物理学 A 演習問題 #6 略解

1　空気抵抗を受けながら落下する質点

時刻 $t=0$ に位置 $z=z_0>0$ から静かに落下し始めた質点が，速度に比例する空気抵抗 $-k\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ を受けている。以下の問に答えよ。

(1) 状況を図示し，位置 $z=z(t)$ が満たす運動方程式が

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=g \tag{1}$$

で与えられることを示せ。空気抵抗はどのような場合に無視でき，あるいは無視できないか？

■解答　図示は略。質点が受ける力は鉛直下向きの重力 $-mg$（符号込み）と鉛直上向きの空気抵抗 $-k\,\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$（符号込み）の二つのみである。そこで z 軸を鉛直下向きにとると，運動方程式は $m(\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2)=mg-k(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t)$ と書ける。両辺を m で割れば示したい式。空気抵抗が無視できるのは k/m が非常に小さいときなので，質量がとても重いか，または k が非常に小さいとき。質量がとても重いと空気抵抗に比べて重力の効果がずっと大きいため空気抵抗はほとんど考える意味がないということ。逆にとても軽い場合には空気抵抗が重要になる。これは k/m がとても大きいことからも理解できる。

講義では，運動方程式 (1) を $v=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ に関するものに書き換えて，変数分離形に帰着させて解を求めた。ここでは，別の求め方で (1) を解いてみる。

(2) 微分方程式 (1) をよく見ると「二回微分したものと，一回微分して定数 k/m を掛けたものを足すと，定数 g になる」ことが分かる。したがって，演習 #2-**1** で扱った方法が使えそうである。すなわち，(1) を満たす解を簡単なものから $z=c$（定数），$z=at+b$，$z=at^2+bt+c$，$\cdots$ と試していくと，一次式 $z=at+b$ が候補になりうる（$\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2$ の項は落ちて，$(k/m)\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$ が定数になるので，a と b を適当に取れば右辺の定数 g にできるから）。このとき，初期条件と合わせて定数 a と b を決定せよ。

■解答　$z=at+b$ に対して $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t=a$，$\mathrm{d}^2z/\mathrm{d}t^2=0$ なので (1) 式に代入すると $(k/m)a=g$ より $a=\boxed{mg/k}$。また初期条件から $z(0)=b=\boxed{z_0}$。以上で定数が決まり，$z(t)=(mg/k)t+z_0$。

(3) ところで，微分方程式 (1) の右辺を 0 と置いた別の微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{z}}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{2}$$

を考える。(2) 式の解を $\tilde{z}(t)=e^{\lambda t}$ と仮定する。このとき，λ が満たす方程式を導き，可能な λ の値を求めよ。

■解答　$\tilde{z}(t)=e^{\lambda t}$ に対して $\mathrm{d}\tilde{z}/\mathrm{d}t=\lambda e^{\lambda t}$，$\mathrm{d}^2\tilde{z}/\mathrm{d}t^2=\lambda^2e^{\lambda t}$ なので (2) に代入すると $\left[\lambda^2+(m/k)\lambda\right]e^{\lambda t}=0$。したがって $\lambda^2+(m/k)\lambda=0$。よって $\lambda=\boxed{0,\,-k/m}$。

(4) 前問で求めた $\lambda=\lambda_1,\lambda_2$ に対して，微分方程式 (2) の一般解は $\tilde{z}(t)=c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t}$ と書ける。一方，設問 (2) で「発見」した微分方程式 (1) を満たす関数（特解という）を $z_\mathrm{P}(t)=at+b$ とすると，(1) 式の一般解は

$$z(t)=z_\mathrm{P}(t)+\tilde{z}(t)=z_\mathrm{P}(t)+c_1e^{\lambda_1t}+c_2e^{\lambda_2t} \tag{3}$$

と与えられる。初期条件を用いて定数 c_1 と c_2 を決定せよ。

■解答　$\lambda_1=0,\lambda_2=-k/m$ とする。問題文より $\tilde{z}(t)=c_1+c_2e^{-(k/m)t}$ である。また設問 (2) より $z_\mathrm{P}(t)=(mg/k)t+z_0$ である［z_0 が抜けていたので訂正（6/27）］。したがって，再び問題文より一般解は $z(t)=(mg/k)t+c_1+c_2e^{-(k/m)t}$ と与えられることになる。初期条件より $z(0)=c_1+c_2=z_0$，

$v(0) = mg/k - (k/m)c_2 = 0$ だから，この連立方程式を解いて $c_1 = \boxed{z_0 - m^2g/k^2}$，$c_2 = \boxed{m^2g/k^2}$。ゆえに

$$z(t) = z_0 + \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)\right] .$$

これは講義で導出したものと確かに同じ表式を与えている（ここで k と書いているものは講義では μ と書いていました）。

［注：ここで扱った方法は，減衰振動や強制振動の微分方程式を解くときにまた出てきます］