Todennäköisyyslaskenta, 1. kurssikoe 22.10.2010

Kokeessa ei saa käyttää taulukkokirjaa.

1. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f(x) = k\,x, \quad \text{kun } 0 < x < 1$$

(ja nolla muuten).

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske jakauman kertymäfunktio ja kvantiilifunktio.

c) Laske todennäköisyys $P(\frac{1}{X} < 2)$.

Ratkaisu a) Vakio k ratkaistaan vaatimuksesta

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = k\Big|_0^1 \frac{1}{2}x^2 = k/2,$$

josta saadaan $k = 2$.

b) $F(x)$ saadaan integroimalla $f(t)$ alueen $-\infty < t < x$ yli. Kun $0 < x < 1$, niin

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t = x^2.$$

Kun vielä pohditaan, mitä tulos on muilla x:n arvoilla, saadaan

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0, \\ x^2 & \text{kun } 0 \le x < 1 \\ 1, & \text{kun } x \ge 1 \end{cases}$$

Kvantiilifunktion q arvo pisteessä $0 < u < 1$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$F(x) = u \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{u},$$

joten $q(u) = \sqrt{u}$, kun $0 < u < 1$.

c)

$$P(\frac{1}{X} < 2) = P(X > \frac{1}{2}) = P(\frac{1}{2} < X < 1) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

2. Veikkauksen lottoarvonnassa arvotaan ensin varsinaiset numerot poimimalla (ilman takaisinpanoa) 7 palloa 39 numeroidusta pallosta. Sen jälkeen arvotaan lisänumerot poimimalla (ilman takaisinpanoa) 3 palloa jäljelle jääneistä 32 pallosta.

a) Kirjoita todennäköisyys saada yhdellä lottorivillä täsmälleen 3 varsinaista numeroa oikein (kun lisänumerot jätetään huomiotta).

b) Kirjoita ehdollinen todennäköisyys sille, että lottorivissä on nolla lisänumeroa oikein, kun varsinaisten numerojen arvonnan jälkeen on käynyt ilmi, että rivissä on täsmälleen 3 varsinaista numeroa oikein.

Tässä tehtävässä a-kohdan vastaukseen saa ilmaista binomikertoimien avulla, mutta b-kohdan vastaukseen ei saa jättää binomikertoimia eikä kertomafunktiota (mutta tuloksen saa jättää kahden tulon osamääräksi, jota ei tarvitse sieventää).

Ratkaisu a) Todennäköisyys saada (täsmälleen) kolme oikein on

$$\frac{\binom{7}{3}\binom{32}{4}}{\binom{39}{7}}$$

Kaavan voi perustella kombinatoriikan tuloperiaatteella (mutta tehtävässä ei vaadittu perustelua). Suotuisan lopputuloksen voidaan ajatella syntyvän kahdessa vaiheessa

1. valitaan 3 numeroa 7 varsinaisesta lottonumerosta: $\binom{7}{3}$ vaihtoehtoa);
2. valitaan 4 numeroa 32 muusta numerosta: $\binom{32}{4}$ vaihtoehtoa.

b) Kysytty ehdollinen todennäköisyys on

$$\begin{aligned}
&P(\text{rivissä on 3 varsinaista ja 0 lisänumeroa oikein} \mid \text{rivissä on 3 oikein})\\
&= \frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}\binom{29}{4}/\binom{39}{7}}{\binom{7}{3}\binom{32}{4}/\binom{39}{7}} = \frac{\binom{3}{0}\binom{29}{4}}{\binom{32}{4}}\\
&= \frac{1 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26/(4 \times 3 \times 2)}{32 \times 31 \times 30 \times 29/(4 \times 3 \times 2)} \approx 0.66
\end{aligned}$$

(Likiarvoa ei tarvinnut tehtävässä laskea.)

Yllä tulos ratkaistiin käyttämällä ehdollisen todennäköisyyden määritelmää

$$P(B \mid A) = P(A \cap B)/P(A),$$

jossa nimittäjä saatiin a-kohdasta, ja osoittaja kirjoitettiin kombinatoriikan tuloperiaatteen avulla. Yhtä hyvin tulokseen $\binom{3}{0}\binom{29}{4}/\binom{32}{4}$ voisi päätyä pohtimalla otantaa ilman takaisinpanoa, jossa 32 pallosta poimitaan 4 palloa, ja sitten laskemalla niiden otosten lukumäärä, joihin sisältyy 0 lisänumeroa 3 mahdollisesta lisänumerosta.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia siten, että X:llä on tasajakauma välillä $(0,1)$, ja Y:llä on eksponenttijakauma odotusarvolla $\frac{1}{2}$. Laske satunnaismuuttujan $Z = (X+Y)^2$ odotusarvo.

Ratkaisu

$$\begin{aligned} EZ &= E(X+Y)^2 = E(X^2 + 2XY + Y^2) = E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) \\ &= E(X^2) + 2E(X)\,E(Y) + E(Y^2). \end{aligned}$$

Viime vaiheessa käytettiin tietoa siitä, että X ja Y ovat riippumattomia.

Odotusarvot ovat $EX = \frac{1}{2}$, ja $EY = \frac{1}{2}$. Toiset momentit voi selvittää esim. seuraavilla laskuilla.

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_0^1 x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 = \Big|_0^1 \frac{1}{3}\,x^3 = \frac{1}{3}. \\ EY^2 &= \operatorname{var} Y + (EY)^2 = \frac{1}{2^2} + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tässä hyödynnettin tietoa, että $\mathrm{Exp}(\lambda)$-jakauman odotusarvo on $1/\lambda$ (joten $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$) ja varianssi on $1/\lambda^2$. Y:n toisen momentin voi toki myös selvittää muilla tavoin, esim. (osittais)integroinnilla tai laskemalla Y:n momenttiemäfunktion toisen derivaatan origossa, mutta näissä menetelmissä pitää muistaa tiheysfunktion kaava ja osata identifioida oikea parameterin arvo. Tämän jälkeen saadaan sijoittamalla

$$EZ = \frac{1}{3} + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

4. Olkoon Z jatkuvasti jakautunut satunnaismuuttuja, jolle tunnetaan kertymäfunktio F_Z, tiheysfunktio f_Z, odotusarvo EZ, varianssi $\mathrm{var}(Z)$, kolmas keskusmomentti $E(Z-EZ)^3$ sekä momenttiemäfunktio M_Z. Satunnaismuuttuja X määritellään kaavalla $X = 2 - 3\,Z$.

Esitä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo, varianssi, kolmas keskusmomentti sekä momenttiemäfunktio käyttämällä hyväksi satunnaismuuttujalle Z tunnettuja tuloksia.

Ratkaisu X:n kertymäfunktio on

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P(2 - 3\,Z \le x) = P(Z \ge \frac{2}{3} - \frac{x}{3}) \\ &= 1 - F_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}), \end{aligned}$$

ja tiheysfunktio saadaan kertymäfunktion derivaattana,

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{3}\,f_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}).$$

(Monet niistä, jotka laskivat tiheysfunktion tällä tavalla kertymäfunktion derivaattana tekivät virheitä yhdistetyn funktion derivoinnissa. Monet tarjosivat tiheysfunktiolle negatiivista lauseketta, mikä on vakava virhe tällä kurssilla.) Odotusarvo on lineaarisuuden nojalla

$$EX = E(2 - 3\,Z) = 2 - 3\,EZ.$$

Varianssi saadaan joko palauttamalla mieleen lineaarikombinaation varianssin kaava, tai yksinkertaisella laskulla: koska

$$X - EX = 2 - 3\,Z - (2 - 3\,EZ) = -3(Z - EZ),$$

on

$$\mathrm{var}\,X = E[(X - EX)^2] = E\{[(-3)(Z - EZ)]^2\} = (-3)^2\ \mathrm{var}\,Z = 9\ \mathrm{var}\,Z.$$

Kolmas keskusmomentti saadaan samaisesta huomiosta, nimittäin

$$E[(X - EX)^3] = E\{[-(3)(Z - EZ)]^3\} = (-3)^3\,E(Z - EZ)^3 = -27\,E(Z - EZ)^3.$$

Momenttiemäfunktio saadaan seuraavasti,

$$M_X(t) = E\exp(tX) = E\exp(t(2 - 3\,Z)) = E[\exp(2\,t)\exp(-3t\,Z)] = \mathrm{e}^{2\,t}M_Z(-3t).$$