

# 物理学 A 演習問題 #4

2024 年 5 月 2 日配布・5 月 9 日提出締切

## 1 二物体の衝突（運動量保存則）

水平な  $x$  軸（直線）上を質点  $m_1$  が速度  $v_1 > 0$  で、質点  $m_2$  が速度  $v_2 > 0$  で運動している。以下の問に答えよ。

- (1) 両者が衝突して一体となり運動を続けた。衝突後の速度を求めよ。
- (2) 衝突の前後で系の運動エネルギーはどれだけ変化したか？ [注：衝突の前後で運動量は保存するが、運動エネルギーは一般に保存しない]

同じ問題設定で衝突後に一体化しなかった場合に、質点間の反発係数を  $0 < e \leq 1$  として以下の問に答えよ。

- (3) 衝突前後における運動量保存の式と跳ね返りの式を立て、衝突後のそれぞれの質点の速度  $v'_1, v'_2$  を求めよ。
- (4) 衝突前後での系の運動エネルギーの変化を求めよ。運動エネルギーが変化しないのはどのような場合か？

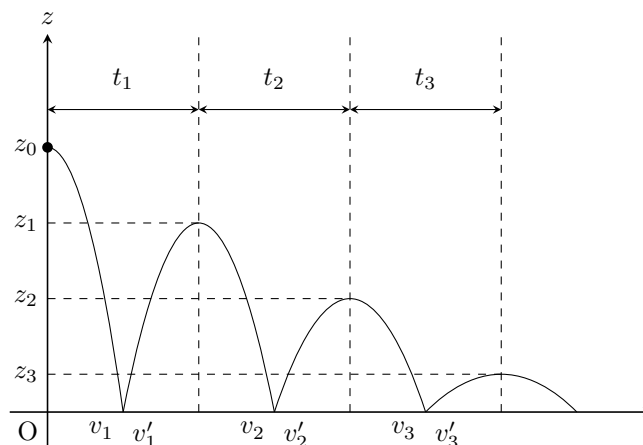
## 2 衝突と跳ね返り

時刻  $t = 0$  において、地表から高さ  $z_0$  の地点から質点  $m$  を自由落下させた。重力加速度を  $g$ 、質点と地表の反発係数を  $0 < e < 1$  として、以下の問に答えよ。図は衝突の様子をずらして書いたものであり、水平方向に意味は無い。

- (1) 一回目の衝突直前および直後の質点の速度  $v_1, v'_1$  をそれぞれ求めよ。
- (2) その後、質点は時刻  $t = t_1$  に最高点に達し、地表と二回目の衝突を経験する。 $t_1$  と、このときの最高点の高さ  $z_1$  を求めよ。[ $t_1$  は跳ね返ってから  $z_1$  までの時間ではないことに注意せよ]
- (3) 図において、二回目の衝突直前（直後）の速度  $v_2$  ( $v'_2$ )、および次回の衝突までの量  $t_2, z_2, v_3, v'_3$  を求めよ。
- (4) これまでの結果から、 $t_n$  と  $z_n$  は自然数  $n$  を用いて各々どのように表されると予想されるか？
- (5) 衝突を十分な回数繰り返すと、運動は停止すると思われる。そのときまでに要した時間  $T \equiv \sum_{n=1}^{\infty} t_n$  と質点の

総移動距離  $Z \equiv z_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z_n$  を求めよ。必要ならば、次の無限級数の公式を用いてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$$



### 3 雨滴の落下運動

単位時間当たりに質量が  $\mu$  だけ増加しながら落下する雨滴を考える ( $\Delta m/\Delta t = \mu > 0$ , 微分で書くと  $dm/dt = \mu$ , ということ)。雨滴の位置および速度について, 初期条件は  $z(0) = z_0, v(0) = 0$  とする。以下の問に答えよ。

(1) 運動方程式を展開した形

$$(m_0 + \mu t) \frac{d^2 z}{dt^2} + \mu \frac{dz}{dt} = -(m_0 + \mu t)g \quad (1)$$

を導け。

(2) (1) 式は複雑な形をしており, 展開前の表式に立ち戻るか, あるいは変形: (左辺)  $= \frac{d}{dt} \left\{ (m_0 + \mu t) \frac{dz}{dt} \right\}$  に気がつかないと解くのが難しそうに思える。しかし, (1) 式の形を良く見ると, 演習 #2-1 の方法が使えるそうである。解を  $z(t) = at^2 + bt + c$  と置いて (1) 式に代入し, 両辺の係数を比較することで定数を決めることができる。こうして得られる  $z(t)$  を講義で導いたものと比べて結果を議論せよ (「講義と同じ」とか「講義と違う」とただ書いて終わるのではなく, なぜそうなのかを議論せよ。方法が違うのに同じ結果に至ったならばその理由を, 異なる結果に至ったならばその原因を考えて自由に書いてみよ)。