HELSINGIN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Todennäköisyyslaskenta
1. kurssikoe 24.10.2014
Malliratkaisuja

1. Poisson-jakauman pistetodennäköisyysfunktio on $f(x) = e^{-\theta}\theta^x/(x!)$.
   (a) Satunnaismuuttuja X on Poisson-jakautunut parametrilla $\theta = 100$. Etsi jakauman moodit, ts. f:n maksimikohdat. Todista täsmällisesti, että olet löytänyt kaikki moodit.
   (b) Johda Poisson-jakauman momenttiemäfunktiolle $M(t) = Ee^{tX}$ yksinkertainen lauseke (jossa ei ole ääretöntä summaa) ja laske sen avulla jakauman odotusarvo.

   Ratkaisu.
   (a) Vrt. harjoitus 6:3. Muistetaan, että Poisson-jakaumassa mahdolliset x:n arvot ovat kokonaisluvut $0, 1, 2, \ldots$ Tutkitaan osamäärää $Q(x) = f(x+1)/f(x)$ kun $x \geq 0$.

$$Q(x) = \frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{e^{-\theta}\theta^{x+1}/(x+1)!}{e^{-\theta}\theta^x/x!} = \frac{\theta}{x+1}.$$

   Osamäärä on 1 joss $x = \theta - 1 = 99$. Tällöin on $f(x+1) = f(x)$. Jos x on pienempi, niin $Q(x) > 1$, ja jos x on suurempi, niin $Q(x) < 1$. Tästä nähdään, että $f(x)$ saa suurimman arvonsa kahdessa kohdassa, nimittäin kun $x = \theta - 1 = 100 - 1 = 99$, ja kun $x = 99 + 1 = 100$. (Se saa niissä saman arvon, koska $Q(99) = 1$.) Moodit ovat siis 99 ja 100.
   (b) Ks. luentomonisteen jakso 5.1.5.

$$\begin{aligned}
M(t) = Ee^{tX} &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}e^{-\theta}\theta^x/x! = e^{-\theta}\sum_{x=0}^{\infty}(\theta e^t)^x/x! \\
&= e^{-\theta}\sum_{x=0}^{\infty} a^x/x! \qquad \text{(merk. } a = \theta e^t\text{)} \\
&= e^{-\theta}e^a \qquad \text{(eksponenttifunktion sarjakehitelmä)} \\
&= \exp(\theta(e^t - 1)).
\end{aligned}$$

   Tästä saadaan kumulanttiemäfunktio $K(t) = \log M(t) = \theta(e^t - 1)$, ja edelleen $K'(t) = \theta e^t$ ja siitä $EX = K'(0) = \theta e^0 = \theta$.

2. Satunnaismuuttujalla X on jatkuva jakauma tiheysfunktiolla

$$f(x) = \begin{cases} c\,(1 - x^2), & \text{kun } -1 < x < 1, \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

   (a) Laske vakion c arvo.
   (b) Laske $\operatorname{var} X$.
   (c) Johda satunnaismuuttujan $Y = 2X$ tiheysfunktio.

   Ratkaisu.
   (a) $1 = \int_{-1}^{1} c\,(1 - x^2)dx = c \Big/_{-1}^{1} (x - x^3/3) = c(4/3)$, joten $c = 3/4$.
   (b)

$$EX = \int_{-1}^{1} x \cdot c(1 - x^2)dx = 0$$

$$EX^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot c(1 - x^2)dx = c \Big/_{-1}^{1} (\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$$

(c) Ks. luentomonisteen jakso 2.10. Kuvaus $y = g(x) = 2x$ kuvaa välin $(-1, 1)$ bijektiivisesti välille $(-2, 2)$, joten tiheysfunktion muuntokaavan mukaisesti

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left(\frac{y}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right),$$

kun $-2 < y < 2$.

3. Laitteen toiminta-aika on eksponenttijakautunut parametrilla 1, toisin sanoen sen tiheysfunktio on $f(x) = e^{-x}$ kun $x > 0$. Aina laitteen rikkouduttua se vaihdetaan uuteen, jolla on samoin eksponenttijakautunut toiminta-aika. Olkoon Y viiden peräkkäin käytetyn laitteen toiminta-aikojen summa. Mikä on Y:n jakauma? Esitä Y:n tiheysfunktio ja etsi sen maksimikohta.

Ratkaisu. Ks. luentomonisteen jakso 5.3.4 ja luennot. Exp(1)-jakauma on sama kuin Gam(1, 1). Yksittäisten laitteiden toiminta-ajat ($i = 1, \ldots, 5$) ovat siis $X_i \sim \text{Gam}(1, 1)$.

Gammajakauman yhteenlaskuominaisuuden nojalla $Y = X_1 + \ldots + X_5 \sim \text{Gam}(5, 1)$, jonka tiheysfunktio on

$$f_Y(y) = cx^{5-1}e^{-x} = cx^4e^{-x}, \qquad \text{kun } x > 0,$$

missä $c = 1/\Gamma(5) = 1/24$ on normalisointivakio. Sen derivaatta on

$$f_Y'(y) = c(4x^3 - x^4)e^{-x} = c(4 - x)x^3e^{-x},$$

jonka ainoa nollakohta on $4 - x = 0$ eli $x = 4$.

Tämän pisteen vasemmalla puolella (ts. kun $x < 4$) on $f_Y'(y) > 0$ ja oikealla puolella $f_Y'(y) < 0$. Kyseessä on siis tiheysfunktion globaali maksimikohta, eli jakauman moodi on 4.

4. Satunnaismuuttujilla X ja Y on kummallakin Bernoulli-jakauma parametrilla $1/3$. Anna esimerkki yhteisjakaumasta (esim. taulukkona), jossa X ja Y ovat (a) riippuvat, (b) riippumattomat. Kummassakin tapauksessa johda muuttujan $Z = Y - X$ pistetodennäköisyysfunktio.

Ratkaisu.

(a) Vrt. luentomonisteen esimerkki 3.2. Valitaan esim.

$$\begin{aligned}
P(X = 1, Y = 1) &= 1/3 \\
P(X = 1, Y = 0) &= 0 \\
P(X = 0, Y = 1) &= 0 \\
P(X = 0, Y = 0) &= 2/3
\end{aligned}$$

Muuttujat ovat nyt riippuvat, koska esim.

$$P(X = 1)P(Y = 0) = (1/3) \cdot (2/3) = \mathbf{2/9} \neq \mathbf{0} = P(X = 1, Y = 0).$$

Näillä luvuilla on aina $X = Y$ (tn:llä 1), joten $P(Z = 0) = 1$, eli $f_Z(0) = 1$.

(b) Jotta muuttujat ovat riippumattomat, täytyy olla

$$\begin{aligned}
P(X = 1, Y = 1) &= P(X = 1)P(Y = 1) = (1/3) \cdot (1/3) = 1/9 \\
P(X = 1, Y = 0) &= P(X = 1)P(Y = 0) = (1/3) \cdot (2/3) = 2/9 \\
P(X = 0, Y = 1) &= P(X = 0)P(Y = 1) = (2/3) \cdot (1/3) = 2/9 \\
P(X = 0, Y = 0) &= P(X = 0)P(Y = 0) = (2/3) \cdot (2/3) = 4/9
\end{aligned}$$

Tutkimalla minkä arvon Z saa milläkin parin (X, Y) arvolla saadaan

$$\begin{aligned}
f_Z(-1) &= P(X = 1, Y = 0) = 2/9 \\
f_Z(0) &= P(X = 1, Y = 1) + P(X = 0, Y = 0) = 1/9 + 4/9 = 5/9 \\
f_Z(1) &= P(X = 0, Y = 1) = 2/9
\end{aligned}$$