物理学 A 演習問題 #4 略解

2024 年 5 月 2 日配布・5 月 9 日提出締切・解答公開

1　二物体の衝突（運動量保存則）

水平な x 軸（直線）上を質点 m_1 が速度 $v_1 > 0$ で，質点 m_2 が速度 $v_2 > 0$ で運動している。以下の問に答えよ。

(1) 両者が衝突して一体となり運動を続けた。衝突後の速度を求めよ。

■略解　衝突前後で系の全運動量は保存する：$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ ので，これを解いて $v = \boxed{(m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1 + m_2)}$。

(2) 衝突の前後で系の運動エネルギーはどれだけ変化したか？［注：衝突の前後で運動量は保存するが，運動エネルギーは一般に保存しない］

■略解　衝突前の系の運動エネルギーを K_i，衝突後のそれを K_f とすると（添字 i は initial，f は final）$K_\mathrm{i} = m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2$ と $K_\mathrm{f} = (m_1 + m_2)v^2/2$ である。よって衝突前後の運動エネルギーの差は $\Delta K \equiv K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = \cdots = \boxed{-m_1m_2(v_1 - v_2)^2/2(m_1 + m_2)} < 0$。途中 (1) で求めた v を代入した。"$\cdots$" 部分は手を動かして計算をがんばる。

同じ問題設定で衝突後に一体化しなかった場合に，質点間の反発係数を $0 < e \leq 1$ として以下の問に答えよ。

(3) 衝突前後における運動量保存の式と跳ね返りの式を立て，衝突後のそれぞれの質点の速度 v_1', v_2' を求めよ。

■略解　衝突前後での運動量保存則は $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$，跳ね返りの式は $v_2' - v_1' = -e(v_2 - v_1)$。これらを連立して解いて $v_1' = \boxed{\dfrac{(m_1 - em_2)v_1 + (1+e)m_2v_2}{m_1 + m_2}}$，$v_2' = \boxed{\dfrac{(1+e)m_1v_1 + (m_2 - em_1)v_2}{m_1 + m_2}}$。

(4) 衝突前後での系の運動エネルギーの変化を求めよ。運動エネルギーが変化しないのはどのような場合か？

■略解　(2) と同様に運動エネルギーの差を計算すると $\Delta K = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = (m_1v_1'^2/2 + m_2v_2'^2/2) - (m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2) = \cdots = -(1-e^2)m_1m_2(v_1 - v_2)^2/2(m_1 + m_2)$ となるので，$\boxed{e = 1 \text{ つまり完全弾性衝突のとき}}$ に限り運動エネルギーが変化しない。

コメント：$\Delta K = K_\mathrm{f} - K_\mathrm{i} = (m_1v_1'^2/2 + m_2v_2'^2/2) - (m_1v_1^2/2 + m_2v_2^2/2)$ というスタート地点の式を見て「運動エネルギーの変化がないのは，衝突前後で両者の速度が変わらないとき」と述べているレポートが複数ありました。つまり $v_1' \stackrel{?}{=} v_1$ かつ $v_2' \stackrel{?}{=} v_2$ のとき，ということだと思いますが，確かにこれがありえるのなら $\Delta K = 0$ になります。では本当にこのようなことは可能でしょうか？ (3) で求めた式に対して $v_1' = v_1$，$v_2' = v_2$ を要求してみると，$v_1 = v_2$ という式が得られます。これは衝突前に両者が同じ速度で運動していたということを意味しており，したがって衝突が起こりません。衝突が起こらないのだから運動エネルギーが変わらないのは当たり前，ということになります。結局「衝突が起こるという条件のもとでは，衝突前後で両者の速度が変化しない」ということは起こり得ないことが分かりました。

2　衝突と跳ね返り

時刻 $t = 0$ において，地表から高さ z_0 の地点から質点 m を自由落下させた。重力加速度を g，質点と地表の反発係数を $0 < e < 1$ として，以下の問に答えよ。図は衝突の様子をずらして書いたものであり，水平方向に意味は無い。

(1) 一回目の衝突直前および直後の質点の速度 v_1, v_1' をそれぞれ求めよ。

■略解　等加速度直線運動の公式：$v^2 - v_0^2 = 2gz_0$ において $v_0 = 0$，$v = v_1$ として $v_1 = \boxed{-\sqrt{2gz_0}}$（下向きなのでマイナスをつけた）。跳ね返った直後は速さが e 倍になるので $v_1' = -ev_1 = \boxed{e\sqrt{2gz_0}}$（この $v_1' = -ev_1$ の部分は跳ね返りの式そのもの）。[e が抜けていたので訂正（5/24）]

(2) その後，質点は時刻 $t = t_1$ に最高点に達し，地表と二回目の衝突を経験する。t_1 と，このときの最高点の高さ z_1 を求めよ。[t_1 は跳ね返ってから z_1 までの時間ではないことに注意せよ]

■略解　一回目の地面との衝突までに要する時間は等加速度直線運動の公式：$z_0 = 0 \cdot t + gt^2/2$ より $t = \sqrt{2z_0/g}$。この結果と図を見て，その後最高点に到達するまでにかかる時間は $t_1 - \sqrt{2z_0/g}$ で，最高点では速度が 0 なので等加速度直線運動の公式：$v = v_0 + at$ を当てはめて $0 = v_1' - g(t_1 - \sqrt{2z_0/g})$ より $t_1 = \boxed{(1+e)\sqrt{2z_0/g}}$。最高点の高さは $0^2 - v_1'^2 = -2gz_1$ より $z_1 = \boxed{e^2 z_0}$。

(3) 図において，二回目の衝突直前（直後）の速度 v_2（v_2'），および次回の衝突までの量 t_2, z_2, v_3, v_3' を求めよ。

■略解　(2) と全く同様に考えて $v_2 = -v_1' = \boxed{-e\sqrt{2gz_0}}$，$v_2' = -ev_2 = \boxed{e^2\sqrt{2gz_0}}$，$v_3 = \boxed{-e^2\sqrt{2gz_0}}$，$v_3' = -ev_3 = \boxed{e^3\sqrt{2gz_0}}$。それから $t_2 = \boxed{e(1+e)\sqrt{2z_0/g}}$，$z_2 = \boxed{e^4 z_0}$。

(4) これまでの結果から，t_n と z_n は自然数 n を用いて各々どのように表されると予想されるか？

■略解　t_1, t_2 の式を見て（心配なら $t_3, t_4, \ldots$ も求めておけばよい）$t_n = \boxed{e^{n-1}(1+e)\sqrt{2z_0/g}}$ と予想できる。また，z_1 の式を見て（これも心配なら $z_3 = e^6 z_0$，$z_4 = e^8 z_0$ ぐらいまで求めてからでもよい）$z_n = \boxed{e^{2n} z_0}$ と予想できる。ちゃんと示すなら n 回目の衝突と $n+1$ 回目の衝突を考えて漸化式を立てて解くか，ほとんど同じことだが数学的帰納法を使ってもできると思う。

(5) 衝突を十分な回数繰り返すと，運動は停止すると思われる。そのときまでに要した時間 $T \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} t_n$ と質点の総移動距離 $Z \equiv z_0 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ を求めよ。必要ならば，次の無限級数の公式を用いてよい。

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad (|x| < 1)\ .$$

■略解　(4) で予想した式を使って（どちらも等比数列となっていて）

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = (1+e)\sqrt{\frac{2z_0}{g}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{n-1} = (1+e)\sqrt{\frac{2z_0}{g}}\sum_{n=0}^{\infty} e^n = \underline{\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2z_0}{g}}}\ ,$$

$$Z = z_0 + 2z_0\sum_{n=1}^{\infty} e^{2n} = z_0 + 2e^2 z_0 \sum_{n=0}^{\infty} e^{2n} = z_0 + 2e^2 z_0 \cdot \frac{1}{1-e^2} = \underline{\frac{1+e^2}{1-e^2} z_0}\ .$$

衝突の回数 n は無限だが，無限回衝突するのに必要な時間と，それまでに動いた距離は有限という不思議な？結果。

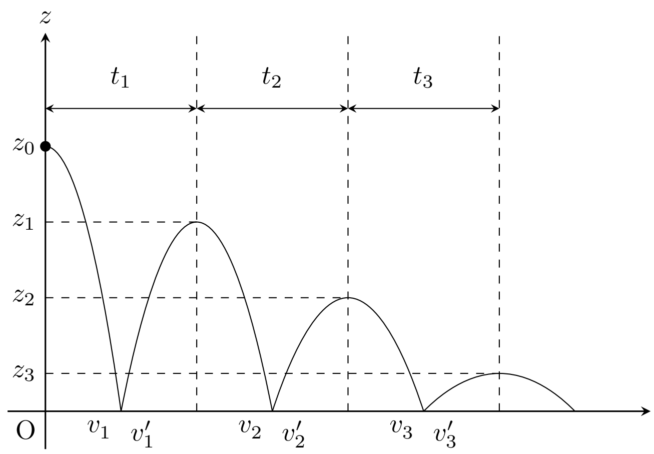
3　雨滴の落下運動

単位時間当たりに質量が μ だけ増加しながら落下する雨滴を考える（$\Delta m/\Delta t = \mu > 0$，微分で書くと $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = \mu$，ということ）。雨滴の位置および速度について，初期条件は $z(0) = z_0$, $v(0) = 0$ とする。以下の問に答えよ。

(1) 運動方程式を展開した形

$$(m_0 + \mu t)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \mu\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -(m_0 + \mu t)g \tag{1}$$

を導け。



■略解　講義でやった微分方程式に積の微分公式 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{f(t)g(t)\} = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$ を使えばよい。

(2) (1) 式は複雑な形をしており，展開前の表式に立ち戻るか，あるいは変形：(左辺) $= \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{(m_0 + \mu t)\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right\}$ に気がつかないと解くのが難しそうに思える。しかし，(1) 式の形を良く見ると，演習 #2-**1** の方法が使えそうである。解を $z(t) = at^2 + bt + c$ と置いて (1) 式に代入し，両辺の係数を比較することで定数を決めることができる。こうして得られる $z(t)$ を講義で導いたものと比べて結果を議論せよ（「講義と同じ」とか「講義と違う」とただ書いて終わるのではなく，なぜそうなのかを議論せよ。方法が違うのに同じ結果に至ったならばその理由を，異なる結果に至ったならばその原因を考えて自由に書いてみよ)。

■略解　$z(t) = at^2 + bt + c$ を (1) 式に代入すると $4a\mu t + (2am_0 + \mu b) = -\mu g t - m_0 g$ という方程式が得られる。これが t についての恒等式（どんな t に対しても成り立たなければいけない）なので $4a\mu = -\mu g$ と $2am_0 + \mu b = -m_0 g$ から $a = -g/4$ と $b = -m_0 g/2\mu$ ともとまり，したがって $z(t) = -(g/4)t^2 - (m_0 g/2\mu)t + c$。これは正しい解の一部しか再現できていない（log の項がない）ので，講義とは違う 結果。解を $z(t) = at^2 + bt + c$ の形で置いてしまったので，他の形の解が拾えていないのは当然。一般に二階の微分方程式は重ね合わされる（線型独立な）二つの解（sin と cos とか，t と t^2 とか。詳しくは第五回講義）があるが，今回の場合はそのうちの片方しか拾えていないということ。