Задача 2

a. $T(n) = 5T(n/4) + n$
   Обозначим $f(n) = n,\ g(n) = n^{\log_4 5}$
   Сравним $f(n)$ и $g(n)$
   $f(n) = O(n^{(\log_4 5) - \varepsilon}),\ \varepsilon > 0$
   Значит $T(n) = \Theta(g(n)) = \Theta(n^{\log_4 5})$

b. $T(n) = T(4n/5) + 1$
   Обозначим $f(n) = 1,\ g(n) = n^{\log_{5/4} 1} = n^0 = 1$
   Сравним $f(n)$ и $g(n)$
   $f(n) = \Theta(g(n))$
   Значит $T(n) = \Theta(g(n) \log n) = \Theta(\log n)$

c. $T(n) = 7T(n/8) + n \log n$
   Обозначим $f(n) = n \log n,\ g(n) = n^{\log_8 7}$
   Сравним $f(n)$ и $g(n)$
   $f(n) = \Omega(n^{(\log_8 7) + \varepsilon}),\ \varepsilon > 0$
   Проверим, что существует такое $c < 1$, что

$$7f(\frac{n}{8}) \leq cf(n)$$

   Возьмём $c = \frac{7}{8}$. Тогда

$$cf(n) - 7f(\frac{n}{8}) = \frac{7n}{8} \log n - \frac{7n}{8} \log \frac{n}{8} = \frac{7n}{8} \log 8 \geq 0$$

   Значит $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n \log n)$