

$$T(n) = 2T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n \log n$$

Ответ: $T(n) = \Theta(n \log^2 n)$. Докажем это:

- $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \leq c \lceil \frac{n}{2} \rceil \log^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \implies T(n) \leq cn \log^2 n$
 $T(n) = 2T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n \log n$
 $T(n) \leq 2c \lceil \frac{n}{2} \rceil \log^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil + n \log n$
 $T(n) \leq c(n+2) \log^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil + n \log n$
 $T(n) \leq c(n+2) \log^2 \frac{3}{4}n + n \log n$
 $T(n) \leq c(n+2)(\log n - \log \frac{4}{3})^2 + n \log n$
 Обозначим $a = \log \frac{4}{3}$, $a > 0$
 $T(n) \leq c(n+2)(\log n - a)^2 + n \log n$
 $T(n) \leq cn \log^2 n - 2can \log n + cna^2 + 2(\log n - a)^2 + n \log n$
 $T(n) \leq cn \log^2 n + (1 - 2ca)n \log n + O(n)$
 Возьмём $c > \frac{1}{2a}$,
 тогда $(1 - 2ca) < 0$ и начиная с некоторого n
 $T(n) \leq cn \log^2 n \quad \square$
- $T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) \geq c \lceil \frac{n}{2} \rceil \log^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil \implies T(n) \geq cn \log^2 n$
 $T(n) = 2T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n \log n$
 $T(n) \geq 2(c \lceil \frac{n}{2} \rceil \log^2 \lceil \frac{n}{2} \rceil) + n \log n$
 $T(n) \geq 2(c(\frac{n}{2}) \log^2(\frac{n}{2})) + n \log n$
 $T(n) \geq cn(\log n - 1)^2 + n \log n$
 $T(n) \geq cn \log^2 n - 2cn \log n + cn + n \log n$
 $T(n) \geq cn \log^2 n + (1 - 2c)n \log n + cn$
 Возьмём $c < \frac{1}{2}$, тогда
 $(1 - 2c) > 0 \implies T(n) \geq cn \log^2 n \quad \square$