$T(n) = \sqrt{n}T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + n$
Ответ: $T(n) = \Theta(n \log\log n)$. Докажем это:

- $T(n) = O(n \log\log n)$, то есть

  $$T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) \le c\lfloor\sqrt{n}\rfloor \log\log\lfloor\sqrt{n}\rfloor \implies T(n) \le cn \log\log n$$

  Доказательство:

  $$T(n) = \sqrt{n}T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + n$$

  $$T(n) \le \sqrt{n}(c\lfloor\sqrt{n}\rfloor \log\log\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + n$$
  $$T(n) \le \sqrt{n}(c\sqrt{n} \log\log\sqrt{n}) + n$$
  $$T(n) \le cn \log\log\sqrt{n} + n$$
  $$T(n) \le cn \log(\frac{1}{2}\log n) + n$$
  $$T(n) \le cn(\log\log n - 1) + n$$
  $$T(n) \le cn \log\log n + n(1 - c)$$

  Возьмём $c > 1$, тогда $(1 - c) < 0$ и значит

  $$T(n) \le cn \log\log n \quad \square$$

- $T(n) = \Omega(n \log\log n)$, то есть

  $T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) \geq c\lfloor\sqrt{n}\rfloor \log\log\lfloor\sqrt{n}\rfloor \implies T(n) \geq cn\log\log n$

  Доказательство:

$$T(n) = \sqrt{n}T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + n$$

$$T(n) \geq \sqrt{n}(c\lfloor\sqrt{n}\rfloor \log\log\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + n$$

$$\begin{cases} \lfloor\sqrt{n}\rfloor = \sqrt{n} - \alpha, \ 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \lfloor\sqrt{n}\rfloor \geq \sqrt[4]{n} \end{cases} \implies$$

$$T(n) \geq c\sqrt{n}(\sqrt{n} - \alpha)\log\log\sqrt[4]{n}) + n$$

$$T(n) \geq cn\log(\frac{1}{4}\log n) - c\alpha\sqrt{n}\log\log\sqrt[4]{n}) + n$$

$$T(n) \geq cn(\log\log n - 2) - c\alpha\sqrt{n}\log\log\sqrt[4]{n}) + n$$

$$T(n) \geq cn\log\log n + (1-2c)n - c\alpha\sqrt{n}\log\log\sqrt[4]{n})$$

  Начиная с некоторого n

$$-c\alpha\sqrt{n}\log\log\sqrt[4]{n}) \geq -c\alpha n \geq -cn \implies$$

$$T(n) \geq cn\log\log n + (1-3c)n$$

  Возьмём $c < \frac{1}{3}$, тогда $(1-3c) > 0$
  и начиная с некоторого n

$$T(n) \geq cn\log\log n \quad \square$$