

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Topologia I 2014

Kurssikoe 1

Tehtävät ovat aiheen mukaisessa järjestyksessä.

1. Tarkastellaan joukkoa $X = \mathbb{R}^2$ ja merkitään sen alkioita $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$ jne. Osoita, että seuraavilla ehdoilla määritelty funktio $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$ on metriikka

$$\begin{aligned} d(x, y) &= 0, \text{ kun } x_1 = y_1 \text{ ja } x_2 = y_2, \\ d(x, y) &= 1, \text{ kun } x_1 \neq y_1 \text{ ja } x_2 = y_2, \\ d(x, y) &= 1, \text{ kun } x_1 = y_1 \text{ ja } x_2 \neq y_2, \text{ ja} \\ d(x, y) &= 2, \text{ kun } x_1 \neq y_1 \text{ ja } x_2 \neq y_2. \end{aligned}$$

2. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d) , missä $X = \mathbb{R}^2$ ja d on tavallinen metriikka. (Ts. $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.) Osoita, että joukko

$$A = \{(x_1, x_2) \in X \mid x_2 > e^{x_1}\}$$

on avoin.

3. Tarkastellaan metrisiä avaruuksia $(X, d_{0,1})$ ja (Y, d_{tav}) , missä $X = Y = \mathbb{R}$, $d_{0,1}$ on $\{0, 1\}$ -metriikka ja d_{tav} on reaalilukujen joukon tavallinen metriikka. (Ts. $d_{0,1}(x, x) = 0$, $d_{0,1}(x, y) = 1$ kun $x \neq y$ ja $d_{\text{tav}}(x, y) = |x - y|$.) Määritellään funktio $f: X \rightarrow Y$ ehdoilla $f(x) = -7$ kun $x < 42$ ja $f(x) = 7$ kun $x \geq 42$. Osoita, että f on jatkuva.

4. Tarkastellaan metristä avaruutta (X, d) , missä $X = \mathbb{R}$ ja d on reaalilukujen tavallinen metriikka. Osoita, että 0 on joukon

$$A = \left\{(-1)^n \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}$$

kasautumispiste.