MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I, 2014

Kurssikoe 2, 29.4.2014

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä. Kokeessa sallitaan käsin kirjoitettu "lunttilappu". (Kaksi käsin kirjoitettua kaksipuolista A2-paperia.)

1.Oletetaan, että $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella metriikalla. Määritä joukon

$$A = \{(x, y) \in X \mid x \geq 1 \text{ ja } y > 2\}$$

sisä-, ulko- ja reunapisteet. Lyhyt perustelu vastauksen jokaiseen kohtaan.

2. Oletetaan, että $X = \mathbb{R}^2$ varustettuna tavallisella metriikalla. Tarkastellaan jonoa (z_n), missä kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ pätee

$$z_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Osoita, että jono (z_n) suppenee, ja määritä sen raja-arvo.

3. Tee seuraavista kahdesta vaihtoehdosta joko tehtävä (a) tai (b) (mutta ei molempia.)

(a) Oletetaan, että X on reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ väli $[0, 1]$ varustettuna tavallisella metriikalla. Anna esimerkki jonosta, joka suppenee kohti yhtälön

$$1 - \frac{1}{4}e^x = x$$

välillä $[0, 1]$ sijaitsevaa juurta. Todista väitteesi. (Voit käyttää esim. Banachin kiintopistelausetta.)

(b) Oletetaan, että $X = \mathbb{R}$ varustettuna tavallisella metriikalla. Tarkastellaan jonoa (f_n), missä kaikilla $n = 1, 2, \ldots$ funktio $f_n \colon X \to X$ on määritelty ehdolla

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^2.$$

(i) Suppeneeko jono (f_n) pisteittäin?
(ii) Suppeneeko jono (f_n) tasaisesti?

4. Oletetaan, että (X, d) on metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$ jono sen kompakteja epätyhjiä osajoukkoja. Osoita, että leikkaus

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

on epätyhjä.