Todennäköisyyslaskenta, 1. kurssikoe 22.10.2012 (korvaava koe), ratkaisuja

1. Edessäsi on kaksi identtistä laatikkoa. Toinen niistä sisältää 10 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–10 ja toinen sisältää 25 palloa, jotka on numeroitu luvuilla 1–25. Valitset laatikoista satunnaisesti yhden ja sen jälkeen poimit valitusta laatikosta satunnaisesti yhden pallon.

a) Millä todennäköisyydellä poimit pallon, jonka numero on seitsemän?

b) Millä todennäköisyydellä valitsemassasi laatikossa oli alunperin 25 palloa, jos poimimasi pallon numero on seitsemän?

Ratkaisu. Olkoon

$$\begin{aligned} A &= \text{“Valitussa laatikossa on 25 palloa.”} \\ B &= \text{“Poimitun pallon numero on 7.”} \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) = P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^c)\, P(A^c) \\ &= \frac{1}{25}\frac{1}{2} + \frac{1}{10}\frac{1}{2} = \frac{7}{100}. \end{aligned}$$

b)

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{25}\frac{1}{2}}{\frac{7}{100}} = \frac{2}{7}.$$

2. Jatkuvasti jakautuneen satunnaismuuttujan $X > 0$ tiheysfunktio on

$$f(x) = k\,x^2, \quad \text{kun } 0 < x < 1$$

(ja nolla muuten).

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske jakauman kertymäfunktio.

c) Laske todennäköisyys $P(\frac{1}{X} < 2)$.

Ratkaisu. a) Tiheysfunktion integraalin reaaliakselin yli on oltava yksi, joten

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = k \bigg/_{0}^{1} \frac{1}{3}\,x^3 = k\frac{1}{3},$$

joten $k = 3$.

b) Jos $0 \le x < 1$, niin

$$F(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^x 3\,u^2\,\mathrm{d}u = \bigg/_{0}^{x} u^3 = x^3,$$

muuten $F(x)$ on joko nolla tai yksi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0, \\ x^3, & \text{jos } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{jos } x \ge 1. \end{cases}$$

c) Koska $X > 0$, niin

$$\frac{1}{X} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad X > \frac{1}{2}.$$

Siksi

$$P\left(\frac{1}{X} < 2\right) = P(X > \frac{1}{2}) = F(1) - F(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

3. Riippumattomilla satunnaismuuttujilla X ja Z on seuraavat jakaumat. X saa arvon yksi todennäköisyydellä $\frac{1}{2}$ ja muuten arvon nolla. Satunnaismuuttujalla Z on normaalijakauma odotusarvolla $\frac{1}{2}$ ja varianssilla 4. Määrittelemme, että $Y = X + Z$.

a) Laske EY ja EY^2.

b) Laske $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Ratkaisu. a)

$$EY = E(X + Z) = EX + EZ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Toinen momentti voidaan laskea kaavalla

$$EY^2 = \operatorname{var} Y + (EY)^2,$$

jossa riippumattomuuden nojalla

$$\operatorname{var} Y = \operatorname{var}(X + Z) = \operatorname{var} X + \operatorname{var} Z = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}) + 4 = 4\frac{1}{4},$$

joten

$$EY^2 = 4\frac{1}{4} + 1 = 5\frac{1}{4}.$$

Tämän odotusarvon voi yhtä hyvin laskea lähtemällä liikkeelle kaavasta

$$EY^2 = E(X + Z)^2 = E(X^2 + 2\,XZ + Z^2)$$

b) Mikäli kovarianssin bilineaarisuus on tuttu ominaisuus, niin b-kohta ratkeaa laskulla

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, X + Z) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{cov}(X, Z) = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Muussa tapauksessa voidaan esim. lähteä liikkeelle määritelmästä,

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E[(X - EX)(Y - EY)] = E[(X - \frac{1}{2})(Y - 1)] \\ &= E(XY - X - \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}) = E(X^2) + E(XZ) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Koska $X \perp\!\!\!\perp Z$, niin $E(XZ) = (EX)(EZ) = \frac{1}{4}$. Lisäksi

$$EX^2 = 0^2\,\frac{1}{2} + 1^2\,\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

joten

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{4}.$$

Kovarianssin voi laskea myös lähtemällä liikkeelle jommasta kummasta seuraavista kaavoista:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X, Y) &= E(XY) - (EX)(EY) \\ \operatorname{cov}(X, Y) &= \frac{1}{2}(\operatorname{var}(X + Y) - \operatorname{var}(X) - \operatorname{var}(Y)).\end{aligned}$$

4. Olkoon Z jatkuvasti jakautunut satunnaismuuttuja, jolle tunnetaan kertymäfunktio F_Z, tiheysfunktio f_Z, odotusarvo EZ, varianssi $\operatorname{var}(Z)$, kvantiilifunktio q_Z sekä momenttiemäfunktio M_Z. Oletamme, että $f_Z(z) > 0$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$. Satunnaismuuttuja X määritellään kaavalla $X = 2 - 3\,Z$.

Esitä satunnaismuuttujan X kertymäfunktio, tiheysfunktio, odotusarvo, varianssi, kvantiilifunktio sekä momenttiemäfunktio käyttämällä hyväksi satunnaismuuttujalle Z tunnettuja tuloksia.

Ratkaisu. X:n kertymäfunktion arvo pisteessä $x \in \mathbb{R}$ on

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = P(2 - 3\,Z \le x) = P(Z \ge \frac{2}{3} - \frac{x}{3}) \\ &= 1 - F_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}). \end{aligned}$$

Tiheysfunktio saadaan kertymäfunktion derivaattana,

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{3}\, f_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}), \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Odotusarvo on lineaarisuuden nojalla

$$EX = E(2 - 3\,Z) = 2 - 3\,EZ.$$

Varianssi saadaan joko palauttamalla mieleen lineaarikombinaation varianssin kaava, tai yksinkertaisella laskulla: koska

$$X - EX = 2 - 3\,Z - (2 - 3\,EZ) = -3(Z - EZ),$$

on

$$\operatorname{var} X = E[(X - EX)^2] = E\{[(-3)(Z - EZ)]^2\} = (-3)^2 \operatorname{var} Z = 9 \operatorname{var} Z.$$

Kvantiilifunktion arvo pisteessä $0 < u < 1$ eli $q_X(u)$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$\begin{aligned} & F_X(x) = u, \qquad 0 < u < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 1 - F_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}) = u \\ \Leftrightarrow \quad & F_Z(\frac{2}{3} - \frac{x}{3}) = 1 - u \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{2}{3} - \frac{x}{3} = q_Z(1 - u) \\ \Leftrightarrow \quad & x = 2 - 3\,q_Z(1 - u), \end{aligned}$$

joten

$$q_X(u) = 2 - 3\,q_Z(1 - u), \qquad 0 < u < 1.$$

Momenttiemäfunktio on määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\exp(tX) = E\exp(t(2 - 3\,Z)) = E[\exp(2\,t)\exp(-3t\,Z)] \\ &= \mathrm{e}^{2\,t} M_Z(-3t), \qquad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$