Tilastollinen päättely, syksy 2013 – kevät 2014
2. kurssikoe 24. 2. 2014

Huom. Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei omia taulukoita!

1. Tilastollinen malli muodostuu riippumattomista satunnaismuuttujista $Y_1, \ldots, Y_n$, jotka noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on
$$f(y; \lambda) = 2\lambda y \exp(-\lambda y^2), \qquad y > 0,$$
ja jossa $\lambda > 0$. Muodosta mallin uskottavuusfunktio ja etsi parametrille λ yksiulotteinen tyhjentävä tunnusluku.

2. a) Erään tilastollisen mallin parametria θ koskevaa hypoteesia $H_0\colon \theta = \theta_0$ päätetään testata käyttäen testisuuretta $t(\boldsymbol{y})$, jonka suurten arvojen tiedetään olevan kriittisiä H_0:lle. Esitä p-arvon eli havaitun merkitsevyystason määritelmä ja selitä, miksi pienen p-arvon voidaan tulkita todistavan H_0:aa vastaan.

   b) Mitä tarkoitetaan valintakorjauksella ja milloin se on tarpeen? Pari virkettä riittää.

3. Toistokokeessa (onnistumistodennäköisyys θ) suoritetaan 6 toistoa ja lasketaan onnistumisten lukumäärä k. Halutaan testata hypoteesia $H_0\colon \theta \leq 0.3$ vastaan hypoteesia $H_1\colon \theta > 0.3$. Testisuureena on k.

   a) Millaiset k:n arvot (pienet vai suuret) todistavat H_0:aa vastaan ja H_1:n puolesta?

   b) Toimitaan merkitsevyystasolla 0.10. Ilmoita vastaava kriittinen alue (eli mitkä k:n arvot johtavat H_0:n hylkäämiseen ja H_1:n hyväksymiseen). Perustele tarkasti.

   c) Laske testin voima pisteessä $\theta = 0.6$.

   Alla on taulukoitu binomijakauman $Bin(6, \theta)$ pistetodennäköisyydet eräillä θ:n arvoilla:

k	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.2$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.4$	$\theta = 0.5$
0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156
1	.3543	.3932	.3025	.1866	.0938
2	.0984	.2458	.3241	.3110	.2344
3	.0146	.0819	.1852	.2765	.3125
4	.0012	.0154	.0595	.1382	.2344
5	.0001	.0015	.0102	.0369	.0938
6	.0000	.0001	.0007	.0041	.0156

4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n \sim P(\mu)$ $\perp\!\!\!\perp$ ja olkoon $\hat{\mu} = \overline{Y}$ suurimman uskottavuuden estimaattori.

   a) Mitä normaalijakaumaa $\hat{\mu}$ approksimatiivisesti noudattaa, kun n on suuri?

   b) Havaintoja on $n = 50$ ja niiden keskiarvo on $\overline{y} = 15$. Muodosta Waldin testiin (eli yo. normaaliapproksimaatioon) perustuva approksimatiivinen 95 %:n luottamusväli μ:lle.

Muistin tueksi:

Jakauman $P(\mu)$ pistetodennäköisyydet ovat $f(y; \mu) = e^{-\mu}\mu^y/y!$, kun $y = 0, 1, 2, \ldots$, ja odotusarvo sekä varianssi kumpikin μ.

Jos $Z \sim N(0, 1)$, niin $P(Z \geq 1.96) \approx 0.025$.