ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

2ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Μέρος 1ο

Απο βιβλίο McMahon

Άσκηση 4.1

Τα δαινύσαμτα βάσης είναι τα

$$|w_1\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \ , \ |w_2\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \ , \ |w_3\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle \ , \ |w_4\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$$

Αρχικά δείχνουμε οτι κάθε διάνυσμα είναι κανονικοποιημένο

$$\langle w_1|w_1\rangle = \langle 0| \otimes \langle 0| \, |0\rangle \otimes |1\rangle = \langle 0|0\rangle \, \langle 0|0\rangle = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\langle w_2|w_2\rangle = \langle 0| \otimes \langle 1| \, |0\rangle \otimes |1\rangle = \langle 0|0\rangle \, \langle 1|1\rangle = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\langle w_3|w_3\rangle = \langle 1| \otimes \langle 0| \, |1\rangle \otimes |0\rangle = \langle 1|1\rangle \, \langle 0|0\rangle = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\langle w_4|w_4\rangle = \langle 1| \otimes \langle 1| \, |1\rangle \otimes |1\rangle = \langle 1|1\rangle \, \langle 1|1\rangle = 1 \cdot 1 = 1$$

Για να είναι ορθοκανονικά τα διανύσαμτα βάσης πρέπει ανα δύο να έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με 0.

$$\langle w_1|w_2\rangle = \langle 0| \otimes \langle 0| \, |0\rangle \otimes |1\rangle = \langle 0|0\rangle \, \langle 0|1\rangle = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\langle w_1|w_3\rangle = \langle 0| \otimes \langle 0| \, |1\rangle \otimes |0\rangle = \langle 0|1\rangle \, \langle 0|0\rangle = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\langle w_1|w_4\rangle = \langle 0| \otimes \langle 0| \, |1\rangle \otimes |1\rangle = \langle 0|1\rangle \, \langle 0|1\rangle = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\langle w_2|w_3\rangle = \langle 0| \otimes \langle 1| \, |1\rangle \otimes |0\rangle = \langle 1|0\rangle \, \langle 0|1\rangle = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\langle w_2|w_4\rangle = \langle 0| \otimes \langle 1| \, |1\rangle \otimes |1\rangle = \langle 0|1\rangle \, \langle 1|1\rangle = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\langle w_3|w_4\rangle = \langle 1| \otimes \langle 0| \, |1\rangle \otimes |1\rangle = \langle 1|1\rangle \, \langle 0|1\rangle = 1 \cdot 0 = 0$$

Άρα είναι ορθοκανονικά.

Άσκηση 4.3

$$\langle \psi|\phi\rangle = (\langle a| \otimes \langle c|)(|b\rangle \otimes |d\rangle) = \langle a|b\rangle \, \langle c|d\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$$

Άσκηση 4.4

$$|\psi\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και } |\phi\rangle = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4.5

$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = |0\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) - ket1 \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = (|0\rangle - |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$

Συνεπώς μπορεί να γραφεί ώς γινόμενο κταστάσεων.

Άσκηση 4.6

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Η παραπάνω κατάσταση αποτελεί μια απο τις καταστάσεις Bell οι οποίες δεν είναι διαχωρίσιμες.

Άσκηση 4.7

Γνωρίζουμε οτι $X|0\rangle = |1\rangle$, $X|1\rangle = |0\rangle$, $Y|0\rangle = i|1\rangle$ και $Y|1\rangle = -i|0\rangle$

Άρα

$$X \otimes Y|\psi\rangle = X \otimes Y(\frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}) = \frac{(X|0\rangle) \otimes (Y|1\rangle) - (X|1\rangle) \otimes (Y|0\rangle)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-i|1\rangle|0\rangle - i|0\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle)$$

Άσκηση 4.8

$$(A \otimes B)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & ... & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & ... & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & ... & a_{mn}B \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} a_{11}^*B^\dagger & a_{21}^*B^\dagger & ... & a_{m1}^*B^\dagger \\ a_{12}^*B^\dagger & a_{22}^*B^\dagger & ... & a_{m2}^*B^\dagger \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^*B^\dagger & a_{2n}^*B^\dagger & ... & a_{mn}^*B^\dagger \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & ... & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & ... & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & ... & a_{mn}^* \end{bmatrix} \otimes B^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger$$

Άσκηση 4.9

Γνωρίζουμε οτι $I\left|0\right\rangle = \left|0\right\rangle$, $I\left|1\right\rangle = \left|1\right\rangle$, $Y\left|0\right\rangle = i\left|1\right\rangle$ και $Y\left|1\right\rangle = -i\left|0\right\rangle$

Άρα

$$I \otimes Y\left|\psi\right\rangle = I \otimes Y\left(\frac{\left|0\right\rangle\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{(I\left|0\right\rangle) \otimes (Y\left|0\right\rangle) + (I\left|1\right\rangle) \otimes (Y\left|1\right\rangle)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{i\left|0\right\rangle\left|1\right\rangle - i\left|1\right\rangle\left|0\right\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\left|0\right\rangle\left|1\right\rangle - \left|1\right\rangle\left|0\right\rangle)$$

Άσκηση 4.10

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και } Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Αρα

$$X \otimes Y = \begin{bmatrix} 0Y & 1Y \\ \\ 1Y & 0Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ \\ 0 & 0 & i & 0 \\ \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6.1

Για ναδείξουμε οτι είναι ο P_1P_2 είναι προβολικός τελεστής αρκεί να δείξουμε οτι: $P_1P_2 = (P_1P_2)^\dagger$ και $P_1P_2 = (P_1P_2)^2$ Εφόσον P_1 και P_1 είναι προβολικοί τελεστές γνωρίζουμε οτι $P_1^\dagger = P_1$, $P_2^\dagger = P_2$, $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$ και επιπλέον $[P_1, P_2] = 0 \Leftrightarrow P_1P_2 = P_2P_1$ Συνεπώς μπορούμε να πούμε οτι

$$(P_1P_2)^\dagger = P_2^\dagger P_1^\dagger = P_2P_1 = P_1P_2$$

$$(P_1P_2)^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1(P_2P_1)P_2 = P_1P_1P_2P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2$$

Αρα είναι πράγματι προβολικός τελεστής

Άσκηση 6.2

Αρχικά πρέπει να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι κανονικοποιημένο υπολογίζοντας την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{3}|c_i|^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

Που σημαίνει οτι είναι κανονικοποιημένο.

Οι τρείς προβολικοί τελεστές είναι οι

$$P_1 = |u_1\rangle \langle u_1|$$

$$P_2 = |u_2\rangle \langle u_2|$$

$$P_3 = |u_3\rangle \langle u_3|$$

Οι αντίστοιχες πιθανότητες μέτρησης της της κάθε κατάστασης είναι

$$Pr(u_1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle = |\langle u_1|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{2}\langle u_1|u_1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}\langle u_1|u_2\rangle + \frac{1}{2}\langle u_1|u_3\rangle|^2$$

$$|\frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0|^2 = |\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

$$Pr(u_2) = \langle\psi|P_2|\psi\rangle = |\langle u_2|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{2}\langle u_2|u_1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}\langle u_2|u_2\rangle + \frac{1}{2}\langle u_2|u_3\rangle|^2$$

$$|\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 0|^2 = |-\frac{\sqrt{2}}{2}|^2 = \frac{1}{2}$$

$$Pr(u_3) = \langle\psi|P_3|\psi\rangle = |\langle u_3|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{2}\langle u_3|u_1\rangle - \frac{\sqrt{2}}{2}\langle u_3|u_2\rangle + \frac{1}{2}\langle u_3|u_3\rangle|^2$$

$$|\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1|^2 = |\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

Η μέση ενέργεια του συστήματος υπολογίζεται απο τον τύπο $\langle H\rangle = \sum_i h_i \langle\psi|P_i|\psi\rangle$. Άρα

$$\langle H\rangle = \hbar\omega\frac{1}{4} + 2\hbar\omega\frac{1}{2} + 3\hbar\omega\frac{1}{4} = 2\hbar\omega$$

Άσκηση 6.3

Στην 1η σειρά ασκήσεων είχε αποδειχθεί οτι οι ιδιοτιμές του πίνακα X είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ ενώ τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα διανύσαμτα είναι $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ 1\ )^T$ και $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ -1\ )^T$ αντίστοιχα.

Αρα για την ιδιοτιμή λ_1 ο προβολικός τελεστής είναι ο

$$P_1 = |v_1\rangle \langle v_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} (\ 1 \quad 1\ ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ενω για την ιδιοτιμή λ_2 ο προβολικός τελεστής είναι ο

$$P_2 = |v_2\rangle \langle v_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} (\ 1 \quad -1\ ) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες μέτρησης για κάθε μια απο τις δυο ιδιοτιμές ,θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$Pr_i = \langle\psi| P_i |\psi\rangle$$

Αρχικά υπολογίζουμε

$$P_1 |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 |\psi\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αρα

$$Pr(1) = \langle\psi| P_1 |\psi\rangle = \langle 1| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\ 0 \quad 1\ )\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$Pr(-1) = \langle\psi| P_2 |\psi\rangle = \langle 1| \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\ 0 \quad 1\ )\begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 6.4

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

(A)

$$Pr(|01\rangle) = |\langle 01|\psi\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 01|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 01|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 01|11\rangle|^2 = \ |\frac{1}{\sqrt{6}}|^2 = \frac{1}{6}$$

(B)

Για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα θα χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή $I \otimes P_{|1\rangle} = I \otimes |1\rangle\langle 1|$

$$Pr = \langle\psi|I \otimes |1\rangle\langle 1|\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle \otimes |1\rangle\langle 1|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle \otimes |1\rangle\langle 1|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle\langle 1|1\rangle) =$$

$$= \langle\psi|\,(\frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) = (\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 00| + \frac{1}{\sqrt{6}}\langle 01| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 11|)(\frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) =$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{2}{3}$$

Η κατάσταση του συστήματος μετα την μέτρηση θα είναι

$$|\psi'\rangle = \frac{I \otimes |1\rangle\langle 1|\,|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|I \otimes |1\rangle\langle 1|\,|\psi\rangle}} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{1}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle) = \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|11\rangle$$

Άσκηση 6.5

Αρχικά θέλουμε να γράψουμε την κατάσταση $|\psi\rangle$ ως διάνυσμα στήλης (έχουμε ελέγξει οτι είναι κανονικοποιημένη λέγοντας $(\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}})^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|0\rangle + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Στην 1η σειρά ασκήσεων είχε αποδειχθεί οτι οι ιδιοτιμές του πίνακα Y είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$ ενώ τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα διανύσαμτα είναι $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ i\ )^T$ και $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ -i\ )^T$ αντίστοιχα.

Για την ιδιοτιμή λ_1 ο προβολικός τελεστής είναι ο

$$P_1 = |v_1\rangle\langle v_1| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ i \end{pmatrix}(\ 1 \quad -i\ ) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ & \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

ενω για την ιδιοτιμή λ_2 ο προβολικός τελεστής είναι ο

$$P_2 = |v_2\rangle\langle v_2| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -i \end{pmatrix}(\ 1 \quad i\ ) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ & \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Η μέση τιμή τουY ως προς το $|\psi\rangle$ υπολογίζεται απο τον τύπο

$$\langle X\rangle = \sum_i \lambda_i \langle\psi|P_i|\psi\rangle = \lambda_1\langle\psi|P_1|\psi\rangle + \lambda_2\langle\psi|P_2|\psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5}i \\ i+\sqrt{5} \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5}i \\ -i+\sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12}(1-\sqrt{5}i+\sqrt{5}i+5-(1+\sqrt{5}i-\sqrt{5}i+5)) = 0$$

Άσκηση 6.6

$$|\psi\rangle = (\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}})|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|011\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle$$

Ελεγχουμε οτι το σύστημα είναι κανονικοποιημένο λέγοντας οτι

$$|\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}}|^2 + |\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 + |\frac{1}{\sqrt{10}}|^2 + |\frac{i}{2}|^2 = \frac{3}{20} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = 1$$

(A)

$$Pr(|011\rangle) = |\langle 011|\psi\rangle|^2 = \langle 011|((\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}})|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|011\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle) =$$

$$= |(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}})\langle 011|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 011|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}\langle 011|011\rangle + \frac{i}{2}\langle 011|111\rangle|^2 = |\frac{1}{\sqrt{10}}|^2 = \frac{1}{10}$$

(B)

Για το υπολογισμό της ζητούμενη πιθανότητας θα χρησιμοποιήσουμετον τελεστή $P = I \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes I$

$$Pr = \langle\psi|P|\psi\rangle = \langle\psi|(I \otimes |1\rangle\langle 1| \otimes I((\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}})|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|011\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle))$$

$$= \langle\psi| ((\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}}) |0\rangle (|1\rangle \langle 1|0\rangle) |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle (|1\rangle \langle 1|0\rangle) |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |0\rangle (|1\rangle \langle 1|1\rangle) |1\rangle + \frac{i}{2} |1\rangle (|1\rangle \langle 1|1\rangle) |1\rangle)$$

$$= \langle\psi| (\frac{1}{\sqrt{10}} |011\rangle + \frac{i}{2} |111\rangle) = ((\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}}) \langle 000| + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 001| + \frac{1}{\sqrt{10}} \langle 011| + \frac{i}{2} \langle 111|)(\frac{1}{\sqrt{10}} |011\rangle + \frac{i}{2} |111\rangle)$$

$$= |\frac{1}{\sqrt{10}}|^2 + |\frac{i}{2}|^2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$$

Η κατάσταση μετά την μέτρηση υπολογίζεται ώς εξής:

$$|\psi\rangle = \frac{P|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P|\psi\rangle}} = \sqrt{\frac{20}{7}}(\frac{1}{\sqrt{10}} |011\rangle + \frac{i}{2} |111\rangle) = \sqrt{\frac{2}{7}} |011\rangle + \sqrt{\frac{5}{7}} i |111\rangle)$$

Η κατάσταση που προέκυψε είναι κανονικοποιημένη καθώς

$$|\sqrt{\frac{2}{7}}|^2 + |\sqrt{\frac{5}{7}} i|^2 = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = 1$$

Άσκηση 6.7

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |01\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |10\rangle$$

Ελεγχουμε αρχικά αν το σύστημα είναι κανονικοποιημένο υπολογίζοντας την ποσότητα

$$\sum_{i=1}^{3} |c_i|^2 = (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\sqrt{\frac{5}{6}})^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$$

Αρα είναι κανονικοποιημένη

Έπειτα εφαρμόζουμε τον τελεστή $P = I \otimes X$ στην $|\phi\rangle$ ωστε η πύλη X να δράσει μόνο στο δεύτερο qubit και έχουμε:

$$P|\phi\rangle = I \otimes X(\frac{1}{\sqrt{6}} |01\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}} |0\rangle X |1\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |1\rangle X |0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} |00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |11\rangle$$

Παρατηρούμε οτι στην νέα κατάσταση τα μόνα πιθανά αποτελέσματα μέτρησης είναι τα 00 και 11. Για κάθε ένα απο αυτά η πιθανότητα μέτρησης είναι:

$$Pr(00) = |\langle 00| P |\phi\rangle|^2 = |\langle 00| (\frac{1}{\sqrt{6}} |00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |11\rangle)|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \langle 00|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} \langle 00|11\rangle |^2 = \frac{1}{6}$$

$$Pr(11) = |\langle 11| P |\phi\rangle|^2 = |\langle 11| (\frac{1}{\sqrt{6}} |00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |11\rangle)|^2 = |\frac{1}{\sqrt{6}} \langle 11|00\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} \langle 11|11\rangle |^2 = \frac{5}{6}$$

Άσκηση 7.1

Έστω οτι τα $|+_n\rangle, |-_n\rangle$ είναι όντως τα ιδιοδιανύσαματα του $\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$. Τότε θα ισχύει

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{n} = |+_n\rangle\langle +_n| - |-_n\rangle\langle -_n| = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 2e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Γνωρίζουμε οτι

$$\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\theta$$
$$2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} = \sin\theta$$

Αρα

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\phi\sin\theta - i\sin\phi\sin\theta \\ \cos\phi\sin\theta + i\sin\phi\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \cos\phi\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\phi\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -i \\ \\ i & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\cos\theta Z + \cos\phi\sin\theta X + \sin\theta\sin\theta Y$$

Άσκηση 7.2

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}}$$

Τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή Y είναι τα

$$|\pm_y\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

Θέλουμε να βρούμε το $|0\rangle$ και $|1\rangle$ συναρτήσει τών ιδιοδιανύσματων $|\pm_y\rangle$

$$|+_y\rangle + |-_y\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle + |0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{2|0\rangle}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |0\rangle = \frac{|+_y\rangle + |-_y\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|+_y\rangle - |-_y\rangle = \frac{|0\rangle + i|1\rangle - |0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{2i|1\rangle}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |1\rangle = \frac{-i|+_y\rangle + i|-_y\rangle}{\sqrt{2}}$$

Ξαναγράφουμε την κατάσταση $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{|+_y\rangle+|-_y\rangle}{\sqrt{2}}\frac{-i|+_y\rangle+i|-_y\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{-i|+_y\rangle+i|-_y\rangle}{\sqrt{2}}\frac{|+_y\rangle+|-_y\rangle}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(|+_y\rangle + |-_y\rangle)(-i|+_y\rangle + i|-_y\rangle) - (-i|+_y\rangle + i|-_y\rangle)(|+_y\rangle + |-_y\rangle)}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{-i|+_y+_y\rangle + i|+_y-_y\rangle - i|-_y+_y\rangle + i|-_y-_y\rangle + i|+_y+_y\rangle + i|+_y-_y\rangle - i|-_y+_y\rangle + -i|-_y-_y\rangle}{2\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2i|+_y-_y\rangle - 2i|-_y+_y\rangle}{2\sqrt{2}} = \frac{i|+_y-_y\rangle - i|-_y+_y\rangle}{\sqrt{2}}$$

Η οποία στην ουσία είνιαι η ίδια κατάσταση αφου αν μετρήσουμε την κατάσταση του πρώτου qubit να είναι $|+_y\rangle$ τότε αναγκαστικά η κατάσταση του δεύτερου θα είναι $|-_y\rangle$ ενώ αν μετρήσουμε την κατάσταση του πρώτου να είναι $|-_y\rangle$ τότε αναγκαστικά η κατάσταση του δεύτερου θα είναι

$|+_y\rangle$. Ίδια ακριβώς συμπεριφορά (δηλαδή το ένα να είναι το ανάποδο του άλλου) παρατηρείται και αν κάνουμε την μέτρηση στο άξονα Z

Άσκηση 7.3

Γνωρίζουμε οτι η δράση του τελεστή Z είναι $Z\,|0\rangle = |0\rangle$ και $Z\,|1\rangle = |1\rangle$. Αρα

$$Z \otimes Z\,|\beta_{00}\rangle = Z \otimes Z\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{Z\,|0\rangle \otimes Z\,|0\rangle + Z\,|1\rangle \otimes Z\,|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Επίσης

$$(-1)^y\,|\beta_{xy}\rangle\Big|_{x=0,y=0} = |\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

Αρα βλέπουμε οτι πράγματι $Z \otimes Z\,|\beta_{xy}\rangle = (-1)^y\,|\beta_{xy}\rangle$ για $x = 0, y = 0$

Αντιστοιχα

$$Z \otimes Z\,|\beta_{01}\rangle = Z \otimes Z\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{Z\,|0\rangle \otimes Z\,|1\rangle + Z\,|1\rangle \otimes Z\,|0\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Επίσης

$$(-1)^y\,|\beta_{xy}\rangle\Big|_{x=0,y=1} = -\,|\beta_{01}\rangle = -\frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

Αρα βλέπουμε οτι πράγματι $Z \otimes Z\,|\beta_{xy}\rangle = (-1)^y\,|\beta_{xy}\rangle$ για $x = 0, y = 0$

Άσκηση 7.4

Γνωρίζουμε οτι η δράση του τελεστή X είναι $X\,|y\rangle = |\overline{y}\rangle$. Αρα

$$X{\otimes}X\,|\beta_{xy}\rangle = X{\otimes}X\frac{|0y\rangle + (-1)^x\,|1\overline{y}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{X\,|0\rangle \otimes X\,|y\rangle + (-1)^x X\,|1\rangle \otimes X\,|\overline{y}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|1\overline{y}\rangle + (-1)^x\,|0y\rangle}{\sqrt{2}}$$

βγάζοντας το $(-1)^x$ κοινό παράγοντα έχουμε:

$$X \otimes X\,|\beta_{xy}\rangle = (-1)^x\frac{(-1)^{-x}\,|1\overline{y}\rangle + |0y\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^x\frac{(\frac{1}{-1})^x\,|1\overline{y}\rangle + |0y\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= (-1)^x \frac{(-1)^x |1\overline{y}\rangle + |0y\rangle}{\sqrt{2}} = (-1)^x |\beta_{xy}\rangle$$

Άσκηση 7.5

Γνωρίζουμε οτι η δράση του τελεστή Y είναι $Y|x\rangle = (-1)^x i |\overline{x}\rangle$. Αρα

$$Y \otimes Y |\beta_{xy}\rangle = Y \otimes Y \frac{|0y\rangle + (-1)^x |1\overline{y}\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{Y|0\rangle \otimes Y|y\rangle + (-1)^x Y|1\rangle \otimes Y|\overline{y}\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{i|1\rangle (-1)^y i |\overline{y}\rangle + (-i)|0\rangle (-1)^x (-1)^{\overline{y}} i |y\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{-(-1)^y |1\overline{y}\rangle + (-1)^x (-1)^{\overline{y}} |0y\rangle}{\sqrt{2}}$$

Παρατηρούμε οτι $(-1)^{\overline{y}} = -(-1)^y$ Αρα

$$Y \otimes Y |\beta_{xy}\rangle = \frac{-(-1)^y |1\overline{y}\rangle - (-1)^x (-1)^y |0y\rangle}{\sqrt{2}} = -(-1)^y \frac{|1\overline{y}\rangle + (-1)^x |0y\rangle}{\sqrt{2}} =$$

$$= -(-1)^y (-1)^x \frac{(-1)^{-x} |1\overline{y}\rangle + |0y\rangle}{\sqrt{2}} = -(-1)^{y+x} \frac{(-1)^x |1\overline{y}\rangle + |0y\rangle}{\sqrt{2}} = -(-1)^{y+x} |\beta_{xy}\rangle$$

Άσκηση 7.6

Αρχικά παρατηρούμε οτι

$$XZ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$ZX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -XZ \quad (1)$$

Γνωρίζοντας αυτό μπορούμε να γράψουμε οτι:

$$[X \otimes X, Z \otimes Z] = (X \otimes X)(Z \otimes Z) - (Z \otimes Z)(X \otimes X) = XZ \otimes XZ - ZX \otimes ZX \overset{(1)}{\iff}$$

$$[X \otimes X, Z \otimes Z] = XZ \otimes XZ - (-XZ) \otimes (-XZ) = XZ \otimes XZ - XZ \otimes XZ = 0$$

Άσκηση 7.7

- $$\vec{\sigma_A} \cdot \vec{\sigma_A} \left|\phi_1\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|\phi_1\right\rangle$$

- $$\vec{\sigma_A} \cdot \vec{\sigma_A} \left|\phi_2\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left|\phi_2\right\rangle$$

- $$\vec{\sigma_A} \cdot \vec{\sigma_A} \left|\phi_3\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left|\phi_3\right\rangle$$

- $$\vec{\sigma_A} \cdot \vec{\sigma_A} \left|\phi_4\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3\left|\phi_4\right\rangle$$

Άσκηση 8.3

$$X^{11} = \left|0\right\rangle \left\langle 0\right|, \quad X^{12} = \left|0\right\rangle \left\langle 1\right|$$

$$X^{21} = \left|1\right\rangle \left\langle 0\right|, \quad X^{22} = \left|1\right\rangle \left\langle 1\right|$$

- Για τον πίνακα X:

$$X = \left|0\right\rangle \left\langle 1\right| + \left|1\right\rangle \left\langle 0\right| = X^{12} + X^{21}$$

- Για τον πίνακα Y:

$$Y = -i\left|0\right\rangle \left\langle 1\right| + i\left|1\right\rangle \left\langle 0\right| = -iX^{12} + iX^{21}$$

- Για τον πίνακα Z:

$$Z = \left|0\right\rangle \left\langle 0\right| - \left|1\right\rangle \left\langle 1\right| = X^{11} - X^{22}$$

Άσκηση 8.4

Γνωρίζουμε οτι

$$CN \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αρχικά δείχνουμε οτι είναι ερμιτιανός

$$CN^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = CN$$

Έπειτα για να δείξουμε οτι είναι unitary λέμε:

$$CN^{\dagger}CN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Άσκηση 8.5

Αρχικά για $|b\rangle = |0\rangle$ έχουμε $|ab\rangle = |10\rangle$ άρα η κατάσταση που θα προκύψει είναι η:

$$|\psi\rangle = CN \cdot H \otimes I \,|10\rangle = CN\,|{-0}\rangle = CN\frac{|00\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{CN\,|00\rangle - CN\,|10\rangle}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{10}\rangle$$

Για $|b\rangle = |1\rangle$ έχουμε $|ab\rangle = |11\rangle$ άρα η κατάσταση που θα προκύψει είναι η:

$$|\psi\rangle = CN \cdot H \otimes I \,|11\rangle = CN\,|{-1}\rangle = CN\frac{|01\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{CN\,|01\rangle - CN\,|11\rangle}{\sqrt{2}} =$$
$$= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} = |\beta_{11}\rangle$$

Άσκηση 8.6

Γνωρίζοντας οτι η δράση της πύλης Z είναι $Z\,|0\rangle = |0\rangle$ και $Z\,|1\rangle = -\,|1\rangle$ Η απεικόνιση σε πίνακα της πύλης Z είναι

$$Z = \begin{pmatrix} \langle 0|\, Z\,|0\rangle & \langle 0|\, Z\,|1\rangle \\ \langle 1|\, Z\,|0\rangle & \langle 1|\, Z\,|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ενώ η απεικόνιση σε συμβολισμό Dirac

$$Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$$

Άσκηση 8.7

- Για τον πίνακα X

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Για τον πίνακα Y

$$Y^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Για τον πίνακα Z

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Για τον πίνακα T

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix}$$

- Για τον πίνακα S

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 8.10

Γνωρίζοντας οτι

$$P_0 |0\rangle = |0\rangle \langle 0| |0\rangle = |0\rangle$$

$$P_0 |1\rangle = |0\rangle \langle 0| |1\rangle = 0$$

$$P_1 |1\rangle = |1\rangle \langle 1| |1\rangle = |0\rangle$$

$$P_1 |0\rangle = |1\rangle \langle 1| |0\rangle = 0$$

Θα μελετήσουεμ την δράση του τελεστή $P_0 \otimes I + P_1 \otimes X$ εφαρμόζοντας τον σε κάθε μια απο τις δυνατές καταστάσεις των δύο qubit

- $$(P_0 \otimes I + P_1 \otimes X) |00\rangle = P_0 |0\rangle \otimes I |0\rangle + P_1 |0\rangle \otimes X |0\rangle = |00\rangle$$

- $$(P_0 \otimes I + P_1 \otimes X) |01\rangle = P_0 |0\rangle \otimes I |1\rangle + P_1 |0\rangle \otimes X |1\rangle = |01\rangle$$

- $$(P_0 \otimes I + P_1 \otimes X) |10\rangle = P_0 |1\rangle \otimes I |0\rangle + P_1 |1\rangle \otimes X |0\rangle = |11\rangle$$

- $$(P_0 \otimes I + P_1 \otimes X) |11\rangle = P_0 |1\rangle \otimes I |1\rangle + P_1 |1\rangle \otimes X |1\rangle = |10\rangle$$

Παρατηρούμε λοιπόν οτι η συμπεριφορά είναι ίδια με την συμπεριφορά της πύλης CN άρα $CN = P_0 \otimes I + P_1 \otimes X$

Άσκηση 8.11

Παρατηρούμε οτι το πρώτο κύκλωμα είναι μια πύλη control NOT με το πρώτο qubit να είναι το target και το δεύτερο να είναι tocontrol Συνεπώς ο τελεστής που το αντιπροσωπεύει είναι ο :

$$I \otimes P_0 + X \otimes P_1 = \begin{pmatrix} 1P_0 & 0P_0 \\ 0P_0 & 1P_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0P_1 & 1P_1 \\ 1P_1 & 0P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ενώ για το δεύτερο κύκλωμα ο τελεστής είναι :

$$(H\otimes H)(P_0\otimes I+P_1\otimes X)(H\otimes H)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&4\\0&0&4&0\\0&4&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=I\otimes P_0+X\otimes P_1$$

Άρα τα δύο κυκλώματα είναι όντως ισοδύναμα

Άσκηση 9.1

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1H & 1H \\ 1H & -1H \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(H \otimes H)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον

$$|\phi\rangle = \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς $(H \otimes H)(|0\rangle \otimes |1\rangle) = |\phi\rangle$

Άσκηση 9.4

Για την σχέση (9.17) $\quad |0, 1 \oplus f(0)\rangle = f(0)\,|00\rangle + (1 - f(0))\,|01\rangle$

- Για $f(0) = 0 \quad \longrightarrow |0, 1 \oplus 0\rangle = 0 \cdot |00\rangle + (1 - 0)\,|01\rangle \Leftrightarrow |01\rangle = |01\rangle$ *Ισχύει*
- Για $f(0) = 1 \quad \longrightarrow |0, 1 \oplus 1\rangle = 1 \cdot |00\rangle + (1 - 1)\,|01\rangle \Leftrightarrow |00\rangle = |00\rangle$ *Ισχύει*

Για την σχέση (9.18) $\quad |1, 0 \oplus f(1)\rangle = (1 - f(1))\,|10\rangle + f(1)\,|11\rangle$

- Για $f(1) = 0 \quad \longrightarrow |1, 0 \oplus 0\rangle = (1 - 0)\,|10\rangle + 0 \cdot |11\rangle \Leftrightarrow |10\rangle = |10\rangle$ *Ισχύει*
- Για $f(1) = 1 \quad \longrightarrow |1, 0 \oplus 1\rangle = (1 - 1)\,|10\rangle + 1 \cdot |11\rangle \Leftrightarrow |11\rangle = |11\rangle$ *Ισχύει*

Για την σχέση (9.19) $\quad |1, 1 \oplus f(1)\rangle = f(1)\,|10\rangle + (1 - f(1))\,|11\rangle$

- Για $f(1) = 0 \quad \longrightarrow |1, 1 \oplus 0\rangle = 0 \cdot |10\rangle + (1 - 0)\,|11\rangle \Leftrightarrow |11\rangle = |11\rangle$ *Ισχύει*
- Για $f(1) = 1 \quad \longrightarrow |1, 1 \oplus 1\rangle = 1 \cdot |10\rangle + (1 - 1)\,|11\rangle \Leftrightarrow |10\rangle = |10\rangle$ *Ισχύει*

Άσκηση 9.5

Έστω οτι συμβολίζουμε με A τον αθροιστή μα ςκαι έστω οτι την πύλη $|z\rangle$ την έχουμε μόνιμα σε κατάσταση $|0\rangle$.
Τότε τπ αποτέλεσμα που θέλουμε να πετύχουμε είναι το παρακάτω:

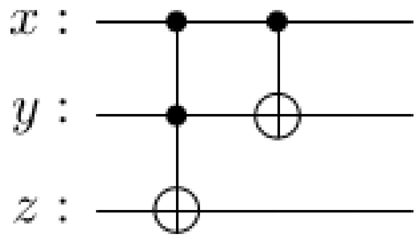
$$A\,|000\rangle = |000\rangle$$

$$A\,|010\rangle = |010\rangle$$

$$A\,|100\rangle = |110\rangle$$

$$A\,|110\rangle = |101\rangle$$

Το αποτέλεσμα αυτο επιτυγχάνεται με το παρακάτω κύκλωμα



Η έξοδος $|x \oplus y\rangle$ υλοποιείται με μία απλή control NOT με το x να είναι το control και το y το target, ενώ η έξοδος $|x \cdot y\rangle$ υλοποιείται με μία διπλή control NOT (Toffoli) με control τα x και y

---

Μέρος 2ο

Άσκηση 1

Ερώτημα 1

$$\det|X - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

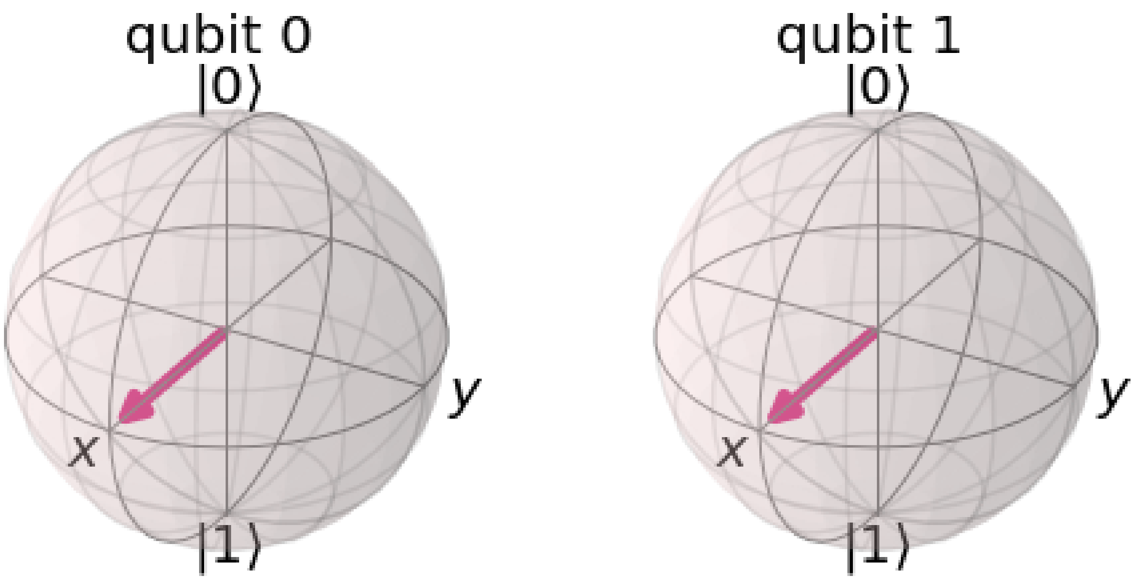
Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$X|v\rangle = \lambda |v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = v_2$ άρα $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ 1\ )^T = |+\rangle$
Για $\lambda = -1$ τότε $v_1 = -v_2$ άρα $|v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\ 1\ ,\ -1\ )^T = |-\rangle$

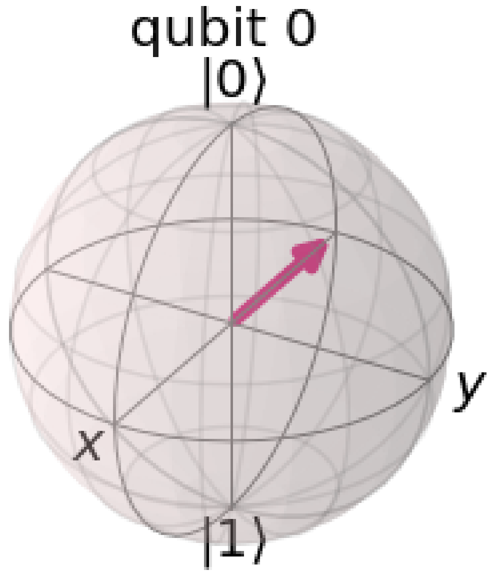
Ερώτημα 2

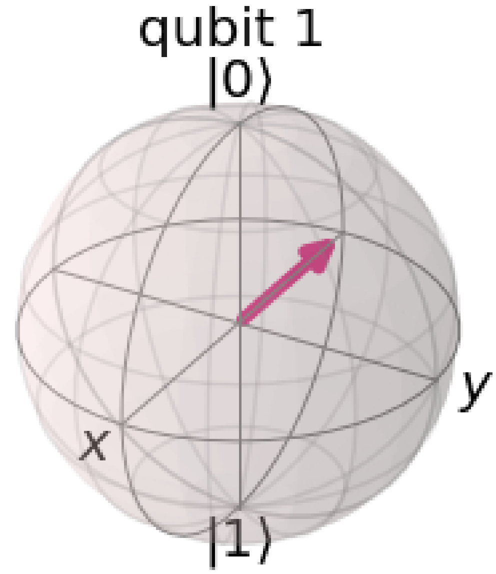
Στο πρώτο κύκλωμα το αποτέλεσμα είναι το παρακάτω



Παρατηρούμε οτι δεν υπάρχει phase kickback καθώς στη πρώτη είσοδο βάλαμε $|0\rangle$ και μετα την εφαρμογή της Hadamard πήραμε το $|+\rangle$ όπως αναμενόταν

Στο δεύτερο κύκλωμα το αποτέλεσμα είναι





Παρατηρούμε οτι υπάρχει phase kickback καθώς στη πρώτη είσοδο βάλαμε $|0\rangle$ και μετα την εφαρμογή της Hadamard πήραμε το $|-\rangle$, και ο λόγος είναι οτι αντίστρέψαμε την δεύτερη είσοδο (την κάναμε $|1\rangle$) πρίν εφαρμόσουμε την Hadamard

---

Άσκηση 2

Για το πρώτο κύκλωμα

$$(X \cdot T \cdot T \cdot Z \cdot S \cdot H \cdot Z \cdot H) \otimes (\cdot Z \cdot Y \cdot X) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

Προσομοιώνοντας το κύκλωμα στο qiskit το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο

$$\text{Circuit} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

Για το δεύτερο κύκλωμα

$$R_Y(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Για την control $R_Y(\frac{\pi}{2})$ (με αντιστραμμένο target και control) κάνουμε

$$I \otimes P_0 + R_Y(\frac{\pi}{2}) \otimes P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Για την control H (με αντιστραμμένο target και control)κάνουμε

$$I \otimes P_0 + H \otimes P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Για την control X κάνουμε

$$P_0 \otimes I + P_1 \otimes X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Αρα για το συνολικό κύκλωμα έχουμε

$$CR_Y(\frac{\pi}{2}) \cdot CH \cdot (I \otimes H) \cdot CX \cdot (I \otimes H) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

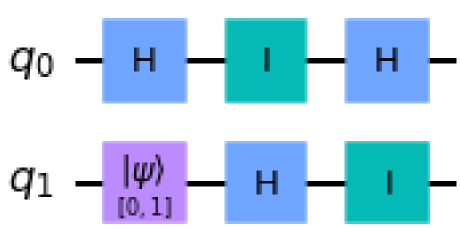
$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Προσομοιώνοντας το κύκλωμα στο qiskit το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο

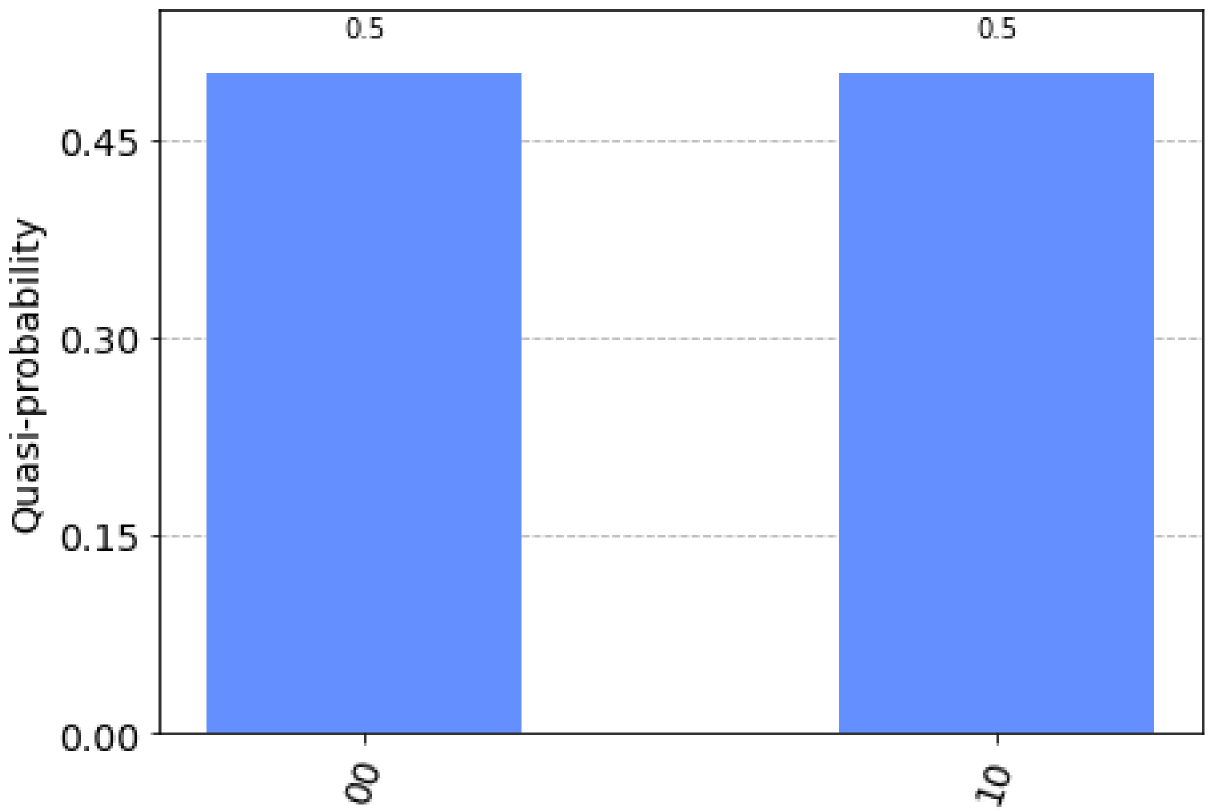
$$\text{Circuit} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Για την constant συνάρτηση έχουμε επιλέξει το oracle $I \otimes I$ όπως φαίνεται παρακάτω

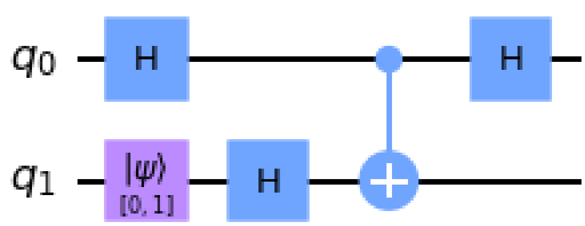


το αποτέλεσμα είναι

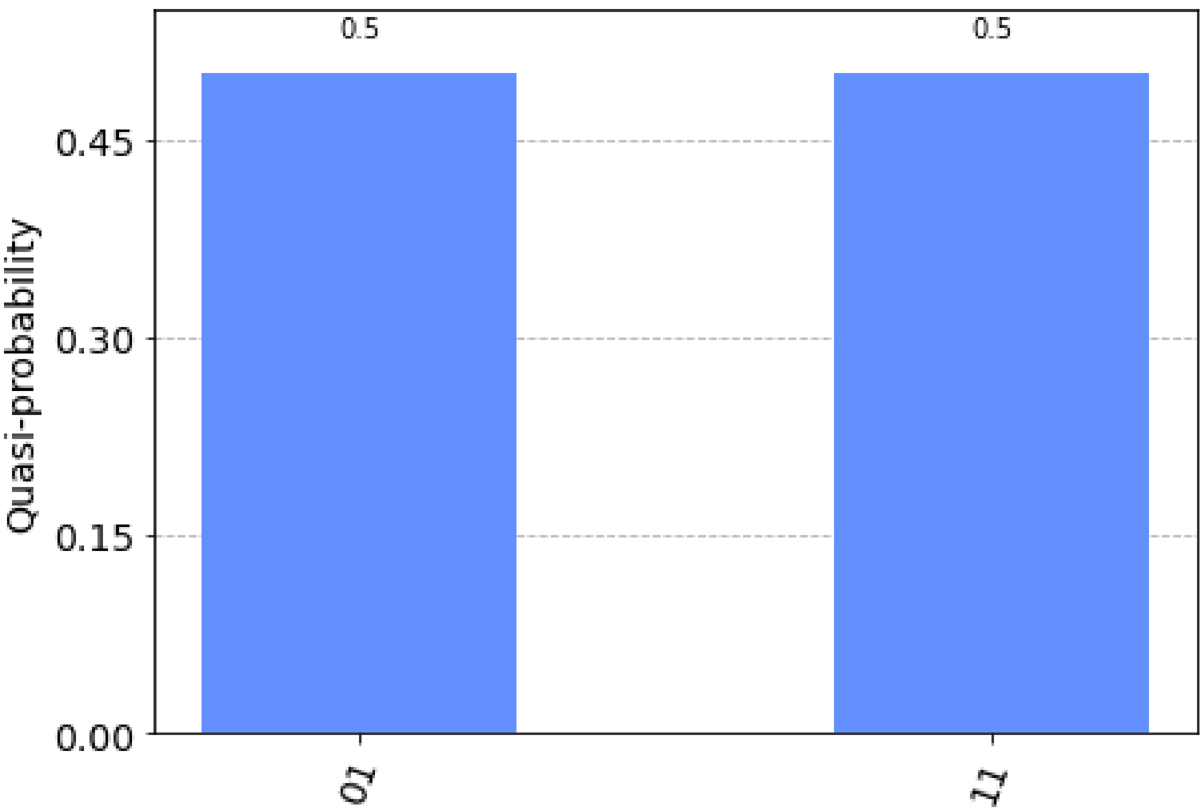


Η κατάσταση που λάβαμε είναι η $\frac{|00\rangle+|01\rangle}{\sqrt{2}}$ δηλαδή άμα μετρήσουμε το πρωτο bit θα είναι σίγουρα $|0\rangle$

Για την balanced συνάρτηση έχουμε επιλέξει το oracle $CNOT$ όπως φαίνεται παρακάτω



το αποτέλεσμα είναι



Η κατάσταση που λάβαμε είναι η $\frac{|10\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ δηλαδή άμα μετρήσουμε το πρωτο bit θα είναι σίγουρα $|1\rangle$
