί το κάτω όριο του range query (δηλαδή το πρώτο του στοιχείο). Η αναζήτηση σε δυαδικό δέντρο γίνεται σε χρόνο $O(h)$. Αφού βρεί το κάτω όριο μέτα συνεχίζει ανακτώντας ένα ένα τα υπόλοιπα στοιχεία του query απο το μικρότερο στο μεγαλύτερο. Ξεκινώντας απο το κάτω όριο, η ανάκτηση του κάθε στοιχείου χρειάζεται $O(1)$ χρόνο εφόσον θα βρίσκεται ήδη στο αμέσως προηγούμενο στοιχείο, και κάθε στοιχείο προσπελαύνεται ακριβώς μια φορα. Άρα η διαδικασία αυτή χρειάζεται χρόνο $kO(1) = O(k)$ για να ολοκληρωθεί. Συνεπώς ο συνολικός χρόνος του αλγορίθμου είναι $O(h+k)$

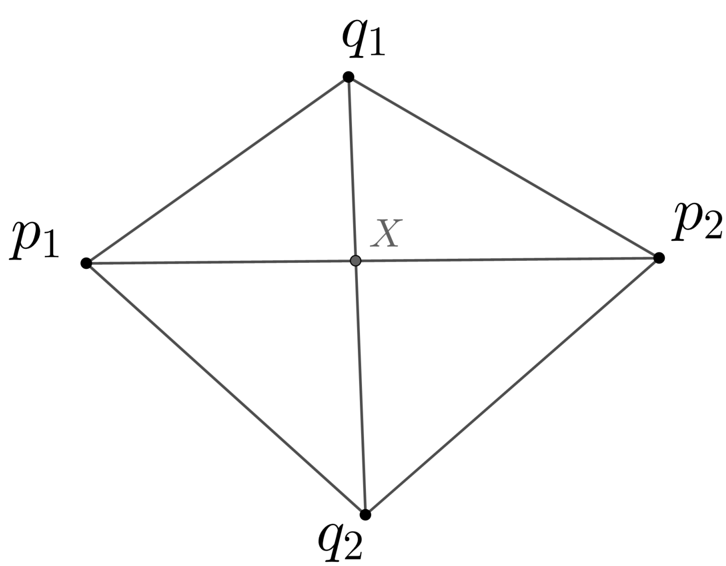
Άσκηση 2

Χρειάζεται να αποδείξουμε τον ευθή και τον αντίστροφο ισχυρισμό.

1. Αν τα τμήματα $\overline{p_1p_2}$ και $\overline{q_1q_2}$ τέμνονται, τότε το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό.

2. Αν το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό, τότε τα $\overline{p_1p_2}$ και $\overline{q_1q_2}$ τέμνονται

Για τον εύθή ισχυρισμό: Έστω οτι τα τμήματα $\overline{p_1p_2}$ και $\overline{q_1q_2}$ τέμνονται στο σημείο X.



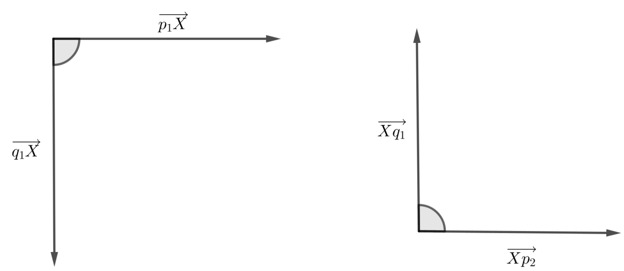
Για να αποδείξουμε οτι το $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό, αρκεί να δείξουμε οτι για κάθε πλεύρα, τα υπολοίπα σημεία του πολυγόνου βρίσκονται δεξιά της. Π.χ για την πλευρά $\overrightarrow{p_1q_1}$ θέλουμε να δείξουμε οτι $\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1p_2} < 0$ και $\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1q_2} < 0$

- Αρχικά για να δείξουμε οτι $\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1p_2} < 0$ μπορούμε να γράψουμε οτι $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_1X} + \overrightarrow{Xq_1}$ και $\overrightarrow{q_1p_2} = \overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{Xp_2}$

  Άρα

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1p_2} = (\overrightarrow{p_1X} + \overrightarrow{Xq_1}) \times (\overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{Xp_2}) = \\
= \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} + \cancelto{0}{\overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{Xp_2}} + \cancelto{0}{\overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{q_1X}} + \overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{Xp_2} = \\
= \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{Xp_2} < 0
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα $\overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} < 0$ και $\overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{Xp_2} < 0$, λόγω των δεξιόστροφων γωνιών.



- Ομοίως, για να δείξουμε οτι $\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1q_2} < 0$, γράφουμε $\overrightarrow{p_1q_1} = \overrightarrow{p_1X} + \overrightarrow{Xq_1}$ και $\overrightarrow{q_1q_2} = \overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{Xq_2}$

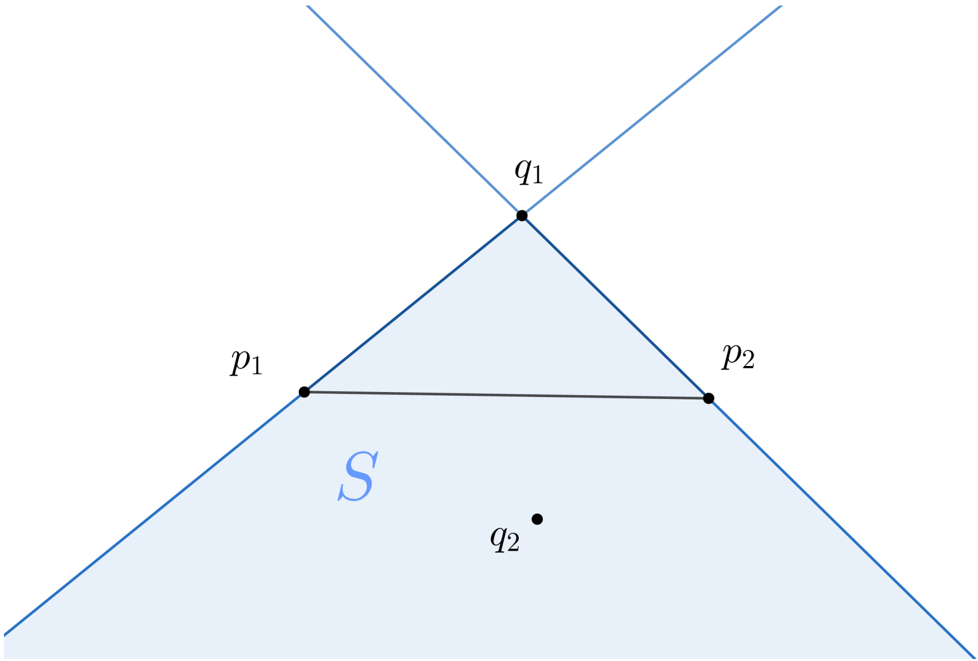
  Άρα

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p_1q_1} \times \overrightarrow{q_1q_2} &= (\overrightarrow{p_1X} + \overrightarrow{Xq_1}) \times (\overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{Xq_2}) = \\
&= \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{Xq_2} + \cancelto{0}{\overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{q_1X}} + \cancelto{0}{\overrightarrow{Xq_1} \times \overrightarrow{Xq_2}} = \\
&= \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} + \overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{Xq_2} < 0
\end{aligned}$$

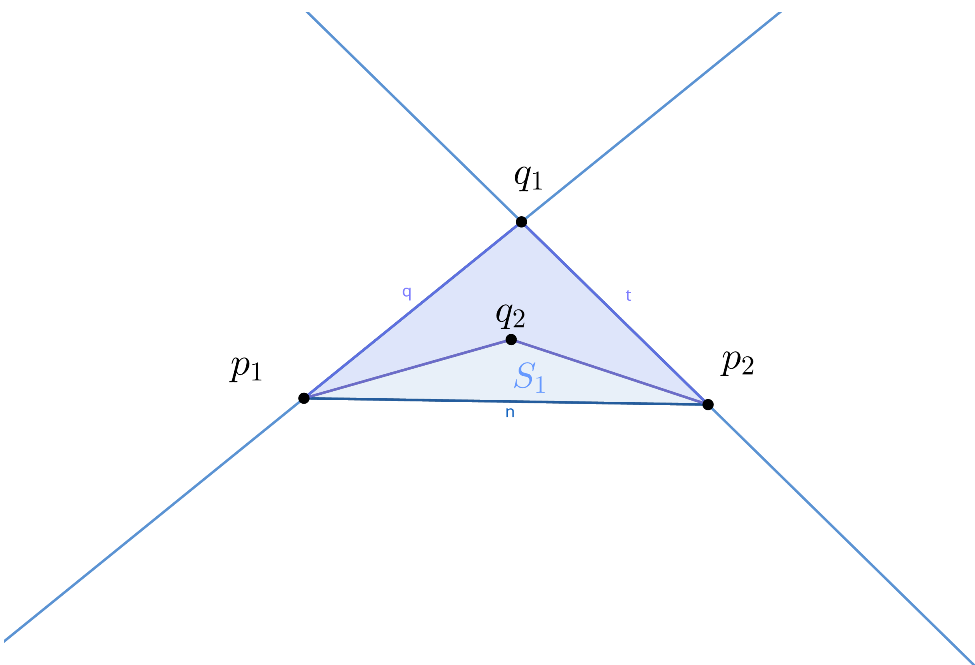
  Οπως και πριν, η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι, $\overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{q_1X} < 0$ και $\overrightarrow{p_1X} \times \overrightarrow{Xq_2} < 0$, λόγω των δεξιόστροφων γωνιών.

Συνεπώς αποδείξαμε οτι τα σημεία p_2 και q_2 βρίσκονται στον δεξή ημιχώρο που ορίζεται απο την πλεύρα $\overline{p_1q_1}$. Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για τις άλλες τρείς πλευρές, αποδεικνύεται οτι το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό.

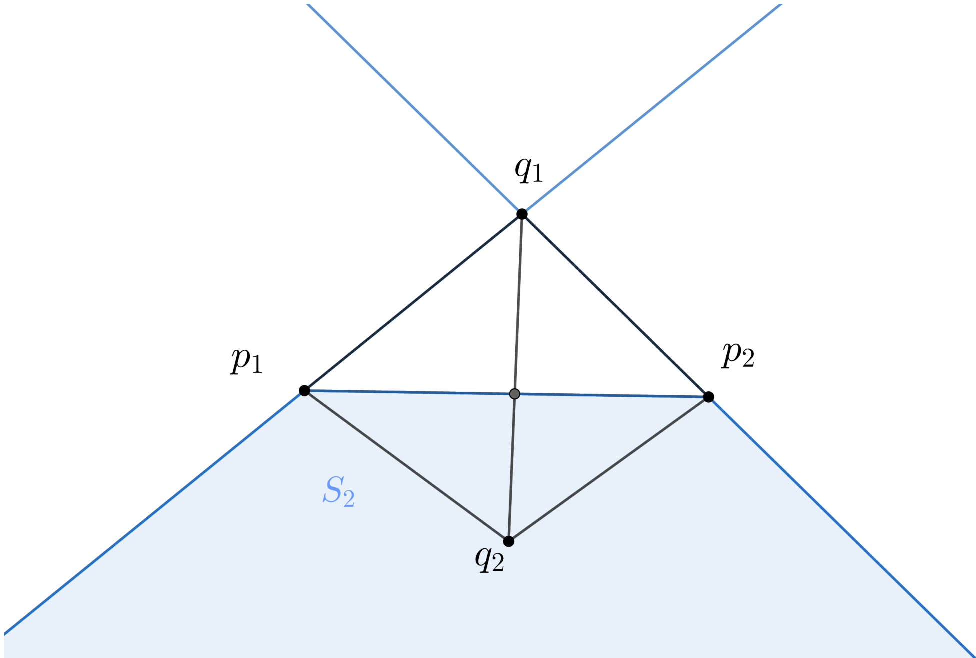
Για τον αντίστροφο ισχυρισμό: Έστω οτι το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό. Τότε το σημείο q_2 θα βρίσκεται δέξια το τμήματος $\overrightarrow{q_1p_2}$ και δεξιά του τμήματος $\overrightarrow{p_1q_1}$, δηλαδή θα βρίσκεται στην υποχώρο S όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



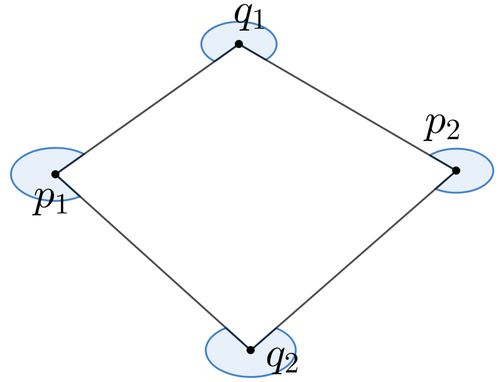
Εάν το q_2 βρίσκεται πάνω απο το τμήμα $\overline{p_1p_2}$ μέσα στον υποχώρο S_1 που ορίζεται απο το τρίγωνο $p_1q_1p_2$, τότε το τμήμα $\overline{p_1p_2}$ θα βρίσκεται εκτός του πολυγόνου $[p_1, q_1, p_2, q_2]$, το όποίο είναι άτοπο κάθως έχουμε υποθέσει οτι το πολύγονο είναι κυρτό (εφόσον p_1, p_2 ανήκουν στο πολύγονο θα πρέπει και το τμήμα $\overline{p_1p_2}$ να ανήκει)



Άρα το q_2 βρίσκεται σίγουρα στον υποχώρο S_2 και κατα συνέπεια το τμήμα $\overline{q_1q_2}$ τέμνει σίγουρα το τμήμα $\overline{p_1 p_2}$, όπως φαίνεταιστο παρακάτω σχήμα.



Για το δεύτερο σκέλος της άσκησης, καλούμαστε να προσδιορίσουμε αν δύο τμημάτα $\overrightarrow{p_1 p_2}$ και $\overrightarrow{p_1 p_2}$ τέμνονται. Με βάση το παραπάνω, αρκεί να δείξουμε οτι οτι το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό.



Ενας τρόπος θα ήταν προσδιορίσουμε το κύρτο περίβλημα των σημείων p_1, p_2, q_1, q_2 με τον αλγίριθμο Jarvis march και εάν ώς convex hall προκύψει η ακολουθία $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ τότε ξέρουμε οτι το πολύγονο $[p_1, q_1, p_2, q_2]$ είναι κυρτό.

Ως Εναλλακτική λύση μπορούμε να ελέγξουμε αν οι τέσσερις γωνίες που σχηματίζονται απο τα τέσσερα σημέια ($p_1\hat{q_1}p_2, q_1\hat{p_2}q_2, p_2\hat{q_1}p_1, q_2\hat{p_1}q_1$) έχουν την ίδια φορά (δεξιόστροφή ή αριστερόστροφη). Αναλυτικά :

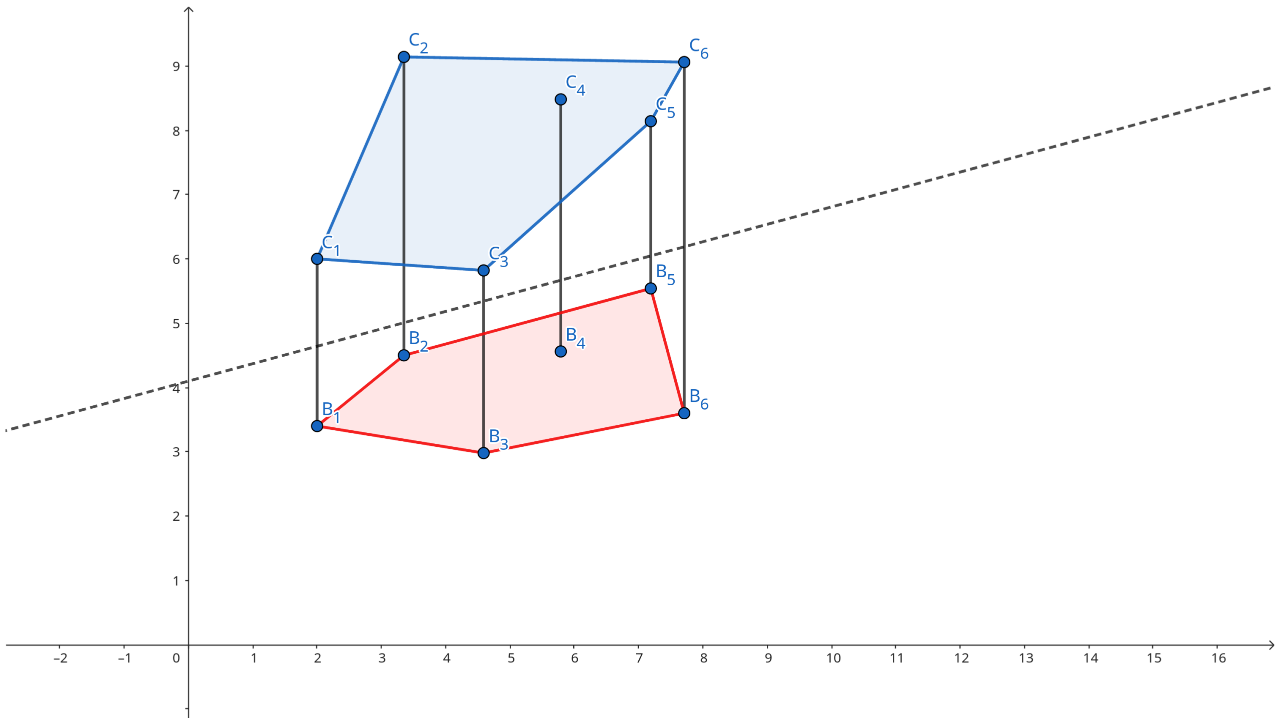
1. Τοποθετούμε τα σημεία p_1, q_1, p_2, q_2 σε μια λίστα list (με αυτήν την σειρά)
2. Θέτω $a = list[0],\ b = list[1],\ c = list[2]$ και υπολογίζω το πρόσημο του cross product $\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{bc}$
3. Αρχικοποιώ $i = 1$
4. Θέτω $a = list[i],\ b = list[i+1],\ c = list[i+2]$ και υπολογίζω το πρόσημο του cross product $\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{bc}$
5. Εάν το πρόσημο στο βήμα 4 διαφέρει απο το πρόσημο στο βήμα 2 τότε τερματίζω και επιστρέφω FALSE. Εάν το πρόσημοστο βήμα 4 είναι ίδιο με το πρόσημο στο βήμα 2 τότε αυξάνω το i ($i = i + 1$) και επιστρέφω στη βήμα 4
6. Συνεχίζω εώς και $i = 3$.

Εάν γίνουν τρείς επαναλήψεις χωρίς να τερματίσει στο βήμα 4 (δήλαδή αν ολά τα πρόσημα είναι ίδια), τότε επιστρέφω TRUE

Άσκηση 3

Σύμφωνα με το hyperplane separation theorem, αν S_1, S_2 δύο κυρτά και διακριτά (μή τεμνόμενα) σύνολα, τότε υπάρχει υπερεπίπεδο $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = b$ το οποίο να τα διαχωρίζει. Στο πρόβλημα της άσκησης βρίσκει εφαρμογή ώς εξής:

Αν ορίσουμε ώς σύνολο S_1 το σύνολο τών σημείων (a_i, c_i) και ώς S_2 το σύνολο τών σημείων (a_i, b_i), αρκεί να δείξουμε οτι οι κυρτές θήκες των S_1 και S_2 ($\mathcal{CH}(S_1)$ και $\mathcal{CH}(S_2)$) δεν τέμνονται. Τότε σύμφωνα με το hyperplane separation theorem, θα υπάρχει ευθεία που να τις διαχωρίζει και συνεπώς θα υπάρχει ευθεία που να τέμνει όλα τα κάθετα τμήματα (a_1, b_i, c_i)



Ένας $O(n \log n)$ ο οποίος λύνει το πρόβλημα εκμεταλευόμενος τον παραπάνω ισχυρισμό είναι ο εξής:

1. Αρχικά βρίσκουμε τα κυρτά περιβλήματα των S_1 και S_2 χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Jarvis march σε χρόνο $O(n \log n)$

2. Έπειτα θέλουμε να προσδιορίσουμε αν τα $\mathcal{CH}(S_1)$ και $\mathcal{CH}(S_2)$ είναι διακριτά σε χρόνο $O(n \log n)$. Ένα τρόπος να το κάνουμε είναι να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο T. Chan ο οποίος βρίσκει τις τομές μεταξύ red/blue τμημάτων. Ορίζοντάς ώς σύνολο blue τμημάτων B το $\mathcal{CH}(S_1)$ και ώς σύνολο red τμημάτων R το $\mathcal{CH}(S_2)$ (όπως φαίνεται στο σχήμα παραπάνω), ο αλγόριθμος θα βρεί τις τομές τους σε χρόνο $O(n \log n + k)$ όπου n το πλήθος τών τμήματων και k το πλήθος τών τομών. Αλλά λόγω της τοπολογίας τών τμημάτων, ο αριθμός τών τομών δεν θα μπορεί να υπερβαίνει το n άρα η πράγματική πολυπλοκότητα θα είναι $O(n \log n + n) = O(n \log n)$. Ο αλγόριθμος απαιτεί τα τμήματα στο εσωτερικό του κάθε συνόλου να μήν τέμνοντα αλλα επιτρέπει να εφάπτονται στα άκρα τους, οπότε μπόρει να εφαρμοστεί στα δικά μας σύνολα R και B

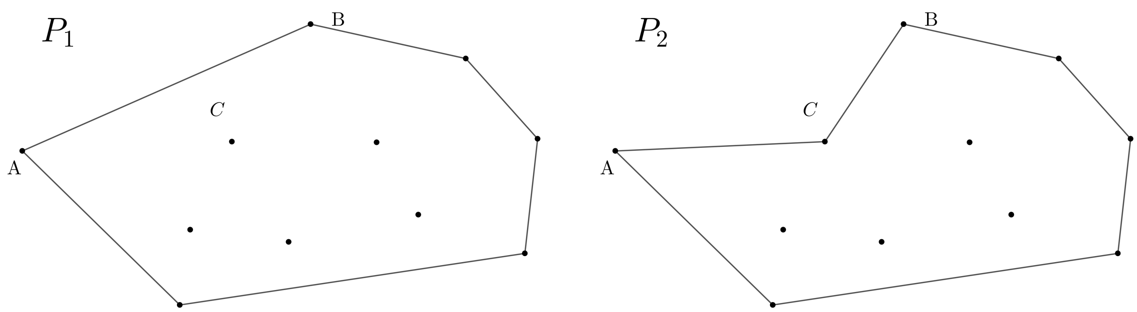
3. Αν ο αλγόριθμος T. Chan δεν βρεί καμία τομή τότε επιστρέφουμε TRUE καθώς τα σύνολα $\mathcal{CH}(S_1)$ και $\mathcal{CH}(S_2)$ θα είναι διακριτά. Διαφορετικά επιστρέφουμε FALSE

Η τελική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου θα είναι

$$\text{Jarvis march} + \text{T. Chan} = O(n \log n) + O(n \log n) = O(n \log n)$$

Άσκηση 4

Έστω σύνολο πεπερασμένων σήμειων με κυρτό περίβλημα με περίμετρο P_1. Έστω οτι υπάρχει περιμετρικό πολύγονο με περιμέτρο $P_2 < P_1$ το οποίο περνάει αποο σημείο C που παραβιάζει την κυρτότητα του περιβλήματος με περίμετρο P_2, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρούμε οτι $P_2 = P_1 - \|AB\| + \|AC\| + \|CB\|$ Άρα

$$P_2 < P_1 \Leftrightarrow P_1 - \|AB\| + \|AC\| + \|CB\| < P_1 \Leftrightarrow \|AC\| + \|CB\| < \|AB\|$$

Το τελικό συμπέρασμα είναι άτοπο καθώς παραβιάζειτην τριγωνική ανισότητα. Αρα δεν μπορεί να υπάρξει το πολύγονο με περίμετρο P_2 συνεπώς το κυρτό περίβλημα είναι το περίβλημα με την ελάχιστη περίμετρο.

Άσκηση 5

Το επίπεδο P που ορίζεται απο τα σημεία $\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3} \in \mathbb{R}^3$ περιγράφεται ως:

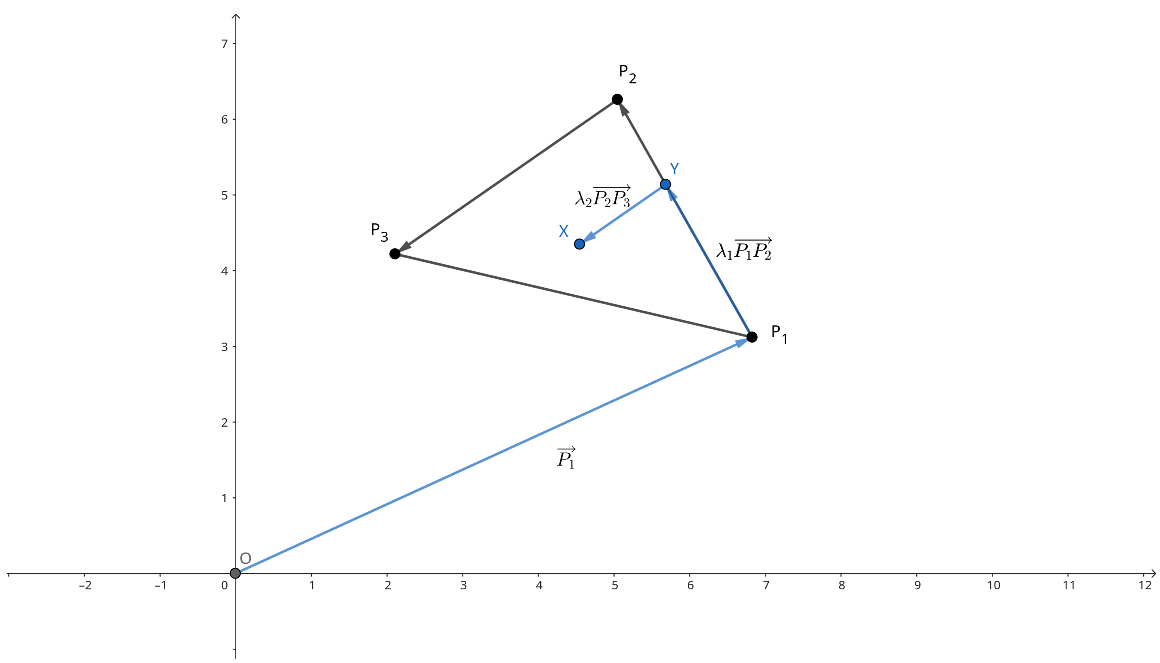
$$P: \quad \mathbf{p_1} + \lambda_1(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) + \lambda_2(\mathbf{p_3} - \mathbf{p_2}) \quad \text{για} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Θέλουμε να βρούμε το σημείο τομής του P με την ημιευθεία $\boldsymbol{\alpha} + \lambda\mathbf{D} \quad \lambda > 0$ λύνοντας την εξίσωση

$$\boldsymbol{\alpha} + \lambda\mathbf{D} = \mathbf{p_1} + \lambda_1(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) + \lambda_2(\mathbf{p_3} - \mathbf{p_2}) \Leftrightarrow \lambda\mathbf{D} - \lambda_1(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) - \lambda_2(\mathbf{p_3} - \mathbf{p_2}) = \mathbf{p_1} - \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{p_1} - \mathbf{p_2} & \mathbf{p_2} - \mathbf{p_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \mathbf{p_1} - \boldsymbol{\alpha}$$

Για να υπάρχει σημείο τομης της ημιευθείας και του επιπέδου θα πρέπει το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων να έχει λύση ως προς $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ και να προκύψει $\lambda > 0$. Απο εκεί και πέρα προκειμένου το σημείο τομής να βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου $\mathbf{p_1 p_2 p_3}$ θα πρέπει στην λύση του συστήματος να προκύψουν $0 < \lambda_1 < 1$ και $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.



Όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα εάν $\mathbf{X}$ το σημείο τομής και $\lambda_1 = \lambda_2$ τότε το τρίγωνο $\mathbf{P_1YX}$ είναι όμοιο με το $\mathbf{P_1P_2P_3}$, όποτε το σημείο τομής $\mathbf{X}$ πέφτει πάνω στο τμήμα $\overline{P_3P_1}$. Εάν $\lambda_1 < \lambda_2$ τότε το $\mathbf{X}$ πέφτει εκτός του τριγώνου. Άρα πρέπει $\lambda_1 > \lambda_2$.

Εφόσον λυθεί το σύστημα, το σήμειο τομής θα προσδιρίζεται απο την σχέση

$$\mathbf{x} = \mathbf{p_1} + \lambda_1(\mathbf{p_2} - \mathbf{p_1}) + \lambda_2(\mathbf{p_3} - \mathbf{p_2}) \quad \text{για} \;\; \lambda_1 \in (0,1) \;\; \text{και} \;\; \lambda_2 \in (0,\lambda_1)$$
