

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Matemaattisen analyysin kurssi  
Kurssikoe 1, 30.10.2012

1. Osoita funktio  $f : [0, \infty[ \rightarrow ]1, 2]$ ,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x+1},$$

bijektioksi ja määritä sen käänteisbijektion lauseke.

2. (a) Todista induktiolla, että seuraava kaava pätee kaavassa mainitulle  $n$ :n termin summalle:

$$\frac{1}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

(b) Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{1+x^8} - 1}{x^8} \right)$ .

3. Funktiosta  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiedetään, että

(1)  $f(x) = |x + a|$ , kun  $x \leq 3$

(2)  $x - 1 < f(x) \leq \sqrt{x^2 - 5}$ , kun  $x > 3$ .

Millä vakion  $a$  arvoilla  $f$  on jatkuva kohdassa  $x = 3$ ?

4. Millä  $x$ :n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{3x}{x+1} \right)^k$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa?