ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ

1ο Σετ Ασκήσεων

Καλαμαράκης Θεόδωρος: 2018030022

Μέρος 2ο

Άσκηση 2

Απόδειξη σχέσης (3.25)

Απο την σχέση (3.24) έχουμε

$$\hat{H}'(t) = -\hbar\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2} + \frac{\hbar\gamma}{2}\left(B_0\hat{\sigma}_z + e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1\cos(\omega\cdot t)\cdot\hat{\sigma}_x e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right)$$

Χρησιμοποιώντας οτι $\gamma B_0 = \omega_0$ η (3.24) γίνεται :

$$\begin{aligned}\hat{H}'(t) &= -\hbar\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2} + \hbar\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2} + \frac{\hbar\gamma}{2}\left(e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1\cos(\omega\cdot t)\cdot\hat{\sigma}_x e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right) = \\ &= \frac{\hbar\gamma}{2}\left(e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1\cos(\omega\cdot t)\cdot\hat{\sigma}_x e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right)\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας οτι $2\cos(\omega\cdot t)=e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}$ και οτι $\hat{\sigma}_x=\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-$ (προκύπτει απο την (3.21))

$$\begin{aligned}
\hat{H}'(t) &= \frac{\hbar\gamma}{2}\left(e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1\cos(\omega\cdot t)\cdot\hat{\sigma}_x e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right)= \\
&= \frac{\hbar\gamma}{2}\left(e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\cdot(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right)= \\
&= \frac{\hbar\gamma}{2}\left(e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}B_1(e^{i\omega t}\hat{\sigma}_+ + e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_+ + e^{i\omega t}\hat{\sigma}_- + e^{-i\omega t}\hat{\sigma}_-)e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\right)= \\
&= \frac{\hbar\gamma}{2}B_1(e^{i\omega t}e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t} + e^{-i\omega t}e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\hat{\sigma}_+ e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}+ \\
&+ e^{i\omega t}e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t} + e^{-i\omega t}e^{i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t}\hat{\sigma}_- e^{-i\frac{\omega_0\hat{\sigma}_z}{2}t})= \\
&\overset{(3.23)}{=} \frac{\hbar\gamma}{2}B_1(e^{i\omega t}e^{i\omega_0 t}\hat{\sigma}_+ + e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t}\hat{\sigma}_+ + e^{i\omega t}e^{i\omega_0 t}\hat{\sigma}_+ e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t}\hat{\sigma}_-)= \\
&= \frac{\hbar\gamma}{2}B_1\left[\left(e^{i(\omega_0-\omega)t}\hat{\sigma}_+ + e^{i(\omega-\omega_0)t}\hat{\sigma}_-\right)+\left(e^{i(\omega_0+\omega)t}\hat{\sigma}_+ + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\hat{\sigma}_-\right)\right]
\end{aligned}$$

Απόδειξη σχέσης (3.36)

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.33) στην σχέση (3.31)

$$\left\{\begin{array}{l} i\left[\frac{d}{dt}(Ae^{\lambda t})\right]=-\frac{\delta}{2}Ae^{\lambda t}+\frac{\Omega}{2}Be^{\lambda t} \\ \\ i\left[\frac{d}{dt}(Be^{\lambda t})\right]=\frac{\Omega}{2}Ae^{\lambda t}+\frac{\delta}{2}Be^{\lambda t}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} i\left[A\lambda e^{\lambda t}\right]=-\frac{\delta}{2}Ae^{\lambda t}+\frac{\Omega}{2}Be^{\lambda t} \\ \\ i\left[B\lambda e^{\lambda t}\right]=\frac{\Omega}{2}Ae^{\lambda t}+\frac{\delta}{2}Be^{\lambda t}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} i\lambda+\frac{\delta}{2}=\frac{\Omega}{2}\frac{B}{A} \\ \\ i\lambda-\frac{\delta}{2}=\frac{\Omega}{2}\frac{A}{B}\end{array}\right\}(1)\xRightarrow{\text{πολλαπασιάζουμε κατά μέλη}}-\lambda^2-i\lambda\frac{\delta}{2}+i\lambda\frac{\delta}{2}-\frac{\delta^2}{4}=\frac{\Omega^2}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lambda^2=-\left(\frac{\Omega^2}{4}+\frac{\delta^2}{4}\right)\Leftrightarrow\lambda_1=i\frac{\sqrt{\Omega^2+\delta^2}}{2}=i\frac{\Omega'}{2}\text{ και }\lambda_2=-i\frac{\sqrt{\Omega^2+\delta^2}}{2}=-i\frac{\Omega'}{2}$$

Επιστέφοντας στη σχέση (1) για $\lambda=\lambda_1$ έχουμε

$$\frac{B_1}{A_1}=\frac{\delta-\Omega'}{\Omega} \tag{2}$$

για $\lambda=\lambda_2$ έχουμε

$$\frac{B_2}{A_2}=\frac{\delta+\Omega'}{\Omega} \tag{3}$$

Αρα

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(t)=A_1e^{\frac{i\Omega' t}{2}}+A_2e^{\frac{-i\Omega' t}{2}} \\ \\ b(t)=B_1e^{\frac{i\Omega' t}{2}}+B_2e^{\frac{-i\Omega' t}{2}} \end{array}\right\} \xLeftrightarrow[(2),\,(3)]{A_1=a_1,\; A_2=a_2} \left\{\begin{array}{l} \alpha(t)=a_1e^{\frac{i\Omega' t}{2}}+a_2e^{\frac{-i\Omega' t}{2}} \\ \\ b(t)=\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1e^{\frac{i\Omega' t}{2}}+\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2e^{\frac{-i\Omega' t}{2}} \end{array}\right\}$$

Απόδειξη σχέσης (3.37)

Απο τις δύο σχέσεις της (3.36) λαμβάνουμε οτι

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(0)=a_1e^0+a_2e^0 \\ \\ b(0)=\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1e^0+\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2e^0 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} \alpha(0)=a_1+a_2 \\ \\ b(0)=\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1+\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2 \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \alpha(0)=a_1+a_2 \\ \\ b(0)=\frac{\delta}{\Omega}(a_1+a_2)-\frac{\Omega'}{\Omega}(a_1-a_2) \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} \alpha(0)=a_1+a_2 \\ \\ \frac{\delta}{\Omega'}a(0)-\frac{\Omega}{\Omega'}b(0)=a_1-a_2 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα οτι $e^{\frac{i\Omega' t}{2}}=\cos(\frac{\Omega' t}{2})+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})$ και $e^{\frac{-i\Omega' t}{2}}=\cos(\frac{\Omega' t}{2})-i\sin(\frac{\Omega' t}{2})$ ξαναγράφουμε την (3.37) ως:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha(t)=a_1\left(\cos(\frac{\Omega' t}{2})+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})\right)+a_2\left(cos(\frac{\Omega' t}{2})-i\sin(\frac{\Omega' t}{2})\right) \\ \\ b(t)=\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1\left(\cos(\frac{\Omega' t}{2})+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})\right)+\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2\left(cos(\frac{\Omega' t}{2})-i\sin(\frac{\Omega' t}{2})\right) \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \alpha(t)=\cos(\frac{\Omega' t}{2})(a_1+a_2)+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})(a_1-a_2) \\ \\ b(t)=\cos(\frac{\Omega' t}{2})(\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1+\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2)+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})(\frac{\delta-\Omega'}{\Omega}a_1-\frac{\delta+\Omega'}{\Omega}a_2) \end{array}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} \alpha(t)=\cos(\frac{\Omega' t}{2})(a_1+a_2)+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})(a_1-a_2) \\ \\ b(t)=\cos(\frac{\Omega' t}{2})\left(\frac{\delta}{\Omega}(a_1+a_2)-\frac{\Omega'}{\Omega}(a_1-a_2)\right)+i\sin(\frac{\Omega' t}{2})\left(\frac{\delta}{\Omega}(a_1-a_2)-\frac{\Omega'}{\Omega}(a_1+a_2)\right) \end{array}\right\}\stackrel{(4)}{=}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) a(0) + i(\frac{\delta a(0) - \Omega b(0)}{\Omega'}) \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \\ \\ b(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) \left(\frac{\delta}{\Omega} a(0) - \frac{\delta}{\Omega} a(0) + b(0)\right) + i \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \left(\frac{\delta^2}{\Omega \Omega'} a(0) - \frac{\delta}{\Omega'} b(0) - \frac{\Omega'}{\Omega} a(0)\right) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) a(0) + i(\frac{\delta a(0) - \Omega b(0)}{\Omega'}) \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \\ \\ b(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) b(0) + i \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \left(-\frac{\delta}{\Omega'} b(0) + \frac{\delta^2}{\Omega \Omega'} a(0) - \frac{\Omega'}{\Omega} a(0)\right) \end{array} \right\} \overset{(*)}{=}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) a(0) + i(\frac{\delta a(0) - \Omega b(0)}{\Omega'}) \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \\ \\ b(t) = \cos(\frac{\Omega' t}{2}) b(0) - i(\frac{\Omega a(0) + \delta b(0)}{\Omega'}) \sin(\frac{\Omega' t}{2}) \end{array} \right\}$$

Όπου στο σημείο $(*)$ χρησιμοποιήσαμε οτι

$$\frac{\delta^2}{\Omega \Omega'} a(0) - \frac{\Omega'}{\Omega} a(0) = \frac{\delta^2}{\Omega \Omega'} a(0) - \frac{\Omega'^2}{\Omega \Omega'} a(0) = \frac{\delta^2 - \Omega'^2}{\Omega \Omega'} a(0) = -\frac{\Omega^2}{\Omega \Omega'} a(0) = -\frac{\Omega}{\Omega'} a(0)$$

Άσκηση 3

i)

Απο την εξίσωση του Schrodinger έχουμε οτι :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi(0)\rangle = e^{-\frac{i\hbar\omega\sigma_x t}{\hbar}} |0\rangle = e^{-i\omega\sigma_x t} |0\rangle$$

Ο πίνακας σ_x έχει ιδιοδιανύσαματα τα $|+\rangle, |-\rangle$ και ιδιοτιμές $+1, -1$. Αρα μπορεί να γραφτεί ως

$$\sigma_x = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|$$

Αρα

$$e^{-i\omega\sigma_x t} = e^{-i\omega(+1)t} |+\rangle \langle +| + e^{-i\omega(-1)t} |-\rangle \langle -| = e^{-i\omega t} |+\rangle \langle +| + e^{i\omega t} |-\rangle \langle -| \Rightarrow$$

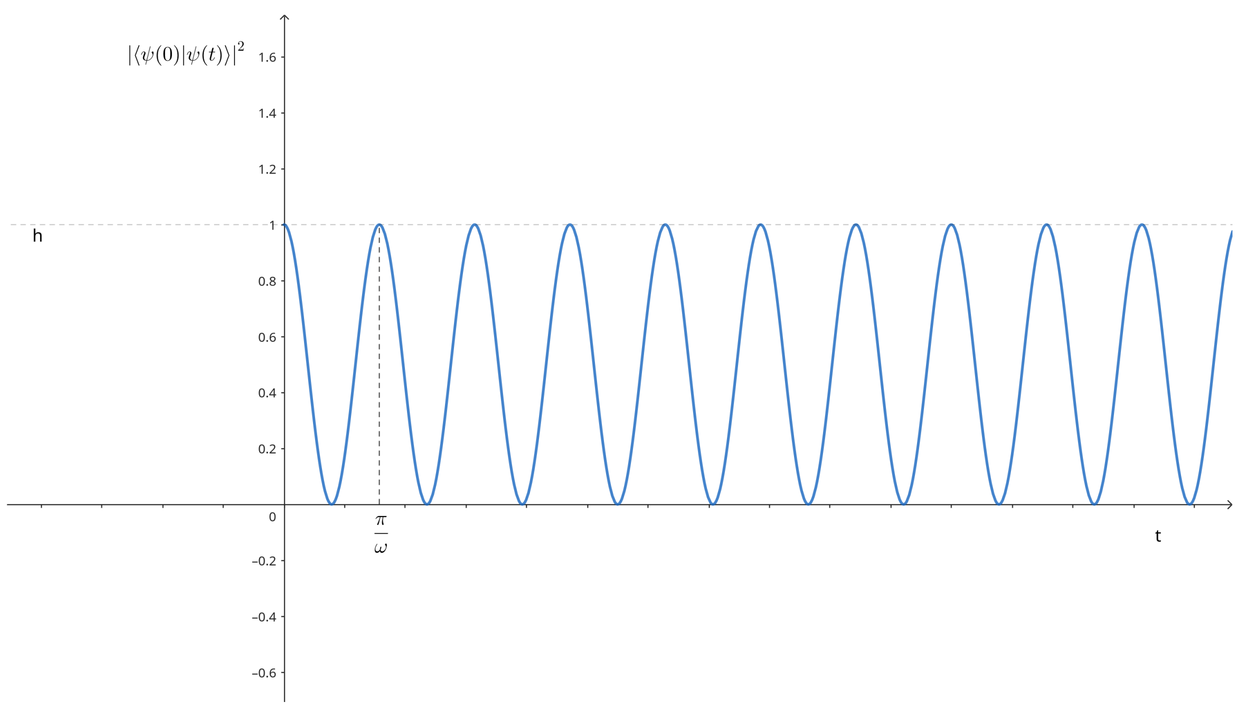
$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle &= e^{-i\omega\sigma_x t}|0\rangle = \left(e^{-i\omega t}|+\rangle\langle+| + e^{i\omega t}|-\rangle\langle-|\right)|0\rangle = \\
&= e^{-i\omega t}|+\rangle\left(\frac{\langle0|0\rangle + \langle1|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) + e^{i\omega t}|-\rangle\left(\frac{\langle0|0\rangle - \langle1|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}|+\rangle + e^{i\omega t}|-\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{i\omega t}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left((e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})|0\rangle + (e^{-i\omega t} - e^{i\omega t})|1\rangle\right) = \cos(\omega t)|0\rangle - i\sin(\omega t)|1\rangle
\end{aligned}
$$

ii)

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$
|\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle|^2 = |\cos(\omega t)\langle0|0\rangle - i\sin(\omega t)\langle0|1\rangle|^2 = |\cos(\omega t)|^2
$$

Η παραπάνω ποσότητα εκφράζει την πιθανότητα η κατάσταση ψ να είναι $|0\rangle$ σε κάθε χρονική στιγμή, η γραφική της αναπαράσταση είναι η εξής:



Άσκηση 4

i)

Αρχικά υπολογίζουμε τον πινακα $H = J(X \otimes X + Y \otimes Y + Z \otimes Z)$

$$X \otimes X = X = \begin{bmatrix} 0 & X \\ X & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y \otimes Y = \begin{bmatrix} 0 & -iY \\ iY & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Z \otimes Z = \begin{bmatrix} Z & 0 \\ 0 & -Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αρα

$$H = J \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Έπειτα θετοντας $|\psi(t)\rangle = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$ λύνουμε την έξισωση του Shrodinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \Leftrightarrow i\hbar \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}a(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}b(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}c(t) \\ \frac{\partial}{\partial t}d(t) \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{bmatrix}$$

και θα προκύψει το σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{Bmatrix} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\alpha(t) = Ja(t) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}b(t) = -Jb(t) + 2Jc(t) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}c(t) = 2Jb(t) - Jc(t) \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}d(t) = Jd(t) \end{Bmatrix}$$

Αφου προσδιορίσουμε τα $a(t), b(t), c(t), d(t)$ μέσω του παραπάνω συστήματος, θα λύσουμε τις εξισώσεις

$$\left\{\begin{array}{l} a(\tau)=a(0) \\ b(\tau)=c(0) \\ c(\tau)=b(0) \\ d(\tau)=d(0) \end{array}\right\}$$

προκειμένου να υπολογίσουμε τον χρόνο τ

ii)

Θελουμε να υπολογίσουμε το

$$(I\otimes H)\sqrt{\text{SWAP}}(Z\otimes I)\sqrt{\text{SWAP}}(S\otimes S^{\dagger})(I\otimes H)=$$

$$(I\otimes H)\sqrt{\text{SWAP}}(Z\otimes I)\sqrt{\text{SWAP}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=$$

$$(I\otimes H)\sqrt{\text{SWAP}}(Z\otimes I)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ i & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & i \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix}=$$

$$(I \otimes H)\sqrt{\mathrm{SWAP}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(-1-i) & \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ 0 & 0 & i & -i \end{bmatrix} =$$

$$(I \otimes H) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(-1+i) & \frac{1}{2}(-1+i) \\ -\frac{1}{2}(1+i) & -\frac{1}{2}(-1-i) & -\frac{1}{2}(-1+i) & -\frac{1}{2}(-1+i) \\ 0 & 0 & -i & i \end{bmatrix} = ...$$