Задача 4

Реализация

Будем хранить наши элементы в векторе в порядке добавления.

Insert(x)

Добавим x в конец вектора. (операция $push\_back$)

DeleteLargerHalf

Найдём медиану нашего вектора методом медианы медиан. Пройдёмся по вектору и удалим (алгоритм удаления чуть позже) все элементы большие медианы, пусть их было x штук. По определению медианы $x < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ещё раз пройдемся по вектору и удалим $\lceil \frac{n}{2} \rceil - x$ элементов равных медиане. Таким образом мы удалили $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ элементов, что и требовалось.

Как мы будем удалять: меняем элемент который хотим удалить с последним элементом в векторе и делаем pop_back.

Проведем **амортизационный анализ** методом усреднения. Изначально в структуре 0 элементов, после выполнения n операций в ней останется k элементов. Пусть среди n операций было m операций $DeleteLargerHalf$. Обозначим за a_i число элемнтов, удаленных на i-ой операции $DeleteLargerHalf$. Тогда всего было $(n-m)$ операций добавления элементов. В конце осталось k элементов, запишем это:

$$(n-m) - \sum_{i=1}^{m} a_i = k$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = n - m - k$$

Время выполнения операции $Insert(x)$ — амортизированно $O(1)$.

Время выполнения операции $DeleteLargerHalf$ складывается из времени поиска медианы, времени двух проходов по вектору и времени выполнения a_i операций pop_back. Если мы удаляем a_i элементов, то до удаления в структуре было $a_i \cdot 2 \pm 1$ элементов, то есть $\Theta(a_i)$. Медиану мы ищем за $O(\text{число элементов в структуре}) = O(a_i)$, по массиву мы проходимся за те же $\Theta(\text{число элементов в структуре}) = \Theta(a_i)$, операции pop_back мы выполняемя амортизированно за $O(1)$. Значит все операции pop_back мы выполним амортизированно за $a_i \cdot O(1) = \Theta(a_i)$ и амортизированное время выполнения $DeleteLargerHalf$ равно $\Theta(a_i)+O(a_i)+\Theta(a_i) = \Theta(a_i)$

Таким образом суммарное время выполнения всех n операций равно

$$(n-m) \cdot O(1) + \sum_{i=1}^{m} \Theta(a_i) =$$

$$= \Theta(n-m) + \Theta(\sum_{i=1}^{m} a_i) =$$

$$= \Theta(n-m) + \Theta(n-m-k) =$$

$$= \Theta(2n-2m-k) = \Theta(n)$$

Значит амортизационная стоимость выполнения одной операции равна $\frac{\Theta(n)}{n} = O(1)$