物理学 A 演習問題 #10 略解

2024 年 6 月 13 日配布・6 月 20 日提出締切・解答公開

1　ベクトル解析

二つの三次元ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ に対して，外積（ベクトル積）は

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

で定義される。以下の問に答えよ。

(1) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を適当な三次元ベクトルとするとき，次の四つの公式を示せ。

(a) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$,　(b) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$

(c) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$,　(d) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$

■略解　どれも直接計算で示せるので略。示したい式が複数の成分を持つ場合（(a), (b), (d)）は例えば x 成分だけちゃんと計算しておけばあとは同じことの繰り返しなので「y, z 成分も同様」としてよい。

(2) ベクトル三重積の公式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を示せ。[右辺を見てバックキャブルールと呼ばれる]

■略解　これも直接計算するだけなので略。

(3) 三次元 xyz 空間において，各々の座標軸方向の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad \boldsymbol{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

に対して，内積は容易に確認できるように $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1$, $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$ である。外積について

$$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z , \qquad \boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x , \qquad \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \tag{2}$$

を示せ。

■略解　これも直接計算するだけなので略。例えば第一式は「x 軸から y 軸にネジを回したときにネジの進む方向が z 軸」のようになっているので，慣れれば自然と覚えてしまう。また三つの式で添字が $x \to y \to z$, $y \to z \to x$, $z \to x \to y$ と循環している。

[注：第 12 回で導入される角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ は，ベクトル積によって定義される物理量である。]

2　中心力

位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ にある質点 m が，$r = |\boldsymbol{r}|$ だけ離れた質点 M から受ける万有引力ポテンシャルは

$$U(\boldsymbol{r}) = -G\frac{Mm}{r} = -G\frac{Mm}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3}$$

である。以下の問に答えよ。

(1) m の受ける力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$ の各成分を求め，$\boldsymbol{F} = -G\dfrac{Mm}{r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ と表されることを示せ。

■略解　$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} U(\boldsymbol{r})$ の x 成分 F_x を具体的に計算する。y 成分と z 成分も全く同様の計算ができる。

$$\begin{aligned} F_x(\boldsymbol{r}) &= -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial x} \\ &= GMm\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \\ &= GMm\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\right] \\ &= GMm\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\cdot 2x \\ &= -GMm\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ &= -GMm\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)\cdot(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \\ &= -GMm\frac{x}{r^2\cdot r} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{x}{r}\ . \end{aligned}$$

同様にして

$$F_y(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{y}{r}\ , \qquad F_z(\boldsymbol{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\frac{z}{r}$$

なので，三本まとめて表すと

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

とかけて，示された。

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{F}$ について，$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ を示せ。

■略解　具体的に計算する。(1) より

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = -GMm\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\left[\frac{1}{r^3}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\right] = -GMm\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\frac{x}{r^3}\\ \frac{y}{r^3}\\ \frac{z}{r^3}\end{pmatrix} = -GMm\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\end{pmatrix}$$

であるので，各成分が 0 になることが言えればよい。x 成分について

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right) = z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) - y\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

であるが，右辺第一項の微分は

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}\right] = -\frac{3}{2}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{3y}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = -\frac{3y}{r^5}$$

と計算できる。第二項も全く同様に計算できて（上の結果で $y \to z$ と置き換えて）$-3z/r^5$ となる。したがって

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right) = z\left(-\frac{3y}{r^5}\right) - y\left(-\frac{3z}{r^5}\right) = 0\ .$$

他の成分も全く同様なので，結局 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$。

［注：一般に，等方的な中心力は保存力である。］