Задача 3 (семинар 21.03.2016)

Нам дана последовательность $a[1..n]$. Обозначим len_i — длина НОП префикса $a[1..i]$, num_i — число таких НОП.

$$len_0 = 0,\ num_0 = 1$$

$$len_i = 1 + \max_{\substack{j<i \\ a_j<a_i}} (len_j)$$

$$num_i \text{ — число } j < i, \text{ таких что } a_j < a_i \text{ и } len_j + 1 = len_i$$

Будем считать len и num используя дерево Фенвика, причём обрабатывать индексы мы будем в порядке возрастания a_i. Заведём два массива $maxlen$ и $sumnum$:

$$maxlen_i = \max_{f(i)\le j\le i} (len_j)$$

$$sumnum_i = \sum_{\substack{f(i)\le j\le i \\ len_j=maxlen_i}} (num_j)$$

Пересчитывать $maxlen$ и $sumnum$ мы будем следующим образом: пусть у нас обновился len_i, тогда для всех j, таких что $f(j) \le i \le j$ мы инкрементируем num_j если $maxlen_j = len_i$, в противном случае обновляем $maxlen_j$ и присваиваем $numlen_j = 1$.

Теперь введём ещё два массива, $\overline{len}_i$ — длина НОП суффикса $a[i..n]$, $\overline{num}_i$ — число таких НОП. Считаем их аналогично.

Обозначим за lcs_i число НВП длины l проходящих через a_i.

$$lcs_i = num_i \cdot \sum_{\substack{i<j \\ a_i<a_j \\ len_i+\overline{len}_j=l}} \overline{num}_j$$

Заметим, что для всех $j > i$ $len_i + \overline{len}_j \le l$ Таким образом, через a_i проходит хотя бы одна НВП $\iff l - len_i = \max_{\substack{i<j \\ a_i<a_j}} (\overline{len}_j)$

Будем считать lcs используя дерево Фенвика. Опять же заведём два массива $\overline{maxlen}$ и $\overline{sumnum}$. Обрабатывать индексы мы будем в порядке убывания a_i. Итак, обрабатываем индекс i. Вначале обновим $\overline{len}_i$ и $\overline{num}_i$, аналогично тому, как мы это делали для len_i и num_i. Далее, нас интересует выражение $\sum\limits_{len_i+\overline{len}_j=l} \overline{num}_j$ на суффиксе $a[i+1..n]$. В дереве Фенвика каждый суффикс разбивается на $O(\log n)$ непересекающихся отрезков. Пробежимся по этим отрезкам и если $len_i + \overline{maxlen}_j = l$, то прибавим к текущей сумме $\overline{sumnum}_j$.

Итак, мы посчитали lcs_i, осталось только решить, какие же элементы у нас хорошие. Из предыдущей задачи мы нашли общее число НВП длины l, обозначим её all. Тогда позиция i — хорошая $\iff lcs_i = all$.