ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

3ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Απόδειξη της σχέσης 6.7

Απο την σχέση (6.6) έχουμε :

$$H = \sqrt{8E_cE_J}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + \frac{1}{2}\right) - E_J - \frac{E_c}{12}\left(\hat{c}^\dagger + \hat{c}\right)^4$$

Αναπτύσσουμε το όρο $\left(\hat{c}^\dagger + \hat{c}\right)^4$ κρατώντας μόνο τους όρους με ίσο αριθμό $\hat{c}^\dagger$ και $\hat{c}$

$$\left(\hat{c}^\dagger + \hat{c}\right)^4 \approx \left(\hat{c}^\dagger\right)^2\hat{c}^2 + \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2 + \hat{c}^\dagger\hat{c}^2\hat{c}^\dagger + \hat{c}\left(\hat{c}^\dagger\right)^2\hat{c} + \left(\hat{c}\hat{c}^\dagger\right)^2 + \hat{c}^2\left(\hat{c}^\dagger\right)^2 \tag{1}$$

Γνωρίζουμε οτι $\hat{c} = \sum_j \sqrt{j+1}\,|j\rangle\langle j+1|$ και $\hat{c}^\dagger = \sum_j \sqrt{j+1}\,|j+1\rangle\langle j|$ Αρα

$$\left\{\begin{array}{l} \hat{c}^\dagger\hat{c} = \sum_j (j+1)\,|j+1\rangle\langle j+1| \\ \\ \hat{c}\hat{c}^\dagger = \sum_j (j+1)\,|j\rangle\langle j| \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{c}^\dagger\hat{c} = \sum_j j\,|j\rangle\langle j| \\ \\ \hat{c}\hat{c}^\dagger = \sum_j (j+1)\,|j\rangle\langle j| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{c}\hat{c}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{c} = \sum_j (j+1)\,|j\rangle\langle j| - \sum_j j\,|j\rangle\langle j| = \sum_j |j\rangle\langle j| = I$$

$$\Leftrightarrow \hat{c}\hat{c}^\dagger = \hat{c}^\dagger\hat{c} + I$$

Ξαναγράφουμε τους όρους τις (1) με βάση την τελευταια εξίσωση

- $$\left(\hat{c}^\dagger\right)^2\hat{c}^2 = \hat{c}^\dagger\left(\hat{c}\hat{c}^\dagger - I\right)\hat{c} = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2 - \hat{c}^\dagger\hat{c}$$

- $$\hat{c}^\dagger\hat{c}^2\hat{c}^\dagger = \hat{c}^\dagger\hat{c}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c} + I\right) = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2 + \hat{c}^\dagger\hat{c}$$

- $$\hat{c}\left(\hat{c}^\dagger\right)^2\hat{c} = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+I\right)\hat{c}^\dagger\hat{c} = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+\hat{c}^\dagger\hat{c}$$

- $$\left(\hat{c}\hat{c}^\dagger\right)^2 = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+I\right)^2 = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+2\hat{c}^\dagger\hat{c}+I$$

- $$\hat{c}^2\left(\hat{c}^\dagger\right)^2 = \hat{c}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+I\right)\hat{c}^\dagger = \left(\hat{c}\hat{c}^\dagger\right)^2+\hat{c}\hat{c}^\dagger = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+2\hat{c}^\dagger\hat{c}+I+\hat{c}^\dagger\hat{c}+I = \left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+3\hat{c}^\dagger\hat{c}+2I$$

Αρα η (1) γράφεταο

$$\left(\hat{c}^\dagger+\hat{c}\right)^4 \approx 6\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+6\hat{c}^\dagger\hat{c}+3I$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
H &= \sqrt{8E_cE_J}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{1}{2}\right)-E_J-\frac{E_c}{12}\left(\hat{c}^\dagger+\hat{c}\right)^4 = \\
&= \sqrt{8E_cE_J}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{1}{2}\right)-E_J-\frac{E_c}{12}\left(6\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+6\hat{c}^\dagger\hat{c}+3I\right) = \\
&= \sqrt{8E_cE_J}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{1}{2}\right)-E_J-\frac{E_c}{2}\left(\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{1}{2}I\right)
\end{aligned}$$

Αγνοώντας τις σταθερές και θέτοντας $\omega_0 = \sqrt{8E_cE_J}$ και $\delta = -E_c$ έχουμε

$$H = \omega_0\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{\delta}{2}\left(\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2+\hat{c}^\dagger\hat{c}\right) = \left(\omega_0+\frac{\delta}{2}\right)\hat{c}^\dagger\hat{c}+\frac{\delta}{2}\left(\hat{c}^\dagger\hat{c}\right)^2$$

Απόδειξη της σχέσης 7.5

$$\begin{aligned}
U\sigma^\pm U^\dagger &= \left(I\cos(\omega_q t/2)-i\sigma^z\sin(\omega_q t/2)\right)\sigma^\pm\left(I\cos(\omega_q t/2)+i\sigma^z\sin(\omega_q t/2)\right) = \\
&= \cos^2(\omega_q t/2)I\sigma^\pm I+\cos(\omega_q t/2)\sin(\omega_q t/2)iI\sigma^\pm\sigma^z \\
&-\cos(\omega_q t/2)\sin(\omega_q t/2)i\sigma^z\sigma^\pm I+\sin^2(\omega_q t/2)\sigma^z\sigma^\pm\sigma^z \overset{(*)}{=} \\
&\overset{(*)}{=} \cos^2(\omega_q t/2)\sigma^\pm \pm\cos(\omega_q t/2)\sin(\omega_q t/2)i\sigma^\pm \\
&\pm\cos(\omega_q t/2)\sin(\omega_q t/2)i\sigma^\pm-\sin^2(\omega_q t/2)\sigma^\pm = \\
&= \sigma^\pm\left(\cos^2(\omega_q t/2)\pm 2i\cos(\omega_q t/2)\sin(\omega_q t/2)-\sin^2(\omega_q t/2)\right) \overset{(**)}{=} \\
&\overset{(**)}{=} \sigma^\pm\left(\cos(\omega_q t)\pm i\sin(\omega t)\right) = \sigma^\pm e^{\pm i\omega_q t}
\end{aligned}$$

Όπου στο σημείο (*) χρησιμοποιούμε οτι

$$\sigma^{\pm}\sigma^{z} = -\sigma^{z}\sigma^{\pm} = \pm\sigma^{\pm} \text{ και } \sigma^{z}\sigma^{\pm}\sigma^{z} = -\sigma^{z}\sigma^{z}\sigma^{\pm} = -I\sigma^{\pm} = -\sigma^{\pm}$$

Αφού ο σ^z είναι Hermitian και Unitary

Στο σημειό (**) χρησιμοποιούμε οτι

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \text{ και } \sin\theta = 2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

Απόδειξη της σχέσης 7.9

Απο τη σχέση 7.6 έχουμε οτι:

$$\hat{H}_{d,I}^{(RWA)} = -\hbar\left(\Omega e^{-i\Delta_q t} + \tilde{\Omega} e^{i(\omega_q+\omega_d)t}\right)\sigma^{+} - \hbar\left(\Omega^{*} e^{i\Delta_q t} + \tilde{\Omega}^{*} e^{-i(\omega_q+\omega_d)t}\right)\sigma^{-}$$

Αγνοώντας τους όρους $\omega_q + \omega_d$ η σχέση γίνεται:

$$\hat{H}_{d,I}^{(RWA)} = -\hbar\Omega e^{-i\Delta_q t}\sigma^{+} - \hbar\Omega^{*} e^{i\Delta_q t}\sigma^{-}$$

Αρα

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{d}^{(RWA)} &= U\hat{H}_{d,I}^{(RWA)}U^{\dagger} = -\hbar\Omega e^{-i\Delta_q t}U\sigma^{+}U^{\dagger} - \hbar\Omega^{*} e^{i\Delta_q t}U\sigma^{-}U^{\dagger} \overset{(7.5)}{=} \\
&\overset{(7.5)}{=} -\hbar\Omega e^{-i\Delta_q t}e^{i\omega_q t}\sigma^{+} - \hbar\Omega^{*} e^{i\Delta_q t}e^{-i\omega_q t}\sigma^{-} = \\
&= -\hbar\Omega e^{i(-\omega_q+\omega_d+\omega_q)t}\sigma^{+} - \hbar\Omega^{*} e^{i(\omega_q-\omega_d-\omega_q)t}\sigma^{-} = \\
&= -\hbar\Omega e^{+i\omega_d t}\sigma^{+} - \hbar\Omega^{*} e^{-i\omega_d t}\sigma^{-}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\hat{H}^{(RWA)} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{d}^{(RWA)} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma^{z} - \hbar\Omega e^{i\omega_d t}\sigma^{+} - \hbar\Omega^{*} e^{-i\omega_d t}\sigma^{-}$$

Απόδειξη της σχέσης 7.12

Απο την (7.10) έχουμε

$$\hat{H}_{eff} = U_d \hat{H}^{RWA} U_d^\dagger - i\hbar U_d \dot{U}_d^\dagger \overset{(7.9)}{=}$$
$$= -\frac{1}{2}\hbar\omega_q U_d \sigma^z U_d^\dagger - \hbar\Omega e^{i\omega_d t} U_d \sigma^+ U_d^\dagger - \hbar\Omega^* e^{-i\omega_d t} U_d \sigma^- U_d^\dagger - i\hbar U_d \dot{U}_d^\dagger$$

Δουλεύοντας το κάθε όρο ξεχωριστα:

- Για τον όρο $\frac{1}{2}\hbar\omega_q U_d \sigma^z U_d^\dagger$

$$U_d \sigma^z U_d^\dagger = e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} \sigma^z e^{i\omega_d t\sigma^z/2} \overset{(*)}{=}$$
$$= \left(e^{-i\omega_d t/2} |0\rangle\langle 0| + e^{i\omega_d t/2} |1\rangle\langle 1|\right)(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)\left(e^{i\omega_d t/2} |0\rangle\langle 0| + e^{-i\omega_d t/2} |1\rangle\langle 1|\right) =$$
$$= \left(e^{-i\omega_d t/2} |0\rangle\langle 0| - e^{i\omega_d t/2} |1\rangle\langle 1|\right)\left(e^{i\omega_d t/2} |0\rangle\langle 0| + e^{-i\omega_d t/2} |1\rangle\langle 1|\right) =$$
$$= e^{-i\omega_d t/2} e^{i\omega_d t/2} |0\rangle\langle 0| - e^{i\omega_d t/2} e^{-i\omega_d t/2} |1\rangle\langle 1| = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| =$$
$$= \sigma^z$$

Όπου στο σημείο $(*)$ χρησιμοποιήσαμε οτι

$$\sigma^z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \text{ και } e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} = e^{-i\omega_d t(+1)/2} |0\rangle\langle 0| + e^{-i\omega_d t(-1)/2} |1\rangle\langle 1|$$

Αρα $\frac{1}{2}\hbar\omega_q U_d \sigma^z U_d^\dagger = \frac{1}{2}\hbar\omega_q \sigma^z$

- Για τον όρο $\hbar\Omega e^{i\omega_d t} U_d \sigma^+ U_d^\dagger$

$$\hbar\Omega e^{i\omega_d t} U_d \sigma^+ U_d^\dagger = \hbar\Omega e^{i\omega_d t} e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} \sigma^+ e^{i\omega_d t\sigma^z/2}$$

Απο την σχέση (3.23) της διάλεξης Spin qubits and Rabi oscillations έχουμε:

$$\hbar\Omega e^{i\omega_d t} e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} \sigma^+ e^{i\omega_d t\sigma^z/2} = \hbar\Omega e^{i\omega_d t} e^{-i\omega_d t} \sigma^+ = \hbar\Omega\sigma^+$$

- Για τον όρο $\hbar\Omega^* e^{-i\omega_d t} U_d \sigma^- U_d^\dagger$

$$\hbar\Omega^* e^{-i\omega_d t} U_d \sigma^- U_d^\dagger = \hbar\Omega^* e^{-i\omega_d t} e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} \sigma^- e^{i\omega_d t\sigma^z/2} \overset{(3.23)}{=}$$
$$= \hbar\Omega^* e^{-i\omega_d t} e^{i\omega_d t} \sigma^- = \hbar\Omega^* \sigma^-$$

- Για τον όρο $i\hbar U_d \dot{U}_d^\dagger$

$$i\hbar U_d \dot{U}_d^\dagger = i\hbar e^{-i\omega_d t\sigma^z/2} \frac{d}{dt} e^{i\omega_d t\sigma^z/2} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_d \left(e^{-i\omega_d t\sigma^z/2}\sigma^z e^{i\omega_d t\sigma^z/2}\right) \overset{(!)}{=}$$
$$= -\frac{1}{2}\hbar\omega_d \sigma^z$$

Όπου στο σημείο (!) το γινόμενο μέσα στην παρένθεση έχει υπολογιστεί στον πρώτο όρο

Άρα

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{1}{2}\hbar\omega_q\sigma^z - \hbar\Omega\sigma^+ - \hbar\Omega^*\sigma^- + \frac{1}{2}\hbar\omega_d\sigma^z =$$
$$= -\frac{1}{2}\hbar\Delta_q\sigma^z - \hbar\Omega\sigma^+ - \hbar\Omega^*\sigma^-$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21) απο Spin qubits and Rabi oscillations και θεωρώντας οτι $\Omega = \Omega^*$ παίρνουμε

$$\hat{H}_{eff} = -\frac{1}{2}\hbar\Delta_q\sigma^z - \hbar\Omega\sigma^+ - \hbar\Omega^*\sigma^- = -\frac{1}{2}\hbar\Delta_q\sigma^z - \hbar\Omega(\sigma^+ + \sigma^-) =$$
$$= -\frac{1}{2}\hbar\Delta_q\sigma^z - \hbar\Omega\sigma^x$$