HELSINGIN YLIOPISTO

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Todennäköisyyslaskenta

Erilliskoe 23.1.2014

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä itse laadittu, enintään A4-kokoinen lunttilappu ja taulukkokirja.

1. Edessäsi on kaksi ulkonaisesti identtistä laatikkoa. Toinen niistä sisältää 10 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–10, ja toinen sisältää 20 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–20. Valitset laatikoista satunnaisesti yhden, ja sen jälkeen poimit valitsemastasi laatikosta umpimähkään yhden pallon.
   (a) Millä todennäköisyydellä poimit pallon, jonka numero on 7?
   (b) Jos poimimasi pallon numero on 7, mikä on tällöin todennäköisyys, että valitsit sen laatikon, jossa oli 20 palloa?

2. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma on tasajakauma alueessa $0 < x < y < 2$. Johda
   (a) yhteistiheysfunktio
   (b) X:n reunatiheysfunktio f_X
   (c) Y:n reunatiheysfunktio f_Y
   (d) X:n ehdollinen tiheysfunktio $f_{X|Y}$
   (e) Y:n ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y|X}$
   (f) Y:n ehdollinen odotusarvo $E(Y \mid X)$.
   Kaikissa lausekkeissa muista ilmoittaa lausekkeen pätevyysalue.

3. Satunnaismuuttujilla X ja Y on seuraava yhteisjakauma. X:n reunajakauma on standardinormaalijakauma $N(0, 1)$, ja ehdolla $X = x$ satunnaismuuttuja Y noudattaa tasajakaumaa välillä $(x - 1, x + 1)$. Laske EY ja var Y.

4. Satunnaismuuttujilla X ja Y on tasajakauma neliössä $0 < x, y < 1$. Merkitään $U = X^2$ ja $V = Y^3$.
   (a) Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u, v)$.
   (b) Laske $E(U + V)$.
   (c) Ovatko U ja V riippumattomat? Perustele.
   Kaikissa lausekkeissa muista ilmoittaa lausekkeen pätevyysalue.

5. Olkoot $X_1, \ldots, X_{10}$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla kaikilla on normaalijakauma $N(\mu, \sigma^2)$. Määritellään niiden otoskeskiarvo kaavalla

$$\overline{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i$$

ja residuaalit kaavalla

$$R_i = X_i - \overline{X}.$$

Johda
   (a) otoskeskiarvon jakauma (nimi ja parametrit, tiheysfunktiota ei tarvita)
   (b) satunnaismuuttujan R_1 jakauma (nimi ja parametrit)
   (c) satunnaismuuttujien R_1 ja R_2 yhteisjakauma (nimi ja parametrit).