Chapter 2

တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ် – လွတ်လပ်သော လျှော့ချမှုမပါသည့်တုန်ခါမှု

Single Degree of Freedom System: Free Undamped Vibration

တုန်ခါမှုအကြောင်းကို ဆွေးနွေးရာတွင် လွပ်လပ်စွာရွေ့နိုင်သော ကိုသြဒီနိတ် အရေအတွက် (Degree of Freedom)သည် ပထမဦးဆုံး နားလည်ထားရမည့် အကြောင်းအရာဖြစ်သည်။ ဖမ်းချုပ်ထားခြင်းမရှိဘဲ ဘေးဘယ်ညာ၊ ထက်အောက်၊ လှည့်လည်ခြင်း စသည့် ဘက်တစ်ခုခုသို့ လွတ်လပ်စွာ ရွေ့နိုင်မှုကို လွပ်လပ်စွာရွေ့နိုင်သော ကိုသြဒီနိတ်ဟု ခေါ်ဆိုသည်။ အတိုကောက် DOF ဟု သတ်မှတ်ပြီး လားရာတစ်ဘက်သာ လွတ်လပ်စွာရွေ့နိုင်သော စနစ်ကို တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ် (SDOF – Single Degree of Freedom) ဟု ခေါ်ဆိုသည်။

အခြေခံ တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်တွင် တုန်ခါမှုလျှော့ချပေးသည့် အရာဝတ္ထုမပါဘဲ ဒြပ်ထု (m) နှင့် စပရင် (k) တို့သာပါဝင်သည်။ ယင်းကဲ့သို့ တည်ဆောက်ပုံရှိသော စနစ်များကို လျှော့ချမှုမပါသည့် တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်တုန်ခါမှုစနစ် (Undamped SDOF Vibration System) ဟု ခေါ်ဆိုသည်။

ထိုစနစ်များ သည် ပြင်ပအား သက်ရောက်မှုမရှိဘဲ ကနဦး အနှောင့်အယှက်ကြောင့်သာ လွတ်လပ်စွာ ရွေ့လျားနေပါက လွတ်လပ်သော လျှော့ချမှုမပါ တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်တုန်ခါမှုစနစ် (Free Undamped SDOF Vibration System) ဟု ခေါ်ဆိုသည်။ တခါတရံ တုန်ခါမှုဟုသည့် စကားလုံးမထည့်ဘဲ လွတ်လပ်သော လျှော့ချမှုမပါ တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်ဟု လည်း ညွှန်းဆိုနိုင်ပါသည်။ ဤဆောင်းပါးတွင် လွတ်လပ်သော လျှော့ချမှုမပါ တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်၏ အခြေခံသဘောတရားကို ဆွေးနွေးသွားမည် ဖြစ်သည်။

ရည်ရွယ်ချက်များ

ဤပို့ချချက်ပြီးဆုံးသောအခါ စာဖတ်သူအနေဖြင့် အောက်ပါတို့ကို နားလည်အသုံးချနိုင်မည်ဖြစ်သည်။

- ရွေ့လျားမှုညီမျှခြင်း (equation of motion) ကို နားလည်ပြီး အဆင့်ဆင့် တွက်ထုတ်နိုင်ရမည်။
- တုန်ခါမှုစနစ်တစ်ခု၏ အရွေ့ရှိန်မျှခြေ (dynamic equilibrium) ကို နားလည်ပြီး အသုံးချနိုင်ရမည်။
- အင်နားရှားအား၏ အဓိပ္ပာယ်ကို နားလည်ကာ လက်တွေ့နယ်ပယ်တွင် အသုံးပြုနိုင်ရမည်။

ညီမျှခြင်းတွက်ထုတ်ခြင်း

အခြေခံ တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်၏ ညီမျှခြင်းကို တွက်ထုတ်ရန်အတွက် ရိုးရှင်းသော စပရင်–ဒြပ်ထုပုံစံ (Spring–mass Model) ကို အသုံးပြုရမည်။ ဤနေရာတွင် သတိပြုရမည်မှာ ရိုးရှင်းသော စပရင်–ဒြပ်ထုပုံစံသည် သင်္ချာပုံစံတစ်ခုသာ ဖြစ်ပြီး ပြင်ပတွင် အမှန်တကယ် ဒြပ်ထုတစ်ခုကို စပရင်ဖြင့် ချိတ်ဆွဲထားသည့် စနစ်ဖြစ်နိုင်သလို၊ ရှုပ်ထွေးသော ရုပ်ပိုင်းဆိုင်ရာစနစ်တစ်ခုမှ လိုအပ်သော ယူဆချက်များ ပြုလုပ်ပြီးနောက် ပုံကြမ်းပုံစံယူ၍ တည်ဆောက်ထားသော စနစ်လည်း ဖြစ်နိုင်ပေသည်။

ဥပမာ – ပုံ 2.1 တွင် ပြသထားသည့် မော်တော်ယဉ်အင်ဂျင်များတွင် အသုံးပြုသော Cam-follower စနစ်၏ ရွေ့လျားမှုကို တွက်ချက်ရန် ယူဆချက်များပြုလုပ်ပြီး စပရင်-ဒြပ်ထုစနစ်အဖြစ် ပုံစံတည်နိုင်သည်။ Rocker arm ၏ ဒြပ်ထုတချို့ကို ဤမော်ဒယ်တွင် m_{eq} အဖြစ် စက်နှင့် စက်ပစ္စည်းများ၏လှုပ်ရှားမှု သီအိုရီပုံစံကို အခြေခံ၍ တွက်ယူထည့်သွင်းထားခြင်းဖြစ်သည်။ ထိုနည်းတူစွာ Stinger Rod ၏ တောင့်တင်းမှုကို k_{eq} အဖြစ် တွက်ချက်ပြီး ကိုယ်စားပြုတည်ဆောက်ထားခြင်းဖြစ်သည်။ m_{eq} နှင့် k_{eq} တို့ တွက်ချက်နည်းကို အသေးစိတ်လေ့လာလိုသူများ စက်မှုအင်ဂျင်နီယာဘွဲ့ကို တတိယနှစ်တွင် သင်ကြားသည့် Theory of Machines ဘာသာရပ်တွင် လေ့လာဖတ်ရှုပါ။ ပုံစံတစ်ခု ရရှိပြီးနောက်၊ နောက်တစ်ဆင့်မှာ စက်မှုတုန်ခါမှုအတွက် ကိုယ်စားပြုသည့်ညီမျှခြင်း (governing equation) ကို ရှာဖွေရန်ဖြစ်သည်။

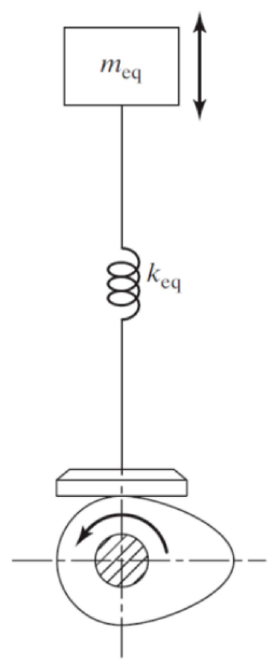

Figure 2.1: Cam-follower စနစ်၏ တုန်ခါ မော်ဒယ်

ရွေ့လျားမှုညီမျှခြင်းကို ရရှိရန် နည်းလမ်းများစွာရှိသည့်အနက် အသုံးများသောနည်းလမ်းတစ်ခုမှာ နယူတန်၏ ဒုတိယအရွေ့လျားမှုနိယာမ (Newton's Second Law of Motion) ပင်ဖြစ်သည်။

ရွေ့လျားမှုညီမျှခြင်း (Equation of Motion)

ပုံ 2.2 တွင် အထက်အောက်တုန်ခါသည့် တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်ကို ပြသထားသည်။ ပုံ(က) တွင် ငြိမ်သက်မျှခြေ (static equilibrium)၌ ရှိပြီး၊ ထို့နောက် (ခ) တွင် ကနဦးနှောင့်ယှက်မှု မိတ်ဆက်အပြီး အရွေ့ပမာဏ x ဖြင့် အချိန် တခုတွင် လွတ်လပ်စွာ တုန်ခါနေသော စနစ်ကို ပြသထားပြီး ယင်းစနစ်အပေါ်တွင် သက်ရောက်နေသော အားများကို ပုံ(ဂ)တွင် ပြသထားသည်။

ပုံ(က)သည် နယူတန်၏ ပထမ ရွေ့လျားမှုနိယာမ သက်ရောက်မှု အောက်တွင် ရှိနေသည့် မျှခြေ အခြေအနေ ဖြစ်ပြီး အောက်ပါအတိုင်း ညီမျှခြင်း 2.1 ဖြင့် ကိုယ်စားပြု ဖော်ပြနိုင်သည်။

$$\Sigma\vec{\mathbf{F}} = 0 \tag{2.1}$$

သတိပြုရမည်မှာ $\mathbf{F}$ သည် Vector ဖြစ်ပြီး အသားတင်အားပမာဏ သုညဖြစ်သည့် မျှခြေ အခြေအနေဖြစ်သည်။ ယင်းအခြေအနေအောက်တွင် သက်ရောက်နေသော အား(၂)ခုသာ ရှိသည်။ ညီမျှခြင်း 2.2တွင်

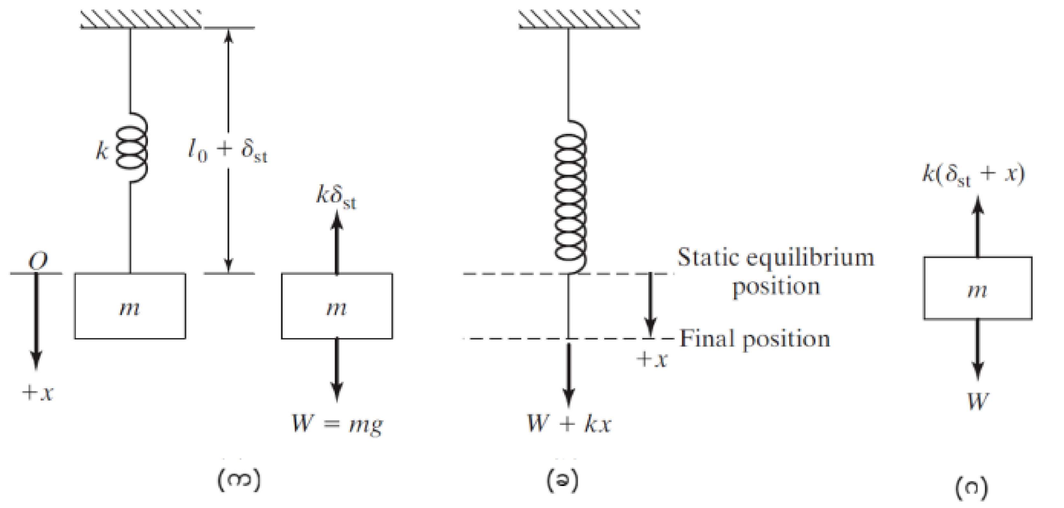

Figure 2.2: (က) ငြိမ်သက်မျှခြေအောက်ရှိ တစ်ဒီဂရီ လွတ်လပ်မှုတုန်ခါစနစ်နှင့် ၎င်း၏ ပုံစံ၊ (ခ) တုန်ခါမှုမိတ်ဆက်ပြီး အရွေ့ပုံစံ နှင့် (ဂ) ၎င်း၏ လွတ်လပ်ကိုယ်ထည်ပုံစံ ငြိမ်သက်မျှခြေ (Static Equilibrium)

ဖော်ပြထားသည့်အတိုင်း ကမ္ဘာ့ဆွဲငင်အားကြောင့်ဖြစ်ပေါ်သော အရာဝတ္ထု၏ အလေးချိန် နှင့် ကိုယ်တိုင်ဆန့်ထွက်မှုကြောင့်ဖြစ်ပေါ်လာသော စပရင်ခုခံအား တို့ဖြစ်သည်။

$$mg - k\delta\_st = 0 \quad \text{or} \quad mg = k\delta\_st \tag{2.2}$$

ထို့ကြောင့် ဤအခြေအနေတွင် ဒြပ်ထု၏ အလေးချိန် (W) သည် စပရင်၏ စပရင်အား (spring force) နှင့် ညီမျှသည်။

$$W = mg = k\delta_{st} \tag{2.3}$$

m [kg] သည် ဒြပ်ထု၊ W [N] သည် ဒြပ်ထု၏ အလေးချိန်၊ g$[9.81\ m/s^2]$ သည် ကမ္ဘာ့ဆွဲအား၊ k [N/m] သည် စပရင်ကိန်းသေ သို့မဟုတ် စပရင်တောင့်တင်းမှု နှင့် δ_{st} သည် မျှခြေတွင်လျော့ကျမှု တို့ဖြစ်သည်။

အရှိန်ဖြင့်ရွေ့လျားမှု (Accelerated Motion)

ကနဦးနှောင့်ယှက်မှုတစ်ခု ပေးပြီးနောက် တုန်ခါနေသည့် စနစ်သည် မျှခြေမဟုတ်ဘဲ၊ မျှခြေအနေအထား၏ အထက်နှင့်အောက်သို့ အချိန်နှင့်အမျှ ခေါက်တုန့်ခေါက်ပြန် ပြောင်းလဲရွေ့လျားနေသည့်စနစ်ဖြစ်သည်။ ယင်းကဲ့သို့ ရွေ့လျားနေသော စနစ်ကို တုန်ခါမှုစနစ်ဟု ခေါ်ဆိုနိုင်ပြီး ယင်း၏ တုန်ခါမှုကို နယူတန်၏ ဒုတိယရွေ့လျားမှုနိယာမ အသုံးပြု၍ ညီမျှခြင်း 2.4 အတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_G \tag{2.4}$$

အောက်သို့ရွေ့လျားနေပါက (+) ယူလျှင်၊

$$mg - k(\delta_{st} + x(t)) = m\ddot{x}(t) \tag{2.5}$$

ညီမျှခြင်း 2.3 အား ညီမျှခြင်း 2.5 သို့ ထည့်သွင်းပါက ငြိမ်သက်လျော့ကျမှုအောက်ရှိ စပရိန်အားကို ဒြပ်ထု၏ အလေးချိန်ဖြင့် ဖျက်သိမ်းနိုင်သောကြောင့် mg − k$\delta_{st} = 0$ ဖြစ်ပြီး၊

$$mg - k(\delta\_st + x(t)) = m\ddot{x}(t)$$
$$mg - k\delta\_st - kx(t) = m\ddot{x}(t) \tag{2.6}$$

ရွေ့လျားမှုညီမျှခြင်းမှာ အောက်ပါအတိုင်း ဖြစ်လာသည်။

$$-k\ x(t) = m\ddot{x}(t) \tag{2.7}$$

အရွေ့ရှိန်မျှခြေ (Dynamic Equilibrium)

ဤသဘောတရားသည် နားလည်ရန် ခက်ခဲသည့် သဘောတရားတစ်ခုဖြစ်သည်။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသော် အချိန်ဖြင့်ပြောင်းလဲနေသည့် စနစ်တစ်ခု၏ အရွေ့ရှိန်မျှခြေမှာ တကယ်မဟုတ်သည့် အခြေအနေတစ်ခုဖြစ်နေသောကြောင့်ဖြစ်သည်။ သို့ရာတွင် အရွေ့ရှိန်မျှခြေသည် လက်တွေ့သုံးစွဲမှုတွင် ထိရောက်ပြီး မရှိမဖြစ် အသုံးချရသည့် သဘောတရားတစ်ခုဖြစ်သည့်အတွက် အလွန်အရေးကြီးလှပေသည်။ သူ့၏သဘောတရားကို သီအိုရီကို ပိုင်နိုင်ပါက ကောင်းစွာ နားလည်နိုင်ပါသည်။

နယူတန် ဒုတိယ နိယာမညီမျှခြင်းကို ပုံဖြင့် ဖော်ပြရသော် ပုံ 2.3(က)အတိုင်း ဖော်ပြနိုင်သည်။

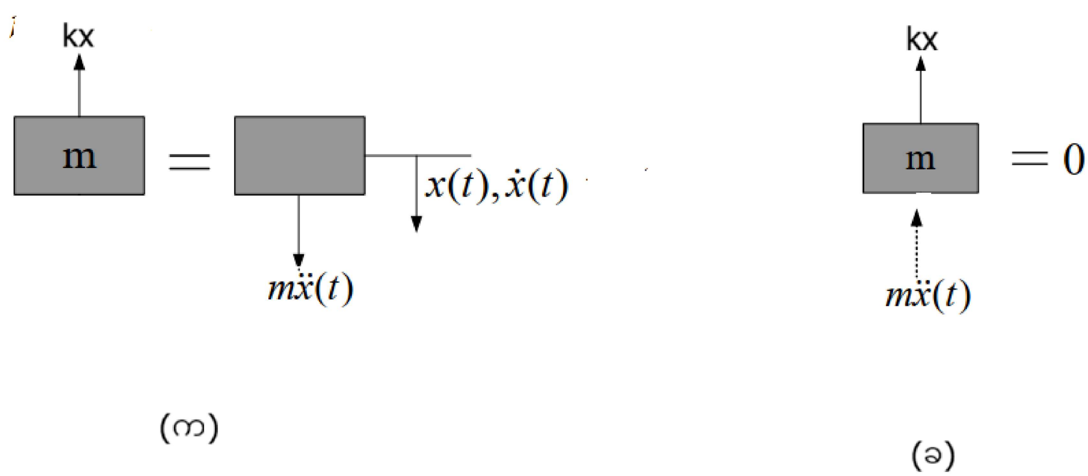

Figure 2.3: (က) နယူတန် ဒုတိယ နိယာမကို ပုံဖြင့်ဖော်ပြမှု (ခ) D' Alembert Principle (Dynamic Equilibrium) အား ပုံဖြင့်ဖော်ပြမှု

ပုံ 2.3(က)တွင်တွေ့ရသည့်အတိုင်း ဒြပ်ထုပေါ်တွင် သက်ရောက်နေသော အသားတင်အားမှာ စပရင်အားတစ်ခုတည်းသာဖြစ်သောကြောင့် မျှခြေပျက်ပြီး နယူတန်ဒုတိယနိယာမအရ အရှိန်တခုဖြင့် တုန်ခါမှု ဖြစ်မည်။ ပုံ 2.3(က)သည် နယူတန် ဒုတိယနိယာမဖြစ်ပြီး စပရင်အား kx ကြောင့် ဖြစ်ပေါ်လာသော အရှိန်နှင့် ဒြပ်ထုတို့၏ မြှောက်လဒ် $m\ddot{x}(t)$ ကို ညီမျှခြင်း၏ ညာဘက်တွင် ဖော်ပြရမည်။
သတိ – အထူးသတိပြုရမည်မှာ ထိုအခြေအနေတွင် $m\ddot{x}(t)$ ကို အင်နားရှားအားဟု ခေါ်ဆိုခွင့်မရှိပါ။ သူသည် ရိုးရိုးမြှောက်လဒ်တစ်ခုသာဖြစ်သည်။

ထိုအခြေအနေမှ $m\ddot{x}(t)$ ကို ညီမျှခြင်း 2.7 ၏ ဘယ်ဘက်သို့ ပို့ပါက ညီမျှခြင်း 2.8 ကိုရရှိမည်ဖြစ်သည်။

$$-k\ x(t) + (-m\ddot{x}(t)) = 0 \tag{2.8}$$

ညီမျှခြင်း 2.8 အား ပုံဖြင့်ပြသော် တကယ့်လက်တွေ့စနစ်တွင် ပုံ 2.3(ခ)ပါ အတိုင်း $(m\ddot{x}(t))$ ကို ဘယ်ဘက်သို့ ရွှေ့ပြောင်းပြီး $(m\ddot{x}(t))$ ၏ လားရာနှင့် ဆန့်ကျင်ဘက်ဖြစ်သည့် အထက်ဘက်သို့ ညွှန်ပြ

နေရမည်။ ထိုအခြေအနေတွင် လက်ရှိကြည့်နေသည့် အချိန်အခိုက်အတန့် t ၌ စနစ်ကို စိတ်ကူးယဉ်၍ ခဏရပ်တန့်ကြည့်မည်ဆိုပါက စနစ်သည် မျှခြေကဲ့သို့ ဖြစ်နေမည်။ ဆိုလိုသည်မှာ စပရင်အား $kx(t)$ နှင့် $(-m\ddot{x}(t))$ တို့ တစ်ခုနှင့်တစ်ခု ကျေသွားပြီး အသားတင်အား သုညဖြစ်နေမည်။

ထိုသဘောတရားသည် ထူးဆန်းနေသယောင် ဖြစ်နေမည်။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသော် အရှိန်တစ်ခုနှင့် ရွေ့လျားတုန်ခါနေသော စနစ်တစ်ခုကို အချိန် အခိုက်အတန့်တစ်ခုတွင် စိတ်ကူးယဉ်၍ ရပ်တန့်သုံးသပ်လျှင် အားနှစ်ခု မျှခြေဖြစ်နေပေသည်။ သတိပြုရန်မှာ $(-m\ddot{x}(t))$ မှာ စိတ်ကူးယဉ်၍ ရွေးထားသော အားတစ်ခုသာ ဖြစ်ပေသည်။ စနစ်၏ အရွေ့နှင့် ဒြပ်ထုတို့၏ မြှောက်လဒ်ကို စိတ်ကူးယဉ် ရွေ့ပြောင်းခြင်းဖြင့် စနစ်ပေါ်တွင် သက်ရောက်နေသော အရေးပါသည့် အားတစ်ခုကို ရရှိပေသည်။ ထို့ကြောင့် ထိုအားကို အင်နာရှားအားဟု ခေါ်ပေသည်။ သူသည် စိတ်ကူးယဉ်ထားသည့်၊ အရွေ့ရှိန်မှ တဆင့်ဖြစ်ပေါ် လာသော အားတစ်ခုသာ ဖြစ်သည်ကို သတိချပ်ရမည်။ စက်မှု အစိတ်အပိုင်းတစ်ခုကြောင့်၊ သို့မဟုတ် ပြင်ပအားပေးခြင်းကြောင့် ဖြစ်ပေါ် လာသော အားမဟုတ်ပေ။

ထိုအရေးကြီးသည့် သဘောတရားကို တွေ့ရှိခဲ့သူမှာ D' Alembert ဖြစ်ပြီး သူ့ကို ဂုဏ်ပြုသည့်အနေဖြင့် ထို သဘောတရားကို D' Alembert's Principle ဟု ခေါ်ဆိုသည်။ D' Alembert's Principle ကို အရွေ့ရှိန်မျှခြေ (Dynamic Equilibrium) ဟုလည်း ခေါ်ဆိုပေသည်။ အရွေ့အရှိန်ဖြင့် လှုပ်ရှားနေသော စနစ်ကို အချိန်တစ်ခု၌ ရပ်တန့်၍ ကြည့်ထားသည့် စိတ်ကူးယဉ် မျှခြေတစ်ခုဖြစ်ခြင်းကြောင့် နားလည်ရန် ခက်ခဲပေသည်။

သတိ – အထူးသတိပြုရမည်မှာ ထိုအခြေအနေတွင်–

- $-m\ddot{x}(t)$ ကို အင်နားရှားအားဟု ခေါ်ဆိုရမည်။ နယူတန်၏ နိယာမညီမျှခြင်း ညာဘက်ရှိ $m\ddot{x}(t)$ ကို အင်နားရှားအားဟု ခေါ်ဆိုခွင့် မရှိပါ။ အင်နားရှားအားသည် အရှိန်၏ လားရာ ပြောင်းပြန်ဘက်သို့ သက်ရောက်နေသည်ကိုလည်း သတိချပ်ပါ။
- အင်နားရှားအားကို ပမာဏသီးသန့် ညွှန်းဆိုလိုပါက $m\ddot{x}(t)$ ဟု အလွယ်ပြောဆိုနိုင်သော်လည်း လားရာဘက်မပါဘဲ အားကို ဆွေးနွေးမှုမလုပ်သင့်ပေ။
- အင်နားရှားအားသည့် လက်တွေ့တွင် လွန်စွာ အရေးပါလှပေသည်။ အဘယ်ကြောင့်ဆိုသော် တုန်ခါမှု အရှိန် ပမာဏ မြင့်လေ၊ အင်နားရှားအား များလေ ဖြစ်သည့်အတွက် စနစ်ပေါ်သို့ မလိုလားအားသည့် ဒဏ်အားများ ဖြစ်ပေါ်နိုင်ပြီး ပျက်စီးသည်အထိ ထိခိုက်နိုင်ပေသည်။
- ထို့ကြောင့် တုန်ခါမှုကို အရွေ့ရှိန်ရှိသည့် နေရာတိုင်းတွင် စနစ်တကျ လေ့လာ၍ စိတ်ချရသည့် အဆင့်အထိ လျှော့ချရန် လိုအပ်ခြင်းဖြစ်သည်။

D' Alembert Principle ညီမျှခြင်း 2.8 ကို ဆက်လက်၍ ရှင်းလင်းပါက ညီမျှခြင်း 2.9 ကို ရရှိမည်။

$$m\ddot{x}(t) + k\ x(t) = 0 \tag{2.9}$$

ညီမျှခြင်း 2.9 သည် အခြေခံအကျဆုံး တစ်ဒီဂရီလွတ်လပ်မှုစနစ်၏ တုန်ခါမှုကို ပြသည့် အရွေ့ညီမျှခြင်း ဖြစ်ပေသည်။ ဤအရွေ့ညီမျှခြင်းသည် အချိန်အလိုက်ဒုတိယအဆင့်ထိပြောင်းလဲမှုကို တွက်ယူဖော်ပြထားသည့် ညီမျှခြင်း (second order ordinary differential equation) တစ်ခုဖြစ်ပေသည်။ ညီမျှခြင်း၏ ပထမကိန်းသည် အင်နားရှားအား (inertia force)၏ ပမာဏဖြစ်ပြီး ဒုတိယကိန်းသည် စပရင်အား (spring force) ဖြစ်သည်။

ရွေ့လျားမှုညီမျှခြင်းကို ရရှိရန်အတွက် စွမ်းအင်ထိန်းသိမ်းမှုနိယာမ (Principle of Conservation of Energy) နှင့် ရေလီး၏ စွမ်းအင်နည်းလမ်း (Rayleigh's Energy Method) ကဲ့သို့သော အခြား နည်းလမ်းများကိုလည်း အသုံးပြုနိုင်သည်။