Задача 1 (семинар 18.04.2016)

Запись ($u \to v$) означает что существует ребро между u и v, а $u \overset{1}{\twoheadrightarrow} v$ означает что существует путь из u в v, причём мы будем называть его «путь 1».

A $\implies$ B
Рассмотрим любые две различные вершины u и v. Пусть (u, u') и (v, v') — любые ребра (такие существуют, ибо граф связный). G не содержит точек сочленения, значит он является вершинно двусвязным, значит существуют два вершинно непересекающихся пути соединяющих концы рёбер (u, u') и (v, v'):

$$u = a_0 \to a_1 \to ... \to a_{n-1} \to a_n = v$$

$$v' = b_0 \to b_1 \to ... \to b_{n-1} \to b_k = u'$$

Тогда вершины u и v принадлежат простому циклу:

$$u = a_0 \to a_1 \to ... \to a_{n-1} \to a_n = v \to v' = b_0 \to b_1 \to ... \to b_{n-1} \to b_k = u' \to u$$

B $\implies$ C
Рассмотрим некоторую вершину w и ребро (u, v). Применим B к (w и u) и (w и v):

$$w \overset{1}{\twoheadrightarrow} u \overset{2}{\twoheadrightarrow} w$$

$$w \overset{3}{\twoheadrightarrow} v \overset{4}{\twoheadrightarrow} w$$

Пусть x — ближайшая к u вершина лежащая на пути 1, такая что она также лежит на пути 3 или 4. Заметим, что x не может одновременно лежать и на пути 3 и на пути 4, поэтому рассмотрим случай когда x лежит на пути 3, другой случай аналогичен. Тогда вершина w и ребро (u, v) лежат на следующем простом цикле:

$$w \overset{3}{\twoheadrightarrow} x \overset{1}{\twoheadrightarrow} u \to v \overset{4}{\twoheadrightarrow} w$$

C $\implies$ D
Рассмотрим некоторые рёбра (a, b) и (c, d). Применим C к (a и (c, d)) и (b и (c, d)):

$$c \overset{1}{\twoheadrightarrow} a \overset{2}{\twoheadrightarrow} d \to c$$

$$c \overset{3}{\twoheadrightarrow} b \overset{4}{\twoheadrightarrow} d \to c$$

Пусть x — ближайшая к a вершина лежащая на пути 1, такая что она также лежит на пути 3 или 4. Заметим, что x не может одновременно лежать и на пути 3 и на пути 4, поэтому рассмотрим случай когда x лежит на пути 3, другой случай аналогичен. Тогда рёбра (a, b) и (c, d) лежат на следующем простом цикле:

$$c \overset{3}{\twoheadrightarrow} x \overset{1}{\twoheadrightarrow} a \to b \overset{4}{\twoheadrightarrow} d \to c$$

D $\implies$ E

Рассмотрим некоторые вершины a и b и ребро (c, d). Пусть (a, a') и (b, b') — любые ребра. Применим D к рёбрам $((a, a'), (c, d))$ и $((b, b'), (c, d))$:

$$a \overset{1}{\twoheadrightarrow} c \to d \overset{2}{\twoheadrightarrow} a' \to a$$

$$b \overset{3}{\twoheadrightarrow} c \to d \overset{4}{\twoheadrightarrow} b' \to b$$

Пусть x — ближайшая к a вершина лежащая на пути 1, такая что она также лежит на пути 3 или 4. Заметим, что x не может одновременно лежать и на пути 3 и на пути 4, поэтому рассмотрим случай когда x лежит на пути 3, другой случай аналогичен. Тогда следующая цепь является искомой:

$$a \overset{1}{\twoheadrightarrow} x \overset{3}{\twoheadrightarrow} c \to d \overset{4}{\twoheadrightarrow} b' \to b$$

E $\implies$ F

Рассмотрим некоторые три различные вершины a, b и c. Пусть (b, b') — любое ребро. Применим E к вершинам a, c и ребру (b, b'):

$$a \overset{1}{\twoheadrightarrow} b \to b' \overset{2}{\twoheadrightarrow} c$$

Это и есть искомая цепь.

F $\implies$ G

Рассмотрим некоторые три различные вершины a, b и c. Пусть d — любая другая вершина (если в графе всего три вершины, то это обязательно треугольник и тогда G верно). Применим F к вершинам $(a,\ d,\ b)$ и $(b,\ d,\ c)$:

$$a \overset{1}{\twoheadrightarrow} d \overset{2}{\twoheadrightarrow} b$$

$$b \overset{3}{\twoheadrightarrow} d \overset{4}{\twoheadrightarrow} c$$

Это простые цепи, значит b не принадлежит ни пути 1, ни пути 4. Тогда следующая цепь является искомой:

$$a \overset{1}{\twoheadrightarrow} d \overset{4}{\twoheadrightarrow} c$$

G $\implies$ A

Лучше докажем $\overline{\mathbf{A}} \implies \overline{\mathbf{G}}$. Пусть есть точка сочленения w, удалим её, останется две или больше компонент вершинной двусвязности, пусть u принадлежит первой, v второй. Тогда любая простая цепь из u в v проходит (в исходном графе) через w, то есть существуют три различные вершины, что любая простая цепь соединяющая две из них проходит через третью, а это и есть $\overline{G}$.