

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe 11.12.2013

Kokeessa ei saa käyttää laskinta eikä taulukkokirjaa.

1. (a) Lineaarikuvaukselle $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ pätee

$$L(1, 0) = (1, 5, 1) \quad \text{ja} \quad L(0, 1) = (0, 0, 4).$$

Mikä on lineaarikuvauksen L matriisi? Määritä $L(-1, 3)$.

- (b) Tiedetään, että lineaarikuvauksella $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ on ominaisarvo $\lambda \in \mathbb{R}$, jota vastaavat ominaisvektorit $\bar{v}_1 = (1, 2, 0)$ ja $\bar{v}_2 = (-2, 0, 0)$. Etsi ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori, joka ei ole yhdensuuntainen kummankaan vektoreista \bar{v}_1 ja \bar{v}_2 kanssa. Perustele vastauksesi ominaisvektorin määritelmän avulla.

2. (a) Tutkitaan matriiseja

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Osoita, että jono $\mathcal{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ kanta.

- (b) Minkä matriisin koordinaattivektori kannan \mathcal{B} suhteen on $(5, 1, -1, 0)$?
3. (a) Anna esimerkki polynomiavaruuden \mathcal{P} aliavaruudesta, johon polynomi x kuuluu ja polynomi $x^2 + 1$ ei kuulu. Perustele vastauksesi.
- (b) Avaruudella \mathbb{R}^3 on aliavaruus

$$W = \{(a - b, a + 2b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Kirjoita $\bar{v} = (0, 8, -2)$ summana kahdesta vektorista, joista toinen on aliavaruuden W ja toinen aliavaruuden W^\perp alkio.

4. (a) Selitä lyhyesti, mihin kannanvaihtomatriiseja käytetään. (Sinun ei tarvitse kertoa kannanvaihtomatriisin määritelmää.)
- (b) Oletetaan, että V on vektoriavaruus, jolla on kanta $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$. Olkoon $L: V \rightarrow U$ sellainen lineaarikuvaus, että jono $(L(\bar{v}_1), \dots, L(\bar{v}_n))$ on vapaa. Osoita, että L on injektio.

Kerro mielipiteesi kurssista! Mikä toimi? Mitä voisi parantaa? Saat WebOodin kautta sähköpostiisi linkin, josta pääset täyttämään palautelomakkeen.