Vastausehdotukset analyysin sivuainekurssin syksyn 2015 1. välikokeeseen

Heikki Korpela

November 1, 2015

1. Tehtävä: funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{, kun } x \geq 1 \\ x + 1 & \text{, kun } x < 1 \end{cases}$$

Tutki, millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvolla f on jatkuva bijektio. Määritä myös f:n käänteisbijektion lauseke.

Vastausehdotus: tehtävän ratkaiseminen kannattaa aloittaa tutkimalla ensin jatkuvuutta. f on selvästi jatkuva, kun $x < 1$ tai $x > 1$, koska sen lauseke on silloin polynomi (täsmällisemmin: "f yhtyy näillä ehdoilla kussakin x:n kokonaisessa ympäristössä tunnetusti jatkuvaan polynomifunktioon").

f on jatkuva pisteessä $x = 1$, kun

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) &\Leftrightarrow \\ \lim_{x \to 1^-} (ax) = a \cdot 1 = \lim_{x \to 1^+} (x + 1) &\Leftrightarrow \\ a \cdot 1 = a \cdot 1 = 1 + 1 &\Leftrightarrow \\ a = a = 2. \end{aligned}$$

f on lisäksi bijektio, kun yhtälöllä $y = f(x)$ on jokaisella $y \in \mathbb{R}$ tasan yksi ratkaisu $x \in \mathbb{R}$ (ks. verkkomateriaalin lause 1.13.)

Tutkitaan yhtälöä

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{, kun } x < 1 \\ 2x & \text{, kun } x \geq 1 \end{cases}$$

Tällä yhtälöllä on kullakin $y \in \mathbb{R}$ tasan yksi ratkaisu $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \begin{cases} y - 1 & \text{, kun } y < 2 \text{ (tällöin } x \in]-\infty, 1[) \\ \dfrac{y}{2} & \text{, kun } y \geq 2 \text{ (tällöin } x \in [1, \infty[) \end{cases}$$

Siten f on bijektio ja sen käänteisfunktio on

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} y - 1 & \text{, kun } y < 2 \\ \dfrac{y}{2} & \text{, kun } y \geq 2 \end{cases}$$

tismalleen silloin kun $a = 2$.

2. Tehtävä: laske raja-arvot $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ja $\lim_{x\to 0} f(x)$, kun tiedetään, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee arvio

$$\frac{x^4+1}{3x^4+2} \le f(x) \le \frac{x^4+x^2+1}{3x^4+2}$$

Onko f välttämättä jatkuva jossain pisteessä?

Vastausehdotus: määritellään apufunktiot $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x^4+1}{3x^4+2}$ ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = \dfrac{x^4+x^2+1}{3x^4+2}$.

g ja h ovat rationaalifunktioina jatkuvia määrittelyjoukoissaan $\mathbb{R}$ (nimittäjillä ei ole nollakohtia, $3x^4+2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$). Siis niiden raja-arvo on arvo.

Koska

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} h(x) = \frac{0+0+1}{0+2} = \frac{1}{2}$$

ja

$$g(x) \le f(x) \le h(x), \text{ kun } x = 0$$

niin kuristusperiaatteen nojalla

$$\exists \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$$

Lisäksi

$$g(x) = \left(\frac{x^4+1}{3x^4+2}\right)^{(x^4} = \frac{1+{}^1\!/_{x^4}}{3+{}^2\!/_{x^4}} \underset{x\to\infty}{\to} \frac{1+{}^1\!/_\infty}{3+{}^2\!/_\infty} = \frac{1+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

ja

$$h(x) = \left(\frac{x^4+x^2+1}{3x^4+2}\right)^{(x^4} = \frac{1+{}^1\!/_{x^2}+{}^1\!/_{x^4}}{3+{}^2\!/_{x^4}} \underset{x\to\infty}{\to} \frac{1+{}^1\!/_\infty+{}^1\!/_\infty}{3+{}^2\!/_\infty} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}$$

joten samoin kuristusperiaatteen nojalla

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{3}$$

f on välttämättä jatkuva kohdassa $x = 0$, koska tässä kohdassa funktiolla on raja-arvo ${}^1\!/_2$, joka on myös sen arvo, sillä funktion arvolle pätee

$$g(0) = {}^1\!/_2 \le f(0) \le h(0) = {}^1\!/_2 \Rightarrow$$
$$f(0) = {}^1\!/_2$$

Vastaukset ovat siis: $\lim_{x\to\infty} f(x) = {}^1\!/_3$ ja $\lim_{x\to 0} f(x) = {}^1\!/_2$, ja f on välttämättä jatkuva pisteessä $x = 0$ eli origossa.

3. Tehtävä: millä x:n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^k$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

Vastausehdotus: kyseessä on geometrinen sarja. Se suppenee silloin, kun ensimmäinen termi a on nolla (jolloin kaikki termit ovat nollia ja kyseessä on nollasarja, jonka summakin on nolla) tai kun sarjan suhdeluvun itseisarvo $|q|$ on pienempi kuin yksi. Tässä tapauksessa ensimmäinen termi ja peräkkäisten termien välinen suhdeluku ovat samat. Tarkastellaan yhtälöä

$$\begin{aligned} |q| = \left| \frac{x^2}{x^2+1} \right| < 1 \Leftrightarrow \\ |x^2| < |x^2+1| \Leftrightarrow \\ x^2 < x^2+1 \Leftrightarrow \\ 0 < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

(Kohdassa (1) itseisarvomerkintä voitiin huoletta tiputtaa pois, koska $x^2 > 0$ ja $x^2 + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.)

Yhtälö on tosi $\forall x \in \mathbb{R}$. Siten sarja suppenee kaikilla x:n reaaliarvoilla.

Sen summa on tällöin

$$\frac{a}{1-q} = \left(\frac{\frac{x^2}{x^2+1}}{1 - \frac{x^2}{x^2+1}} \right)^{(x^2+1} = \frac{x^2}{x^2+1-x^2} = \frac{x^2}{1} = x^2$$

Sama suppenemisehto ja summan lauseke pätevät myös tapauksessa $a = 0$ eli kun kyseessä on nollasarja:

$a = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}$, jolloin summa on sama $x^2 = 0^2 = 0$, kuten pitääkin.

4. Tehtävä: osoita sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 5}{5^k + 1}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^5}{k^7 + 2k + 1}$$

suppeneviksi.

Vastausehdotus: kuten usein, tehtävän voi tehdä todella monella tavalla. Lähinnä työläys (ja samalla lasku- tai muiden huolimattomuusvirheiden todennäköisyys!) vaihtelevat. Tähän on koottu muutamia yleisiä tapoja tarkastella näitä sarjoja lähinnä sen havainnollistamiseksi, että saman tehtävän voi ratkaista yksinkertaisesti tai monimutkaisesti. Aina riittää kuitenkin löytää kuhunkin tapaukseen yksi, siinä tapauksessa tepsivä suppenemisehto.

Sarja a). Käsitellään ensin sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 5}{5^k + 1}$ ja merkitään $x_k = \frac{4^k + 5}{5^k + 1}$.

Selvästi $x_k > 0 \, \forall k \in \mathbb{N}$. ($4^k+5 > 0$ ja $5^k+1 > 0$ – tämäntyyppistä väitettä ei tarvitse tämän kurssin kokeissa tarkemmin perustella, jos sen riittävän selvästi näkee ns. paljaalla silmällä. Sen sijaan on tärkeää tarkistaa ja todeta, että sarjan termit ovat positiivisia, jos aikoo käyttää jotain positiivitermisiä sarjoja koskevia suppenemislauseita!)

Tapa 1. Majoranttiperiaate: olkoot $y_k = \frac{4^k + 5}{5^k}$ ja $z_k = \frac{3 \cdot 4^k}{5^k}$. Tällöin helposti nähdään, että $\forall k \in \mathbb{N}$ pätee $0 < x_k < y_k < z_k \Rightarrow 0 < x_k < z_k$. (Halutessaan tämän voi vielä perustella sillä, että positiiviterminen osamäärä kasvaa nimittäjää pienennettäessä tai osoittajaa kasvatettaessa, tai viime kädessä yhtälöillä: $\frac{4^k+5}{5^k+1} < \frac{4^k+5}{5^k} \Leftrightarrow \frac{1}{5^k+1} < \frac{1}{5^k} \Leftrightarrow 5^k < 5^k + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$, ja $\frac{4^k+5}{5^k} < \frac{3 \cdot 4^k}{5^k} \Leftrightarrow 4^k + 5 < 3 \cdot 4^k \Leftrightarrow 5 < 2 \cdot 4^k \Leftrightarrow 1 < 4^{k-1} + 4^k$, joka on ilmeisellä tavalla totta jo heti arvosta $k = 1$ alkaen.)

Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k}{5^k} = \sum_{k=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k$ on geometrinen sarja, jonka suhdeluku $q = {}^4\!/_5$, ja koska sen suhdeluvun itseisarvolle pätee $|q| = |{}^4\!/_5| < 1$, se suppenee. Koska majoranttisarja suppenee, myös tehtävässä kysytty sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. □

Tapa 2. Osamäärätesti: osamäärätestissä tutkitaan sarjan seuraavan ja edellisen termin suhdetta.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{4^{k+1}+5}{5^{k+1}+1}}{\frac{4^k+5}{5^k+1}} = \frac{4^{k+1} + 5}{5^{k+1} + 1} \cdot \frac{5^k + 1}{4^k + 5} = \frac{4^k(4 + {}^5\!/_{4^k})}{5^k(5 + {}^1\!/_{5^k})} \cdot \frac{5^k(1 + {}^1\!/_{5^k})}{4^k(1 + {}^1\!/_{5^k})} =$$

$$\frac{(4 + {}^5\!/_{5^k})(1 + {}^1\!/_{5^k})}{(5 + {}^1\!/_{5^k})(1 + {}^1\!/_{5^k})} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{(4 + {}^5\!/_{\infty})(1 + {}^1\!/_{\infty})}{(5 + {}^1\!/_{\infty})(1 + {}^1\!/_{\infty})} = \frac{(4 + 0)(1 + 0)}{(5 + 0)(1 + 0)} = \frac{4}{5}.$$

Koska $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{4}{5} < 1$, niin sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee osamäärätestin nojalla. □

Tapa 3. $\lim \frac{x_k}{y_k}$ -kriteeri:

Tässä menetelmässä valitaan vertailusarjaksi sopiva sarja, joka muistuttaa riittävästi tutkittavaa sarjaamme ja jonka tiedämme jo suppenevaksi. Lupaavalta vaikuttaa geometrinen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$, joka suppenee selvästi (sarjan peräkkäisten termien suhde on vakio $^4/_5$, jonka itseisarvo on pienempi kuin yksi) ja joka eroaa (suurilla k) tutkittavasta sarjasta vain hyvin vähän. Olkoot siis $y_k = \frac{4^k}{5^k} > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{x_k}{y_k} = \frac{\frac{4^k+5}{5^k+1}}{\frac{4^k}{5^k}} = \frac{4^k+5}{5^k+1} \cdot \frac{5^k}{4^k} = \frac{4^k(1+{}^5/_{4^k})}{5^k(1+{}^1/_{5^k})} \cdot \frac{5^k}{4^k} = \frac{1+{}^5/_{4^k}}{1+{}^1/_{5^k}} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1+{}^5/_\infty}{1+{}^1/_\infty} = \frac{1+0}{1+0} = 1.$$

Koska $\exists \lim_{k\to\infty} \frac{x_k}{y_k} = 1 \in]0,\infty[$, niin sarjat $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenevat samanaikaisesti. (Joko ne molemmat hajaantuvat tai ne molemmat suppenevat.) Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenee geometrisena sarjana, myös $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee. $\square$

Sarja b). Tutkitaan sitten sarjaa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^5}{k^7+2k+1}$. Käsitellään kaksi etenemistapaa: itseinen suppeneminen tai Leibnizin lause.

Tapa 1. Yleensä itseinen suppeneminen on hyvä tapa osoittaa tämän tyyppinen sarja suppenevaksi, jos se vain suinkin onnistuu. (Ongelmia voi syntyä, jos jono ei suppene itseisesti, koska siitä ei vielä seuraa, että se hajaantuu. Tällöin voi joutua kokeilemaan esimerkiksi Leibnizin lausetta.)

Olkoon $x_k = \left|\frac{(-1)^k k^5}{k^7+2k+1}\right| = \frac{k^5}{k^7+2k+1}$.

Nyt "itseisarvosarjan" $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (tarkalleen: alkuperäisen tutkittavan sarjan termien itseisarvojen muodostaman sarjan) suppenevuus voidaan jälleen osoittaa monin eri tavoin. Kyseeseen tulevat mm. suhdetesti, $\lim \frac{x_k}{y_k}$ -testi ja majoranttiperiaate kuten edellä. Helpoin näistä on majoranttiperiaate.

Olkoon $y_k = \frac{k^5}{k^7}$. Nyt selvästi $0 < x_k < y_k \ \forall k \in \mathbb{N}$. ($\frac{k^5}{k^7+2k+1} < \frac{k^5}{k^7} \Leftrightarrow k^7 < k^7 + 2k + 1 \Leftrightarrow 0 < 2k + 1$.)

Koska sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{k^7} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ suppenee yliharmonisena sarjana, myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee majoranttiperiaatteen nojalla. Koska sarja $x_k = \left|\frac{(-1)^k k^5}{k^7+2k+1}\right|$ suppenee, tutkittava sarja $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^5}{k^7+2k+1}$ suppenee itseisesti eli se suppenee. $\square$

Tapa 2. Leibnizin lause: vuorotteleva sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ suppenee, jos sen termien itseisarvot x_k muodostavat nollaa kohti suppenevan, aidosti laskevan lukujonon.

Olkoon $x_k = \frac{k^5}{k^7+2k+1}$. Tällä lausekkeella määriteltyjen alkioiden muodostama jono on hyvin määritelty, positiiviterminen jono, koska $k^7 + 2k + 1 > 0$ ja $k^5 > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Jono on myös aidosti laskeva, koska, kun $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&3 > 1 && \Leftrightarrow \\
&2k + 3 > 2k + 1 && \Leftrightarrow \\
&k^7 + 2k + 3 > k^7 + 2k + 1 && \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{k^7+2k+1} > \frac{1}{k^7+2k+3} && \Leftrightarrow \\
&\frac{k^5}{k^7+2k+1} > \frac{k^5}{k^7+2k+3} && \Rightarrow \\
&\frac{k^5}{k^7+2k+1} > \frac{k^5}{k^7+2k+3} > \frac{(k+1)^5}{(k+1)^7+2k+3} && \Rightarrow \qquad (2) \\
&\frac{k^5}{k^7+2k+1} > \frac{(k+1)^5}{(k+1)^7+2(k+1)+1} && \Leftrightarrow \\
&x_k > x_{k+1}
\end{aligned}$$

Kohdassa (2) voi vedota arviossa siihen, että positiiviterminen osamäärä pienenee, kun nimittäjä kasvaa selvästi enemmän kuin osoittaja. (Tarkalleen binomikaavaa tai laskinta hyödyntämällä: $(k+1)^7 - k^7 > (k+1)^5 - k^5 \Leftrightarrow 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 > 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 \Leftrightarrow 7k^6 + 21k^5 + 30k^4 + 25k^3 + 11k^2 + 2k > 0$, joka on tosi $\forall k \in \mathbb{N}$. Kuten tästä huomaamme, jonon laskevuuden osoittamisessa tähän tyyliin on mekaanisesti kohtuullisesti puuhasteltavaa, vaikka se onkin intuitiivisesti melko selvää.)

Lisäksi

$$\frac{k^5}{k^7 + 2k + 1} = \frac{1}{k^2 + {}^2\!/_{k^4} + {}^1\!/_{k^5}} \underset{k\to\infty}{\to} \frac{1}{\infty + {}^2\!/_{\infty} + {}^1\!/_{\infty}} = 0.$$

Siten sarjan termit x_k muodostavat aidosti laskevan, kohti nollaa suppenevan lukujonon, joten sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ suppenee. $\square$