Todennäköisyyslaskenta s-2009, 2. kurssikoe 21.12.2009

Kokeessa saa käyttää laskinta sekä MAOL-taulukoita.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = c\,xy, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion c arvo.

b) Laske todennäköisyys $P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } 0 < Y < \frac{1}{2})$.

Ratkaisu:

a) (3 pistettä)

$$1 = \iint f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x c\,xy\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 x\,\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{c}{8},$$

joten $c = 8$.

b) (3 pistettä)

$$P(0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \int_0^x 8\,xy\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 8\,x\,\frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}.$$

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$Y|X \sim N(X, X^2)$$
$$X \sim N(2, 1),$$

jossa $N(\mu, \sigma^2)$ tarkottaa normaalijakaumaa odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2.

Laske EY ja $\operatorname{var} Y$.

Ratkaisu: Odotusarvo kannatta laskea iteroituna odotusarvona,

$$EY = EE(Y|X) = EX = 2.$$

Varianssin saa laskettua esim. seuraavasti,

$$\operatorname{var} Y = \operatorname{var} E(Y|X) + E \operatorname{var}(Y|X) = \operatorname{var} X + EX^2$$
$$= 1 + (\operatorname{var} X + (EX)^2) = 1 + 1 + 4 = 6.$$

Toinen reitti varianssille: käytetään kaavaa $\operatorname{var} Y = EY^2 - (EY)^2$, jossa

$$EY^2 = EE(Y^2|X) = E[\operatorname{var}(Y|X) + (E(Y|X))^2]$$
$$= E(X^2 + X^2) = 2(\operatorname{var} X + (EX)^2) = 2(1 + 4)$$

Arvostelu: odotusarvon laskemisesta 2 pistettä ja varianssin laskemisesta 4 pistettä. Tässä tehtävässä joutuu vaikeuksiin, jos ensin yrittää johtaa Y:n reunajakauman tiheysfunktion.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on kummallakin eksponenttijakauma parametrilla $\lambda > 0$. (Muistanet, että eksponenttijakauman tiheysfunktio on $\lambda \exp(-\lambda z)$ kun $z > 0$). Määritellään muuttujat S ja U kaavoilla

$$S = X + Y, \quad U = X.$$

Johda muuttujien S ja U yhteistiheysfunktion $f_{S,U}$ kaava. Johda lisäksi muuttujan U ehdollinen tiheysfunktio ehdolla $S = s$, sekä tunnista kyseinen (tuttu) jakauma.

Ratkaisu: Nyt

$$f_{S,U}(s,u) = f_{X,Y}(x,y) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,u)} \right|,$$

jossa muuttujien (x, y) ja (s, u) välillä on bijektiivinen vastaavuus

$$\begin{cases} s = x + y \\ u = x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = u \\ y = s - u \end{cases}$$

Tässä jacobiaani on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,u)} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -1,$$

joten

$$f_{S,U}(s,u) = f_{X,Y}(u, s-u)$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$ ja niillä on molemmilla eksponenttijakauma parametrilla λ, on edelleen

$$\begin{aligned} f_{S,U}(s,u) &= f_X(u)\, f_Y(s-u) \\ &= \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda u}\, 1(u > 0)\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(s-u)}\, 1(s - u > 0) = \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda s}\, 1(0 < u < s). \end{aligned}$$

Ehdollisen jakauman $U \mid S = s$ voi tunnistaa tarkastelemalla yhteistiheyttä $f_{S,U}(s,u)$ muuttujan u funktiona kiinteällä s: $f_{S,U}(s,u)$ on nollasta poikkeava vakio välillä $0 < u < s$ ja nolla muualla, joten kysessä on välin $(0, s)$ tasajakauma, kun $s > 0$. Toinen mahdollisuus on laskea integroimalla reunatiheys $f_S(s) = \lambda^2\, s\mathrm{e}^{-\lambda s} 1(s > 0)$, ja päätellä ehdollinen jakauma jakolaskun tuloksen

$$f_{U|S}(u \mid s) = \frac{f_{S,U}(s,u)}{f_S(s)} = \frac{1}{s}, \qquad 0 < u < s$$

perusteella.

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ standardinormaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen (eli $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$.

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kahtia siten, että $\mathbf{U} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista (jossa $1 \le k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \ldots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään vielä satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mitkä ovat satunnaismuuttujien Z_1 ja Z_2 jakaumat?

Ratkaisu:

a) Koska $\mathbf{Y}$ on satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ lineaarimuunnos, sillä on multinormaalijakauma, jonka parametrit ovat

$$E\mathbf{Y} = E(\mathbf{Q}\,\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\,E\mathbf{X} = \mathbf{Q}\,\mathbf{0} = \mathbf{0},$$
$$\mathrm{Cov}\,\mathbf{Y} = \mathbf{Q}\ \mathrm{Cov}(\mathbf{X})\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{I}\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$$

Siis $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ts. $\mathbf{Y}$:n komponentit ovat riippumattomia ja noudattavat standardinormaalijakaumaa.

b) a-kohdan perusteella $U_i \perp\!\!\!\perp V_j$ kaikilla i ja j, minkä takia $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{V}$. Z_1 on funktio satunnaisvektorista $\mathbf{U}$ ja Z_2 on funktio satunnaisvektorista $\mathbf{V}$, joten $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$.

Toinen tapa perustella vektorien riippumattomuus on todeta, että yhdistetyllä vektorilla $\mathbf{Y} = (\mathbf{U}, \mathbf{V})$ on normaalijakauma, ja

$$\mathrm{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

(sillä $U_i \perp\!\!\!\perp V_j$ kaikilla i, j), joten $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{V}$.

Sen sijaan on virheellistä väittää, että (sinänsä todesta) tuloksesta $\mathrm{cov}(Z_1, Z_2) = 0$ seuraisi, että Z_1 ja Z_2 olisivat riippumattomia, sillä nyt vektorilla (Z_1, Z_2) ei ole multinormaalijakauma.

c) $Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = U_1^2 + \cdots + U_k^2$, jossa $\mathbf{U} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, joten $Z_1 \sim \chi^2_k$. Vastaavasti $Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}$, jossa $\mathbf{V} \sim N_{n-k}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, joten $Z_2 \sim \chi^2_{n-k}$.