物理学 A 演習問題 #3 略解

2024 年 4 月 25 日問題配布・5 月 2 日提出締切・解答公開

1　二物体の衝突（モンキー・ハンティング）

時刻 $t=0$ に原点 O から，x 軸からはかって角度 θ の向きに初速 v_0 で小球 A を投げる（$0<\theta<\pi/2$）。これと同時に，位置 (x_1, y_1) から別の小球 B が静かに鉛直下方に落ち始めた。$v_0, x_1, y_1>0$ として，以下の問に答えよ。

(1) 状況を図示し，小球 A および B の運動方程式を記せ。x 方向，y 方向それぞれ二本ずつの運動方程式が立つ。

■略解　図示は略（A については講義と全く同じ。これに加えて位置 $(x_1, y_1$ から落下をはじめる B が存在)。運動方程式は A について x 成分が $\boxed{m_\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t^2}=0}$，$y$ 成分が $\boxed{m_\mathrm{A}\dfrac{\mathrm{d}^2y_\mathrm{A}}{\mathrm{d}t^2}=-m_\mathrm{A}g}$。B について x 成分が $\boxed{m_\mathrm{B}\dfrac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t^2}=0}$，$y$ 成分が $\boxed{m_\mathrm{B}\dfrac{\mathrm{d}^2y_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t^2}=-m_\mathrm{B}g}$。

(2) 小球 B の運動方程式を解け。初期条件を考慮すること。x 方向，y 方向はそれぞれどのような運動であるか？

■略解　(1) で書いた B の運動方程式の x 成分は $\dfrac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t^2}=0$ と同じことで，両辺を t で積分すると $\displaystyle\int\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=c_1$（$c_1$：定数)。左辺は「$x$ を t で二回微分したものを t で一回積分したもの」つまり x を t で一回微分したものであり，$\dfrac{\mathrm{d}x_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t}=c_1$。これをもう一度 t で積分すると $\displaystyle\int\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{B}}{\mathrm{d}t}=c_1\int\mathrm{d}t$ となって，左辺は「x を t で微分したものを t で積分したもの」なので一回も微分していないものと同じ。結局 $x_\mathrm{B}(t)=c_1t+c_2$（c_2：定数）を得る。初期条件：$x_\mathrm{B}(0)=x_1$，$v_\mathrm{Bx}=0$（静かに落ち始めたということは初速度 0 で落ち始めたということ）から $c_1=0$，$c_2=x_1$ と決まり，$\boxed{x_\mathrm{B}(t)=x_1}$。$y$ 方向の運動方程式も全く同様に t で二度積分すれば $y_\mathrm{B}(t)=c_3+c_4t-gt^2/2$ で初期条件：$y_\mathrm{B}(0)=y_1$ と $v_{\mathrm{B}y}(0)=0$ から定数が決まって $\boxed{y_\mathrm{B}(t)=y_1-gt^2/2}$。以上から，B は $\boxed{x\text{ 方向に静止し続け，}y\text{ 方向は自由落下運動}}$。

(3) 小球 A の運動方程式を解け。初期条件を考慮すること。x 方向，y 方向はそれぞれどのような運動であるか？

■略解　(2) と全く同様に A の運動方程式も積分すれば，一般解 $x_\mathrm{A}(t)=c_1't+c_2'$，$y_\mathrm{A}(t)=c_3'+c_4't-gt^2/2$ を得る。x 方向について初期条件：$x_\mathrm{A}=0$，$v_\mathrm{Ax}=v_0\cos\theta$ から $c_1'=v_0\cos\theta$，$c_2=0$ と決まり，y 方向について初期条件：$y_\mathrm{A}=y_0$，$v_\mathrm{Ay}=v_0\sin\theta$ から $c_3'=y_0$，$c_4'=v_0\sin\theta$ と決まる。結局 $\boxed{x_\mathrm{A}(t)=(v_0\cos\theta)t}$ と $\boxed{y_\mathrm{A}(t)=(v_0\sin\theta)t-gt^2/2}$。以上から，A は $\boxed{x\text{ 方向に等速直線運動，}y\text{ 方向は鉛直投げ上げ運動}}$。

(4) 二つの小球 A と B を空中で衝突させたい。$\tan\theta$ をいくらに取ればよいか。また衝突時刻 t_C を求めよ。

■略解　衝突時刻を t_C とすると衝突時 A と B は同じ位置にいるので，$t=t_\mathrm{C}$ において $x_\mathrm{A}(t_\mathrm{C})=x_1$ と $y_\mathrm{A}(t_\mathrm{C})=y_\mathrm{B}(t_\mathrm{C})$ が成り立つ。x 方向の条件は (2) と (3) の結果から $(v_0\cos\theta)t_\mathrm{C}=x_1$。これを解いて $t_\mathrm{C}=x_1/v_0\cos\theta$。一方，$y$ 方向の条件は同じく (2) と (3) から $(v_0\sin\theta)t_\mathrm{C}-gt_\mathrm{C}^2/2=y_1-gt_\mathrm{C}^2/2$。これに直前で求めた t_C の表式を代入して整理すると $\boxed{\tan\theta=y_1/x_1}$。[$y$ 方向の加速度は両者で共通なので，$t=0$ で A から B をめがけて投射，つまり $t=0$ で A から B を見る角度：$\tan\theta=y_1/x_1$ で投射すれば衝突が起こる。]

(5) 二つの小球 A と B が空中で（つまり B が落下する前に）衝突するために必要な初速 v_0 の最小値を求めよ。

■略解　空中で衝突するということは衝突する点の y 座標が 0 以上と言い換えられる。すなわち $y_\mathrm{A}(t_\mathrm{C})=y_1-gt_\mathrm{C}^2/2=y_1-(g/2)(x_1/v_0\cos\theta)^2\geq 0$ であり，これを v_0 について解けば $\boxed{v_0\geq\sqrt{\dfrac{gx_1^2}{2y_1\cos^2\theta}}}$。

$\tan\theta = y_1/x_1$ の関係から cos 以外で表してももちろんよい。

2 有限の高さからの斜方投射

講義では，x 軸からはかって角度 θ の向きに初速 v_0 で，原点 O から小球を投げる状況を考え，投射角が $\theta=\pi/4$ のときに投射距離が最大となることを見た。ここでは，時刻 $t=0$ において有限の高さ $y_0>0$ から小球を投げる状況を考え，飛距離を最大にする場合の投射角について議論する。すなわち，初期条件として

$$x(0)=0\,,\quad y(0)=y_0\,,\quad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0\cos\theta\,,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0\sin\theta \tag{1}$$

を与える。

(1) 初期条件 (1) の下で運動方程式を解き，時刻 t における小球の位置 $(x(t),y(t))$ を求めよ。

■略解　上の (2) や (3) と全く同様にして $\boxed{x(t)=(v_0\cos\theta)t}$ と $\boxed{y(t)=y_0+(v_0\sin\theta)t-gt^2/2}$ 。今回は開始点の y 座標が 0 でないので，y_0 が入っている。

(2) 小球が地面に到達する時刻を t_{C} とする。小球の水平方向の飛距離 $\ell(\theta)\equiv x(t_{\mathrm{C}})$ が

$$\ell(\theta)=\frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}}\right) \tag{2}$$

となることを示せ。

■略解　地面に到達するとき $y(t_{\mathrm{C}})=y_0+(v_0\sin\theta)t-gt^2/2=0$ であり，これは t_{C} の二次方程式である。整理すると $t_{\mathrm{C}}^2-\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}t_{\mathrm{C}}-\dfrac{2y_0}{g}=0$。解の公式などで解けて，$t_{\mathrm{C}}=\dfrac{v_0\sin\theta\pm\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0}}{g}$。$\pm$ のうち $-$ の方は $t_{\mathrm{C}}<0$ なので不適切。$t_{\mathrm{C}}>0$ の解を採用して

$$t_{\mathrm{C}}=\frac{v_0\sin\theta\pm\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+2gy_0}}{g}=\frac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}}\right).$$

$\boxed{\text{別解}}$ として軌道の式からも求めることができる。(1) で求めた式から媒介変数としての時刻 t を消去すると $y=\cdots=-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2+(\tan\theta)x+y_0=-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{2g}\right)^2+y_0+\dfrac{\sin^2\theta}{2g}$。これは軸が $x=v_0^2\sin 2\theta/2g$ で上に凸の放物線である。その x 軸との二つの交点を $x_-<x_+$ とすると，飛距離は $\ell(\theta)=v_0^2\sin 2\theta/2g+(x_+-x_-)/2$ と与えられる［図を描いて確認せよ］。この x_- と x_+ は二次方程式 $y=0$ つまり $-\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2+(\tan\theta)x+y_0=0$ つまり $x^2-\dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}x-\dfrac{2y_0v_0^2\cos^2\theta}{g}=0$ の二解なので，解と係数の関係から $x_++x_-=v_0^2\sin 2\theta/g$，$x_+x_-=-2y_0v_0^2\cos^2\theta/g$ が成り立つ。これらを用いて $(x_+-x_-)^2=(x_++x_-)^2-4x_+x_-=\cdots=\left(\dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta\right)^2\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}}\right)^2$ と計算できる［指数抜けを訂正（5/12）］（高等学校でやった対称式の計算)。したがってこの根号を取れば示したい $\ell(\theta)$ の表式を得る。

(3) 次を確認せよ。

(a)（検算）$y_0\to 0$ のとき，講義で導いた飛距離が再現されること。

(b) y_0 が十分大きいとき（つまり，十分に高い位置から投げ出すとき)，$\ell(\theta)\approx v_0\sqrt{\dfrac{2y_0}{g}}\cos\theta$ となること。

■略解　(a) は上式で $y_0=0$ とおけばよい。すなわち $\ell(\theta)\Big|_{y_0=0}=v_0^2\sin 2\theta/g$ ［分母に余計な 2 があったので削除（5/12）］となって講義で扱った（原点から投射する場合の）飛距離の式が再現された。(b)

は y_0 が非常に大きいとき $1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}} \approx \sqrt{\dfrac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}}$ と近似できるので，二倍角の公式を使って $\ell(\theta) \approx \dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\theta \times \sqrt{\dfrac{2gy_0}{v_0^2\sin^2\theta}} = v_0\sqrt{\dfrac{2y_0}{g}}\cos\theta$ より示された。

(4) $\ell(\theta)$ を最大にする角度 θ_{M} を見出すために，(2) 式を θ で微分して $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}\theta = 0$ を解くことで

$$\sin\theta_{\mathrm{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+gy_0/v_0^2}} \tag{3}$$

を導け。［ヒント：$u = \sin\theta$ と置いて $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}\theta = (\mathrm{d}u/\mathrm{d}\theta)\cdot(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}u) = \cos\theta\cdot(\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}u)$ と計算するとよい］

■略解　ヒントに従って $u = \sin\theta$ と置くと，$\cos\theta = \sqrt{1-u^2} > 0$ で，(2) の $\ell(\theta)$ は二倍角公式も使って $\ell(\theta) = \dfrac{v_0^2}{g}u\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)$ と書かれる。これを θ で微分する計算は積・商・合成関数の微分公式を全て使えば可能。まず合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\times\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}u}\\ &= \cos\theta\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{v_0^2}{g}u\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\right]\\ &= \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\right].\end{aligned}$$

積の微分公式：$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ の三つバージョン：$\{f(x)g(x)h(x)\}' = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$ を使えば

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\Bigg[&\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\\ &+u\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-u^2}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)+u\sqrt{1-u^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

ここで角括弧内第二項について $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{1-u^2} = -\dfrac{u}{\sqrt{1-u^2}}$，第三項について $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right) = -\dfrac{2gy_0/v_0^2}{u^3\sqrt{1+2gy_0/v_0^2u^2}}$ と計算できるので，これらを上式に戻して整理すれば結局（要望が何度かあったので詳しく補足）

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\Bigg[&\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\\ &u\left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)+u\sqrt{1-u^2}\left(-\frac{2gy_0/v_0^2}{u^3\sqrt{1+2gy_0/v_0^2u^2}}\right)\Bigg]\\ = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\Bigg[&\sqrt{1-u^2}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\\ &-\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\cdot\frac{2gy_0/v_0^2}{\sqrt{1+2gy_0/v_0^2u^2}}\Bigg]\\ = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\Bigg[&\left(\sqrt{1-u^2}-\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\cdot\frac{2gy_0/v_0^2}{\sqrt{1+2gy_0/v_0^2u^2}}\Bigg]\\ = \frac{v_0^2}{g}\cos\theta\times\Bigg[&\frac{1-2u^2}{\sqrt{1-u^2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u^2}\cdot\frac{2gy_0/v_0^2}{\sqrt{1+2gy_0/v_0^2u^2}}\Bigg]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{v_0^2}{g}\cos\theta \times \frac{(1-2u^2)\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right)\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}} - \dfrac{1-u^2}{u^2}\dfrac{2gy_0}{v_0^2}}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}} \\
&= \cdots \\
&= \frac{v_0^2}{g}\cos\theta \times \frac{(1-2u^2)\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right) - \dfrac{2gy_0}{v_0^2}}{\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}} .
\end{aligned}
$$

一行目から二行目は形を整えただけ。二行目から三行目への変形では角括弧内の最初の二項をまとめて，そのまとめた部分を三行目から四行目で通分した。四行目から五行目では角括弧内の全体を通分した。そのあとの “$\cdots$” で省略されている部分の計算は，五行目で $w \equiv 2gy_0/v_0^2u^2$ とおくと分子は

$$
\begin{aligned}
w &= (1-2u^2)(1+\sqrt{1+w})\sqrt{1+w} - (1-u^2)w \\
&= (1-2u^2)\sqrt{1+w} + (1-2u^2)(1+w) - (1-u^2)w \\
&= (1-2u^2)\sqrt{1+w} + 1 + w - 2u^2 - 2u^2w - w + u^2w \\
&= (1-2u^2)\sqrt{1+w} + (1-2u^2) - u^2w \\
&= (1-2u^2)(1+\sqrt{1+w}) - u^2w \\
&= (1-2u^2)\left(1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right) - \frac{2gy_0}{v_0^2}
\end{aligned}
$$

と計算できる。したがって $\mathrm{d}\ell/\mathrm{d}\theta = 0$ という条件は結局 $(1-2u^2)\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2u^2}}\right) = \dfrac{2gy_0}{v_0^2}$ となる（$u = \sin\theta$）。この式で $u^2 = t$ と置いて整理すると結局 t の一次方程式になるので［手を動かして確かめよ］，解けば答。（この部分も詳しく書いておくと）解くべき方程式は $u^2 = t$ とおけば $(1-2u^2)\left(1+\sqrt{1+\dfrac{2gy_0}{v_0^2t}}\right) = \dfrac{2gy_0}{v_0^2}$ となる（なぜ $u^2 = t$ と置こうと思うかというと，方程式に u が含まれず u^2 しか含まれていないから。例えば $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ という方程式を解きたいときに $x^2 = X$ と置くのと同じこと）。これを変形していくと

$$
\begin{aligned}
1+\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2t}} &= \frac{1}{1-2t}\frac{2gy_0}{v_0^2} \\
\sqrt{1+\frac{2gy_0}{v_0^2t}} &= \frac{1}{1-2t}\frac{2gy_0}{v_0^2} - 1 \\
1+\frac{2gy_0}{v_0^2t} &= \left(\frac{1}{1-2t}\frac{2gy_0}{v_0^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{2gy_0}{v_0^2}\right)^2\frac{1}{(1-2t)^2} - \frac{4gy_0}{v_0^2}\frac{1}{1-2t} + 1 \\
\frac{2gy_0}{v_0^2t} &= \left(\frac{2gy_0}{v_0^2}\right)^2\frac{1}{(1-2t)^2} - \frac{4gy_0}{v_0^2}\frac{1}{1-2t} \\
\frac{1}{t} &= \frac{2gy_0}{v_0^2}\frac{1}{(1-2t)^2} - \frac{2}{1-2t} \\
(1-2t)^2 &= \frac{2gy_0}{v_0^2}t - 2t(1-2t) \\
1-4t &= \frac{2gy_0}{v_0^2}t - 2t \\
\left(1+\frac{gy_0}{v_0^2}\right)t &= \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+gy_0/v_0^2}
\end{aligned}
$$

ここで $t = u^2$ と $u = \sin\theta$ だったので，$\sin\theta = \sqrt{t}$ から示したかった式が従う。

(5) これまでに導いたことから，以下の文章の空欄を埋めよ。**イ** と **ロ** には角度の値を入れ，**ハ** はいずれかを選べ。飛距離を最大にする投射角 θ_{M} は，$y_0 = 0$ のとき $\theta_{\mathrm{M}} =$ $\boxed{\textbf{イ}}$，y_0 が十分大きいとき $\theta_{\mathrm{M}} =$ $\boxed{\textbf{ロ}}$ である。一般の y_0 に対しては，θ_{M} は $\boxed{\textbf{イ}}$ よりも $\boxed{\textbf{ハ}}$ { ① 小さな，② 大きな } 値である。

■略解　**イ** は $\boxed{\pi/4}$，**ロ** は $\boxed{0}$，**ハ** は $\boxed{\text{小さな}}$。最初の高さをだんだん上げていくと投射距離を最大にするための投射角は $\pi/4$ からだんだん小さくなっていき，$y_0 \to \infty$ の極限では真横に投射すると最も遠くまで飛ばせるということ。