2.

Olk. A arpalipun tuottoa kuvaava satunnaismuuttuja ja $f_A(a) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{kun } a \in \{0, 12\} \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$

sen pistetodennäköisyysfunktio. Merk. $a_1 = 0$, $a_2 = 12$.

a) Arpalipun odotettu tuotto

$$x = \mathbb{E}(A) = f_A(0) \cdot 0 + f_A(12) \cdot 12 = 0 + \tfrac{1}{2} \cdot 12 = \underline{\underline{6}}$$

b) Olk. W_b satunnaismuuttuja, joka kuvaa kuluttajan varallisuutta tilanteessa, jossa hän omistaa arpalipun $\Rightarrow W_b = \underline{w} + A$.

Kuluttajan VNM-hyöty W_b:istä on:

$$U(W_b) = \mathbb{E}u(W_b) = f(a_1)u(\underline{w} + a_1) + f(a_2)u(\underline{w} + a_2)$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{9+0} + \tfrac{1}{2}\sqrt{9+12} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21} \approx 3{,}791.$$

Olkoon W_b^* kuluttajan varallisuus tilanteessa, jossa hän myy arpalipun x^b:illä. Pienimmälle hinnalle, jolla kuluttaja on valmis luopumaan arpalipusta, tulee päteä: $U(W_b^*) = U(W_b) \Leftrightarrow \mathbb{E}u(W_b^*)$

$$= \mathbb{E}u(W_b) \Leftrightarrow 1 \cdot u(\underline{w} + x^b) = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9 + x^b} = \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{21} \Leftrightarrow 9 + x^b = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2}\sqrt{21} + \tfrac{21}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^b = \tfrac{9}{4} + \tfrac{3}{2}\sqrt{21} + \tfrac{21}{4} - 9 \approx \underline{\underline{5{,}374}}$$

c) Kun kuluttaja ei osta arpalippua hänen tuloihinsa ei liity epävarmuutta ja hyöty varallisuudesta on suoraan $u(\underline{w}) = \sqrt{9} = 3$ (varallisuus $\underline{w}$ tiillä 1). Olkoon W_c^* kuluttajan varallisuutta kuvaava sat. muut. tilanteessa, jossa hän ostaa arpalipun x^c:llä. Suurimmalle x^c:lle jolla kuluttaja valmis ostamaan lipun tulee päteä: $U(W_c^*) = u(\underline{w})$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}\, u(W_c^*) = 3 \Leftrightarrow \mathbb{E}\, u(A + \underline{w} - x^c) = 3$$

$$\Leftrightarrow f(a_1)u(a_1 + \underline{w} - x^c) + f(a_2)\, u(a_2 + \underline{w} - x^c) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{0 + 9 - x^c} + \frac{1}{2}\sqrt{12 + 9 - x^c} = 3 \quad // (\ )^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(9 - x^c) + \frac{1}{4}(21 - x^c) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(9 - x^c)(21 - x^c)} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} - \frac{x^c}{4} + \frac{21}{4} - \frac{x^c}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{(9 - x^c)(21 - x^c)} = 9$$

$$\Leftrightarrow 18 - 15 + x^c = \sqrt{(9 - x^c)(21 - x^c)}$$

$$\Leftrightarrow (3 + x^c)^2 = (9 - x^c)(21 - x^c)$$

$$\Leftrightarrow 9 + 6x^c + \cancel{(x^c)^2} = 189 - 9x^c - 21x^c + \cancel{(x^c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 36x^c = 180$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x^c = 5}}$$

d) $x \succ x^b$ ja $x \succ x^c$, koska kuluttaja on riskin karttaja. Hänen hyötyfunktiolle pätee:

$u'(w) = \frac{1}{2}(w)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow u''(w) = -\frac{1}{4}(w)^{-\frac{3}{2}} < 0 \ \forall \ w \in \mathbb{R}_+$.

$\Rightarrow$ hyötyfunktio konkaavi tulojen suhteen.

$\Rightarrow$ epävarmasta varallisuudesta saatu hyöty $\mathbb{E}u(W)$
(Jensenin epäyhtälö)
$\leq u(\mathbb{E}(W))$ = varallisuuden odotusarvosta saatu hyöty. $\Rightarrow$ Kohdassa b) kuluttajalle riittää epävarman varallisuuden odotusarvoa pienempi varma tulo. Kohdassa c) kuluttaja on valmis maksamaan epävarmasta varallisuudesta vähemmän kuin varman tulon ja epävarman varallisuuden odotusarvojen erotuksen.

Hyötyfunktion 3. derivaatta kertoo kuinka hyötyfunktion konkaavius (kuperuus) muuttuu, kun varallisuus kasvaa. Nyt $u^{(3)}(w) = \frac{3}{8}w^{-\frac{5}{2}} > 0 \ \forall \ w \in \mathbb{R}_+$.
Toinen derivaatta on siis kasvava $\Rightarrow$ se muuttuu vähemmän negatiiviseksi w:n kasvaessa $\Rightarrow$ "kuperuus" vähenee varallisuuden kasvaessa $\Rightarrow$ Arvan odotusarvosta saatavan hyödyn ja arvasta saatavan hyödyn välinen ero

(2.)

d) (jatkuu) pienee kun alkuvarallisuus kasvaa.

⇒ Samaan "uhkapeliin" liittyvä riskin karttaminen vähenee tulojen kasvaessa. Kohdassa b) uhkapeliin liittyvä alkuvarallisuus on $\underline{w} = 9$ ja varmuusekvivalentti $9 + x^b$. Vastaavasti kohdassa c) uhkapeliin liittyvä alkuvarallisuus on $9 - x^c$ ja tämän varmuusekvivalentti 9. Nyt koska $\underline{w} = 9 > 9 - x^c$ on kuluttajan arvostaan liittyvä alkuvarallisuus kohdassa b) suurempi ja riskin karttaminen edellä kuvatusti vähäisempää (uhkapelihän ei muutu). ⇒ Uhkapelin "arvo" hyödyssä mitattuna suurempi b)issä (lähempänä arvon odotusarvosta saatavaa hyötyä) ⇒ siitä luopumisesta vaadittava hinta suurempi kuin hinta, joka sen saamisesta ollaan valmiita maksamaan kohdassa c), mikä on sama kuin $x^b > x^c$.

(3.) Harjoitus 4 tehtävä 2

a) Jos kirjaimilla A, B ja C merkitään kunkin projektin tuottoon liittyvää satunnaismuuttujaa saadaan:

$$\mathbb{E}(A) = p_{OA} w_{OA} + p_{EA} w_{EA} = \tfrac{1}{2}\cdot 4 + \tfrac{1}{2}\cdot 4 = 4$$

$$\mathbb{E}(B) = p_{OB} w_{OB} + p_{EB} w_{EB} = \tfrac{3}{5}\cdot 9 + \tfrac{2}{5}\cdot 4 = \frac{27+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\mathbb{E}(C) = p_{OC} w_{OC} + p_{EC} + w_{EC} = \tfrac{2}{5}\cdot 16 + \tfrac{3}{5}\cdot 1 = \frac{35}{5} = 7$$

b) Lasketaan jokaiseen satunnaismuuttujaan liittyvät VNM-hyödyt:

$$U(A) = \mathbb{E}(u(A)) = p_{OA} u(w_{OA}) + p_{EA} u(w_{EA})$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{4} + \tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 2$$

$$U(B) = \mathbb{E}(u(B)) = p_{OB} u(w_{OB}) + p_{EB} u(w_{EB})$$
$$= \tfrac{3}{5}\cdot\sqrt{9} + \tfrac{2}{5}\sqrt{4} = \tfrac{9}{5} + \tfrac{4}{5} = \tfrac{13}{5} = 2\tfrac{3}{5}$$

$$U(C) = \mathbb{E}(u(C)) = p_{OC} u(w_{OC}) + p_{EC} u(w_{EC})$$
$$= \tfrac{2}{5}\sqrt{16} + \tfrac{3}{5}\sqrt{1} = \tfrac{2}{5}\cdot 4 + \tfrac{3}{5} = \tfrac{11}{5} = 2\tfrac{1}{5}$$

Nyt koska $2\tfrac{3}{5} > 2\tfrac{1}{5} > 2$, niin $U(B) > U(C) > U(A)$ ja odotettua hyötyä maksimoivalle Kaisalle $B \succ C \succ A \Rightarrow$ Kaisa valitsee B:n.

Harjoitus 4, tehtävät 3, 6

HUOM! Kun arvioidaan politiikkamuutoksen vaikutusta kuluttajien hyvinvointiin, täytyy pohtia kahta vaihetta: 1) miten muutos vaikuttaa käyttäytymiseen, eli havaittuihin valintoihin kysyntäfunktioiden kautta ja 2) miten muutokset käyttäytymisessä vaikuttavat hyötytasoon. Ensin täytyy siis ratkaista kysyntäfunktiot ja sen jälkeen sijoittaa optimaalinen käyttäytyminen hyötyfunktioon. Näin saadaan epäsuora hyötyfunktio, jonka saamat arvot riippuvat suoraan eksogeenisistä tekijöistä, joiden muutoksien vaikutuksia halutaan tarkastella.

3. Kuluttajan hyötyfunktio on muotoa

$$u(x_1, x_2) = a \ln x_1 + x_2$$

ja budjettirajoite on

$$px_1 + x_2 = m$$

jossa m kuluttajan tulot ja p hyödykkeen 1 hinta. Hyödykkeen 2 hinta on normalisoitu ykköseksi.

(a)

$$x_1 = \frac{a}{p} \text{ ja } x_2 = m - a$$

(b) Epäsuora hyötyfunktio on:

$$v(p, m) = a \ln \frac{a}{p} + m - a$$

Kompensoiva muutos saadaan yhtälöstä:

$$\begin{aligned} v(p, m) &= v(p', m + C) \\ a \ln \frac{a}{p} + m - a &= a \ln \frac{a}{p'} + m + C - a \\ C &= a \ln \frac{a}{p} - a \ln \frac{a}{p'} \end{aligned}$$

Ja ekvivalentti muutos saadaan yhtälöstä:

$$\begin{aligned} v(p, m - E) &= v(p', m) \\ a \ln \frac{a}{p} + m - E - a &= a \ln \frac{a}{p'} + m - a \\ E &= a \ln \frac{a}{p} - a \ln \frac{a}{p'} \end{aligned}$$

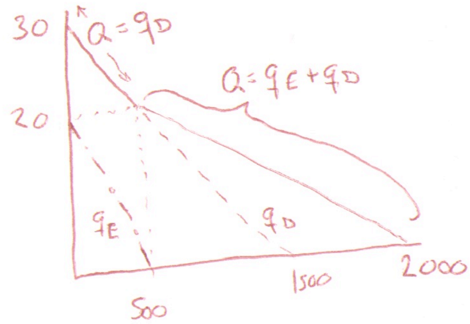
4. a) $Q = q_E + q_D$, jossa $q_E = \max\{500-25p,\ 0\}$ (sillä kysyntä ei voi olla <0)

$q_D = \max\{1500-50p,\ 0\}$

Tarkistetaan milloin $q_E = 0 \to 500-25p=0 \Rightarrow p=20$

$q_D = 0 \to 1500-50p=0 \Rightarrow p=30$

Eli $Q = \begin{cases} 0, & p \geq 30 \\ q_D, & 30 > p \geq 20 \\ q_E+q_D, & 20 \geq p \end{cases}$



(kuvan suhde vain esimerkki)

b) $\epsilon_D: \frac{dq_D}{dp}\cdot\frac{p}{q_D} = -50\cdot\frac{p}{q_E} = \frac{-50p}{1500-50p} = -\frac{p}{30-p}$

$\epsilon_E: \frac{dq_E}{dp}\cdot\frac{p}{q_E} = -25\cdot\frac{p}{q_E} = \frac{-25\cdot p}{500-25p} = -\frac{p}{20-p}$

$|\epsilon_D| < |\epsilon_E| \quad \forall\ p<20$

c) tarkistetaan onko tasapaino piste $p=20$, $Q=500$ oikealla tai vasemmalla puolella.

jos $p=20 \Rightarrow Q=500$ ja tarjonta $S(20) = 60\cdot 20 - 125 = 1200-125 = 1025$

Eli $S > Q$, joten on ylitarjonta. Täten tiedämme, että tasapaino on sellainen jossa $p^* < 20$ ja $S^* = Q^*$ jossakin $(500, 1025)$ välillä.

Eli jos $p^* < 20$ ollaan alueella, jossa $Q = q_E + q_D$

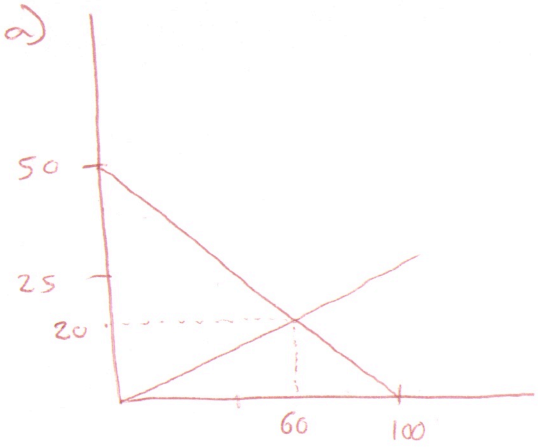
$\Rightarrow S = Q \Rightarrow 2000-75p = 60p-125$

$\Rightarrow 2125 = 135p$

$p \approx 15,74$

$S = Q \approx 819,5 \begin{cases} q_D = 713 \\ q_E = 106,5 \end{cases}$

5. a)



b) $D(p) = S(p) \Rightarrow 100 - 2p = 3p \Rightarrow 100 = 5p \Rightarrow p = 20$

$D(20) = S(20) = 60$

c) 2 tapaa:

$D(p+10) = S(p)$ tai $D(p') = S(p'-10)$

$\Rightarrow 100 - 2(p+10) = 3p$

$\Rightarrow 80 = 5p \Rightarrow \boxed{p = 16 \quad t = 10 \quad D(p+t) = 48 \quad S(p) = 48}$

$\Rightarrow 100 - 2p' = 3(p'-10)$

$\Rightarrow 100 - 2p' = 3p' - 30$

$\Rightarrow 130 = 5p'$

$\Rightarrow \boxed{p' = 26 \quad t = 10 \quad D(26) = 48 \quad S(26-10) = 48}$

d) 2 tapaa: - hyvinvointitappion kolmion pinta-ala, eli $\frac{t \cdot \Delta q}{2} = \frac{10 \cdot (60-48)}{2} = 60$

- Erotuksena: Hyvinvointi

Ennen verot

kuluttajat: $\frac{(50-20) \cdot 60}{2} = 900$

Tuottajat: $\frac{20 \cdot 60}{2} = 600$

Valtio: $= 0$

Yhteensä 1500

Verojen jälkeen

kuluttajat: $\frac{(50-26) \cdot 48}{2} = 576$

tuottajat $\frac{16 \cdot 48}{2} = 384$

Valtio: $t \cdot q = 10 \cdot 48 = 480$

Yhteensä 1440

Ero = DWL = 60

6. (a) Maidon ja viinin kysynnät ovat

$$x_1 = \frac{am}{p_1} \text{ ja } x_2 = \frac{(1-a)\,m}{p_2}$$

(b) Ensin pitää määrittää kuluttajien epäsuora hyöty, joka kertoo hyötytason eksogeenisten muuttujien funktiona. Eli kun arvioidaan politiikkamuutoksen vaikutusta kuluttajien hyvinvointiin, täytyy pohtia kahta vaihetta: 1) miten muutos vaikuttaa käyttäytymiseen, eli havaittuihin valintoihin kysyntäfunktioiden kautta ja 2) miten muutokset käyttäytymisessä vaikuttavat hyötytasoon. Epäsuora hyötyfunktio on:

$$\begin{aligned} v(p_1, p_2, m) &= \left(\frac{am}{p_1}\right)^a \left(\frac{(1-a)\,m}{p_2}\right)^{1-a} \\ &= m\left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{(1-a)}{p_2}\right)^{1-a} \end{aligned}$$

Liittymisen seurauksena hinnat muuttuvat siten, että $p_1' = 8p_1$ ja $p_2' = \frac{1}{2}p_2$. Kompensoiva muutos voidaan siis laskea yhtälöstä

$$\begin{aligned} v(p_1, p_2, m) &= v(p_1', p_2', m + C) \\ m\left(\frac{a}{p_1}\right)^a \left(\frac{(1-a)}{p_2}\right)^{1-a} &= (m+C)\left(\frac{a}{8p_1}\right)^a \left(\frac{(1-a)}{\frac{1}{2}p_2}\right)^{1-a} \\ m &= (m+C)\left(\frac{1}{8}\right)^a 2^{1-a} \\ C &= m\left[8^a 2^{a-1} - 1\right] \end{aligned}$$

(c) Tiedetään siis, $p_2 x_2 \geq 3p_1 x_1$, eli

$$(1-a)\,m \geq 3am \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{4}.$$

Sijoittamalla kohdan (b) vastaukseen saadaan:

$$\begin{aligned} C &\leq m\left[8^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} - 1\right] \\ &= m\left[\left(2^3\right)^{\frac{1}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} - 1\right] \\ &= m\left[2^{\frac{3}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} - 1\right] \\ &= m\left[2^0 - 1\right] = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Tässä virhe aikaisemmassa versiossa.

Siis kompensoiva muutos $C \leq 0$. Jos $C < 0$, kuluttajat hyötyisivät muutoksesta. Jos $C = 0$ muutoksella ei olisi vaikutusta kuluttajien hyötytasoon. Liittyminen siis joko parantaa kuluttajien hyötytasoa tai pitää sen ennallaan, eli saarivaltion kannattaisi liittyä.