Todennäköisyyslaskenta IIb, marras-joulukuu 2019 / Hytönen
Kurssitentti 20.12.2019

Sallitut omat tarvikkeet:

- Kirjoitusvälineet.
- Ylioppilaskirjoituksissa hyväksyttävä laskin.
- Yksi käsinkirjoitettu (saa olla molemmin puolin) korkeintaan A4-kokoinen ”lunttilappu”.

*

Yritä ratkaista kaikki tehtävät. Muista perustella ratkaisusi. Hyvä ajatus on kirjoittaa auki käyttämäsi määritelmät, vaikka sitä ei erikseen pyydettäisi. Kirjoita jokaiseen arvosteltavaan paperiin nimesi, opiskelijanumerosi, kurssin nimi ja kokeen päivämäärä. Rauhoitu, keskity, menesty.

*

1. (a) Määrittele satunnaisvektorin $\mathbf{V}$ kovarianssimatriisi $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$.
   (b) Kirjoita $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$ auki kaksiulotteisessa tilanteessa $\mathbf{V} = (X, Y)$ seuraavilla kahdella tavalla:
      i. kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden kovarianssin avulla ja
      ii. kummankin satunnaismuuttujan X ja Y varianssin sekä niiden korrelaatiokertoimen avulla.
   (c) Perustele, miksi korrelaatiokerroin ρ toteuttaa ehdon $-1 \leq \rho \leq 1$. (Tätä ei tarvitse todistaa alkeista lähtien. Riittää, kunhan selvität, mihin yleiseen tulokseen tämä perustuu.)

   Ratkaisu:

   (a) $\mathrm{Cov}(\mathbf{V}) = E[(\mathbf{V} - E\mathbf{V})(\mathbf{V} - E\mathbf{V})^T] = (\mathrm{cov}(V_i, V_j))_{i,j=1}^n = (E[(V_i - EV_i)(V_j - EV_j)])_{i,j=1}^n$ jos $\mathbf{V} = (V_i)_{i=1}^n$. (Riittää antaa yksi em. yhtäpitävistä kaavoista.)

   (b) i. $\mathrm{Cov}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X, Y) \\ \mathrm{cov}(Y, X) & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix}$

   ii. $\mathrm{Cov}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$, missä $\sigma_X^2 = \mathrm{var}(X)$, $\sigma_Y^2 = \mathrm{var}(Y)$ ja ρ on korrelaatiokerroin

$$\rho = \mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}}.$$

   (c) Cauchyn–Schwarzin epäyhtälön perusteella pätee $|E(UV)| \leq \sqrt{E(U^2)E(V^2)}$ kaikilla satunnaismuuttujilla U ja V. Kun valitaan $U = X - EX$ ja $V = Y - EY$, saadaan

$$|\mathrm{cov}(X, Y)| = |E[(X - EX)(Y - EY)]| \leq \sqrt{E(X - EX)^2 E(Y - EY)^2} = \sqrt{\mathrm{var}(X)\mathrm{var}(Y)}$$

   ja tästä puolittain jakamalla $|\mathrm{corr}(X, Y)| \leq 1$.

   Vaihtoehto: Tiedetään, että $\mathrm{Cov}(\mathbf{V})$ on positiivisesti semidefiniitti, jolloin erityisesti $\det \mathrm{Cov}(\mathbf{V}) \geq 0$. Toisaalta $\det \mathrm{Cov}(\mathbf{V}) = (1 - \rho^2)\sigma_X^2\sigma_Y^2$, joten on oltava $1 - \rho^2 \geq 0$, siis $\rho^2 \leq 1$ eli $-1 \leq \rho \leq 1$.

*

2. Satunnaisvektorilla (X, Y) on jatkuva jakauma. Olkoon sen tiheysfunktio $f_{X,Y}(x, y)$.
   (a) Määritä satunnaismuuttujan $Z = X + 2Y$ tiheysfunktio $f_Z(z)$ (ja osoita erityisesti, että Z on jatkuva satunnaismuuttuja).
   (b) Laske $f_Z(z)$ auki tilanteessa, jossa $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ ja $X \perp\!\!\!\perp Y$. Tarkista, että saamasi tulos todella toteuttaa tiheysfunktion vaatimukset.

Ratkaisu:

(a) Olkoon $\mathbf{U} = (X, Y)$ ja $\mathbf{V} = (Z, Y) = (X + 2Y, Y) = \mathbf{g}(\mathbf{U})$. Vastaavasti voidaan ratkaista $\mathbf{U} = (X, Y) = (Z - 2Y, Y) = \mathbf{h}(\mathbf{V})$, Siis $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on bijektio ja sen käänteiskuvaus on $\mathbf{h}$. Kuvaukset $\mathbf{g}$ ja $\mathbf{h}$ ovat lineaarisina selvästi jatkuvasti derivoituvia, joten $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on diffeomorfismi. Koska $\mathbf{U}$ on jatkuva satunnaisvektori, myös sen muunnos $\mathbf{V} = \mathbf{g}(\mathbf{U})$ on jatkuva satunnaisvektori. Jatkuvan satunnaisvektorin reunajakaumat ovat jatkuvia, joten $Z = V_1$ on jatkuva satunnaismuuttuja.

Yhteistiheysfunktiot toteuttavat formaalin ehdon

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})d\mathbf{v} = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})d\mathbf{u}, \qquad f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = f_{X,Y}(x, y),$$

eli

$$f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v}) = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u})\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{v}} = f_{\mathbf{U}}(\mathbf{h}(\mathbf{v}))|J_{\mathbf{h}}(\mathbf{v})|,$$

missä viimeinen termi on Jacobin determinantti

$$J_{\mathbf{h}}(\mathbf{v}) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial v_1} & \frac{\partial h_1}{\partial v_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial v_1} & \frac{\partial h_2}{\partial v_2} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial(z-2y)}{\partial z} & \frac{\partial(z-2y)}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Siis

$$f_{Z,Y}(z, y) = f_{\mathbf{V}}(\mathbf{v})f_{X,Y}(\mathbf{h}(z, y)) = f_{X,Y}(z - 2y, y).$$

Nyt satunnaismuuttujan Z reunatiheysfunktio saadaan integroimalla

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Z,Y}(z, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z - 2y, y)dy.$$

Vaihtoehtoja: Yhtä hyvin voidaan tehdä bijektioksi täydennys valitsemalla esim. $\mathbf{W} = (Z, X)$. Tämä johtaa hiukan erilaisiin mutta varsin samantapaisiin laskuihin. Vastaavasti f_Z:n integraaliesityksen voi antaa erilaisissa yhtäpitävissä muodoissa. Erityisesti muuttujanvaihdolla $x = z - 2y$ saadaan $y = (z - x)/2$ ja

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \frac{z - x}{2})\frac{1}{2}dx.$$

Muuttujanvaihdot on myös mahdollista tehdä kokonaan "käsin" yksi muuttuja kerrallaan vetoamatta moniulotteisiin muuttujanvaihtolauseisiin.

(b) Oletuksista $X, Y \sim \mathrm{Exp}(1)$ ja $X \perp\!\!\!\perp Y$ seuraa, että $f_X(x) = \mathbf{1}\{x > 0\}e^{-x}$, $f_Y(y) = \mathbf{1}\{y > 0\}e^{-y}$ ja

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathbf{1}\{x > 0, y > 0\}e^{-x-y}.$$

Sijoitus (a)-kohdan kaavaan antaa

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}\{z - 2y > 0, y > 0\}e^{-(z-2y)-y}dy \\ &= \mathbf{1}\{z > 0\}\int_0^{z/2} e^{-z+y}dy = \mathbf{1}\{z > 0\}\Big/_0^{z/2} e^{-z+y} = \mathbf{1}\{z > 0\}(e^{-z/2} - e^{-z}). \end{aligned}$$

Koska $z \mapsto e^{-z}$ on vähenevä, niin $e^{-z} < e^{-z/2}$ kun $z > 0$, ja siis $f_Z(z) \geq 0$. Lisäksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = \int_0^{\infty} e^{-z/2}dz - \int_0^{\infty} e^{-z}dz = \Big/_0^{\infty} - 2e^{-z/2} - \Big/_0^{\infty} - e^{-z} = 2 - 1 = 1.$$

Siis $f_Z(z) \geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(z)dz = 1$, joten f_Z on tiheysfunktio.

*

3. Opettaja suunnittelee todennäköisyyslaskennan tehtäväsarjaa. Hän ei ole etukäteen päättänyt tehtävien lukumäärää, mutta laatii joka tapauksessa ainakin yhden tehtävän. Aina, kun yksi tehtävä on valmis, opettaja heittää kolikkoa. Jos tulos on kruuna, hän päättää, että tehtäväsarja on valmis ja lopettaa. Jos tulos on klaava, hän keksii vielä yhden tehtävän lisää. Sama toistuu aina uuden tehtävän valmistuttua. Oletetaan, että jokaisen uuden tehtävän laatimiseen kuluu satunnainen aika $X_i \sim \text{Exp}(1)$ (yksikkönä tunti). Lisäksi eri tehtävien laadinta-ajat ja eri kolikon heitot ovat kaikki toisistaan riippumattomia. Olkoon Y tehtävien satunnainen lukumäärä näin laadittavassa tehtäväsarjassa ja Z kokonaisaika, joka tehtäväsarjan laatimiseen kuluu. Oletetaan, että kolikon heittämiseen kuluva aika on olemattoman vähäinen.

   (a) Kirjoita satunnaismuuttujalle Z lauseke satunnaismuuttujien Y ja X_i, $i \geq 1$, avulla.

   (b) Määritä $E[Z|Y]$ ja $\text{var}[Z|Y]$.

   (c) Määritä $E[Z]$ ja $\text{var}[Z]$.

   Ratkaisu:

   (a) $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$.

   (b) $E[Z|Y] = Y$, sillä

$$
\begin{aligned}
E[Z|Y=y] &= \sum_{i=1}^{y} E[X_i|Y=y] \qquad \text{(lineaarisuus)} \\
&= \sum_{i=1}^{y} E[X_i] \qquad (X_i \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{ehdollistaminen ei vaikuta odotusarvoon}) \\
&= \sum_{i=1}^{y} E[X_1] \qquad (\text{kaikilla sama jakauma } X_i \overset{d}{=} X_1 \sim \text{Exp}(1)) \\
&= E[X_1]y = y,
\end{aligned}
$$

   missä viimeisessä kohdassa laskettiin (tai muistettiin ulkoa) eksponenttijakauman odotusarvo

$$
E[X_1] = \int_0^\infty x e^{-x} dx = \Gamma(2) = 1! = 1.
$$

   Myös $\text{var}[Z|Y] = Y$, sillä

$$
\begin{aligned}
\text{var}[Z|Y=y] &= \text{var}\Big[\sum_{i=1}^{y} X_i \Big| Y=y\Big] \\
&= \sum_{i=1}^{y} \text{var}[X_i|Y=y] \qquad (X_i, Y \perp\!\!\!\perp, \text{ varianssin summakaava}) \\
&= \sum_{i=1}^{y} \text{var}[X_i] \qquad (X_i \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \text{ehdollistaminen ei vaikuta}) \\
&= \sum_{i=1}^{y} \text{var}[X_1] \qquad (\text{kaikilla sama jakauma } X_i \overset{d}{=} X_1 \sim \text{Exp}(1)) \\
&= \text{var}[X_1]y = y,
\end{aligned}
$$

   missä viimeisessä kohdassa laskettiin (tai muistettiin ulkoa) eksponenttijakauman varianssi

$$
\text{var}[X_1] = E(X_1^2) - (EX_1)^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx - 1^2 = \Gamma(3) - 1 = 2! - 1 = 1.
$$

Vaihtoehto 1: Oleellisesti samat laskut voidaan tehdä myös ehdollistamalla suoraan satunnaismuuttujalla Y tapahtumien $\{Y = y\}$ sijaan.

Vaihtoehto 2: Muistetaan, että eksponenttijakautuneiden satunnaismuuttujien summa noudattaa gamma-jakaumaa. Siis

$$Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i \sim \text{Gamma}(Y, 1).$$

Tämän jälkeen riittää muistaa (tai laskea) gamma-jakauman odotusarvo ja varianssi

$$E[Z|Y] = Y, \qquad \text{var}[Z|Y] = Y.$$

(c) Nyt $E[Z]$ ja $\text{var}[Z]$ saadaan kaavoista

$$E[Z] = E[E[Z|Y]] = E[Y]$$

ja

$$\text{var}(Z) = E\text{var}[Z|Y] + \text{var}E[Z|Y] = EY + \text{var}Y.$$

On vielä määritettävä EY ja $\text{var}Y$. Havaitaan, että $Y = 1 + U$, missä U on heitettyjen klaavojen lukumäärä ennen ensimmäistä kruunaa. Tämä noudattaa jakaumaa $U \sim \text{Geom}(p)$ (ts. pätee $P(U = i) = (1 - p)^i p$ kaikilla $i = 0, 1, 2, \ldots$), missä $p = \frac{1}{2}$, jolle tunnetaan (tai voidaan laskea)

$$EU = \frac{1 - p}{p} = 1, \qquad \text{var}U = \frac{1 - p}{p^2} = 2.$$

Siis

$$EY = E(1 + U) = 1 + EU = 1 + 1 = 2, \qquad \text{var}Y = \text{var}(1 + U) = \text{var}1 + \text{var}U = 0 + 2 = 2$$

ja vihdoin

$$EZ = EY = 2, \qquad \text{var}Z = EY + \text{var}Y = 2 + 2 = 4.$$

*

4. Olkoot $X \sim N(0, \sigma_X^2)$ ja $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$, missä $X \perp\!\!\!\perp Y$. Merkitään $Z = X + Y$.

(a) Määritä sellainen vakio $a \in \mathbb{R}$ ja sellainen satunnaismuuttujien X ja Y lineaarikombinaatio V, että $X = aZ + V$ ja $Z \perp\!\!\!\perp V$.

(b) Määritä ehdollinen jakauma $X \mid (Z = z)$.

Ratkaisu:

(a) Oletuksista $X \sim N(0, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$ ja $X \perp\!\!\!\perp Y$ seuraa, että satunnaisvektori $(X, Y) \sim N((0, 0), \text{diag}(\sigma_X^2, \sigma_Y^2))$ noudattaa multinormaalijakaumaa. Siis myös sen lineaarimuunnos

$$\begin{pmatrix} Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + Y \\ bX + cY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

noudattaa multinormaalijakaumaa. Tällöin $Z \perp\!\!\!\perp V$ jos ja vain jos $\text{cov}(Z, V) = 0$. Kovarianssin bilineaarisuudesta ja riippumattomien muuttujien X, Y korreloimattomuudesta seuraa, että

$$\text{cov}(Z, V) = \text{cov}(X + Y, bX + cY) = b\sigma_X^2 + c\sigma_Y^2.$$

Toisaalta ehto $X = aZ + V$ tarkoittaa, että

$$X = a(X + Y) + (bX + cY) = (a + b)X + (a + c)Y.$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, on oltava $a + b = 1$ ja $a + c = 0$, siis $c = -a$, $b = 1 - a$ ja viimein

$$0 = b\sigma_X^2 + c\sigma_Y^2 = (1-a)\sigma_X^2 - a\sigma_Y^2 = \sigma_X^2 - a(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2),$$

josta ratkaisemalla

$$a = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}, \qquad V = bX + cY = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} X - \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} Y.$$

(b) Edellisestä kohdasta saadaan esitys $X = aZ + V$, missä $V \perp\!\!\!\perp Z$. Tässä

$$V = bX + cY$$

on multinormaalin satunnaisvektorin lineaarimuuttonnoksena normaalijakautunut,

$$EV = bEX + cEY = 0,$$

ja

$$\begin{aligned}\mathrm{var}V = b^2\mathrm{var}X + c^2\mathrm{var}Y &= \Big(\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big)^2\sigma_X^2 + \Big(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big)^2\sigma_Y^2 \\ &= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^2}(\sigma_Y^2 + \sigma_X^2) = \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}.\end{aligned}$$

Siis $V \sim N(0, \sigma_X^2\sigma_Y^2/(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2))$.
Riippumattomuudesta $V \perp\!\!\!\perp Z$ seuraa, että ehdollistaminen ehdolla $Z = z$ ei vaikuta satunnaismuuttujan V jakaumaan. Siis

$$X|(Z = z) = (aZ + V)|(Z = z) \sim \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} z + N\Big(0, \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big) = N\Big(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} z, \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big).$$

Vaihtoehto: Määritellään jakauma tiheysfunktion ja Bayesin kaavan avulla:

$$f_{X|Z}(x|z) = \frac{f_{X,Z}(x,z)}{f_Z(z)} = \frac{f_X(x)}{f_Z(z)} f_{Z|X}(z|x).$$

Koska $X \sim N(0, \sigma_X^2)$, niin

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_X^2}\Big),$$

ja koska $X \perp\!\!\!\perp Y$, niin $Z|(X = x) = (X + Y)|(X = x) = x + Y \sim N(x, \sigma_Y^2)$, joten

$$f_{Z|X}(z|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{(z-x)^2}{\sigma_Y^2}\Big).$$

Sijoittamalla (ja unohtamalla vain z:sta riippuvat vakiokertoimet) saadaan

$$\begin{aligned}f_{X|Z}(x|z) \propto f_X(x) f_{Z|X}(z|x) &\propto \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big[\frac{x^2}{\sigma_X^2} + \frac{(x-z)^2}{\sigma_Y^2}\Big]\Big) \\ &\propto \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big[\big(\frac{1}{\sigma_X^2} + \frac{1}{\sigma_Y^2}\big)x^2 - \frac{2xz}{\sigma_Y^2}\Big]\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\Big[x^2 - 2xz\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big]\Big) \\ &\propto \exp\Big(-\frac{1}{2}\frac{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2}\Big[x - \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} z\Big]^2\Big).\end{aligned}$$

Tämä on (vakiokerrointa vaille) jakauman $N\Big(\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} z, \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\Big)$ tiheysfunktio. Siis $X|(Z = z)$ noudattaa tätä jakaumaa.