ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

2ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Άσκηση 1

Εφαρμόζοντας την σχέση (1.13) διαδοχικά για όλες τις ιδιοκαταστάσεις απο $|0\rangle$ μέχρι $|n\rangle$ έχουμε

$$|n\rangle = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{n}} |n-1\rangle$$

$$|n-1\rangle = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{n-1}} |n-2\rangle$$

$$\vdots$$

$$|1\rangle = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{1}} |0\rangle$$

πολλαπλασιάζοντας κατα μέλη παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{array}{l} |n\rangle = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{n}} \cancel{|n-1\rangle} \\ \\ \cancel{|n-1\rangle} = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{n-1}} \cancel{|n-2\rangle} \\ \\ \vdots \\ \\ \cancel{|1\rangle} = \frac{\alpha^\dagger}{\sqrt{1}} |0\rangle \end{array} \right\} \Rightarrow |n\rangle = \frac{\alpha^\dagger \cdot \alpha^\dagger \cdot \ldots \cdot \alpha^\dagger}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n-1} \cdot \ldots \cdot \sqrt{1}} |0\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |n\rangle = \frac{\left(\alpha^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle$$

Άσκηση 2

Για την μέση τιμή της θέσης

$$\langle x \rangle_t = \langle \psi(t)| \, x \, |\psi(t)\rangle$$

όπου $x = x_0(\alpha^\dagger + \alpha)$, $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ και

$$\psi(t) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\psi(0) = e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|2\rangle\right)$$

Για τη Χαμιλτονινή μπορούμε να γράψουμε

$$H = \left(\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|0\rangle\langle 0| + \left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|1\rangle\langle 1| + \ldots + \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|n\rangle\langle n| = \sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega|j\rangle\langle j|$$

Αρα

$$e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \sum_{j=0}^{n} e^{-\frac{i\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega\right)t}{\hbar}}|j\rangle\langle j| = \sum_{j=0}^{n} e^{-i\left(j+\frac{1}{2}\right)\omega t}|j\rangle\langle j|$$

Αρα

$$\begin{aligned}\psi(t) &= e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) = \sum_{j=0}^{n} e^{-i\left(j+\frac{1}{2}\right)\omega t}|j\rangle\langle j|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}x|\psi(t)\rangle &= x_0\left(\alpha^\dagger + \alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle\right) = \\ &= x_0\left(\cancelto{0}{\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\alpha|0\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\alpha^\dagger|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\alpha|2\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\alpha^\dagger|2\rangle\right) = \\ &= x_0\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\right)|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|3\rangle\right)\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}\langle x\rangle_t &= \langle\psi(t)|\,x\,|\psi(t)\rangle = \\ &= x_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{1}{2}\omega t}\langle 0| + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5}{2}\omega t}\langle 2|\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\right)|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|3\rangle\right) = 0\end{aligned}$$

Για την μέση τιμή της ορμής

$$\langle p\rangle_t = \langle\psi(t)|\, p\,|\psi(t)\rangle$$

όπου $p = p_0(\alpha^\dagger - \alpha)$ και $p_0 = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$
Συνεπώς

$$\begin{aligned}
p\,|\psi(t)\rangle &= p_0\left(\alpha^\dagger - \alpha\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|2\rangle\right) = \\
&= p_0\left(\cancelto{0}{-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\alpha\,|0\rangle} + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\alpha^\dagger|0\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\alpha\,|2\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\alpha^\dagger|2\rangle\right) = \\
&= p_0\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t} - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\right)|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|3\rangle\right)
\end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle_t &= \langle\psi(t)|\, p\,|\psi(t)\rangle = \\
&= p_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{i\frac{1}{2}\omega t}\langle 0| + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{i\frac{5}{2}\omega t}\langle 2|\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{1}{2}\omega t} + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\right)|1\rangle + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}|3\rangle\right) = 0
\end{aligned}$$

Για τις αβεβαιότητες έχουμε

$$\Delta X = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\langle x^2\rangle} =$$

$$\begin{aligned}
\langle x^2\rangle &= \langle\psi(t)|\, x^2\,|\psi(t)\rangle = x_0^2 e^{\frac{iHt}{\hbar}}\langle\psi(0)|\left(\alpha\alpha + \alpha^\dagger\alpha^\dagger + \alpha^\dagger\alpha + \alpha\alpha^\dagger\right)e^{-\frac{iHt}{\hbar}}|\psi(0)\rangle = \\
&= x_0^2\langle\psi(0)|\left(\alpha^\dagger\alpha + \alpha\alpha^\dagger\right)|\psi(0)\rangle = x_0^2\langle\psi(0)|\left(\cancelto{0}{\alpha^\dagger\alpha\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle} + \alpha\alpha^\dagger\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \alpha^\dagger\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle + \alpha\alpha^\dagger\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) \\
&= x_0^2\langle\psi(0)|\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle + 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) = x_0^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle 2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + 5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3}\right) = \frac{11\hbar}{6m\omega}
\end{aligned}$$

Αρα

$$\Delta X = \sqrt{\frac{11\hbar}{6m\omega}}$$

$$\Delta P = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{\langle p^2\rangle} =$$

$$\begin{aligned}
\langle p^2\rangle &= \langle\psi(t)|\, p^2\, |\psi(t)\rangle = p_0^2 e^{\frac{iHt}{\hbar}} \langle\psi(0)| \left(\alpha\alpha + \alpha^\dagger\alpha^\dagger - \alpha^\dagger\alpha - \alpha\alpha^\dagger\right) e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\, |\psi(0)\rangle = \\
&= -p_0^2 \langle\psi(0)| \left(\alpha^\dagger\alpha + \alpha\alpha^\dagger\right) |\psi(0)\rangle = p_0^2 \langle\psi(0)| \left(\cancelto{0}{\alpha^\dagger\alpha\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle} + \alpha\alpha^\dagger\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \alpha^\dagger\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle + \alpha\alpha^\dagger\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) \\
&= -p_0^2 \langle\psi(0)| \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle + 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) = p_0^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\langle 0| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\langle 2|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + 5\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}|2\rangle\right) \\
&= \frac{m\omega\hbar}{2}\left(\frac{1}{3} + 5\frac{2}{3}\right) = \frac{11m\omega\hbar}{6}
\end{aligned}$$

Αρα

$$\Delta P = \sqrt{\frac{11m\omega\hbar}{6}}$$

Άσκηση 3

Απο την σχέση $|n\rangle = \frac{(\alpha^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ προκύπτει οτι

$$\psi_n(x) = \langle x|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!2^n}}\left[\sqrt{m\omega}x - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]^n \psi_0(x)$$

- για $n = 1$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{m\omega}x - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]\psi_0(x) \Leftrightarrow$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{m\omega}x - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]ke^{-m\omega x^2/2} \Leftrightarrow$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}k\left[\sqrt{m\omega}xe^{-m\omega x^2/2} + \sqrt{m\omega}xe^{-m\omega x^2/2}\right] = k\sqrt{2m\omega}xe^{-m\omega x^2/2}$$

Για να είναι η $\psi_1(x)$ κανονικοποιήμενη πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1(x)|^2dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi_1(x)|^2dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}k^2 2m\omega x^2 e^{-m\omega x^2} = 1$$

- για $n = 2$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sqrt{m\omega}x - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]^2\psi_0(x) \Leftrightarrow$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sqrt{m\omega}x - \frac{1}{\sqrt{m\omega}}\frac{d}{dx}\right]^2 ke^{-m\omega x^2/2} \Leftrightarrow$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[m\omega x^2 - 2x\frac{d}{dx} + \frac{1}{m\omega}\frac{d^2}{d^2x}\right] ke^{-m\omega x^2/2} \Leftrightarrow$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}k\left[m\omega x^2 e^{-m\omega x^2/2} + 2m\omega x^2 e^{-m\omega x^2/2} + m\omega x^2 e^{-m\omega x^2/2}\right] =$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{2}}km\omega x^2 e^{-m\omega x^2/2} = \sqrt{2}km\omega x^2 e^{-m\omega x^2/2}$$

Για να είναι η $\psi_2(x)$ κανονικοποιήμενη πρέπει $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_2(x)|^2 dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_2(x)|^2 dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} k^2 m^2 \omega^2 x^4 e^{-m\omega x^2} = 1$$

Άσκηση 4

- για το τελεστή σ_x

$$\langle\psi|\,\sigma_x\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,(a\sigma_x\,|0\rangle + b\sigma_x\,|1\rangle) = (a^*\,\langle 0| + b^*\,\langle 1|)\,(a\,|1\rangle + b\,|0\rangle) =$$
$$= a^*b + b^*a$$

- για το τελεστή σ_y

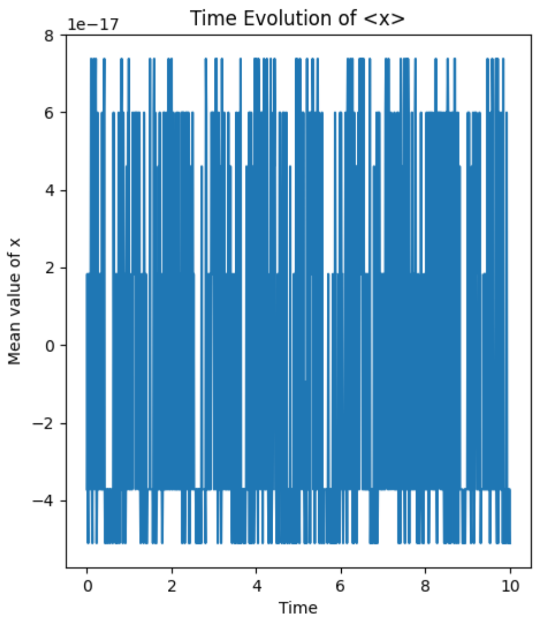
$$\langle\psi|\,\sigma_y\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,(a\sigma_y\,|0\rangle + b\sigma_y\,|1\rangle) = (a^*\,\langle 0| + b^*\,\langle 1|)\,(ai\,|1\rangle - bi\,|0\rangle) =$$
$$= -a^*bi + b^*ai$$

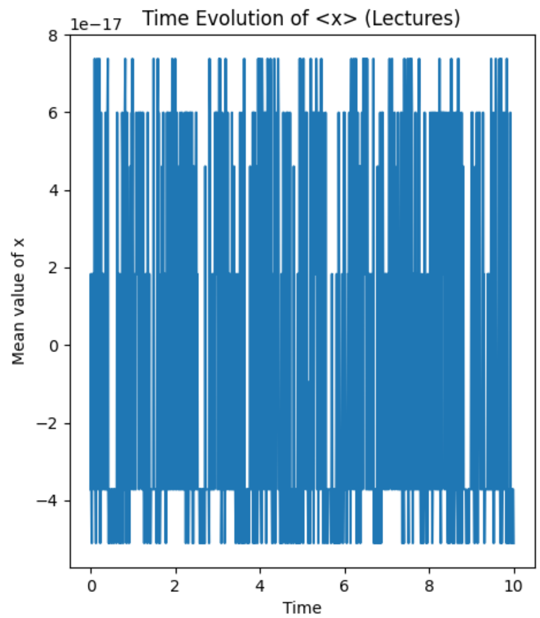
- για το τελεστή σ_z

$$\langle\psi|\,\sigma_z\,|\psi\rangle = \langle\psi|\,(a\sigma_z\,|0\rangle + b\sigma_z\,|1\rangle) = (a^*\,\langle 0| + b^*\,\langle 1|)\,(a\,|0\rangle - b\,|1\rangle) =$$
$$= a^2 - b^2$$

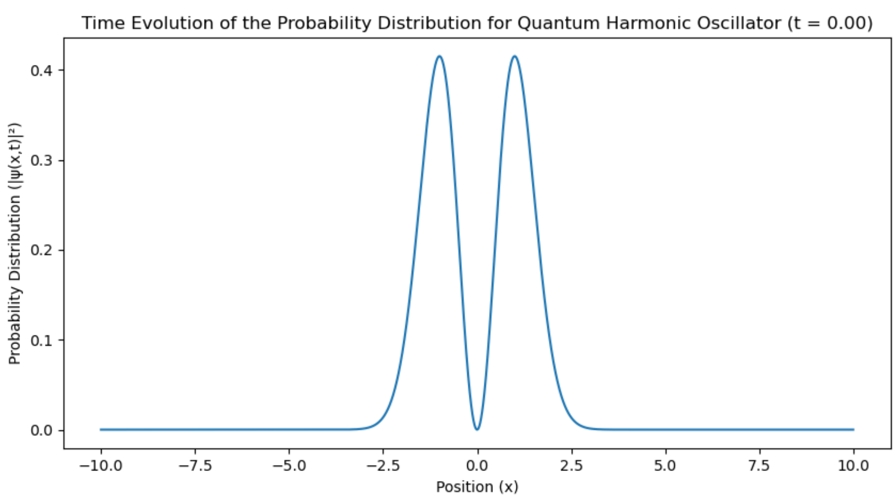
Άσκηση 5

1. για $\psi(t=0) = |1\rangle$ Η μέση τίμη της θέση σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

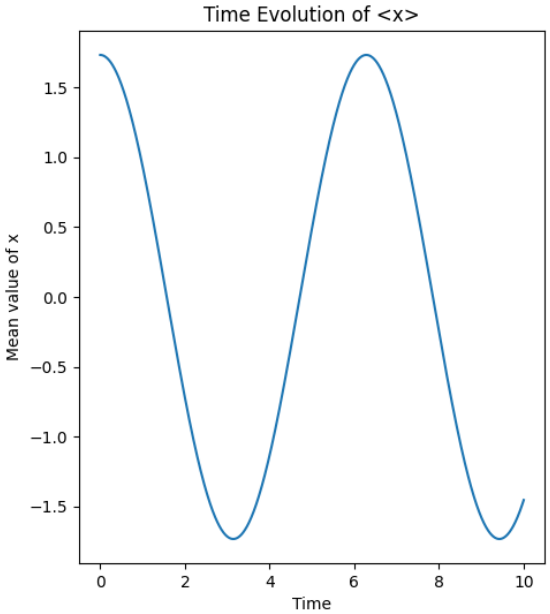


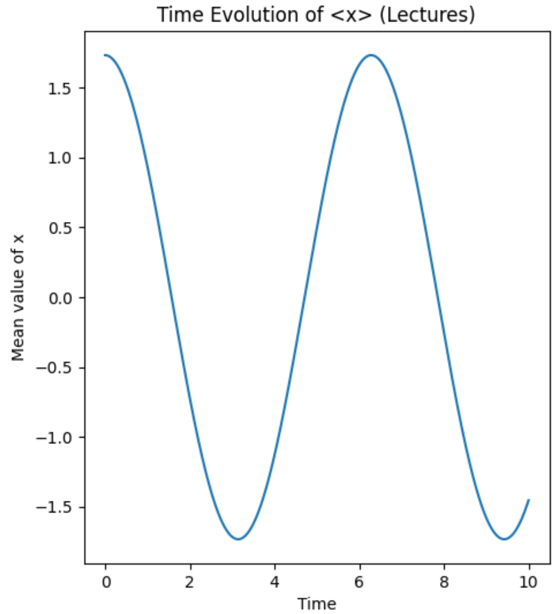


Η κατανομή της πιθανότητα για την χρονικη στιγμη $t = 0$ θα είναι

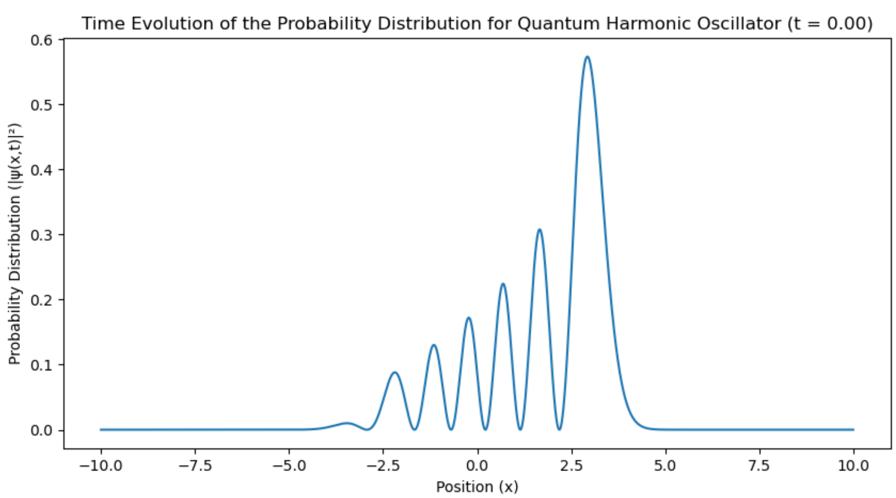


2. για $\psi(t=0) = \frac{1}{sqrt2}(|5\rangle + |6\rangle)$ Η μέση τίμη της θέση σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι

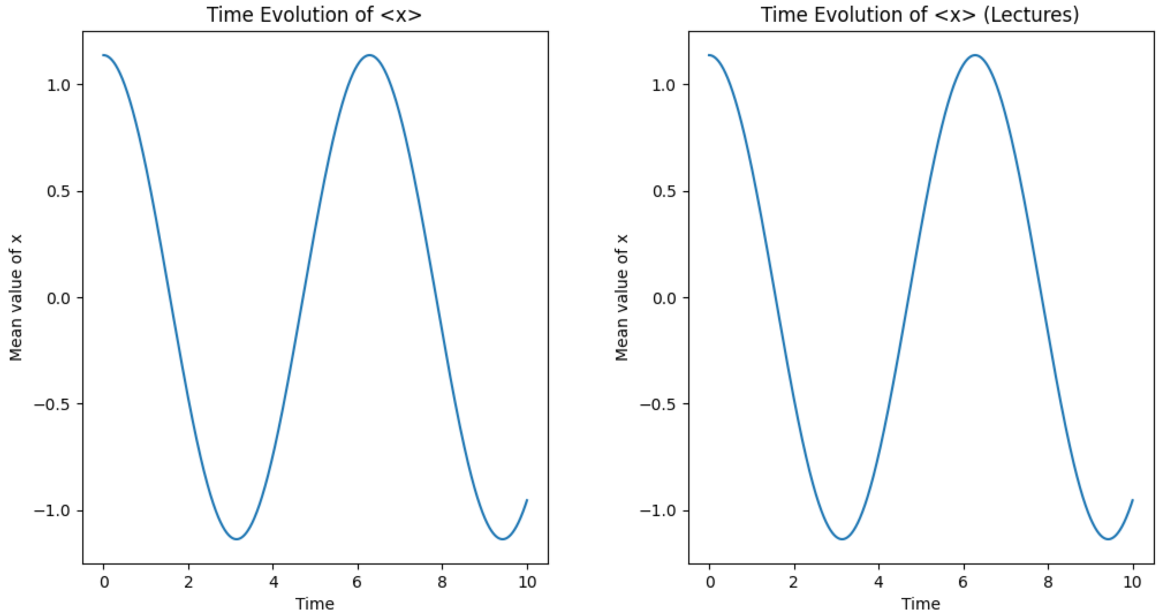




Η κατανομή της πιθανότητα για την χρονικη στιγμη $t = 0$ θα είναι



3. για $\psi(t=0) = \frac{1}{sqrt3}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ Η μέση τίμη της θέση σε συνάρτηση με τον χρόνο είναι



Η κατανομή της πιθανότητα για την χρονικη στιγμη $t = 0$ θα είναι