物理学 A 演習問題 #8 略解

1 二階非同次線型常微分方程式

一般に，a_0, a_1, a_2 を定数として

$$a_2 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_0 x = f(x) \tag{1}$$

の形の微分方程式を定係数二階非同次線型常微分方程式と呼ぶ。(1) 式の一般解 $x(t)$ は，対応する同次微分方程式の一般解 $\widetilde{x}(t)$ と (1) 式の特解 $x_\mathrm{P}(t)$ を用いて，$x(t) = \widetilde{x}(t) + x_\mathrm{P}(t)$ と与えられるのであった。(1) 式の特殊な場合として，$a_2 = m$, $a_1 = a_0 = 0$, $f(t) = -mg$ と置けば（ついでに x の代わりに z と書いて）

$$m \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -mg \tag{2}$$

となる。すなわち，自由落下の運動方程式は最も簡単な二階非同次線型常微分方程式とみなせる。以下の問に答えよ。

(1) 対応する同次微分方程式の一般解 $\widetilde{z}(t)$ を求めよ。

■略解　対応する同次微分方程式とは，x やその微分を含まない右辺の $-mg$ 項を 0 と置いた $m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = 0$ のことである。これを満たす解が $\widetilde{z} = e^{\lambda t}$ の形であると仮定すると，代入して成り立たなければならないので $m(\lambda^2 e^{\lambda t}) = 0$, したがって $\lambda = 0$ という重解が得られるので，同次微分方程式の一般解は $\widetilde{z} = c_1 e^{0\cdot t} + c_2 \cdot t e^{0\cdot t} = \boxed{c_1 + c_2 t}$（$c_1$, c_2：定数)。任意定数を二つ含むので確かに一般解である。

(2) (2) 式の特解を一つ求めよ。［ヒント：$z_\mathrm{P}(t) = at^2 + bt + c$ の形で置いて，定数を決定せよ。］

■略解　(2) 式を見ると「z を二回微分したら定数 $-mg$ になる」という形をしている。二回微分すると定数になる関数は二次関数か一次関数であろうということで，特解を $z_\mathrm{P}(t) = at^2 + bt + c$ と置ける。これを (2) 式に代入すると $m \times 2a = -mg$ から $a = -g/2$ を得る。そこで特解を $z_\mathrm{P}(t) = \boxed{-(g/2)t^2}$ と与えることができる。定数 b と c は設問 (3) で $\widetilde{z}$ と z_P を足したときに $\widetilde{z}$ に含まれる定数 c_1 や c_2 と足したものを改めて一つの定数と置けるのでここでは無視した（下を見よ)。

(3) (2) 式の一般解を求め，既に良く知っている自由落下の解が再現されていることを確認せよ。

■略解　設問 (1) と (2) から，(2) 式の一般解は $z(t) = \widetilde{z}(t) + z_\mathrm{P}(t) = \boxed{-(g/2)t^2 + c_1 t + c_2}$ である。仮に設問 (2) で定数 b と c を残したままにすると（特解なのでこれは良くないのだが，(2) の解答例で言ったことの確認として）$z(t) = \widetilde{z}(t) + z_\mathrm{P}(t) = -(g/2)t^2 + (b + c_1)t + (c + c_2)$ となるが，定数を改めて $A \equiv b + c_1$, $B \equiv c + c_2$ と取り直せば $z(t) = -(g/2)t^2 + At + B$ となって二階の微分方程式の一般解を正しく与える。

2 RLC 直列回路（減衰振動）

抵抗 R，コンデンサ C，コイル L を直列に繋いだ回路を考える。回路方程式（キルヒホッフの第二法則）は

$$RI(t) + \frac{Q(t)}{C} + L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{3}$$

で与えられる。I は回路を流れる電流，Q はコンデンサが蓄える電荷であり，連続方程式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ の関係がある。

(1) 微分方程式 (1) を $Q(t)$ に関する二階の微分方程式に書き直せ。さらに，抵抗の大きさ $\gamma \equiv R/2L$，振動数 $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ の減衰振動の方程式となっていることを説明せよ。

■略解　連続方程式 $I=\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ を (3) 式に代入すると，回路方程式は $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$，すなわち $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{LC}=0$ と書き換えられる。γ と ω_0 を用いて表せば $\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2Q=0$ となって，減衰振動の形をした二階の微分方程式に帰着した。

(2) 解が減衰振動となる条件を R, L, C で表し，さらに初期条件 $Q(0)=Q_0,\ \left.\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ を満たす解を求めよ。

■略解　解を $Q(t)=e^{\lambda t}$ の形と仮定して代入すると $(\lambda^2+2\gamma\lambda+\omega_0^2)e^{\lambda t}=0$ を得るので，$\lambda=-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}$ に対して $e^{\lambda t}$ は解となる。減衰振動となるには $e^{i\omega t}$ の形（振動項）になる必要があるので，根号内が負つまり $\boxed{\gamma<\omega_0}$，$\boxed{\text{すなわち } R/2L<1/\sqrt{LC}}$ ［問題文に $R,\ L,\ C$ で表せとあったので訂正（6/20）］このとき $\lambda=-\gamma\pm i\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}\equiv-\gamma\pm i\omega$ であって，一般解は $Q(t)=c_1e^{(-\gamma+i\omega)t}+c_2e^{(-\gamma-i\omega t)}=e^{-\gamma t}(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$ で与えられる。ただし $a\equiv c_1+c_2,\ b\equiv i(c_1-c_2)$ と置いた。初期条件を課すとまず $a=Q_0$，また $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=[-\gamma(a\cos\omega t+b\sin\omega t)+(-a\omega\sin\omega t+b\omega\cos\omega t)]$ より $0=-\gamma a+b\omega$，よって $b=(\gamma/\omega)a=(\gamma/\omega)Q_0$ と求まるので，答は $Q(t)=Q_0e^{-\gamma t}[\cos\omega t+(\gamma/\omega)\sin\omega t]=$ $\boxed{Q_0\exp\left(-\dfrac{R}{2L}t\right)\left\{\cos\left[\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}\,t\right]+\dfrac{R/2L}{\sqrt{1/LC-(R/2L)^2}}\sin\left[\sqrt{\dfrac{1}{LC}-\left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}\,t\right]\right\}}$。［この解答が抜けていたので追加（6/28）。「ただし $\gamma=\cdots,\ \omega_0=\cdots,\ \omega=\cdots$」と書いてあれば置いた文字（元々はなかった文字）があっても良いです］

［注：交流電圧 $V(t)=V_0\sin\omega t$ が印加されている場合は強制振動の運動方程式になる。］

3　抵抗がある場合の強制振動

講義では，振動する物体に周期的な外力が加わっている場合を扱った。ここでは，同じ系に速度に比例する抵抗力 $-\mu\,(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$ が加わる場合を解析する。

(1) 運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f_0\sin\omega t \tag{4}$$

の形で与えられることを説明し，$\gamma,\ \omega_0,\ f_0$ の具体的な形を与えよ。

■略解　講義で扱ったのは抵抗の無い強制振動で，その運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx+F_0\sin\omega t$ あるいは (4) 式で $\gamma=0$ と置いた形をしていた。その系にさらに抵抗が（運動と逆向きに）はたらいていると，運動方程式は $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx-\mu\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_0\sin\omega t$ と書き換えられる。整理して $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mu}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\sin\omega t$，したがって $\gamma=\boxed{\mu/2m}$，$\omega_0=\boxed{\sqrt{k/m}}$，$f_0=\boxed{F_0/m}$。

(2) 今回は抵抗力がはたらいているので，特殊解を $x_\mathrm{P}(t)=A\sin\omega t$ と仮定すると失敗する。代わりに $x_\mathrm{P}(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)$ と置いて微分方程式 (4) に代入し，A と $\tan\theta_0$ を求めよ。

■略解　（抵抗力があると外力 $f_0\sin\omega t$ と位置 $x(t)$ が同じ位相で振動しないということ。講義では無意識に $x(t)=A\sin\omega t$（ω は外力のものと共通）と置いていたが，この仮定が今回は成り立たないということ。）そこで $x_\mathrm{P}(t)=A\sin(\omega t+\theta_0)$ に対して微分すると $\mathrm{d}x_\mathrm{P}/\mathrm{d}t=A\omega\cos(\omega t+\theta_0),\ \mathrm{d}^2x_\mathrm{P}/\mathrm{d}t^2=-A\omega^2\sin(\omega t+\theta_0)$

だから運動方程式に代入して

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x - f_0 \sin\omega t \\
&= -A\omega^2 \sin(\omega t + \theta_0) + 2\gamma \times A\omega\cos(\omega t + \theta_0) + \omega_0^2 A \sin(\omega t + \theta_0) - f_0 \sin\omega t \\
&= -A\omega^2(\sin\omega t\cos\theta_0 + \cos\omega t\sin\theta_0) + 2A\omega\gamma(\cos\omega t\cos\theta_0 - \sin\omega t\sin\theta_0) \\
&\quad + \omega_0^2 A(\sin\omega t\cos\theta_0 + \cos\omega t\sin\theta_0) - f_0\sin\omega t \\
&= (-A\omega^2\cos\theta_0 - 2A\omega\gamma\sin\theta_0 + A\omega_0^2\cos\theta_0 - f_0)\sin\omega t \\
&\quad + (-A\omega^2\sin\theta_0 + 2A\omega\gamma\cos\theta_0 + A\omega_0^2\sin\theta_0)\cos\omega t
\end{aligned}
$$

を得る。この式は t に関する恒等式でなければならないので，$\sin\omega t$ の係数と $\cos\omega t$ の係数が独立に 0 でなければならない。したがって

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\theta_0 - 2A\omega\gamma\sin\theta_0 - f_0 = 0\ , \tag{5a}$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\sin\theta_0 + 2A\omega\gamma\cos\theta_0 = 0\ . \tag{5b}$$

明らかに $A \neq 0$ なので (5b) 式から $\tan\theta_0 = \boxed{-2\omega\gamma/(\omega_0^2-\omega^2)}$ 。また (5a)$\times\cos\theta_0$+(5b)$\times\sin\theta_0$ から $A(\omega_0^2-\omega^2) - f_0\cos\theta_0 = 0$，よって $A = f_0\cos\theta_0/(\omega_0^2-\omega^2) = \boxed{\pm f_0/\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}$ 。