Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Erilliskuulustelu 24.1.2013

1. (a) Tutkitaan kuvausta $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $f(1,0) = (1,1)$, $f(0,1) = (1,-1)$ ja $f(1,1) = (2,1)$. Voiko kuvaus f olla lineaarinen?
   (b) Tutkitaan kuvausta $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, jolle pätee $g(1,0) = (1,1)$, $g(0,1) = (1,-1)$ ja $g(1,1) = (2,0)$. Onko kuvaus g välttämättä lineaarinen?

2. Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \quad L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ 2x_3 + x_4).$$

   (a) Määritä kuvauksen L matriisi.
   (b) Mikä on kuvauksen L ydin?
   (c) Päättele ytimen perusteella, onko kuvaus injektio.

3. (a) Määritä matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

   ominaisarvot.
   (b) Keksi matriisille A neljä eri ominaisvektoria.
   (c) Oletetaan, että $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Osoita, että joukko $W = \{\bar{v} \in \mathbb{R}^n \mid B\bar{v} = 2\bar{v}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ aliavaruus.

4. (a) Oletetaan, että V on sisätuloavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Mikä seuraavista on $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$ eli vektorin $\bar{v}$ projektio vektorin $\bar{w}$ virittämälle aliavaruudelle?

$$\frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle}\bar{w}, \quad \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle}\bar{v}, \quad \frac{\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle}{\langle \bar{w}, \bar{w} \rangle}$$

   (b) Polynomiavaruudessa $\mathcal{P}_1$ voidaan määritellä sisätulo seuraavalla kaavalla:

$$\langle ax + b, cx + d \rangle = 2ac + 3bd \quad \text{kaikilla } ax + b, cx + d \in \mathcal{P}_1.$$

   Merkitään $p = x - 4$ ja $q = 3x$. Määritä projektio $\operatorname{proj}_q(p)$.
   (c) Tutkitaan avaruuden $\mathcal{P}_1$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(q)$, missä $q = 3x$. Keksi kolme eri vektoria, jotka ovat kohtisuorassa komplementissa $W^\perp$, kun sisätulo on sama kuin edellisessä tehtävässä. Perustele vastauksesi.

5. Vektoriavaruudella $\mathbb{R}^3$ on aliavaruus

$$W = \{(a + b + 2c,\ -a + b,\ b + c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

   Määritä $\dim(W)$.