物理学 A 演習問題 #5 略解

2024 年 5 月 9 日配布・5 月 16 日提出締切・解答公開

1　単振動の運動方程式

弾性定数 k のばねに鉛直方向に吊るされた質点 m の運動を考える。ばねの自然長を $x=0$ とし，座標軸は鉛直下向きに取るものとする。以下の問に答えよ。

(1) 質点 m の釣り合いの位置（質点にはたらく復元力と重力が釣り合う位置）$\bar{x}$ を求めよ。

■略解　つりあう位置 $\bar{x}>0$ で重力と復元力がつりあうので $mg=k\bar{x}$ より $\bar{x}=\boxed{mg/k}$。

(2) 時刻 $t=0$ に位置 $x_0>\bar{x}$ に質点を移動させ，静かに手を離すと質点は振動を始めた。状況を図示し，運動方程式を立てよ。図には自然長の位置，質点の座標，質点にはたらく力を明記すること。振動中心の x 座標は？

■略解　図は略。運動方程式は $\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-kx+mg=-k(x-mg/k)=-k(x-\bar{x})}$，振動中心は $x=\bar{x}=\boxed{mg/k}$。

コメント：$m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=mg-kx_0$ とか $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-k(x_0-\bar{x})$ と書いているレポートが非常に多かったです（なんで？）。x_0 も $\bar{x}$ も定数なのでこれだと加速度が一定となり明らかに誤りであることに気付きましょう。

(3) 変数変換 $x\mapsto X\equiv x-\bar{x}$ を行なうことにより，質点の運動方程式が

$$m\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=-kX \tag{1}$$

に帰着することを示せ。

■略解　$X=x-\bar{x}$（$\bar{x}$ は定数であることに注意）より $\mathrm{d}X/\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，したがって $\mathrm{d}^2X/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}x^2/\mathrm{d}t^2$ なので，$\boxed{m\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=-kX}$。

(4) (1) 式の一般解を求めよ。また，初期条件を満たす解 $x(t)$ を求めよ。

■略解　$\omega\equiv\sqrt{k/m}$ を導入すると (3) の運動方程式は $\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2X$ と書けるので，一般解は講義でやった通り $X(t)=\boxed{a\cos\omega t+b\sin\omega t}$（$a$ と b は定数）［これが確かに直前に書いた X での運動方程式を満たすことを直接計算して示してみよ］。これを元の変数 x に戻して $x(t)=X(t)+\bar{x}=mg/k+a\cos\omega t+b\sin\omega t$。つまり質点は（自然長ではなく）釣り合いの位置を中心に振動する。初期条件から $x(0)=mg/k+a=x_0$，$v(0)=b=0$ なので $\boxed{x(t)=mg/k+(x_0-mg/k)\cos\omega t=x_0 cos\omega t+(mg/k)(1-\cos\omega t)}$［赤字部分が抜けていたので訂正（5/24）］。グラフ描けますか？

コメント：正しくできている人はほとんどいませんでした。

2　単振動の運動方程式の別の解法

講義では「二回微分すると負号が出てきて元に戻る関数」として三角関数の存在を思い出し，一般解を得た。ここでは，単振動の方程式を

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x=(i\omega)^2x \tag{2}$$

と書き換え（三角関数ではなく）指数関数と結びつけて運動方程式 (2) を解いてみる。ただし $i=\sqrt{-1}$ は虚数単位，また $\omega=\sqrt{k/m}$ は角振動数である。初期条件は $x(0)=x_0$，$v(0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0$ として，以下の問に答えよ。

(1) $f(t)=e^{i\omega t}$ と $g(t)=e^{-i\omega t}$ に対して，$f'(t)$, $f''(t)$, $g'(t)$, $g''(t)$ を計算せよ。

■略解　$f'(t)=\boxed{i\omega e^{i\omega t}}$，$f''(t)=(i\omega)^2 e^{i\omega t}=\boxed{-\omega^2 e^{i\omega t}}$，$g'(t)=\boxed{-i\omega e^{-i\omega t}}$，$g''(t)=\boxed{-\omega^2 e^{i\omega t}}$。

(2) 設問 (1) の結果から，運動方程式 (2) の一般解はどのように書けるか？

■略解　(1) より $f''(t)=-\omega^2 f(t)$, $g''(t)=-\omega^2 g(t)$ とかけるので，$e^{i\omega t}$ と $e^{-i\omega t}$ はどちらも微分方程式 (2) の解である（特に「線型独立」な二つの解である）。そこで (2) 式の一般解はこれらの重ね合わせ $\boxed{x(t)=af(t)+bg(t)=ae^{i\omega t}+be^{-i\omega t}}$ で与えられる。

(3) 初期条件を適用して一般解に含まれる二つの任意定数を決定し，解が講義で得たものと一致することを示せ。

■略解　$x(0)=a+b=x_0$ と $v(0)=ia\omega-ib\omega=0$ から $\boxed{a=b=x_0/2}$。したがって $x(t)=(x_0/2)\cdot(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$。ここで Euler（オイラー）の公式：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$（$x$ は実数）を使うと $x(t)=(x_0/2)\cdot[(\cos\omega t+i\sin\omega t)+(\cos\omega t-i\sin\omega t)]=x_0\cos\omega t$ と変形できるので講義で得たものと一致。

(4)（文脈外だが）設問 (2) で書いた一般解を三角関数 cos, sin で表せ。任意定数をうまく取り直すことで $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ に帰着し，したがって三角関数で一般解を与える方法と等価であることを示せ。［ヒント：$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ を使う］

■略解　再び Euler の公式を使って $x(t)=ae^{i\omega t}+be^{-i\omega t}=a(\cos\omega t+i\sin\omega t)+b(\cos\omega t-i\sin\omega t)=(a+b)\cos\omega t+i(a-b)\sin\omega t$ なので，定数を $c_1\equiv a+b$ と $c_2\equiv i(a-b)$ によってとり直せば $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ となって，三角関数で与えるものと等価であることが示された。

3　単振動のエネルギー保存則

(1) 一般解の表示 $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ とその微分を力学的エネルギーの式

$$E\equiv\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\frac{1}{2}kx^2 \tag{3}$$

に代入することで，系の力学的エネルギーが保存する（すなわち，$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$ となる）ことを直接的に示せ。

■略解　$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ に対して $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t$ なので，上の E の式に代入すると

$$\begin{aligned}
E&=\frac{m}{2}(-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t)^2+\frac{1}{2}k(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)^2\\
&=\left(c_1^2\frac{m\omega^2}{2}+c_2^2\frac{k}{2}\right)\sin^2\omega t+\left(c_2^2\frac{m\omega^2}{2}+c_1^2\frac{k}{2}\right)\cos^2\omega t+c_1c_2(-m\omega^2+k)\cos\omega t\sin\omega t\\
&=\frac{k}{2}(c_1^2+c_2^2)\sin^2\omega t+\frac{k}{2}(c_1^2+c_2^2)\cos^2\omega t\\
&=\frac{k}{2}(c_1^2+c_2^2)
\end{aligned}$$

となって定数なので，E が保存する（つまり $E=$ 一定 あるいは $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$）であることが言えた。なお，二行目から三行目の変形では $\omega=\sqrt{k/m}$ つまり $m\omega^2=k$ の関係を使った。

コメント：上の式一行目を直接微分して $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t=0$ を示している人もいました。どちらでもよいですが，E の式を微分すると計算がもう少し必要になるためか，途中までやったものの脱落した人も少なくありませんでした。ところで，(3) 式をそのまま微分して

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\underbrace{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}}_{=-kx}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$

とやっているレポートが一枚あって，上手だなあと思いました。途中で運動方程式の情報を使っており，運動方程式の一般解 $x(t)=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t$ を使うことと等価です（まあ代入してくれという指示だけど）。

(2) 次式で定義される運動エネルギー，ポテンシャルエネルギーの一周期の時間平均について，$\langle K\rangle=\langle V\rangle$ を示せ。

$$\langle K\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, K = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 , \qquad \langle V\rangle \equiv \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, V = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}kx^2 \ . \tag{4}$$

■略解　具体的に積分を計算する。K の一周期平均について

$$\begin{aligned}
\langle K\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}(-c_1\omega\sin\omega t+c_2\omega\cos\omega t)^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{m}{2}\left(c_1^2\omega^2\sin^2\omega t+c_2^2\omega^2\cos^2\omega t-2c_1c_2\omega^2\cos\omega t\sin\omega t\right) \\
&= \frac{m\omega^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\left(c_1^2\sin^2\omega t+c_2^2\cos^2\omega t-2c_1c_2\cos\omega t\sin\omega t\right) \\
&= \frac{m\omega^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\left(c_1^2\frac{1-\cos 2\omega t}{2}+c_2^2\frac{1+\cos 2\omega t}{2}-c_1c_2\sin 2\omega t\right) \\
&= \frac{m\omega^2}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\left(\frac{c_1^2+c_2^2}{2}-\frac{c_1^2-c_2^2}{2}\cos 2\omega t-c_1c_2\sin 2\omega t\right) \\
&= \frac{m\omega^2}{2T}\left.\left[\frac{c_1^2+c_2^2}{2}t-\frac{c_1^2-c_2^2}{4\omega}\sin 2\omega t+\frac{c_1c_2}{2\omega}\cos 2\omega t\right]\right|_{t=0}^{t=T} \\
&= \frac{m\omega^2}{2T}\times\frac{c_1^2+c_2^2}{2}T = \frac{c_1^2+c_2^2}{2}\frac{m\omega^2}{2} \ .
\end{aligned}$$

四行目から五行目への変形では半角の公式を使った。最後の等号では単振動の周期が角振動数と $T=2\pi/\omega$ の関係にあることを用いた。つまり $\omega T=2\pi$ なので，$[\cdots]$ 内の三角関数の項は $t=0$ や $t=T=2\pi/\omega$ で全て落ちる。次に V の一周期平均について

$$\begin{aligned}
\langle V\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{1}{2}k(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)^2 \\
&= \frac{k}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\,(c_1^2\cos^2\omega t+c_2^2\sin^2\omega t+2c_1c_2\cos\omega t\sin\omega t) \\
&= \frac{k}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\left(c_1^2\frac{1+\cos 2\omega t}{2}+c_2^2\frac{1-\cos 2\omega t}{2}+c_1c_2\sin 2\omega t\right) \\
&= \frac{k}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t\left(\frac{c_1^2+c_2^2}{2}+\frac{c_1^2-c_2^2}{2}\cos 2\omega t+c_1c_2\sin 2\omega t\right) \\
&= \frac{k}{2T}\left.\left[\frac{c_1^2+c_2^2}{2}t+\frac{c_1^2-c_2^2}{4\omega}\sin 2\omega t-\frac{c_1c_2}{2\omega}\cos 2\omega t\right]\right|_{t=0}^{t=T} \\
&= \frac{k}{2T}\times\frac{c_1^2+c_2^2}{2}T = \frac{c_1^2+c_2^2}{2}\frac{k}{2} \ .
\end{aligned}$$

ここで $m\omega^2=k$ の関係を思い出すと $\langle K\rangle=\langle V\rangle$ であることが示された。

コメント：(1) の力学的エネルギーと合わせると $E=K+V=$ 一定 で，両辺の時間平均をとると $E=\langle E\rangle=\langle K\rangle+\langle V\rangle$ です（E は時間に依らない保存量なので時間平均 $\langle\cdots\rangle$ をとっても変わらない）。そして (2) から $\langle K\rangle=\langle V\rangle$ が示されたので，合わせると $\langle K\rangle=\langle V\rangle=E/2$ が得られます。これは Virial（ビリアル）定理と呼ばれるものの例になっています。