

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Kurssikoe 1, 28.10.2013

1. Osoita funktio $f : [2, \infty[\rightarrow [1, \infty[$,

$$f(x) = 1 + \sqrt{x - 2},$$

bijektioksi ja määritä sen käänteisbijektion lauseke.

2. Olkoon $a_n = n3^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Laske raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ja tutki sen

avulla potenssisarjan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ suppenemista.

3. (a) Määrittele reaalifunktion f jatkuvuus pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. (1p)
(b) Funktiosta f tiedetään, että

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-a}-2}{x^2-25},$$

kun $a < x \neq 5$, ja että $f(5) = b$. Määritä vakiot $a \in]-5, 5[$ ja $b \in \mathbb{R}$ niin, että f on jatkuva pisteessä 5. (a: 2p, b: 3p)

4. (a) Osoita, että $4^{-1} = 3 \sum_{k=2}^{\infty} 4^{-k}$. (2p)
(b) Millä x :n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{6}{5x}\right)^k$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa? (4p)