Задача 3 (семинар 16.05.2016)

1. Докажем, что если T это минимальный остов, то каждое ребро не лежащее в T имеет максимальный вес среди рёбер цикла, стягиваемого этим ребром. Пусть (u, v) — ребро веса w, не принадлежащее T, и пусть в цикле, стягиваемым этим ребром, есть ребро (u', v') веса $w' > w$. Тогда удалим из T ребро (u', v'), добавим ребро (u, v), T останется остовным деревом, но его вес уменьшится, противоречие с минимальностью T.

2. Докажем, что если каждое ребро не лежащее в T имеет максимальный вес среди рёбер цикла, стягиваемого этим ребром (*), то T это минимальный остов. Выберем среди всех минимальных остовных деревьев такое дерево S, что число его общих с T рёбер максимально. Рассмотрим случай когда $T \neq S$. Пусть (u, v) — ребро минимального веса w, не принадлежащее T, но принадлежащее S (или наоборот).

а) $(u, v) \in T$

В этом случае (u, v) стягивает некоторой цикл в S, и, конечно, не все рёбра этого цикла принадлежат T, иначе бы в T был цикл. Пусть (u', v') — ребро веса w' в цикле, не принадлежащее T. Конечно, $w' \geq w$ иначе бы было противоречие с выбором ребра (u, v). Также по пункту (1) $w' \leq w$. Итак, $w' = w$, тогда удалим из S ребро (u', v'), добавим ребро (u, v), S останется минимальным остовным деревом, но число общих с T вершин возрастёт, противоречие с выбором S.

б) $(u, v) \in S$

Аналогично пункту (а) получаем, что в цикле, стягиваемом в T ребром (u, v) есть ребро (u', v') веса $w' = w$ (только вместо пункта 1 используем условие (*)). Применяя пункт (а) к ребру (u', v') получаем противоречие.

Итак, в обоих случаях мы пришли к противоречию, значит $S = T$, что и требовалось.