物理学 A 演習問題 #1 略解

2024 年 4 月 11 日問題配布・4 月 18 日提出締切・解答公開

1　ベクトル（力の合成・分解）

(1) xy 平面上の原点 O に置かれた物体に二つの力 $\boldsymbol{F}_1 = (5,\,7)$，$\boldsymbol{F}_2 = (3,\,-2)$ がはたらいている。この物体が受ける合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ を求め，図示し，大きさを求めよ。$\boldsymbol{F}$ が x 軸となす角 θ に対して $\tan\theta$ はいくつか。

■略解　図は略。合力 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = \boxed{(8,\,5)}$ 。大きさ $|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \boxed{\sqrt{89}}$ 。$\tan\theta = F_y/F_x = \boxed{5/8}$ 。

(2) xy 平面上の原点 O に置かれた物体に $F = |\boldsymbol{F}| = 10\,\mathrm{N}$ の力がはたらいている。$\boldsymbol{F}$ が x 軸となす角が $\pi/6$ であるとき，$\boldsymbol{F}$ の x 成分と y 成分を求めよ。物体の質量を m とするとき，運動方程式はどのように書けるか？

■略解　$F_x = F\cos(\pi/6) = 10 \times (\sqrt{3}/2) = \boxed{5\sqrt{3}\,\mathrm{N}}$, $F_y = F\sin(\pi/6) = 10 \times (1/2) = \boxed{5\,\mathrm{N}}$ 。運動方程式は各方向の加速度を $a_x,\,a_y$ として x 方向：$\boxed{ma_x = 5\sqrt{3}}$ ，y 方向：$\boxed{ma_y = 5}$ 。もちろん $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 5\sqrt{3}$, $m\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 5$ と書いても良い。
コメント：$ma = 10$ と書いている人が何人かいました。どうして？

2　三角関数・微積分（円運動）

原点 O を中心とする半径 r の円周上を運動する物体の位置は，$\boldsymbol{r}(t) = (x(t),\,y(t)) = (r\cos\omega t,\,r\sin\omega t)$ と表せる。

(1) 速度 $\boldsymbol{v}(t) = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t,\,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)$ と速さ $v = |\boldsymbol{v}|$，加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \mathrm{d}^2\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t^2 = (\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2,\,\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}t^2)$ とその大きさ $a = |\boldsymbol{a}|$ を求めよ。これらはどのような向きであるか？［ヒント：$u = \omega t$ とおいて合成関数の微分法で

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(r\cos u)\right] \times \omega = -r\omega\sin u = -r\omega\sin\omega t$$

のように計算すればよい］

■略解　速度 $\boldsymbol{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \boxed{(-r\omega\sin\omega t,\,r\omega\cos\omega t)}$ ，加速度 $\boldsymbol{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \left(\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\,\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right) = \boxed{(-r\omega^2\cos\omega t,\,-r\omega^2\sin\omega t)}$ ，加速度の大きさは $|\boldsymbol{a}| = \boxed{r\omega^2}$ 。$\boldsymbol{a} = -\omega^2\boldsymbol{r}$ の関係から分かる通り $\boxed{\text{加速度は位置と反対方向（円の中心方向）}}$。また $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ なので $\boxed{\text{速度は位置に垂直，つまり円の接線方向，特に角度 } \omega t \text{ が増加する向き}}$ 。

(2) 位置と速度が直交することを示せ。［ヒント：内積 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)$ を計算してみよ］

■略解　(1) の過程で計算した人には示すも何もないが，内積を計算すると確かに $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ つまり $\boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{v}$, なので示された。

3　次元解析

ある物理量 X があったとき，その次元を $[X]$ で表す。例えば，X としてニュートン（記号 N）を単位とする力 F を考えると，$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}$ であるので，力の次元は $[F] = [\mathrm{N}] = \mathrm{MLT}^{-2}$ である。

(1) 運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F$$

の両辺では次元が等しいはずである。左辺の量の次元を具体的に調べることにより，このことを確認せよ。

■略解　左辺に登場する個々の物理量の次元は $[m]=\mathrm{M}$, $[x]=\mathrm{L}$, $[t]=\mathrm{T}$ である。したがって左辺の次元 $\left[m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right]=\mathrm{MLT}^{-2}$（二階微分 $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ の次元は x/t^2 の次元と同じ：$\left[\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2\right]=\left[x/t^2\right]=[\mathrm{d}v/\mathrm{d}t]=[v/t]$）。一方同じことだが右辺の次元 $\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2\right]=\mathrm{MLT}^{-2}$ なので確認できた。

コメント：例えば $F=\mathrm{MLT}^{-2}$ とか $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2=\mathrm{MLT}^{-2}$ とか書いている人が多かったです。単位と次元は異なるものなので，等号 $=$ で結ぶことはありません。

(2) 線密度（単位長さあたりの質量）ρ，長さ ℓ の弦が大きさ T の張力を受けているとき，弦の出す音の振動数 f が $f=k\rho^x\ell^yT^z$ の形で表されるとする。k は無次元の比例定数とする。以下の問に答えよ。

(a) 両辺の次元を比較することで，指数が満たすべき以下の連立方程式を導け。

$$\begin{cases} x \quad\quad + \ z=0 \\ -x+y+\ z=0 \\ \quad\quad\quad -2z=-1 \end{cases}$$

■略解　各々の物理量の単位を書けば次元が分かる。単位について f：s^{-1}, ρ：$\mathrm{kg/m}$, ℓ：m, T：$\mathrm{N}=\mathrm{kg{\cdot}m/s}^2$ である。したがって $f=k\rho^x\ell^yT^z$ の両辺の次元について $\mathrm{T}^{-1}=(\mathrm{ML}^{-1})^x\times\mathrm{L}^y\times(\mathrm{MLT}^{-2})^z=\mathrm{M}^{x+z}\mathrm{L}^{-x+y+z}\mathrm{T}^{-2z}$。両辺で次元が等しいはずなので指数同士を比較して所望の連立方程式が導かれた。

(b) (a) で導いた連立方程式を解くことで，f の表式を求めよ。得られた結果が直感に合うか考えてみよ。

■略解　(a) の連立方程式を解くと $(x,\,y,\,z)=(-1/2,\,-1,\,1/2)$ なので $f=k\rho^{-1/2}\ell^{-1}T^{1/2}=\boxed{\dfrac{k}{\ell}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}}$。弦を長くすると振動数 f が小さくなる，つまり低音になる。線密度 ρ を大きくしても低音になる。張力 T を大きくする（弦をピンと張る）と f は大きくなる，つまり高音になる。逆に T を小さくすると低音になる。こうしたことは直感に合っていると言えるだろう。

コメント：「直感に合わない」と書いてあるレポートが何枚かありました。「〜〜という理由で直感に合うと言える」というのが想定解答ですが，しかし合わないというのも立派な意見です。合わないと感じたのなら（合うと書いた場合でも）どうしてそう感じたのか，理由も合わせて書いてくれるとよいと思います。