ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΚΒΑΝΤΙΚΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ

1ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Μέρος 1ο

Απο βιβλίο McMahon

Άσκηση 2.1

Έστω $|\psi\rangle = \frac{(1-i)}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle$

Τότε η πιθανότητα το σύστημα να βρίσκεται στην κατάσταση $|0\rangle$ θα είναι

$$Pr_{|0\rangle} = |\langle 0|\psi\rangle|^2 = |\frac{(1-i)}{\sqrt{3}}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0|1\rangle|^2 = |\frac{(1-i)}{\sqrt{3}}|^2 = \frac{2}{3}$$

Ομοίως για να μετρήσουμε την κατάσταση $|1\rangle$:

$$Pr_{|1\rangle} = |\langle 1|\psi\rangle|^2 = |\frac{(1-i)}{\sqrt{3}}\langle 1|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1|1\rangle|^2 = |\frac{(1)}{\sqrt{3}}|^2 = \frac{1}{3}$$

Άσκηση 2.2

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} -4i \\ \\ 2 \end{pmatrix} \text{ και } |b\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1+i \end{pmatrix}$$

(A)

$$|a+b\rangle = |a\rangle + |b\rangle = \begin{pmatrix} -4i \\ \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4i+1 \\ \\ 1+i \end{pmatrix}$$

(B)

$$3\,|a\rangle - 2\,|b\rangle = 3\begin{pmatrix} -4i \\ \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12i \\ \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \\ -2+2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12i-2 \\ \\ 8+2i \end{pmatrix}$$

(C)

$$\langle a|a\rangle = (\ 4i \quad 2\ )\begin{pmatrix} -4i \\ \\ 2 \end{pmatrix} = -16i^2 + 4 = 20$$

Αρα το κανονικοποιημένο $|a\rangle$ θα είναι

$$|a\rangle_{norm} = \frac{1}{\sqrt{\langle a|a\rangle}}\,|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix} -4i \\ \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2i}{\sqrt{5}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα για το $|b\rangle$ έχουμε:

$$\langle b|b\rangle = (\ 1 \quad -1-i\ )\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1+i \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$|b\rangle_{norm} = \frac{1}{\sqrt{\langle b|b\rangle}}\,|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1+i \end{pmatrix}$$

Άσκηση 2.3

$|+\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ και $|-\rangle = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$

Για να εκφράσουμε το $|0\rangle$ συναρτήσει των $|+\rangle, |-\rangle$ εργαζόμαστε ώ εξής:

$$|+\rangle + |-\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,|0\rangle \Leftrightarrow |0\rangle = \frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Αντίστοιχα για το $|1\rangle$

$$|+\rangle - |-\rangle = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{-|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,|1\rangle \Leftrightarrow |1\rangle = \frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}}$$

Άσκηση 2.4

(A)

$$|\psi\rangle = \frac{3i\,|0\rangle + 4\,|1\rangle}{5}$$

Για να είναι το $|\psi\rangle$ κανονικοποιημένο πρέπει να ισχύει $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

Χρησιμοποιώντας οτι $\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1$ και $\langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{(-3i\,\langle 0| + 4\,\langle 1|)}{5}\frac{(3i\,|0\rangle + 4\,|1\rangle)}{5} = \frac{-9i^2\,\langle 0|0\rangle - 12i\,\langle 0|1\rangle + 12i\,\langle 1|0\rangle + 16\,\langle 1|1\rangle}{25} =$$

$$= \frac{-9(-1)+16}{25} = 1$$

Άρα το $|\psi\rangle$ είναι κανονικοποιημένο.

(B) Χρησιμοποιώντας τις δύο σχέσεις που αποδείχθηκαν στην προηγούμενη άσκηση για τα $|0\rangle$ και $|1\rangle$ έχουμε:

$$|\psi\rangle = \frac{3i\,|0\rangle + 4\,|1\rangle}{5} = \frac{3i(\frac{|+\rangle+|-\rangle}{\sqrt{2}}) + 4(\frac{|+\rangle-|-\rangle}{\sqrt{2}})}{5} = \frac{(3i+4)\,|+\rangle + (3i-4)\,|-\rangle}{5\sqrt{2}}$$

Άσκηση 2.6

Θεωρούμε οτι $\langle h|h\rangle = \langle v|v\rangle = 1$ και $\langle h|v\rangle = \langle v|h\rangle = 0$

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\,|h\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,|v\rangle \;,\; |\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\,|h\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|v\rangle \;,\; |\psi_3\rangle = |h\rangle$$

(A)

$$|\,\langle\psi_1|\psi_2\rangle\,|^2 = |(\frac{1}{2}\,\langle h| + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\langle v|)(\frac{1}{2}\,|h\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\,|v\rangle)|^2 = |\frac{1}{4}\,\langle h|h\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4}\,\langle h|v\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\langle v|h\rangle - \frac{3}{4}\,\langle v|v\rangle\,|^2 =$$

$$= |\frac{1}{4} - \frac{3}{4}|^2 = \frac{1}{4}$$

(B)

$$|\,\langle\psi_1|\psi_3\rangle\,|^2 = |(\frac{1}{2}\,\langle h| + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\langle v|)\,|h\rangle\,|^2 = |\frac{1}{2}\,\langle h|h\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\langle v|h\rangle\,|^2 = |\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

(C)

$$|\langle\psi_2|\psi_3\rangle|^2 = |(\frac{1}{2}\langle h| - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle v|)|h\rangle|^2 = |\frac{1}{2}\langle h|h\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}\langle v|h\rangle|^2 = |\frac{1}{2}|^2 = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 3.1

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

Για τον πίνακα X έχουμε:

$$X|\psi\rangle = (|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)(a|0\rangle + b|1\rangle) = a|0\rangle\langle 1|0\rangle + b|0\rangle\langle 1|1\rangle + a|1\rangle\langle 0|0\rangle + b|1\rangle\langle 0|1\rangle =$$

$$= b|0\rangle + a|1\rangle$$

Παρατηρούμε οτι το $|0\rangle$ έγινε $|1\rangle$ και το $|1\rangle$ έγινε $|0\rangle$, άρα πράγματι , πρόκειται για την αναπαράσταση εξωτερικού γινομένου της πύλης X

Για τον πίνακα Y έχουμε:

$$Y|\psi\rangle = (-i|0\rangle\langle 1| + i|1\rangle\langle 0|)(a|0\rangle + b|1\rangle) = -ai|0\rangle\langle 1|0\rangle - ib|0\rangle\langle 1|1\rangle + ai|1\rangle\langle 0|0\rangle + i|1\rangle\langle 0|1\rangle =$$

$$= -bi|0\rangle + ai|1\rangle$$

Παρατηρούμε οτι το $|0\rangle$ έγινε $i|1\rangle$ και το $|1\rangle$ έγινε $-i|0\rangle$, άρα πράγματι , πρόκειται για την αναπαράσταση εξωτερικού γινομένου της πύλης Y

Άσκηση 3.2

Χρησιμοποιώντας οτι $X|0\rangle = |1\rangle$ και $X|1\rangle = |0\rangle$

$$X = \begin{pmatrix} \langle 0|X|0\rangle & \langle 0|X|1\rangle \\ \langle 1|X|0\rangle & \langle 1|X|1\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle 0|1\rangle & \langle 0|0\rangle \\ \langle 1|1\rangle & \langle 1|0\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3.3

Αρχικά υπολογίζουμε τα $X\left|+\right\rangle$ και $X\left|-\right\rangle$

$$X\left|+\right\rangle = \frac{X\left|0\right\rangle + X\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\left|1\right\rangle + \left|0\right\rangle}{\sqrt{2}} = \left|+\right\rangle$$

$$X\left|-\right\rangle = \frac{X\left|0\right\rangle - X\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{\left|1\right\rangle - \left|0\right\rangle}{\sqrt{2}} = -\left|-\right\rangle$$

Άρα

$$X = \begin{pmatrix} \langle +|X|+\rangle & \langle +|X|-\rangle \\ \langle -|X|+\rangle & \langle -|X|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle +|+\rangle & -\langle +|-\rangle \\ \langle -|+\rangle & -\langle -|-\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3.4

$$\hat{A} = i\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|1\right\rangle\left\langle 2\right| + 2\left|2\right\rangle\left\langle 1\right| - \left|2\right\rangle\left\langle 3\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \hat{A}^\dagger = (i\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|)^\dagger + (\frac{\sqrt{3}}{2}\left|1\right\rangle\left\langle 2\right|)^\dagger + (2\left|2\right\rangle\left\langle 1\right|)^\dagger - (\left|2\right\rangle\left\langle 3\right|)^\dagger = -i\left|1\right\rangle\left\langle 1\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}\left|2\right\rangle\left\langle 1\right| + 2\left|1\right\rangle\left\langle 2\right| - \left|3\right\rangle\left\langle 2\right|$$

Άσκηση 3.5

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών $det|X - \lambda I|$

$$\det|X - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$X|v\rangle = \lambda|v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = v_2 = a$ άρα $|v_1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$

Για $\lambda = -1$ τότε $v_1 = -v_2 = a$ άρα $|v_2\rangle = \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$

Άσκηση 3.6

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα $Tr(Y) = 0 + 0 = 0$

Μέρος 2ο

Άσκηση 1

Για τον πίνακα I

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών $det|I - \lambda I|$

$$\det|I - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0$$

Άρα η ιδιοτιμή είναι οη $\lambda = 1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$X|v\rangle = \lambda|v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις άρα ιδιοδιανύσαματα είναι όλα τα διανύσαμτα

Για τον πίνακα X

$$\det|X-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$X|v\rangle = \lambda|v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_2 \\ \\ v_1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = v_2 = a$ άρα $|v_1\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$

Για $\lambda = -1$ τότε $v_1 = -v_2 = a$ άρα $|v_2\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$

Για τον πίνακα Y

$$\det|Y-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$Y|v\rangle = \lambda|v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -iv_2 \\ iv_1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = -iv_2 = a$ άρα $|v_1\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Για $\lambda = -1$ τότε $v_1 = iv_2 = a$ άρα $|v_2\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Για τον πίνακα Z

$$\det|Z-\lambda I| = 0 \Leftrightarrow \det\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda^2) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$Z|v\rangle = \lambda|v\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = a$ και $v_2 = 0$ άρα $|v_1\rangle = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Για $\lambda = -1$ τότε $v_2 = a$ και $v_1 = 0$ άρα $|v_2\rangle = a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Άσκηση 2

Έστω

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\det|A-\lambda I|=0\Leftrightarrow \det\left|\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}\right|=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&0\\0&-\lambda&1&0\\0&1&-\lambda&0\\0&0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&1&0\\1&-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(-\lambda\begin{vmatrix}-\lambda&0\\0&1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&0\\1&1-\lambda\end{vmatrix})=(1-\lambda)(\lambda^2(1-\lambda)-(1-\lambda))=(1-\lambda)^2(\lambda^2-1)=$$

$$= -(1-\lambda)^3(1+\lambda) = 0$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε: Εστω $|v\rangle = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$

$$A\,|v\rangle = \lambda\,|v\rangle \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_3 \\ v_2 \\ v_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

Για $\lambda = 1$ τότε $v_1 = a$ και $v_4 = d$ και $v_2 = v_3 = b$ άρα $|v_1\rangle = [\ a\ ,\ b\ ,\ b\ ,\ d\ ]^T$

Για $\lambda = -1$ τότε $v_1 = 0$ και $v_4 = 0$ και $v_2 = -v_3 = b$ άρα $|v_2\rangle = [\ 0\ ,\ b\ ,\ -b\ ,\ 0\ ]^T$

Άσκηση 3

$v = [\,1\,,\ 0\,]^T$ και $w = [\,0\,,\ 1\,]^T$

(a)

$$v^\dagger v = [\,1\ \ 0\,] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

(b)

$$v^\dagger w = [\,1\ \ 0\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

(c)

$$vv^\dagger = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [\,1\ \ 0\,] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)

$$v^\dagger X w = [\,1\ \ 0\,] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\,0\ \ 1\,] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1$$

Άσκηση 4

(a)

$$Mv = \lambda v \Rightarrow v^\dagger M v = v\lambda v^\dagger v \Leftrightarrow v^\dagger M v = \lambda \langle v|v \rangle \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{v^\dagger M v}{\langle v|v \rangle}$$

$$\lambda^* = (\frac{v^\dagger M v}{\langle v|v\rangle})^\dagger = \frac{v^\dagger M^\dagger v}{\langle v|v\rangle} = \frac{v^\dagger M v}{\langle v|v\rangle} = \lambda$$

Άρα το λ είναι πραγματικός

(b)

Έστω $v^\dagger M v = c$ οπου $c \in \mathbb{C}$

Τότε

$$c^* = (v^\dagger M v)^\dagger = v^\dagger M^\dagger v = v^\dagger M v = c$$

Άρα το c είνια πραγματικός.

Άσκηση 5

$$U = e^{iM} = \sum_k \frac{(iM)^K}{k!}$$

$$U^\dagger = (e^{iM})^\dagger = (\sum_k \frac{(iM)^k}{k!})^\dagger = \sum_k (\frac{(iM)^k}{k!})^\dagger = \sum_k \frac{(-iM^\dagger)^k}{k!} = \sum_k \frac{(i(-M))^k}{k!}$$

Αρα

$$UU^\dagger = \sum_k \frac{(iM)^k}{k!} \sum_k \frac{(i(-M)^k}{k!} = \sum_k \sum_m \frac{(iM)^m}{m!} \frac{(i(-M))^{k-m}}{(k-m)!} = \sum_k \sum_m \frac{i^k M^m (-M))^{k-m}}{m!(k-m)!} =$$

$$= \sum_k \frac{i^k}{k!} \sum_m \frac{k!}{m!(k-m)!} M^m (-M))^{k-m} = (*) \sum_k \frac{i^k}{k!} (M + (-M))^k = \sum_k \frac{i^k}{k!} \mathbf{0}^k$$

Όπου $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας.

Στο σημείο $(*)$ εκμεταλευτήκαμε το διωνυμικό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο $(A+B)^k = \sum_m \frac{k!}{m!(k-m)!} A^m B^{k-m}$

Στην σχέση που καταλήξαμε ισχύει οτι $\mathbf{0}^0 = \mathbf{I}$ ενώ $\mathbf{0}^k = \mathbf{0}$ για $k > 0$

Αρα $UU^\dagger = \frac{i^0}{0!}\mathbf{I} = \mathbf{I}$
