

6: Testverfahren mit zwei Stichproben

Statistische Verfahren in der Geographie

Till Straube <straube@geo.uni-frankfurt.de>

Institut für Humangeographie
Goethe-Universität Frankfurt

1 Lernziele dieser Sitzung

Sie können...

- einen 2-Stichproben- t -Test durchführen.
- einen F -Test durchführen.
- Fehler 1. und 2. Art unterscheiden.

2 Statistische Tests

In Sitzung 5 haben wir mit dem z -Test und dem 1-Stichproben- t -Test die ersten Testverfahren kennengelernt. In dieser Sitzung kommt der 2-Stichproben- t -Test sowie der F -Test dazu.

Das grundsätzliche Verfahren bleibt dabei stets das gleiche. Zur Erinnerung noch einmal die sechs Schritte:

1. Test auswählen und Voraussetzungen prüfen
2. Hypothesen formulieren
3. Signifikanzniveau entscheiden
4. Ablehnungsbereich bestimmen
5. Prüfgröße berechnen
6. Ergebnis interpretieren

3 2-Stichproben- t -Test

Bei der folgenden Variante des t -Tests (und beim F -Test) wird nicht wie gehabt *eine* Stichprobe auf signifikante Abweichungen *von der Grundgesamtheit* überprüft, sondern *zwei* Stichproben auf signifikante Abweichungen *voneinander*. An den sechs Schritten ändert sich nichts.

Den 2-Stichproben- t -Test gibt es je nach Voraussetzungen bzw. Annahmen in vielen unterschiedlichen Varianten. In dieser Veranstaltung wird nur eine bestimmte (vergleichsweise einfache) Variante behandelt. In der Praxis geht es aber oft darum, für ganz bestimmte empirische Bedingungen den „richtigen“ 2-Stichproben- t -Test auszuwählen.

Die hier behandelte Variante soll mit folgendem Beispiel illustriert werden: Wir interessieren uns für die Mietpreise von kleine Gewerbeflächen in den beiden Frankfurter Stadtteilen Höchst und Praunheim. Wir vermuten, dass es einen signifikanten Unterschied gibt, wissen aber nicht in welche Richtung. Wir

planen eine Befragung von je 6 Mieter*innen von kleinen Gewerberäumen, die nach Zufallsprinzip ausgewählt werden.

3.1 Test wählen und Voraussetzungen prüfen

Der hier behandelte 2-Stichproben-*t*-Test hat folgende Voraussetzungen (bzw. Annahmen):

- Es soll untersucht werden, ob ein Merkmal in zwei Stichproben signifikant voneinander abweicht.
- Die Stichproben sind einfache Zufallsstichproben und unabhängig voneinander erhoben.
- Die Stichproben haben dieselbe Anzahl an Elementen ($n_1 = n_2$).
- Das Merkmal ist grundsätzlich (annähernd) normalverteilt.
- Die Varianzen der zu vergleichenden Populationen sind gleich ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$).¹

3.1.1 Beispiel

Probleme bereiten hier die Voraussetzungen der Normalverteilung und der gleichen Varianzen. Mit der Annahme der Normalverteilung können wir leben (weil wir uns mit Statistik gut auskennen und wissen, dass der *t*-Test „robust“ auf nicht-ganz-normalverteilte Merkmale reagiert). Wenn sich während des Tests jedoch herausstellen sollte, dass die Varianzen zu unterschiedlich sind, müssten wir das Vorgehen neu überdenken.

3.2 Hypothesen formulieren

Im Unterschied zu zuvor besprochenen Verfahren gibt es hier keine übergeordnete Grundgesamtheit, und damit kein μ_0 . Stattdessen werden Hypothesen über die Populationen der beiden Stichproben (μ_1 und μ_2) formuliert.

3.2.1 Nullhypothese

Die Nullhypothese geht davon aus, dass es keinen Unterschied zwischen den beiden Populationen gibt. Sie lautet daher:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad (1)$$

3.2.2 Alternativhypothese

Die Alternativhypothese stellt üblicherweise die forschersche Vermutung dar, die überprüft werden soll. Dabei gibt es auch hier zwei unterschiedliche Möglichkeiten: ungerichtete und gerichtete Alternativhypothesen.

¹Diese Voraussetzung ist etwas merkwürdig, denn beim *t*-Test kennen wir ja die Varianzen der Grundgesamtheiten gar nicht. Der *F*-Test kann diese Voraussetzung anhand der Stichprobenverteilungen prüfen.

3.2.2.1 Ungerichtete Alternativhypothese

Die ungerichtete Alternativhypothese besagt nur, *dass* es einen Unterschied zwischen μ_1 und μ_2 gibt, aber nicht in welche Richtung (größer oder kleiner). Sie lautet daher:

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \quad (2)$$

3.2.2.2 Gerichtete Alternativhypothese

Die gerichtete Alternativhypothese gibt eine Richtung des vermuteten Unterschieds vor. Sie lautet entweder:

$$H_1 : \mu_1 < \mu_2 \quad (3)$$

oder:

$$H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad (4)$$

3.2.3 Beispiel

Wir vermuten zwar einen Unterschied, wissen aber nicht in welche Richtung. Deshalb formulieren wir neben der Nullhypothese eine ungerichtete Alternativhypothese:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

3.3 Signifikanzniveau entscheiden

Wie auch sonst sind übliche Werte hier $\alpha = 0,01$ und $\alpha = 0,05$.

3.3.1 Beispiel

Wir entscheiden uns für das Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

3.4 Ablehnungsbereich bestimmen

Der kritische Wert wird genau wie bei dem 1-Stichproben-*t*-Test aus der Tabelle abgelesen. Der einzige (wichtige!) Unterschied ist die Bestimmung der Freiheitsgrade: Bei zwei Stichproben der Größe n werden die Freiheitsgrade bestimmt durch:

$$df = 2 \cdot n - 2 \quad (5)$$

3.4.1 Beispiel

Wir planen mit je 6 Stichproben. Deswegen berechnen wir die Freiheitsgrade:

$$\begin{aligned} df &= 2 \cdot n - 2 \\ &= 2 \cdot 6 - 2 = 10 \end{aligned}$$

Kritische Werte gibt es nun in beide Richtungen. Aufgrund der Symmetrie der t -Verteilung reicht es, wenn wir einen Wert (mit $\alpha = 0,05$) nachschlagen:

$$\begin{aligned} t &\leq t_{df;\alpha/2} \quad \text{und} \quad t \geq t_{df;(1-\alpha/2)} \\ t &\leq t_{10;2,5\%} \quad \text{und} \quad t \geq t_{10;97,5\%} \\ t &\leq -2,228 \quad \text{und} \quad t \geq 2,228 \end{aligned}$$

3.5 Prüfgröße berechnen

Bei zwei Stichproben mit Mittelwert \bar{x}_1 bzw. \bar{x}_2 und Varianz s_1^2 bzw. s_2^2 lautet die Formel zur Bestimmung der Prüfgröße t :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} \quad (6)$$

3.5.1 Beispiel

Wir erheben folgende Werte für die Kaltmiete pro m²:

$$\begin{array}{ll} \text{Höchst}(x_1) : & 7,96 \quad 8,46 \quad 7,13 \quad 8,95 \quad 7,62 \quad 8,22 \\ \text{Praunheim}(x_2) : & 5,54 \quad 5,80 \quad 8,70 \quad 7,99 \quad 6,23 \quad 6,75 \end{array}$$

Für die arithmetischen Mittel ergibt sich (s. Sitzung 2):

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &\approx 8,06 \\ \bar{x}_2 &\approx 6,84 \end{aligned}$$

Die Varianzen (s. Sitzung 2):

$$\begin{aligned} s_1^2 &\approx 0,41 \\ s_2^2 &\approx 1,59 \end{aligned}$$

Diese Varianzen sehen auf den ersten Blick sehr unterschiedlich aus, was ein Problem ist: Der 2-Stichproben- t -Test hat ja zur Annahme, dass die Varianzen in den beiden Populationen gleich sind.

Andererseits sind ja auch die Stichprobenvarianzen zu einem gewissen Grad Zufallsprodukte, und diese beiden Varianzen bewegen sich auch irgendwie noch in der selben Größenordnung – schließlich könnten sie auch 0,1 und 20 lauten.

Wir entscheiden uns zunächst dazu, den Test fortzuführen und lernen gleich eine Methode kennen, wie wir überprüfen können, ob das auch gerechtfertigt ist.

Um die Prüfgröße t zu bestimmen, setzen wir einfach unsere Stichprobenwerte in die Formel aus [Gleichung 6](#) ein:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n}}} \\ &\approx \frac{8,06 - 6,84}{\sqrt{\frac{0,41 + 1,59}{6}}} \\ &\approx 2,113 \end{aligned}$$

3.6 Ergebnis interpretieren

Genau wie bei den anderen Tests wird je nach Erreichen des kritischen Werts (des Ablehnungsbereichs) die Nullhypothese verworfen oder beibehalten.

3.6.1 Beispiel

Der kritische Wert von $t \geq 2,228$ wurde nicht überschritten. Wir müssen die Nullhypothese beibehalten, d.h. wir konnten keinen signifikanten Unterschied zwischen den Mietpreisen in Höchst und Praunheim feststellen ($\alpha = 0,05$).

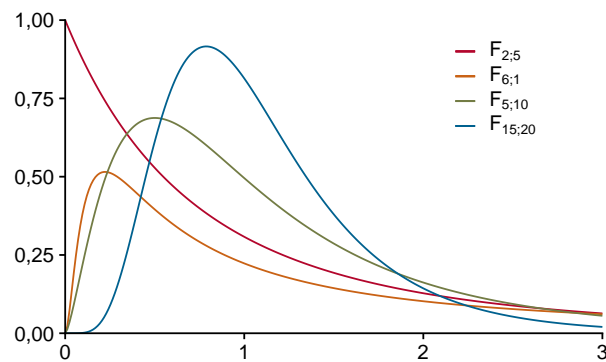
Softwarehinweis

In R wird auch der 2-Stichproben- t -Test mit dem Befehl `t.test()` durchgeführt. Im Gegensatz zum 1-Stichproben- t -Test werden dabei zwei Verteilungen als Argumente eingegeben.

4 Die F -Verteilung

Die Prüfgröße F im F -Test ist unter Annahme der Nullhypothese F -verteilt. Im Gegensatz zu den Verteilungen von z und t ist die F -Verteilung nicht symmetrisch und nimmt nur positive Werte an (s. [Abbildung 1](#)).

Dazu ist die F -Verteilung nicht wie t von einem, sondern von zwei Freiheitsgraden abhängig. Die Reihenfolge dieser Freiheitsgrade ist auch wichtig: Wir sprechen vom Zähler-Freiheitsgrad (df_1) und vom Nenner-Freiheitsgrad (df_2). Die F -Verteilung wird also notiert mit: $F_{df_1; df_2}$

Abbildung 1: F -Verteilungen mit verschiedenen Freiheitsgraden

5 F -Test

Auch der F -Test untersucht zwei unabhängige Stichproben. Er unterscheidet sich jedoch insofern grundlegend von den zuvor besprochenen Testverfahren, als dass sein Untersuchungsgegenstand nicht der Mittelwert (μ) sondern die Varianz (σ^2) der beiden Populationen ist.

Die Prüfgröße F ist dann unter Annahme der Nullhypothese F -verteilt.

Unser Beispiel ist eine Fortführung des vorigen Beispiels für den 2-Stichproben- t -Test (Mietpreise für Gewerbeflächen). Uns interessiert: Sind die Varianzen eventuell so unterschiedlich, dass wir den obigen t -Test gar nicht hätten durchführen dürfen?

5.1 Test wählen und Voraussetzungen prüfen

Das Ziel des F -Tests ist die Feststellung eines signifikanten Unterschieds in der Varianz von zwei Populationen. Die Voraussetzungen lauten:

- Ausgangspunkt sind zwei unabhängig voneinander erhobene Stichproben (die aber grundsätzlich unterschiedlich groß sein dürfen).
- Das Merkmal ist in beiden Populationen (annähernd) normalverteilt.

5.1.1 Beispiel

Die Voraussetzung der Normalverteilung ist hier besonders wichtig, denn der Test wird bei anderen Verteilungen stark verfälscht. (Der F -Test ist also nicht „robust“, was die Normalverteilung angeht.)

Wir müssen also explizit die Annahme treffen, dass die Mietpreise annähernd normalverteilt sind. Das ist einerseits nicht ganz abwegig, andererseits würden wir in der Praxis unsere statistische Untersuchung dadurch angreifbar machen.

5.2 Hypothesen formulieren

Alles wie gehabt – nur, dass es um die Varianz σ^2 der jeweiligen Populationen geht.

5.2.1 Nullhypothese

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad (7)$$

5.2.2 Alternativhypothesen

5.2.2.1 Ungerichtet

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \quad (8)$$

5.2.2.2 Gerichtet

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \quad (9)$$

oder

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \quad (10)$$

5.2.3 Beispiel

Die Nullhypothese ist einfach:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Bei der Alternativhypothese ist die Ausgangslage, dass wir empirisch einen Unterschied zwischen $s_1^2 \approx 0,41$ und $s_2^2 \approx 1,59$ festgestellt haben. Die Frage, ob die Varianz der Mietpreise in Höchst *tatsächlich signifikant kleiner* ist, wird übersetzt in die Alternativhypothese:

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$$

Interessanterweise wäre hier (zur Abwechslung) das forschersche Interesse, die Nullhypothese beizubehalten – denn wir wollen ja den t -Test durchführen dürfen.

5.3 Signifikanzniveau entscheiden

Die Logik ist hier genau dieselbe: Wie unwahrscheinlich muss das empirische Ergebnis unter Annahme der Nullhypothese sein, damit wir diese ablehnen (müssen)?

5.3.1 Beispiel

Wir entscheiden uns für das (für unsere Zwecke sehr übliche) Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$.

5.4 Ablehnungsbereich bestimmen

Für die ungerichtete Alternativhypothese sind die kritischen Werte:

$$F \leq F_{df_1; df_2; \alpha/2} \quad \text{und} \quad F \geq F_{df_1; df_2; (1-\alpha/2)} \quad (11)$$

Für die gerichtete Alternativhypothese:

$$F \leq F_{df_1; df_2; \alpha} \quad (12)$$

bzw.

$$F \geq F_{df_1; df_2; (1-\alpha)} \quad (13)$$

Die Besonderheit der F -Verteilung ist, dass sie gleich von zwei Freiheitsgraden abhängt: dem Zähler-Freiheitsgrad df_1 und dem Nenner-Freiheitsgrad df_2 .

Dabei bestimmen sich die Freiheitsgrade wieder durch die Stichprobengrößen:

$$\begin{aligned} df_1 &= n_1 - 1 \\ df_2 &= n_2 - 1 \end{aligned} \quad (14)$$

In der Tabelle im Anhang sind nur die Werte für Flächenanteile von 0,95 vermerkt. Die Werte für Flächenanteile von 0,05 (also am linken Rand) können durch [Gleichung 15](#) bestimmt werden:

$$F_{df_1; df_2; \alpha} = \frac{1}{F_{df_2; df_1; (1-\alpha)}} \quad (15)$$

Dabei ist zu beachten, dass im Nenner die Reihenfolge der Freiheitsgrade getauscht wird!

Zur Verdeutlichung könnte – losgelöst von unserem Beispiel – ein unterer kritischer Wert berechnet werden durch:

$$\begin{aligned} F_{13;20;5\%} &= \frac{1}{F_{20;13;95\%}} \\ &\approx \frac{1}{2,46} \approx 0,41 \end{aligned}$$

5.4.1 Beispiel

Die Freiheitsgrade berechnen sich durch [Gleichung 14](#):

$$\begin{aligned} df_1 &= n_1 - 1 = 5 \\ df_2 &= n_2 - 1 = 5 \end{aligned}$$

Durch unsere gerichtete Alternativhypothese ergibt sich der kritische Wert aus [Gleichung 12](#) (unter Anwendung des Tricks aus [Gleichung 15](#)):

$$F \leq F_{df_1; df_2; \alpha}$$

$$F \leq F_{5; 5; 5\%}$$

$$F \leq \frac{1}{F_{5; 5; 95\%}}$$

$$F \leq \frac{1}{5,05}$$

$$F \leq 0,20$$

Der so berechnete Ablehnungsbereich ist grafisch in [Abbildung 2](#) aufbereitet.

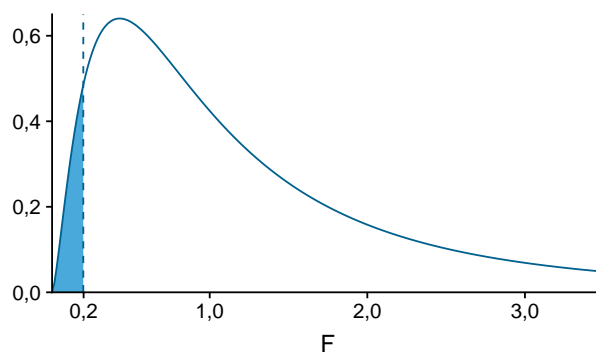


Abbildung 2: Ablehnungsbereich für $F \leq F_{5; 5; 5\%}$

5.5 Prüfgröße berechnen

Die Formel für die Prüfgröße F ist denkbar einfach:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \quad (16)$$

5.5.1 Beispiel

Wir hatten die Varianzen der Stichproben berechnet mit:

$$s_1^2 \approx 0,41$$

$$s_2^2 \approx 1,59$$

Einsetzen in die Formel aus [Gleichung 16](#) ergibt:

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} \\ = \frac{0,41}{1,59} \approx 0,26$$

5.6 Nullhypothese ablehnen oder beibehalten

Auch hier gilt dasselbe wie bei allen Tests.

5.6.1 Beispiel

Der kritische Wert von 0,20 müsste *unterschritten* werden, um die Nullhypothese abzulehnen. Das ist nicht passiert – wir „dürfen“ die Nullhypothese also beibehalten: Es gibt keinen statistisch signifikanten Unterschied in den beiden Varianzen ($\alpha = 0,05$).

Damit haben wir im vorherigen Beispiel die Voraussetzungen des 2-Stichproben-*t*-Tests also nicht verletzt.

Softwarehinweis

In R lautet der Befehl für den *F*-Test `var.test()`.

6 Fehlerarten

Bei statistischen Tests sind „Fehler“ nicht etwa Rechenfehler, sondern Angaben über die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese aufgrund des Zufalls, dem die Stichprobe ja unterliegt, fälschlicherweise beizubehalten oder abzulehnen. Dabei wird unterschieden zwischen Fehlern 1. und 2. Art.

6.1 Fehler 1. Art

Der Fehler 1. Art (engl. *type I error*) steht für die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt wird. Das passiert, wenn die Ergebnisse nur zufällig in den Ablehnungsbereich fallen. Konsequenz ist, dass eine Vermutung statistisch belegt wird, obwohl sie gar nicht stimmt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist also gleich dem Signifikanzniveau (α).

6.2 Fehler 2. Art

Der Fehler 2. Art (engl. *type II error*) ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese fälschlicherweise beibehalten wird. Das passiert immer dann, wenn die Vermutung also eigentlich stimmt, die Stichprobenwerte aber zufällig so ausfallen, dass der Ablehnungsbereich nicht erreicht wird. Konsequenz ist, dass eine korrekte Vermutung statistisch nicht belegt werden kann. Die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art wird mit β gekennzeichnet.

7 Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sind zur eigenständigen Überprüfung Ihrer Lernleistung gedacht (als Vor- oder Nachbereitung der Vorlesung, oder als Klausurübung) und nicht etwa als Hausaufgabe.

7.1 Aufgabe 1

Bestimmen Sie die folgenden kritischen Werte:

- a) $F_{4;1;5\%}$
- b) $F_{8;9;95\%}$
- c) $F_{7;10;95\%}$
- d) $F_{9;4;95\%}$
- e) $F_{3;15;95\%}$
- f) $F_{5;6;5\%}$
- g) $F_{2;2;5\%}$
- h) $F_{100;100;5\%}$
- i) $F_{1;20;95\%}$
- j) $F_{20;50;95\%}$

7.2 Aufgabe 2

Sie wissen, dass in städtischen Freibädern die Wassertemperatur an verschiedenen Tagen normalverteilt ist. Sie vermuten, dass die Temperatur in zwei Bädern unterschiedlich stark variiert. Sie planen zwei unabhängige Erhebungen an zufälligen Tagen während der Badesaison. Aus organisatorischen Gründen beträgt die Stichprobengröße in „Schwimmbad 1“ $n_1 = 5$ und in „Schwimmbad 2“ $n_2 = 7$.

- a) Welchen Test führen Sie durch?
- b) Formulieren Sie die Hypothesen.
- c) Sie wählen das Signifikanzniveau $\alpha = 0,1$. Was bedeutet diese Zahl?
- d) Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich.

7.3 Aufgabe 3

(Fortführung von Aufgabe 2)

Sie erheben folgende Werte für die Wassertemperatur:

Schwimmbad 1 : 23,3 21,4 20,9 19,4 21,6

Schwimmbad 2 : 21,5 21,7 21,5 21,4 22,0 20,9 21,8

- a) Berechnen Sie die Prüfgröße.
- b) Welche Schlüsse ziehen Sie aus der Untersuchung?

7.4 Aufgabe 4

Sie interessieren sich für das Kommunikationsverhalten von Jugendlichen über WhatsApp. Sie vermuten, dass Nutzer*innen, die die „[Gelesen-Benachrichtigung](#)“ deaktiviert haben, im Durchschnitt langsamer antworten als diejenigen, die die Benachrichtigung aktiviert lassen.

Sie finden je Einstellung sechs freiwillige Schüler*innen, die Sie ihre WhatsApp-Protokolle auf die Durchschnittliche Antwortzeit auswerten lassen (natürlich unter Einwilligung der Eltern).

- Welchen Test wollen Sie durchführen? Prüfen Sie die Voraussetzungen. Was könnte hier problematisch sein?
- Formulieren Sie die Hypothesen.
- Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich bei Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$.

7.5 Aufgabe 5

(Fortführung von Aufgabe 4)

Sie ermitteln die folgenden durchschnittlichen Antwortzeiten der individuellen Nutzer*innen (in Minuten):

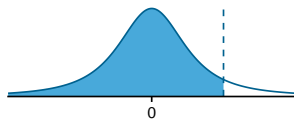
Ohne Benachrichtigung :	24,7	32,0	48,9	23,7	23,0	10,0
Mit Benachrichtigung :	18,2	14,3	23,4	31,6	36,4	9,2

- Berechnen Sie die Prüfgröße.
- Welche Schlüsse ziehen Sie aus der Untersuchung?

8 Tipps zur Vertiefung

- YouTube-Kanal „Methodenlehre Mainz“: [Inferenzstatistik \(Playlist\) 3.2–3.7](#)
- YouTube-Kanal "Methodenlehre Mainz: [Irren ist statistisch: Fehler 1. und 2. Art](#)
- Kapitel 8 in Bortz und Schuster (2010)
- Kapitel 9.5.1, 10.1.3 und 10.3 in Klemm (2002)
- Kapitel 5.3.3 in Bahrenberg, Giese und Nipper (2010)

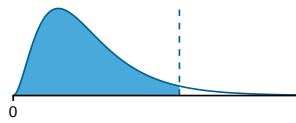
9 Anhang: Tabelle t -Verteilungen



$$P(-t_{df}) = 1 - P(t_{df})$$

df	Fläche														
	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,9999
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	318,309	636,619	3183,099
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,327	31,599	70,700
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,215	12,924	22,204
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610	13,034
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869	9,678
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959	8,025
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408	7,063
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041	6,442
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781	6,010
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587	5,694
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437	5,453
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318	5,263
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221	5,111
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140	4,985
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073	4,880
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015	4,791
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965	4,714
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922	4,648
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883	4,590
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850	4,539
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725	4,352
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646	4,234
35	0,127	0,255	0,388	0,529	0,682	0,852	1,052	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	3,340	3,591	4,153
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551	4,094
45	0,126	0,255	0,388	0,528	0,680	0,850	1,049	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	3,281	3,520	4,049
50	0,126	0,255	0,388	0,528	0,679	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496	4,014
55	0,126	0,255	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	3,245	3,476	3,986
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460	3,962
65	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,045	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	3,220	3,447	3,942
70	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	3,211	3,435	3,926
75	0,126	0,254	0,387	0,527	0,678	0,846	1,044	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643	3,202	3,425	3,911
80	0,126	0,254	0,387	0,526	0,678	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416	3,899
90	0,126	0,254	0,387	0,526	0,677	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	3,183	3,402	3,878
100	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390	3,862
110	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,659	1,982	2,361	2,621	3,166	3,381	3,848
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,160	3,373	3,837
130	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,041	1,288	1,657	1,978	2,355	2,614	3,154	3,367	3,828
140	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,288	1,656	1,977	2,353	2,611	3,149	3,361	3,820
150	0,126	0,254	0,386	0,526	0,676	0,844	1,040	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	3,145	3,357	3,813
200	0,126	0,254	0,386	0,525	0,676	0,843	1,039	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340	3,789
300	0,126	0,254	0,386	0,525	0,675	0,843	1,038	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	3,118	3,323	3,765
400	0,126	0,254	0,386	0,525	0,675	0,843	1,038	1,284	1,649	1,966	2,336	2,588	3,111	3,315	3,754
500	0,126	0,253	0,386	0,525	0,675	0,842	1,038	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310	3,747
1000	0,126	0,253	0,385	0,525	0,675	0,842	1,037	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	3,098	3,300	3,733
z	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,719

10 Anhang: Tabelle F-Verteilungen



$$F_{df_1; df_2; \alpha} = \frac{1}{F_{df_2; df_1; (1-\alpha)}}$$

Alle Werte für Flächenanteil 0,95

df_2	df_1													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	50	100
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95	248,01	251,77	253,04
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66	8,58	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80	5,70	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56	4,44	4,41
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87	3,75	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44	3,32	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15	3,02	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94	2,80	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77	2,64	2,59
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65	2,51	2,46
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54	2,40	2,35
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46	2,31	2,26
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39	2,24	2,19
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33	2,18	2,12
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28	2,12	2,07
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23	2,08	2,02
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19	2,04	1,98
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16	2,00	1,94
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12	1,97	1,91
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01	1,84	1,78
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93	1,76	1,70
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	1,96	1,88	1,70	1,63
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,92	1,84	1,66	1,59
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	1,89	1,81	1,63	1,55
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,87	1,78	1,60	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,84	1,75	1,56	1,48
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,81	1,72	1,53	1,45
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,79	1,70	1,51	1,43
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,78	1,69	1,49	1,41
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,77	1,68	1,48	1,39
110	3,93	3,08	2,69	2,45	2,30	2,18	2,09	2,02	1,97	1,92	1,76	1,67	1,47	1,38
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,75	1,66	1,46	1,37
130	3,91	3,07	2,67	2,44	2,28	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90	1,74	1,65	1,45	1,36
140	3,91	3,06	2,67	2,44	2,28	2,16	2,08	2,01	1,95	1,90	1,74	1,65	1,44	1,35
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89	1,73	1,64	1,44	1,34
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,72	1,62	1,41	1,32
300	3,87	3,03	2,63	2,40	2,24	2,13	2,04	1,97	1,91	1,86	1,70	1,61	1,39	1,30
400	3,86	3,02	2,63	2,39	2,24	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,60	1,38	1,28
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,69	1,59	1,38	1,28
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,11	2,02	1,95	1,89	1,84	1,68	1,58	1,36	1,26

Quellen

Bahrenberg, Gerhard, Ernst Giese und Josef Nipper. 2010. *Statistische Methoden in der Geographie*. 5. Aufl. Bd. 1. Univariate und bivariate Statistik. Stuttgart: Bornträger.

Bortz, Jürgen und Christof Schuster. 2010. *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler*. 7. Aufl. Berlin: Springer.

Klemm, Elmar. 2002. *Einführung in die Statistik. Für die Sozialwissenschaften*. Wiesbaden: Westdeutscher Verlag.