物理学 A 演習問題 #2 略解

2024 年 4 月 18 日問題配布・4 月 25 日提出締切・解答公開

1　一般解を求める別の方法

講義で垂直落下の問題を扱った際には，質点 m の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg \tag{1}$$

を直接積分することによって一般解を導いた。しかし，(1) 式をよく見ると解 $z(t)$ は「二回微分すると定数 $-g$ になる関数」であることが分かる。微分せずとも定数である関数は $z(t) = c$（c：定数），一回微分すると定数になる関数は $z(t) = ct$（c：定数）であるので，(1) 式の解，つまり二回微分すると定数になる関数として，二次関数

$$z(t) = at^2 + bt + c \qquad (a,\, b,\, c：\text{定数}) \tag{2}$$

を仮定することができるだろう。このとき，以下の問に答えよ。

(1) (2) 式を (1) 式に代入することで，a を決定せよ。[注：こうして求まった $z(t)$ は二つの任意定数を含むので，(1) 式の一般解を与える。一般解を求めるにはこのような「発見的」な方法でもよい]

■略解　(2) 式について $\mathrm{d}^2 z/\mathrm{d}t^2 = 2a$ だから，これを (1) 式に代入すると $2ma = -mg$，したがって $a = \boxed{-g/2}$。b と c は次問で初期条件を与えないと決まらない（二階の微分方程式なので，定数が二つ残っているのは当然）。

(2) 初期条件 $z(0) = z_0,\, v(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$ を課して残りの二つの定数 $b,\, c$ を決定した上で，$z(t)$ を求めよ。

■略解　前問より $z(t) = -(g/2)t^2 + bt + c$ だから $z(0) = c = \boxed{z_0}$ と $v(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -gt + b\Big|_{t=0} = b = \boxed{v_0}$ から定数が求まった。よって $z(t) = \boxed{-(g/2)t^2 + v_0 t + z_0}$。

2　垂直投射（鉛直投げ上げ）

講義では，質点 m を適当な高さ $z = h$ から地面（$z = 0$）に向けて静かに落とす問題を扱った。ここでは，時刻 $t = 0$ に適当な位置 $z = z_0$ から垂直上方に向けて初速 $v_0 > 0$ で投げ上げる問題を考える。地面を基準点（原点）$z = 0$ とし，座標軸は講義と同様に鉛直上向きに設定せよ。[注：本質的には講義で扱ったのと全く同じ問題である]

(1) 状況を図示し，運動方程式を記せ。原点の位置と質点にはたらく力の向きおよび大きさを明記すること。

■略解　図は略。運動方程式は $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg}$。運動方程式が講義で扱った静かに落とす問題と全く同じなので，物理としても全く同じ。初期条件が違うだけ。

(2) 初期条件を満たす解を求めよ。

■略解　(1) の運動方程式の一般解は，講義でやったように二回積分すれば求められる。m で約分して $\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -g$ としておく。まず両辺を t で一回積分すると $\displaystyle\int \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \int \mathrm{d}t\,(-g)$。右辺はそのまま $\int \mathrm{d}t\,(-g) = -gt + c_1$（$c_1$：定数）。左辺はその意味を考えると「$z$ を t で二回微分したものを，t で一回積分している」ものなので，微分の回数合計としては一回。つまり $\displaystyle\int \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ である（積分定数は右辺に全部押し込められているとして省略した）。したがって $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt + c_1$。この式の両辺をもう一度 t で積分すると

$\displaystyle\int \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \int \mathrm{d}t\,(-gt+c_1)$。右辺は簡単で $\int \mathrm{d}t\,(-gt+c_1) = -gt^2/2 + c_1 t + c_2$（$c_2$：定数)。左辺の意味を再び考えると「$z$ を t で微分したものを，t で積分している」ので，これは z そのもの（微分したものを積分すると（積分定数の違いを除いて）元に戻るという当たり前の事実から）。したがって $z(t) = -(g/2)t^2 + c_1 t + c_2$ と一般解がもとまった。二つの積分定数 c_1 と c_2 は初期条件を与えて初めて決まる。そこで初期条件から $z(0) = c_2 = z_0$ と $v(0) = \left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left. -gt + c_1\right|_{t=0} = c_1 = v_0$ で二つの任意定数が決定された。したがって所望の解は $\boxed{z(t) = -(g/2)t^2 + v_0 t + z_0}$。

(3) 特に $z_0 = 0$，すなわち地面から投げ上げた場合を考える。$z(t)$ と速度 $v(t)$ を t の関数として図示した上で，最高点の座標 z_{H} と最高点に到達するまでに要する時間 t_{H} を求めよ。

■略解　$z_0 = 0$ のとき前問より $z(t) = -(g/2)t^2 + v_0 t$ したがって $v(t) = \mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -gt + v_0$。関数の図示は略。最高点に達する時刻 $t = t_{\mathrm{H}}$ では速度がゼロなので，$v(t_{\mathrm{H}}) = -gt_{\mathrm{H}} + v_0 = 0$ より $t_{\mathrm{H}} = \boxed{v_0/g}$。このとき $z_{\mathrm{H}} \equiv z(t_{\mathrm{H}}) = \boxed{v_0^2/2g}$。

(4) 質点が再び地面に戻ってくる時刻 t_{R} を求めよ。t_{H} と t_{R} の関係はどのようになっているか？それはなぜか？

■略解　運動の対称性より $\boxed{t_{\mathrm{R}} = 2t_{\mathrm{H}} = 2v_0/g}$（地面から最高点に行くまでに掛かる時間と，最高点から地面に戻ってくるまでに掛かる時間は同じ。なぜなら行き帰りで運動法則が全く同じなので)。この説明にピンと来なければ地面に戻ってくるとき $z = 0$ なので $z(t_{\mathrm{R}}) = -(g/2)t_{\mathrm{R}}^2 + v_0 t_{\mathrm{R}} = 0$ という二次方程式を解いて $t_{\mathrm{R}} = 2v_0/g$ と求めればよい。

3　垂直落下運動におけるエネルギー保存則

以下の文章の空欄を埋めよ。

運動方程式 (1) の両辺に速度 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を掛けると $\boxed{\quad\text{イ}\quad}$ を得る。一方，微分公式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{f(x)\}^2 = 2f'(x)f(x)$ を思い出すと $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \boxed{\quad\text{ロ}\quad}$ であるから，$\boxed{\quad\text{イ}\quad}$ の両辺を t で積分すると $\boxed{\quad\text{ハ}\quad}$ を得る。ただし，積分定数を E と置いた。したがって，高等学校で習った「位置エネルギーと運動エネルギーの和は時間的に一定である」という力学的エネルギー保存則

$$mgz + \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = E$$

が運動方程式 (1) から導かれた。

■略解　**イ**はただ掛けたものをそのまま書けばよく $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -mg\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}$。**ロ**は微分公式を適用すればよく $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \boxed{2\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}}$ となって**イ**の左辺が出てくる（$\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = z'(t)$ なので微分公式から $[z'(t)]^2 = 2z'(t)z''(t)$)。そこで**イ**の両辺を積分すると $\boxed{\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = -mgz + E}$（$E$ は積分定数）となるので，これが**ハ**。