Mikro johdanto
(1.) Harj. 3

Käytetään seuraavia kirjan merkintöjä:

Olkoon L= tehdyt työtunnit (labor),

R= vapaa-aika (Relaxation), w=palkka (wage)

ja c=hyödykkeiden kulutus(=tulot) (consumption)

Nyt $w \cdot L \overset{1^\circ}{=} c$ (palkka x työtunnit = kulutus)

ja $L = \overbrace{100}^{\max L} - R$ (aika, jota ei käytetä vapaa-ajan viettoon, menee töitä tehdessä).

Sijoitetaan yhtälö 2° yhtälöön 1° =>

saadaan budjettirajoite; $w(100-R)=c$

$\Leftrightarrow c = -wR + 100w$ tai $\frac{1}{w}c + R = 100$

(1:n kulutusyksikön hinta vapaa-ajassa mitattuna $\frac{1}{w}$).

Sijoitetaan annetut lukuarvot:

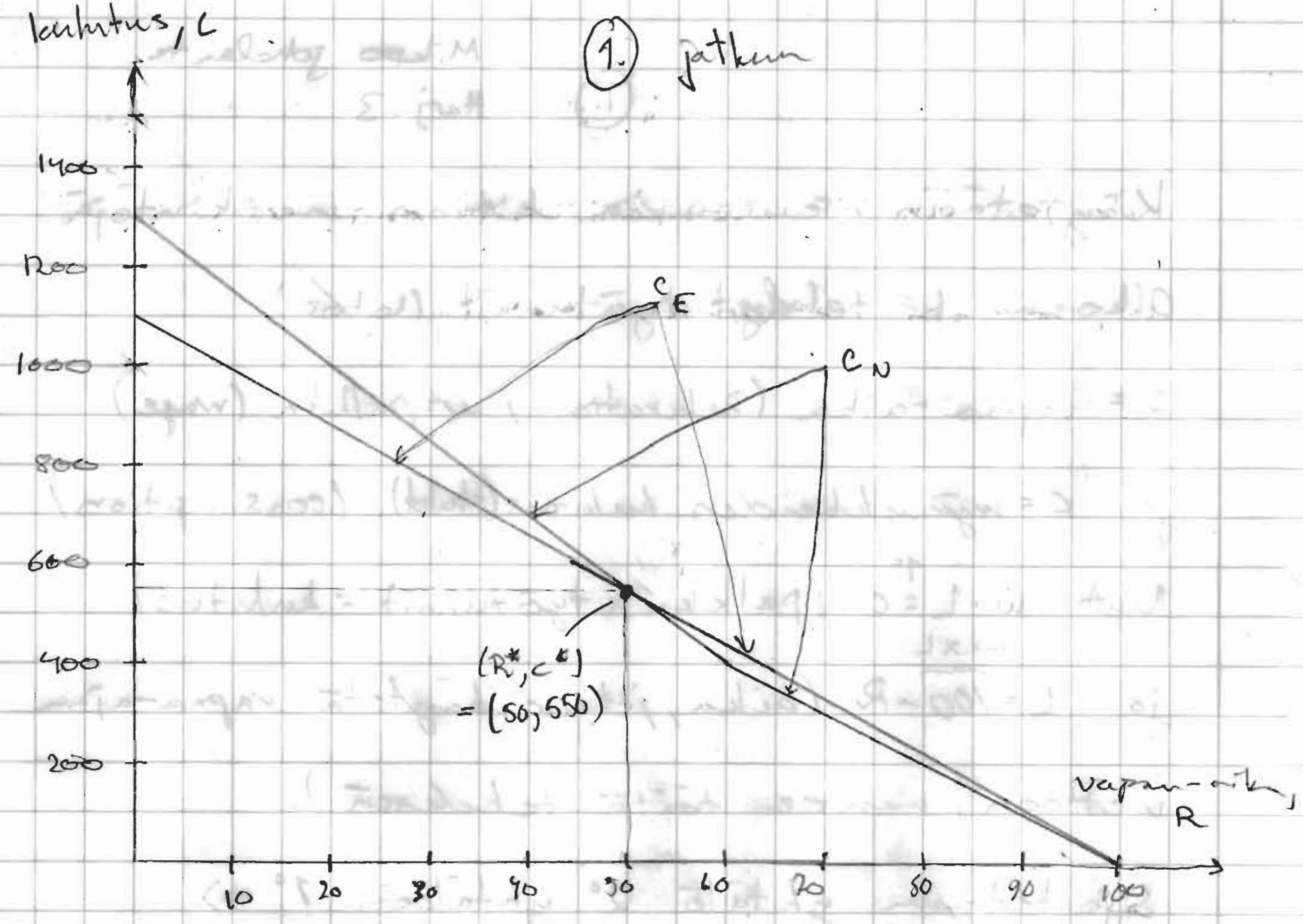
Tilanne nykyään: huomioidaan, että palkka muuttuu

$$c_N = \begin{cases} -15R + (40 \cdot 10 + 60 \cdot 15) = -15R + 1300, & \text{jos } 0 \le R < 60 \\ -10R + 1000, & \text{jos } 60 \le R \le 100 \end{cases}$$

Johdon ehdotus

$c_E = -11R + 1100$ Piirretään nämä kuvaan.

① jatkuu



Kuten kuvasta nähdään kori (R^*, c^*) on molemmilla järjestelmillä mahdollista valita. Tämän voi tarkistaa myös laskemalla:

Vanhassa tilanteessa: $R^* = 100 - L^* = 50 > 40$

$\Rightarrow c^* = -15 \cdot 50 + 1300 = 1300 - 750 = 550$

Toisaalta: $c_E(50) = -11 \cdot 50 + 1100 = 550$,

$\Rightarrow$ Työntekijöillä ei voi mennä uudessa järjestelmässä ainakaan huonommin.

Paljastettujen preferenssien nojalla uuteen tilanteeseen liittyvä valinta ei voi tapahtua pisteessä, jossa $R < 50$. Työntekijöillä uuolessa järjestelmässä aiemmin saavuttamattomissa olleiden (ja siis mahdollisesti parempien) kerja vapaa-ajan arvoilla $R > 50$.

Tehtävä 2/2 2016

~~1.~~

Olkoon kuluttajan hyötyfunktio muotoa $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, kuluttajan tulot m ja hyödykkeiden hinnat p_1 ja p_2.

a) Hyötyfunktio kuvaa täydellisiä substituutteja, joten kysyntäfunktion voi toivoa antavan nurkkaratkaisun. Tarkistetaan:

Budjettirajoite: $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

$\Leftrightarrow p_2 x_2 = m - p_1 x_1 \Leftrightarrow x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$

Lasketaan $\max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} u(x_1, x_2)$ s.e. $x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$, $x_1, x_2 \geq 0$

Sijoitetaan rajoite hyötyfunktioon:

$u(x_1, x_2(x_1)) = u(x_1) = x_1 + \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1$

$= (1 - \frac{p_1}{p_2}) x_1 + \frac{m}{p_2}$

$\Rightarrow u'(x_1) = (1 - \frac{p_1}{p_2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = 1 \Leftrightarrow p_1 = p_2$

Derivaatalla ei x_1:istä riippuvaa 0-kohtaa

$\Rightarrow$ ei 1-käsitteistä sisäpisteratkaisua

$\Rightarrow$ Nurkka $(\frac{m}{p_1}, 0)$ maksimoi hyödyn $\Leftrightarrow$

$u(\frac{m}{p_1}, 0) > u(0, \frac{m}{p_2}) \Leftrightarrow \frac{m}{p_1} > \frac{m}{p_2} \Leftrightarrow p_1 < p_2$

Vastaavasti nurkka $(0, \frac{m}{p_2})$ maksimoi

hyödyn $\Leftrightarrow p_2 < p_1$.

Jos $p_1 = p_2$, niin budjettirajoitteen pätiessä $u(x_1, x_2(x_1))$

$$= x_1 + \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1 \overset{p_1 = p_2}{=} x_1 + \frac{m}{p_1} - \frac{p_1}{p_1} x_1 = \frac{m}{p_1}$$

$\forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ : x_1 p_1 + x_2 p_2 = m\}$

$\Rightarrow$ kun $p_1 = p_2$, kaikki budjettirajoitteen pisteet tuottavat yhtä suuren hyödyn.

$\Rightarrow$ Kuluttajan kysyntäfunktiot:

$x_1 = \frac{m}{p_1}$ ja $x_2 = 0$, kun $p_1 < p_2$

$x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{m}{p_2}$, kun $p_1 > p_2$.

Kun $p_1 = p_2$ kysyntä ei ole yksikäsitteinen ($\Rightarrow \nexists$ kysyntäfunktiota).

b) Nyt $p_2 < p_1 \Rightarrow x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{15}{1,5} = 10$

c) Edelleen $p_2' < p_1 \Rightarrow x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{15}{1} = 15$

Lasketaan substituutiovaikutuksen suuruus:

Tulot, joilla kuluttajalle juuri varaa vanhaan valintaan uusilla hinnoilla: $p_2' x_{2\,vanha} = p_2' \frac{m}{p_{2\,vanha}} = 1 \cdot \frac{15}{1,5}$

$= 10 = m'$. Lasketaan kysynnät näillä tuloilla ja uusilla hinnoilla:

$p_2' < p_1 \Rightarrow x_1 = 0$ ja $x_2 = \frac{m'}{p_2'} = 10 = \frac{m}{p_2}$

Nyt substituutiovaikutus:

$\Delta x_{2_s} = \frac{m'}{p_2'} - \frac{m}{p_2} = 10 - 10 = 0$

ja $\Delta x_{1_s} = 0 - 0 = 0$

Koska kokonaisvaikutus = $\underbrace{\text{substituutiov.}}_{=0}$ + tulov.,

koko kysynnän muutos on seurausta tulo-

vaikutuksesta.

3.3 (a) Alkuvarallisuus hinnoilla $(p_1, p_2) : p_1\omega_1 + p_2\omega_2$. Merkitään $m = p_1\omega_1 + p_2\omega_2$. Kuluttajan budjettirajoite $m = p_1x_1+p_2x_2$ sekä hyötyfunktio $u(x_1, x_2) = x_1 + 10\sqrt{x_2}$.

Ratkaistaan kuluttajan optimi Lagrangen menettelyä käyttäen: Lagrangen funktio

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 + 10\sqrt{x_2} - \lambda\left(p_1x_1 + p_2x_2 - m\right),$$

joten maksimipisteessä pätee

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1}L(x_1, x_2, \lambda) = & \quad 1 + -\lambda p_1 & = 0, \\
\frac{\partial}{\partial x_2}L(x_1, x_2, \lambda) = & \quad 5x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda p_2 & = 0, \\
\frac{\partial}{\partial \lambda}L(x_1, x_2, \lambda) = & \quad m - p_1x_1 - p_2x_2 & = 0.
\end{aligned}$$

Ylimmästä yhtälöstä saadaan $\lambda = \frac{1}{p_1}$. Sijoitetaan tämä keskimmäiseen ja ratkaistaan x_2 :

$$\begin{aligned}
5x_2^{-\frac{1}{2}} &= \frac{p_2}{p_1} \quad \Big| \cdot \frac{1}{5} \quad |()^{-2} \\
x_2 &= \left(\frac{1}{5}\frac{p_2}{p_1}\right)^{-2} = 25\frac{p_1^2}{p_2^2}.
\end{aligned}$$

Sijoitetaan tämä alimpaan yhtälöön: $m = p_1x_1 + p_2 \cdot 25\frac{p_1^2}{p_2^2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{m}{p_1} - 25\frac{p_1}{p_2}$. Täten x_1:n kysyntä $x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1} - 25\frac{p_1}{p_2}$ ja x_2:n kysyntä $x_2(p_1, p_2, m) = 25\frac{p_1^2}{p_2^2}$.

(b) Alkuvarallisuus $(\omega_1, \omega_2) = (60, 120)$ ja hinnat $(p_1, p_2) = (2, 1)$. Lasketaan tästä alkuvarallisuuden arvo

$$m = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 = 2 \cdot 60 + 1 \cdot 120 = 240.$$

Kuluttaja valitsee pisteen (yleisesti $(x_1^*, x_2^*) = (x_1(p_1, p_2, m), x_2(p_1, p_2, m))$)

$$(x_1^*, x_2^*) = (x_1(2, 1, 240), x_2(2, 1, 240)) = \left(\frac{240}{2} - 25 \cdot \frac{2}{1}, 25 \cdot \frac{2^2}{1}\right) = (70, 100).$$

Hyödykkeen x_1 hinta nousee. Uudet hinnat $(p_1', p_2') = (3, 1)$ joten alkuvarallisuuden arvo uusissa hinnoissa on

$$m = p_1'\omega_1 + p_2'\omega_2 = 3 \cdot 60 + 1 \cdot 120 = 300.$$

Kuluttaja valitsee pisteen (yleisesti $(x_1', x_2') = (x_1(p_1', p_2', m'), x_2(p_1', p_2', m'))$)

$$(x_1', x_2') = (x_1(3, 1, 300), x_2(3, 1, 300)) = \left(\frac{300}{3} - 25 \cdot \frac{3}{1}, 25 \cdot \frac{3^2}{1}\right) = (25, 225).$$

(Kokonaismuutos $\Delta(x_1, x_2) = (x_1', x_2') - (x_1^*, x_2^*) = (25, 225) - (70, 100) = (-45, 125)$.)

Substituutiovaikutus: Ratkaistaan se tulotaso $\tilde{m}$, jolla on varaa alkuperäiseen valintapisteeseen (x_1^*, x_2^*) uusien hintojen voimassa ollessa. Pätee siis $\tilde{m} = p_1' x_1^* + p_2' x_2^* = 3 \cdot 70 + 1 \cdot 100 = 310$. Ratkaistaan piste $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, jonka kuluttaja valitsisi pelkän substituutiovaikutuksen jälkeen. Tämä saadaan ratkaistua käyttäen kysyntäfunktioita: (yleisesti $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (x_1(p_1', p_2', \tilde{m}), x_2(p_1', p_2', \tilde{m}))$

$$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (x_1(3, 1, 310), x_2(3, 1, 310)) = \left(\frac{310}{3} - 25 \cdot \frac{3}{1}, 25 \cdot \frac{3^2}{1}\right) = \left(\frac{85}{3}, 225\right) = \left(28\frac{1}{3}, 225\right).$$

Substituutiovaikutukset ovat $\Delta^s(x_1, x_2) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - (x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{85}{3}, 225\right) - (70, 100) = \left(-\frac{125}{3}, 125\right)$.

Tulovaikutus: Tulotaso on sama kuin ennen hinnan muutosta eli $m = p_1 \omega_1 + p_2 \omega_2 = 240$. Ratkaistaan piste $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2)$, jonka kuluttaja valitsisi pelkän substituutiovaikutuksen jälkeen. Tämä saadaan ratkaistua käyttäen kysyntäfunktioita: (yleisesti $(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) = (x_1(p_1', p_2', m), x_2(p_1', p_2', m))$

$$(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) = (x_1(3, 1, 240), x_2(3, 1, 240)) = \left(\frac{240}{3} - 25 \cdot \frac{3}{1}, 25 \cdot \frac{3^2}{1}\right) = (5, 225)$$

Tulovaikutukset ovat $\Delta^t(x_1, x_2) = (\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) - (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = (5, 225) - \left(\frac{85}{3}, 225\right) = \left(-\frac{70}{3}, 0\right)$.

Varallisuus-tulovaikutus: $\Delta^v(x_1, x_2) = (x_1', x_2') - (\mathring{x}_1, \mathring{x}_2) = (25, 225) - (5, 225) = (20, 0)$.
(Siis $\Delta(x_1, x_2) = \Delta^s(x_1, x_2) + \Delta^t(x_1, x_2) + \Delta^v(x_1, x_2)$.)

3.4 Hyötyfunktio $u(c, l) = \alpha \ln(c) + (1 - \alpha) \ln(l)$, $\alpha \in (0, 1)$, jossa c on kulutus ja l vapaaaika.

Normalisoidaan työntekoon käytettävissä oleva aika 1 yksiköön ja kulutuksen hinta 1 (euroon).

(a) Merkitään työntekoa n. Koska aikaa on käytettävissä 1 yksikkö, niin saadaan aikarajoite $n + l = 1$. Budjettirajoite $n\omega = 1 \cdot c = c$, sillä tulojen täytyy olla yhtä suuren kuin menot.

(b) Työntarjonta ratkeaa maksimoimalla hyötyfunktio annetuilla rajoitteilla eli $l = 1 - n$ ja $c = n\omega$:

$$\max_n u(c, l) = \max_n u(n\omega, 1 - n) = \max_n \{\alpha \ln(n\omega) + (1 - \alpha) \ln(1 - n)\}.$$

Funktio $u(n\omega, 1-n)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $n \in (0,1)$. Derivaatan nollakohta on mahdollinen maksimipiste. Lasketaan $\frac{\partial}{\partial n}u(n\omega, 1-n) = \alpha\frac{\omega}{n\omega} + (1-\alpha)\frac{-1}{1-n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{n} = \frac{(1-\alpha)}{1-n} \Leftrightarrow \alpha(1-n) = n(1-\alpha) \Leftrightarrow n = \alpha$. (Olettaen että $n \neq 0$ ja $n \neq 1$.) Koska $\frac{\partial^2}{\partial n^2}u(n\omega, 1-n) = u''(n\omega, 1-n) = -\alpha\frac{1}{n^2} + (1-\alpha)\frac{-1}{(1-n)^2} < 0$ kaikilla $n \in (0,1)$, niin piste $n = \alpha$ maksimoi funktion $u(n\omega, 1-n)$.
Työn tarjonta $n = \alpha$.

(c) Työn tarjonta ei riipu palkasta, ainoastaan parametrista α, joten työn tarjonta ei muutu palkan muuttuessa.

(d) Uusi budjettirajoite $n\omega + x = c$. Ratkaistaan työntarjonta

$$\max_n u(n\omega + x, 1-n) = \max_n \{\alpha \ln(n\omega + x) + (1-\alpha)\ln(1-n)\}.$$

Oletetaan, että $x > 0$. Funktio $u(n\omega + x, 1-n)$ on jatkuva ja derivoituva, kun $n \in [0,1)$. Derivaatan nollakohta on mahdollinen maksimipiste. Lasketaan $\frac{\partial}{\partial n}u(n\omega + x, 1-n) = \alpha\frac{\omega}{n\omega+x} + (1-\alpha)\frac{-1}{1-n} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha\omega}{n\omega+x} = \frac{(1-\alpha)}{1-n} \Leftrightarrow \alpha\omega(1-n) = (n\omega+x)(1-\alpha)$
$\Leftrightarrow n = \alpha + (\alpha-1)\frac{x}{\omega}$. (Olettaen että $n \neq 1$.) Koska $\frac{\partial^2}{\partial n^2}u(n\omega + x, 1-n) = u''(n\omega + x, 1-n) = -\alpha\omega^2\frac{1}{(n\omega+x)^2} - (1-\alpha)\frac{1}{(1-n)^2} < 0$ kaikilla $n \in [0,1)$, niin piste $n = \alpha + (\alpha-1)\frac{x}{\omega}$ maksimoi funktion $u(n\omega + x, 1-n)$.
Työn tarjonta $n = \alpha + (\alpha-1)\frac{x}{\omega}$. Työntarjonta riippuu palkasta. Lasketaan derivaatta $\frac{\partial n}{\partial \omega}$ jotta nähdään miten: $\frac{\partial n}{\partial \omega} = -(\alpha-1)\frac{x}{\omega^2} = (1-\alpha)\frac{x}{\omega^2} > 0$ kun $\alpha \in (0,1)$ ja $x > 0$.
Palkan kasvaessa työn tarjonta KASVAA, palkan laskiessa työn tarjonta VÄHENEE. HUOM. tässä oli virhe, joka on korjattu 21.10.2016

3.5 (a)Herra P:n hyötyfunktio $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Herra P:n budjettirajoite ratkaistaan luennoilla olleen kaavan avulla eli $x_2 = m_2 + (1+r)(m_1 - x_1)$, jossa m_1 ja m_2 ovat 1. ja 2. periodin tulot. Nyt $m_2 = 0$ ja $m_1 = m$. Saadaan $x_2 = (1+r)(m - x_1)$. (Huom! Ei voi lainata periodilla 1, sillä ei ole tuloja periodilla 2, jolla lainan voisi maksaa pois.)
Tällöin $u(x_1) = x_1 \cdot (1+r)(m - x_1) = (1+r)(mx_1 - x_1^2)$. Tämä on alaspäin aukeava paraabeli ja maksimoituu derivaatan nollapisteessä: $u'(x_1) = \underbrace{(1+r)}_{>0;\quad r>-1}(m - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow (m - 2x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{m}{2}$. Perustellaan, että kyseessä on maksimi: Koska $u''(x_1) = (1+r)(-2) < 0$ aina, kun $r > -1$ (eli lainan korko pienempi kuin 100%!), niin kyseessä on funktion maksimipiste.
Periodin 1 kulutus $x_1 = \frac{m}{2}$ ja periodin 2 kulutus $x_2 = (1+r)(m - \frac{m}{2}) = (1+r)\frac{m}{2}$.

(b) Nyt $m = 50000$ ja $r = 0.10$. Joten $x_1 = 25000$ ja $x_2 = 1.10 \cdot 25000 = 27500$.