HY Todennäköisyysteoria II, syksy 2013, loppukoe (18.12.2013)

Valitse kolme tehtävää neljän tehtävän listasta $\{1, 2, 3, 4\}$ ja vastaa tehtävien kysymyksiin. Jos jää aikaa voit toki vastata myös neljanteen tehtävään. Kokeen kesto on neljä tuntia + aikalisää.

1. (a) Kirjoita tasaisen integroituvuuden määritelmä.

   (b) Olkoon $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ satunnaismuuttujen jono jolla

   $$\sup_n E_P(|X_n|^q) < \infty, \qquad \text{jossa } q > 1$$

   Osoita että jono $(X_n(\omega) : n \in \mathbb{N})$ on tasaisesti integroituva.
   Vihje

   $$|X_n(\omega)|^q \geq K^{q-1}|X_n(\omega)| \ \mathbf{1}(|X_n(\omega)| > K), \quad \forall K > 0.$$

   (c) Osoita :

   $$E_P(|X|^q) = q\int_0^\infty t^{q-1}P(|X| > t)dt. \qquad \text{Käytä Fubini !} \qquad q \geq 1$$

2. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra, ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satunnaismuuttuja.

   (a) Kirjoita ehdollisen odotusarvon $E_P(X|\mathcal{G})(\omega)$ määritelmä .

   Satunnaismuttuja $U(\omega) \in [0, 1]$ tasaisesti jakautunut eli

   $$P(U \in (a, b]) = (b - a) \text{ kun } (a, b] \subseteq [0, 1],$$

   ja olkoon satunnaismuuuttuja $N(\omega)$ Poisson(1) jakautunut, siis

   $$P(N = k) = \frac{\exp(-1)}{k!}$$

   Oletamme että $N \overset{P}{\perp\!\!\!\perp} U$, eli N ja U ovat rippumattomia satunnaismuuttujat P-mitan suhteen. Olkoon

   $$X(\omega) := \big(U(\omega)\big)^{N(\omega)} = \exp\Big(N(\omega)\log(U(\omega))\Big)$$

   (b) Laske odotusarvo $E_P(U^n)$ jossa $n \in \mathbb{N}$ on vakio.

(c) Laske odotusarvo $E_P(u^N) = E_P\Big(\exp\big(N\log(u)\big)\Big)$ jossa $u > 0$ on vakio.

(d) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(U))(\omega)$.

(e) Laske ehdollinen odotusarvo $E_P(X|\sigma(N))(\omega)$.

(f) Laske odotusarvo $E_P(X)$.

3. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F})$, olkoon P, Q todennäköisyysmittoja jolla $Q \ll P$, eli kun $P(A) = 0$, siitä seuraa $Q(A) = 0$. Silloin on olemassa Radon-Nikodymin derivaata

$$Z(\omega) = \frac{dQ}{dP}(\omega) \geq 0,$$

jossa $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ja $E_P(Z) = 1$, ja kaikille satunnaismuuttujalle $X(\omega) \geq 0$ pätee odotusarvon mitanvaihtoaava

$$E_Q(X) = E_P(XZ)$$

Olkoon $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ali-σ-algebra, ja $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ satunnaismuuttuja.

(a) Todista abstrakti Bayesin kaava, joka on mitta vaihto kaava ehdolliselle odotusarvolle: jos $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ on ali-σ-algebra,

$$E_Q(X|\mathcal{G})(\omega) = \frac{E_P(XZ|\mathcal{G})(\omega)}{E_P(Z|\mathcal{G})(\omega)}$$

Vihje käytä ehdollisen odotusarvon määritelmää ja ominaisuuksia.

4. Todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Olkoon $\big(X_t(\omega) : t \in \mathbb{N}\big)$ jono P-riipumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujat, jolla $X_t(\omega) \geq 0$ ja $E_P(X_t) = 1$ $\forall t \in T$.

? (a) Osoita

$$E_P(\log(X_t)) \leq \log E_P(X_t) = \log(1) = 0$$

Vihje muista Jensenin epäyhtälö konveksi funktiolle. Eksponentiaali funktio on konveksi ja logaritmi on konkaavi.

Oletamme että $P(X_t \neq 1) > 0$, eli suljetaan pois tapaus jossa $X_t(\omega) \equiv 1$ P-melkein varmasti. Siitä seuraa helposti

$$E_P(\log(X_t)) < 0$$

aidolla epäyhtälöllä (sinun ei tarvitse tätä todistaa).
Jatkossa merkitään $Y_n(\omega) = \log(X_n(\omega))$, ja $E_P(\log(X_t)) = -c$ jossa $c > 0$.

Olkoon $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \dots, X_t)$ ja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \mathbb{N})$ filtraatio.

(b) Osoita että

$$Z_t(\omega) = \prod_{s=1}^{t} X_t(\omega)$$

on $(P, \mathbb{F})$-martingaali. ← Tässä s, ei t

(c) Osoita että on olemassa rajarvo

$$Z_\infty(\omega) = \lim_{t\to\infty} Z_t(\omega) \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

jossa $Z_\infty \in L^1(P)$.

(d) Osoita että

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log(Z_t(\omega)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^{t} \log(X_s(\omega)) = -c \qquad P\text{-melkein varmasti} \tag{0.1}$$

(e) Osoita että

$$Z_\infty(\omega) = 0 \qquad P\text{-melkein varmasti}$$

Vihje käytä 0.1

$$\lim_{t\to\infty} Z_t(\omega) = 0 \iff \lim_{t\to\infty} \sum_{s=1}^{t} \log(X_s(\omega)) = -\infty$$

(f) Osoita että martingaali $(Z_t : t \in \mathbb{N})$ ei ole tasaisesti integroituva (muuten se suppenisi myös $L^1(P)$:n mielessä).