Отчёт

студентки 408 группы Дьячковой Е. Н.
по практикуму на ЭВМ

Задание 1. Краевая задача для ОДУ 2го порядка

Вариант 2.

1. Постановка задачи. + вариационная постановка

Требуется на равномерной сетке $x_n = nh$, $0 \le n \le N$, $Nh = 1$ численно решить задачу

$$\begin{cases} -(k(x)u')' + p(x)u = f(x) \\ u(0) = u'(1) = 0 \\ k(x) = 1+x, \; p(x) = 2x^2 \end{cases}$$

Сопоставляем задаче функционал $J(v) = a(v,v) - 2(f,v)$, где $(f,v) = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx$ и $a(u,v) = \int_0^1 k(x)u'(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x)\,dx$

Пространство, на кот. будем минимизировать J:
$H := \{v(x): \int_0^1 (v')^2 + v^2\,dx < \infty, \; v(0) = 0\}$

Решение ищем в виде $y^N = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j(x) \in S^N$,
где $\begin{cases} S^N = \operatorname{span}\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_N(x)\} \text{ — конечномер. подпр-во } H \\ \varphi_j(x) \in H \end{cases}$

2. Тестовые функции и правые части

$u_1(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$, $f_1(x) = 2x^2\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{4}(1+x)\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$

$u_2(x) = \sin\frac{\pi(N-1)x}{2}$, $f_2(x) = \left(2x^2 + \frac{\pi^2(N-1)^2}{4}(1+x)\right)\sin\frac{\pi(N-1)x}{2} - \frac{\pi(N-1)}{2}\cos\frac{\pi(N-1)x}{2}$

$u_3(x) = x(1-x)^2$, $f_3(x) = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 2x + 3$

3. Разностная схема, построенная методом Ритца

Решаем систему $Ay = \tilde{b}$, где

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & -b_1 & 0 & & & 0 \\ -a_2 & c_2 & -b_2 & & & \\ 0 & -a_3 & c_3 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -a_{N-1} & c_{N-1} & -b_{N-1} \\ 0 & & & 0 & -a_N & c_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_j = -\frac{h^3}{3}\left((j-1)^2 + j - 1 + \frac{3}{10}\right) + j - \frac{1}{2} + \frac{1}{h}, \ j = \overline{2,N} \\ b_j = a_{j+1}, \ j = \overline{1,N-1} \\ c_j = 2j + \frac{2}{h} + \frac{h^3}{15}\left(20j^2 + 2\right), \ j = \overline{1,N-1} \\ c_N = \frac{2}{h} - \frac{1}{2} + \frac{h}{15}\left(h^2 - 5h + 10\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{b}_1 = \frac{h}{6}\left(4f(x_1) + f(x_2)\right) \\ \tilde{b}_j = \frac{h}{6}\left(f(x_{j-1}) + 4f(x_j) + f(x_{j+1})\right), \ j = \overline{2,N-1} \\ \tilde{b}_N = \frac{h}{6}\left(f(x_{N-1}) + 2f(x_N)\right) \end{cases}$$

Решаем методом левой прогонки:

• **Прямой ход** $\begin{cases} \xi_N = \frac{a_N}{c_N}, \ \xi_j = \frac{a_j}{c_j - b_j \xi_{j+1}}, \ j = N-1, \dots, 2 \\ \eta_N = \frac{\tilde{b}_N}{c_N}, \ \eta_j = \frac{\tilde{b}_j + b_j \eta_{j+1}}{c_j - b_j \xi_{j+1}}, \ j = N-1, \dots, 1 \end{cases}$

• **Обратный ход** $\begin{cases} y_1 = \eta_1 \\ y_{j+1} = \xi_{j+1} y_j + \eta_{j+1}, \ j = \overline{1,N-1} \end{cases}$

Th (достаточные условия корректности и устойчивости алгоритма): Пусть коэф-ты матрицы $A \in \mathbb{R}$, c_1, c_N, a_j, b_j при $j=\overline{2, N-1}$ $\neq 0$ и

$$\begin{cases} |c_j| \geq |a_j| + |b_j| \text{ при } j=\overline{2, N-1} \\ |c_1| \geq |b_1|, \ |c_N| \geq |a_N| \end{cases}$$

причём хотя бы 1 из неравенств строгое!

$$\Longrightarrow \begin{cases} |g_j| \leq 1, \ j=\overline{2, N} \\ c_j - b_j g_{j+1} \neq 0, \ j=\overline{1, N-1} \end{cases}$$

т.е., метод корректен и устойчив.

В упр. 2 условия th. проверены, они выполняются.

4. Аппроксимация

Утв: пусть $v \in H$ - достаточно гладкая функция и $v_e \in S^N$ - её интерполянт т.е.,

$$\begin{cases} K^2 = \|v''\|^2 = \int_0^1 (v'')^2 dx < \infty \\ v_e(x) = \sum_{j=1}^{N} v(x_j) \varphi_j(x) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (v' - v_e')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 K^2 \\ \int_0^1 (v - v_e)^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 K^2 \end{cases}$$

Следствие: наилучшее приближение $v_N \in S^N$ аппроксимирует $v \in H$ не хуже интерполянта:

$$\inf_{v_N \in S^N} \int_0^1 (v' - v_N')^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^2 K^2$$

$$\inf_{v_N \in S^N} \int_0^1 (v - v_N)^2 dx \leq \left(\frac{h}{\pi}\right)^4 K^2$$

Для u_1, u_2, u_3 из пункта 2. :

$$\varkappa_1 = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}, \quad \varkappa_2 = \frac{\pi^2(N-1)^2\sqrt{2}}{8}, \quad \varkappa_3 = 2.$$

5. Устойчивость

$$\begin{cases} \|u\| \le C_1 \|f\| \\ \|u'\| \le C_2 \|f\| \\ \|u''\| \le C_3 \|f\| \end{cases}$$

где
$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{k_{min} + p_{min}} = 1 \\ C_2 = \dfrac{1}{k_{min}} = 1 \\ C_3 = \dfrac{1}{k_{min}} \left[C_2 \max\limits_{[0;1]} |k'(x)| + C_1 \max\limits_{[0;1]} |p(x)| + 1 \right] = 4 \end{cases}$$

6. Сходимость

Th (проекционная): Пусть u – (·)ка минимума функционала $J(v) = a(v,v) - 2(f,v)$ на пр-ве H, S^N – конечномер. подпр-во $H \Rightarrow u_h$ – (·)ка минимума фун-ла $J(v)$ на S^N $\exists!$ и обладает св-ми:

(1) $a(u_h, v_h) = (f, v_h) \;\; \forall v_h \in S^N$

(2) u_h – проекция u на S^N по отношению к энергетическому скалярному произведению $a(v,v) \sim$ ошибка $u - u_h \perp S^N$: $a(u-u_h, v_h) = 0 \;\; \forall v_h \in S^N$

(3) $\min J(v_h)$ и $\min a(u-v_h, u-v_h)$, где v_h пробегает S^N достигаются на одной и той же фун-и u_h :

$$a(u-u_h, u-u_h) = \min_{v^h \in S^N} a(u-v_h, u-v_h)$$

Следствие: оценка скорости сходимости в метрике пр-ва $L_2(0,1)$ имеет вид $\|u-u_h\| \le c h^2$, if в кач-ве S^N использовать пр-во линейных кусочно-непрерывных функций.

$$c = C_3 \frac{k_{max}}{\pi^2}\left[1+\frac{h^2}{\pi^2}\frac{p_{max}}{k_{max}}\right]K \simeq C_3 \frac{k_{max}}{\pi^2} K$$

Для u_1, u_2, u_3 из пункта 2.:

$$\begin{cases} \|u_1 - u_{1h}\| \le \sqrt{2}\left[1+\frac{h^2}{\pi^2}\right]h^2 \simeq \sqrt{2}\, h^2 \\ \|u_2 - u_{2h}\| \le \sqrt{2}\,(N-1)^2\left[1+\frac{h^2}{\pi^2}\right]h^2 \simeq \sqrt{2}\left(\frac{N-1}{N}\right)^2 = \sqrt{2}(1-h)^2 \\ \|u_3 - u_{3h}\| \le \frac{16}{\pi^2}\left[1+\frac{h^2}{\pi^2}\right]h^2 \simeq \frac{16}{\pi^2}h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|f_1\| = \sqrt{\frac{19}{10} - \frac{48}{\pi^4} + \frac{6}{\pi^2} + \frac{11\pi^2}{48} + \frac{7\pi^4}{96}} \\ \|f_2\| \text{ главный член } \simeq \frac{\sqrt{7}\,\pi^2(N-1)^2}{\sqrt{6}\cdot 4} = \frac{\sqrt{42}\,\pi^2(N-1)^2}{24} \\ \|f_3\| = \sqrt{\frac{1847}{330}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ для u_1 и u_3 разностные схемы сходятся с порядком 2, для u_2 – не сходится.

8. Таблица расчётов.

$N \backslash u$	u_1	u_2	u_3
32	2.644e−04	1.809e−01	7.705e−04
64	6.674e−05	1.861e−01	1.937e−04
128	1.677e−05	1.887e−01	4.856e−05