物理学 A 演習問題 #11 解答

2024 年 6 月 20 日配布・6 月 27 日提出締切・解答公開

1 三次元極座標

講義では二次元の極座標を扱ったが，一般の次元でも極座標は同様に定義される。例えば，三次元においては

$$x = r\sin\theta\cos\phi\ , \qquad y = r\sin\theta\sin\phi\ , \qquad z = r\cos\theta \tag{1}$$

によって極座標 (r, θ, ϕ) が定義され，対応して基底ベクトルは以下の通り定義される。

$$\boldsymbol{e}_r \equiv \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}\ , \qquad \boldsymbol{e}_\theta \equiv \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta}\ , \qquad \boldsymbol{e}_\phi \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi}\ . \tag{2}$$

(1) 定義式 (2) に従って微分を実行することにより，$\boldsymbol{e}_\theta$ と $\boldsymbol{e}_\phi$ の成分を $\boldsymbol{e}_r$ と同様の形で求めよ。

■略解　具体的な計算をすれば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\theta &= \frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}\ , \\
\boldsymbol{e}_\phi &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial\phi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

(2) これまで扱ってきた直交座標（Descartes（デカルト） 座標）系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \mathbf{e}_z$ と極座標系における基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ の間の変換則が，以下の通り与えられることを示せ。［ヒント：座標系の取り方でベクトルの成分は変わるけれども，位置を指し示すベクトルは変わらない：$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = r\boldsymbol{e}_r$ が成り立つ］

$$\boldsymbol{e}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{3a}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{3b}$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y\ . \tag{3c}$$

■略解　これは問題の聞き方が悪いが，上で書いた $r\theta\phi$ 系の基底 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ の**成分表示**はすべて xyz 系の基底で見たものである［成分は見ている座標系によって変わることを思い出し，注意せよ］。すなわち

$$\boldsymbol{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{4a}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y - \sin\theta\boldsymbol{e}_z\ , \tag{4b}$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\sin\phi\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\boldsymbol{e}_y\ . \tag{4c}$$

このため示された。本当は基底ベクトル間の変換則ではなくて，本当は成分間の変換則を導け，と問うべきであった。

(3) 極座標の基底で表したときの速度ベクトルの各成分が以下の通りになることを示せ。

$$v_r = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\ , \qquad v_\theta = r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r\dot{\theta}\ , \qquad v_\phi = r\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}\sin\theta = r\dot{\phi}\sin\theta \tag{5}$$

例えば v_θ は速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ を極座標の基底で表したときの θ 成分を表す。ドット記号は t 微分：$\dot{X} \equiv \mathrm{d}X/\mathrm{d}t$。

■略解　速度ベクトルは位置ベクトルの時間微分として定義されるのであった：$\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$。これを xyz 系の基底で書くと

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z \ . \tag{6}$$

ここで xyz 系の基底は時間に依らないことに注意せよ。さらに，(1) 式を各々 t で微分すると

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi \tag{7a}$$

$$\dot{y} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \tag{7b}$$

$$\dot{z} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \ . \tag{7c}$$

一方，設問 (2) の答で得られた xyz 系の基底と $r\theta\phi$ 系の基底の変換則を逆に解くと，まず行列表示して三本まとめて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}$$

両辺に左から逆行列

$$\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

を掛けて

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{e}_\phi \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\boldsymbol{e}_x = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \ , \tag{8a}$$

$$\boldsymbol{e}_y = \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi \ , \tag{8b}$$

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \ . \tag{8c}$$

(7) 式と (8) 式を (6) 式に代入して

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= (\dot{r}\sin\theta\cos\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\theta\sin\phi)(\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_\theta - \sin\theta\boldsymbol{e}_\phi) \\ &\quad + (\dot{r}\sin\theta\sin\phi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)(\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_\theta + \cos\phi\boldsymbol{e}_\phi) \\ &\quad + (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \cdots \\ &= \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\phi + r\dot{\phi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \ . \end{aligned} \tag{9}$$

したがって $\boldsymbol{v}$ を極座標基底で表すことができたので，これが $\boldsymbol{v} = v_r\boldsymbol{e}_r + v_\theta\boldsymbol{e}_\theta + v_\phi\boldsymbol{e}_\phi$，つまり係数を読み取って $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$, $v_\phi = r\dot{\phi}\sin\theta$ が示せた。

(4) 極座標の基底で表したときの加速度ベクトルの各成分が以下の通りになることを示せ。

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta - r\dot{\theta}^2 \ , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta \ , \quad a_\phi = r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta \ . \tag{10}$$

■略解　同様に計算できるので略。

2　単振り子

長さ ℓ の糸の一端が原点 O に固定されており，他端に取り付けられた質点 m による振り子運動を考える。運動は鉛直面内で行なわれるとする。以下の問に答えよ。

(1) 質点 m の位置を直交座標系で見て (x, y) とする。極座標系で見た加速度の r 成分 a_r と θ 成分 a_θ はどう書けるか？［ヒント：前の大問 (4) で $r = \ell = \mathrm{const.}$，$\phi = 0$ という二次元面内で運動が行なわれると考えよ。］

■略解　振り子の運動は鉛直面内で行なわれるので，前の大問で $\phi = 0$ とした結果が使える。さらに糸は伸び縮みしないので原点から質点までの距離は時間に依存しない，すなわち $r = \ell =$ 一定 で $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ である。このとき，前問の (4) から加速度の r 成分と θ 成分は各々 $a_r = \boxed{-\ell\dot{\theta}^2}$ と $a_\theta = \boxed{\ell\ddot{\theta}}$ 。

(2) 状況を図示し，糸の張力を S として，運動方程式の動径成分（r 成分）と角度成分（θ 成分）を書き下せ。［ヒント：動径成分は $ma_r = F_r$，角度成分は $ma_\theta = F_\theta$ と書けて，右辺の力は高等学校で学んだ知識から出る。］

■略解　図は略。水平右向きに x 軸，鉛直上向きに z 軸を取る（このとき $x = \ell \sin\theta$，$z = \ell\cos\theta$，一方で $\phi = 0$ としているので $y = 0$ 面で考えていることになる)。質点には糸からの張力（S とする）と重力が働いている。それを r 成分と θ 成分に分けると S はそのまま r 成分になっていて，重力は r 成分が $mg\cos(\pi - \theta) = -mg\cos\theta$ で θ 成分が $-mg\sin(\pi - \theta) = -mg\sin\theta$ となる。したがってヒント合わせて運動方程式は

$$(r \text{ 方向})：\ -m\ell\dot{\theta}^2 = -S - mg\cos\theta\ , \qquad (\theta \text{ 方向})：\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\ . \tag{11}$$

(3) 振れ角が充分小さい（$|\theta| \ll 1$）とき，運動方程式の角度成分が単振動の形に帰着することを示せ。周期 T は？

■略解　前問より角度成分の運動方程式は $\ddot{\theta} = -(g/\ell)\sin\theta$ で与えられる。振れ角が充分小さいとき近似式 $\sin\theta \approx \theta$ を使えて

$$\ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\theta\ . \tag{12}$$

これは角振動数 $\omega \equiv \sqrt{g/\ell}$ の単振動の方程式である。

(4) 初期条件 $\theta(t = 0) = \theta_0$，$\dot{\theta}(t = 0) = 0$ を満たす解 $\theta(t)$ を求めよ。また，このときの張力の時間変化も求めよ。

■略解　前問の方程式の一般解は単振動の知識から $\theta(t) = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$，ただし $\omega = \sqrt{g/\ell}$。初期条件から定数が $c_1 = \theta_0$, $c_2 = 0$ と決まるので解は $\theta(t) = \boxed{\theta_0\cos\omega t}$ 。これを運動方程式の r 成分に代入すれば張力の時間変化も分かる（$\cos\theta \approx 1$)。

(5) 振れ角 θ が必ずしも小さくないときは，運動方程式を単振動の形に近似することができない。このときの振り子の周期 T は第一種完全楕円積分と呼ばれる特殊関数を用いて表されることが知られているが，この有限の θ の場合の振り子運動について自由に調べ，分かったことをまとめてみよ。余力のある者は導出も試すとよい。

■略解　略。ちなみに楕円積分には第一種と第二種があります。