物理学 A 演習問題 #9 略解

1　変数分離形の微分方程式

講義第 6 回で，空気抵抗下における落下運動を扱ったことは記憶に新しい。運動方程式は（鉛直下向きに z 軸を取ると）$m\dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = mg - \mu\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ となり，これは $v \equiv \mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ で書き換えると $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - \mu v$ となって，$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\mu}{m}\left(v - \dfrac{mg}{\mu}\right)$ すなわち変数分離形に書き換えられるので，最終的に解くことができるのであった。このように，x の関数 $y = y(x)$ が満たす微分方程式が $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ の形に変形できるとき，変数分離形と呼ぶのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$	(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2}{x^2}$	(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2xy$
(4) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 y^2$	(5) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x^2-1}$	(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y+1}{x+1}$
(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x+y}$	(8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\cos x}{\sin y}$	(9) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\sin x$

■略解　(1) 変形して $\mathrm{d}y/y = \mathrm{d}x/x$ なので両辺積分して $\log y = \log x + c$。したがって $y = xe^c = \boxed{\cancel{Ce^x} = Cx}$［単純に間違っていたので訂正（6/20）もう一度訂正（6/27）］。(2) 変形して $\mathrm{d}y/y^2 = \mathrm{d}x/x^2$ なので両辺積分して $-1/y = -1/x + c$ で y について解いて $y = \boxed{x/(1-cx)}$。(3) 変形して $\mathrm{d}y/y = -2x\,\mathrm{d}x$ なので両辺積分して $\log y = -x^2 + c$。したがって $y = \boxed{Ce^{-x^2}}$。(4) 変形して $\mathrm{d}y/y^2 = x^2\,\mathrm{d}x$ なので両辺積分して $-1/y = x^3/3 + c$。したがって $y = \boxed{-3/(x^3+C)}$［積分定数が抜けていたので訂正（6/20）］。(5) 変形して $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/(x^2-1)$ なので両辺積分して $y = \boxed{(1/2)\log[(1-x)/(1+x)] + C}$。(6) 変形して $\mathrm{d}y/(y+1) = \mathrm{d}x/(x+1)$ なので両辺積分して $\log(y+1) = \log(x+1) + c$。これを y について $y = \boxed{-1 + C(1+x)}$。(7) 変形して $e^{-y}\,\mathrm{d}y = e^x\,\mathrm{d}x$ なので両辺積分して $-e^{-y} = e^x + c$。これを y について解いて $y = \boxed{\log[-1/(c+e^x)]}$。(8) 変形して $\sin y\,\mathrm{d}y = -\cos x\,\mathrm{d}x$ なので両辺積分して $\boxed{-\cos y = -\sin x + c}$。これは y について（逆三角関数 arccos を知っていれば）解けなくはないがこのまま答。こういうのを陰関数と呼びます。(9) 変形して $\mathrm{d}y/y = \sin x\,\mathrm{d}x$ なので両辺積分して $\log y = -\cos x + c$。これを y について解いて $y = \boxed{Ce^{-\cos x}}$。

2　変数分離形の微分方程式（電気回路）

(1) 直流電源 E（= 一定），抵抗 R，コンデンサ C が直列に繋がれた回路を考える。

(a) (a) 回路方程式（Kirchhoff（キルヒホッフ）の第二法則）が $0 = E - R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - \dfrac{Q}{C}$ で与えられることを説明せよ。［ヒント：抵抗について Ohm（オーム）の法則より $V_{\mathrm{R}} = RI$，コンデンサについて $V_{\mathrm{C}} = Q/C$，これと連続方程式 $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$］

■略解　回路を一周すると高等学校で習ったキルヒホッフの第二法則の通り $0 = E - RI - Q/C$ なので $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ と合わせて答。

(b) (a) の回路方程式が変数分離形であることを指摘し，$Q(t)$ の一般解を求めよ。電流 $I(t)$ はどうなるか？

■略解　(a) の回路方程式は $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{RC}(Q - CE)$ すなわち $\dfrac{\mathrm{d}Q}{Q - CE} = -\dfrac{\mathrm{d}t}{RC}$ と変形できるので変数分離形である。両辺の積分形は $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}Q}{Q-CE} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{RC}$ より $\log(Q - CE) = -t/RC + a$（a：定数）。したがって Q_0 を積分定数として一般解は $Q(t) = \boxed{CE + Q_0\exp(-t/RC)}$。これを微分して $I(t) = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = \boxed{-(Q_0/RC)\exp(-t/RC)}$。

(c) 初期条件 $Q(0)=0$ を満たす解を求めて図示せよ。$V_{\mathrm{R}}(t)=RI(t)$ と $V_{\mathrm{C}}(t)=Q(t)/C$ も図示してみよ。結果は妥当であるか？［注：指数関数の部分を $\exp(-t/\tau)$ と書いたときの $\tau=RC$ は**時定数**と呼ばれる］

■略解　(b) で求めた $Q(t)$ の一般解に初期条件を適用すると $Q_0=-CE$ と決まるので $Q(t)=\boxed{CE(1-e^{-t/RC})}$。その他の量はこれを微分したり代入するだけ。時刻 $t=0$ で電流が流れ始め，時間の経過とともにコンデンサが電荷を蓄えはじめるので抵抗にかかる電圧 $V_{\mathrm{R}}(t)$ は減少する。一方でコンデンサは電荷を蓄えることにより電位差が徐々に大きくなる。したがって結果は妥当である。

(2) (1) の設定で電源 E が無い場合を考える。回路方程式 $0=R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}$ について，(1) の設問 (a)(b)(c) を繰り返せ。ただし，$Q(t)$ に関する初期条件を $Q(0)=Q_0>0$ とせよ［$Q(0)=0$ のままだとどういう状況か？］。

■略解　略。微分方程式は大問 1 の (1)-(9) と全く同じ要領で解ける。$Q(0)=0$ だと何も起こらない。

(3) 余力のあるひとは，コンデンサ C をコイル L に取り替えた場合（RL 回路）なども考えてみよ。コイル L とコンデンサ C のみからなる LC 回路は電気振動の名前の通り単振動型の方程式になり，高等学校でならった共振周波数の公式 $f=1/2\pi\sqrt{LC}$ やエネルギー保存の関係式 $LI^2/2+CV^2/2=\mathrm{const.}$ が導出できたりする。

■略解　略。

3　減衰振動・強制振動の微分方程式

講義第 8 回と演習 #8（RLC 直列回路の問題）で扱ったように，減衰振動型の微分方程式は，解を $e^{\lambda t}$ の形で置き，適切な λ を求めることで一般解が得られるのであった。以下の各々について一般解を求めよ。

$$(1)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-9y=0 \qquad (2)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+6y=0 \qquad (3)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+9y=0$$

$$(4)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0 \qquad (5)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5y=5x+6 \qquad (6)\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=\cos 3x$$

［ヒント：(5) の特解は $y_{\mathrm{P}}=ax+b$ の形，(6) の特解は $y_{\mathrm{P}}=a\cos 3x+b\sin 3x$ の形と予想できる。］

■略解　(1) 解を $e^{\lambda x}$ の形だと仮定して代入すると $\lambda=\pm 3$ なので一般解は $y(x)=\boxed{c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}}$。(2) 解を $e^{\lambda x}$ の形だと仮定して代入すると $0=\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$ より一般解 $y(x)=\boxed{c_1e^{2x}+c_2e^{3x}}$。(3) 解を $e^{\lambda x}$ の形だと仮定して代入すると $(\lambda-3)^2=0$ より重解で一般解は $y(x)=\boxed{c_1e^{3x}+c_2xe^{3x}}$。(4) 解を $e^{\lambda x}$ の形だと仮定して代入すると $\lambda^2+4\lambda+5=0$ より $\lambda=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm i$ なので一般解は $y(x)=c_1e^{(-2+i)x}+c_2e^{(-2-i)x}=\boxed{e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)}$。最後の変形にはオイラーの公式を使った。(5) 同次型の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-5y=0$ の解を $e^{\lambda x}$ と仮定して代入すると $0=\lambda^2-4\lambda-5=(\lambda+1)(\lambda-5)$ より同次型の一般解 $\widetilde{y}(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{5x}$。一方，元々の微分方程式の特殊解を $y_{\mathrm{P}}(x)=ax+b$ とおいて代入すると $-4a-5(ax+b)=5x+6$，整理して $5(1+a)x+(4a+5b+6)=0$。これは x についての恒等式なので $a=-1$, $b=-2/5$，したがって特殊解 $y_{\mathrm{P}}(x)=-x-2/5$。以上から元々の微分方程式の一般解は $y(x)=\widetilde{y}(x)+y_{\mathrm{P}}(x)=\boxed{c_1e^{-x}+c_2e^{5x}-x-2/5}$。(6) 同次型の微分方程式 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5y=0$ の解を $e^{\lambda x}$ と仮定して代入すると $0=\lambda^2+4\lambda+5\to\lambda=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm i$ より同次型の一般解 $\widetilde{y}(x)=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$。一方，元々の微分方程式の特殊解を $y_{\mathrm{P}}(x)=a\cos 3x+b\sin 3x$ とおいて代入すると（計算略）$a=-1/40$, $b=3/40$ と決まるので所望の一般解は $y(x)=\boxed{e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+(-\cos 3x+3\sin 3x)/40}$。