Отчёт по практикуму на ЭВМ.

Задание 2 Уравнение теплопроводности

студентки 408 гр. Дьячковой Е.Н.

Вариант 2.

1 Постановка задачи.

Требуется методом конечных разностей в области $D = \{(x,t);\ 0 < x < 1,\ 0 < t \leq 1\}$ приближенно решить ур-е теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

с начальным $u(x,0) = u_0(x)$ при $t = 0$ и краевыми условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0$ при $\forall\, t \geq 0$

Сетка в области $\bar{D} = D \cup \Gamma$ задается равномерной по обеим переменным: $\begin{cases} x_m = mh, & m = 0, \dots, M,\ Mh = 1 \\ t^n = n\tau, & n = 0, \dots, N,\ N\tau = 1 \end{cases}$

Используются обозначения: для сеточной функции u в (·)ке (x_m, t^n) — u_m^n; для разностного аналога оператора $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ при $x = x_m$ выражение

$$\Lambda u_m = \frac{u_{m+1} - 2u_m + u_{m-1}}{h^2}$$

Вариант задания №2: метод правой прогонки и схема для $1 \leq m \leq M-1$, $0 \leq n \leq N-1$

$$\frac{1}{12}\,\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m+1}^{n}}{\tau} + \frac{5}{6}\,\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n}}{\tau} + \frac{1}{12}\,\frac{u_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^{n}}{\tau} =$$

$$= \Lambda\,\frac{u_m^{n+1} + u_m^{n}}{2} + \varphi_m$$

2. Разложение и погрешность аппроксимации

(1.) Точка разложения — $(x = x_m,\ t = t^{n+\frac{1}{2}})$

(2.) Правая часть — $\varphi_m = f(x_m, t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{(x_m, t^{n+\frac{1}{2}})}$

(3.) Погрешность —

$$ERR = \frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - 3\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2}\right) + \frac{\tau^2 h^2}{288}\left(\frac{\partial^5 u}{\partial t^3 \partial x^2} \ominus\right.$$

$$\left.\ominus\, 3\frac{\partial^6 u}{\partial t^2 \partial x^4}\right) + \frac{h^4}{720}\left(5\frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} - 2\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right) + O(h^4 + \tau^2)$$

3. Устойчивость

Была рассмотрена вспомогательная задача на собственные значения: $\Lambda V_m = -\mu V_m$, $1 \le m \le M-1$, $V_0 = V_M = 0$, $Mh = 1$.

Её решением является набор собственных векторов и значений

$$\begin{cases} V_m^{(k)} = \sqrt{2}\sin(\pi k m h) \\ \mu^{(k)} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k h}{2}\right) \end{cases} \quad 1 \le k \le M-1$$

Что позволяет выразить собственные значения исходной разностной схемы:

$$\lambda(k) = \frac{5 + \cos\pi k h - \frac{12\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2}}{5 + \cos\pi k h + \frac{12\tau}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2}}$$

Доказано, что при всех τ, h, k $|\lambda| \le 1 \Longrightarrow$

схема абсолютно устойчива.

4. Таблицы погрешностей. $\|(v)_h - u_h\|$ при $t=1$

Для $u_1(x,t) = \sqrt{30}\, tx(1-x)$, $f_1(x,t) = \sqrt{30}(x - x^2 + 2t)$

τ \ h	0,1	0,01	0,001
0,1	2.143e-16	1.217e-14	2.466e-13
0,01	1.522e-15	3.184e-15	1.984e-13
0,001	1.760e-15	3.759e-14	2.820e-12

Для $u_2(x,t) = \sqrt{105}\, e^{-t+1} x^2(1-x)$, $f_2(x,t) = \sqrt{105}\, e^{-t+1}(x^3 - x^2 + 6x - 2)$

τ \ h	0,1	0,01	0,001
0,1	1.333e-03	1.333e-03	1.333e-03
0,01	1.335e-05	1.335e-05	1.335e-06
0,001	1.335e-07	1.335e-07	1.335e-07

Для $u_3(x,t) = \sqrt{630}\, tx^2(1-x)^2$, $f_3(x,t) = \sqrt{630}(x^2 - 2x^3 + x^4 - 2t + 12tx - 12tx^2)$

τ \ h	0,1	0,01	0,001
0,1	3.818e-05	3.819e-09	1.625e-13
0,01	3.818e-05	3.819e-09	5.089e-13
0,001	3.818e-05	3.819e-09	3.316e-12

Для $u_4(x,t)=\sqrt{2}e^{-\pi^2(t-1)}\sin(\pi x)$, $f_4(x,t)=0$

τ \ h	0,1	0,01	0,001
0,1	6.105e-01	6.107e-01	6.107e-01
0,01	7.591e-03	7.991e-03	7.991e-03
0,001	3.221e-04	8.007e-05	8.011e-05