

Найдём время работы алгоритма поиска медианы при делении элементов на группы по $2k + 1$ элементов. Оно складывается из:

1. Времени нахождения медианы в каждой из частей по $(2k + 1)$ элементов:

$$T_1(n) = \frac{n}{2k + 1}(2k + 1)^2 = \Theta(n)$$

2. Времени нахождения медианы медиан:

$$T_2(n) = T\left(\frac{n}{2k + 1}\right)$$

3. Времени разделение массива на две части:

$$T_3(n) = \Theta(n)$$

4. Времени рекурсивного вызова от одной из частей.

Так как медиана медиан не меньше чем как минимум

$$\frac{n(k + 1)}{2(2k + 1)}$$

элементов, то каждая часть содержит не более чем

$$n - \frac{n(k + 1)}{2(2k + 1)} = \frac{3k + 1}{2(2k + 1)}n$$

элементов, то есть

$$T_4(n) = T\left(\frac{3k + 1}{2(2k + 1)}n\right)$$

Таким образом,

$$T(n) = T_1(n) + T_2(n) + T_3(n) + T_4(n)$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2k+1}\right) + T\left(\frac{3k+1}{2(2k+1)}n\right) + dn$$

Посмотрим, для каких k верно $T(n) = O(n)$

Для этого должно выполняться

$$\begin{cases} T\left(\frac{n}{2k+1}\right) \leq c\left(\frac{n}{2k+1}\right) \\ T\left(\frac{3k+1}{2(2k+1)}n\right) \leq c\left(\frac{3k+1}{2(2k+1)}n\right) \end{cases} \implies T(n) \leq cn$$

то есть

$$c\frac{n}{2k+1} + c\frac{3k+1}{2(2k+1)}n + dn \leq cn$$

$$c\frac{(4k+2) - 2 - (3k+1)}{2(2k+1)} \geq d$$

$$c\frac{k-1}{2(2k+1)} \geq d$$

Заметим, что при $k > 1$ мы всегда сможем подобрать такое c ,
Значит при $k > 1$ алгоритм будет работать за линейное время,
а при $k = 1$ не за линейное.