a) $k \log k = \Theta(n)$

Надо доказать, что $k = \Theta(\frac{n}{logn})$

По условию существуют такие a и b, что

$$an \le k \log k \le bn$$

1. Докажем, что $k \le bn$:

$$an \le k \log k \le bn$$

$$k \le \frac{bn}{\log k} \le bn$$

2. Докажем, что $k \ge \frac{an}{2 \log n}$:

$$an \le k \log k \le k \log bn$$

$$k \ge \frac{an}{\log bn}$$

Начиная с некоторого n

$$\log bn \le 2 \log n$$

$$\frac{1}{\log bn} \ge \frac{1}{2 \log n}$$

$$k \ge \frac{an}{\log bn} \ge \frac{an}{2 \log n}$$

3. Докажем, что $k \le \frac{2bn}{\log n}$:

$$k \log \frac{an}{2\log n} \le k \log k \le bn$$

$$k \le \frac{bn}{\log n - \log \frac{2\log n}{a}}$$

Начиная с некоторого n

$$\log \frac{2\log n}{a} \le \frac{1}{2} \log n$$

$$\log n - \log \frac{2\log n}{a} \ge \log n - \frac{1}{2} \log n$$

$$\log n - \log \frac{2\log n}{a} \ge \frac{1}{2} \log n$$

$$\frac{1}{\log n - \log \frac{2\log n}{a}} \le \frac{2}{\log n}$$

$$k \le \frac{bn}{\log n - \log \frac{2\log n}{a}} \le \frac{2bn}{\log n}$$

Ткаим образом

$$\frac{an}{2\log n} \le k \le \frac{2bn}{\log n}$$

то есть существуют такие $c = \frac{a}{2}$ и $d = 2b$, что

$$d\frac{n}{\log n} \le k \le c\frac{n}{\log n}$$

Значит
$$k = \Theta(\frac{n}{\log n}) \quad \square$$
б) $s = n^n$,

Надо найти такую $f(s)$, что $n = \Theta(f(s))$
$$\log s = n \log n \implies n \log n = \Theta(\log s)$$
И значит (по пункту а)
$$n = \Theta(\frac{\log s}{\log \log s})$$
то есть
$$f(s) = \frac{\log s}{\log \log s}$$