

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Kurssikoe 1, 29.10.2015

1. Funktio $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ toteuttaa ehdot

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x) = ax, \text{ kun } x \geq 1, \text{ ja} \\ (2) \quad & f(x) = x + 1, \text{ kun } x < 1. \end{aligned}$$

Tutki, millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvolla f on jatkuva bijektio. Määritä myös f :n käänteisbijektion lauseke.

2. Laske raja-arvot $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ja $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, kun tiedetään, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee arvio

$$\frac{x^4 + 1}{3x^4 + 2} \leq f(x) \leq \frac{x^4 + x^2 + 1}{3x^4 + 2} -$$

Onko f välttämättä jatkuva jossain pisteessä?

3. Millä x :n arvoilla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^k$$

suppenee ja mikä on tällöin sen summa?

4. Osoita sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 5}{5^k + 1}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^5}{k^7 + 2k + 1}$$

suppeneviksi.