Todennäköisyyslaskenta, 2. kurssikoe 17.12.2012

Sallitut apuvälineet: MAOL-taulukot, kirjoitusvälineet, laskin sekä itse laadittu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = k\,x\,y, \qquad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske $P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } Y < X^2)$.

Ratkaisu. a) Vakio k ratkaistaan siitä tiedosta, että tiheysfunktion integraalin koko avaruuden yli pitää olla yksi. Tästä saadaan ehto

$$\begin{aligned}
1 &= \iint f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\int_0^1 \left(\int_0^x x\,y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= k\int_0^1 \left(x \Big/_{0}^{x} \frac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = k\int_0^1 \frac{1}{2}x^3\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{k}{2} \Big/_{0}^{1} \frac{1}{4}x^4 = \frac{k}{8},
\end{aligned}$$

joten $k = 8$.

b)

$$\begin{aligned}
P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } Y < X^2) &= \iint_{\{(x,y):0<x<\frac{1}{2},y<x^2\}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1/2} \left(\int_0^{\min(x,x^2)} 8\,xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= 8\int_0^{1/2} x \left(\int_0^{x^2} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 8\int_0^{1/2} x \Big/_{0}^{x^2} \frac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_0^{1/2} x^5\,\mathrm{d}x = 4 \Big/_{0}^{1/2} \frac{1}{6}x^6 = \frac{4}{6}\frac{1}{2^6} = \frac{1}{96}.
\end{aligned}$$

2. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa Exp(1) noudattavia satunnaismuuttujia. (Tämän jakauman tiheysfunktio on $f(z) = \mathrm{e}^{-z}$, kun $z > 0$.) Määritellään positiiviset satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = XY, \qquad V = X^2.$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u,v)$, satunnaismuuttujan V reunatiheysfunktio $f_V(v)$ sekä $f_{U|V}(u \mid v)$ eli satunnaismuuttujan U ehdollinen tiheysfunktio, kun $V = v$ (jossa $v > 0$).

Ratkaisu. Tapa, jossa yhteistiheys johdetaan muuttujanvaihtokaavalla.

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|,$$

jossa $f_{X,Y}(x,y) = f(x)\, f(y)$ ja jossa muuttujien (x,y) ja (u,v) välillä on bijektiivinen vastaavuus alueissa $x > 0, y > 0$ ja $u > 0, v > 0$

$$\begin{cases} u = xy \\ v = x^2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{v} \\ y = u/\sqrt{v} \end{cases}$$

Muuttujanvaihtoon tarvittava jacobiaani on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ \frac{1}{\sqrt{v}} & -\frac{1}{2} u v^{-3/2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2\,v},$$

Kun $u > 0$ ja $v > 0$, on

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u,v) &= f(\sqrt{v})\, f(\frac{u}{\sqrt{v}})\, \frac{1}{2v} \\ &= \frac{1}{2\,v} \exp\left(-\sqrt{v} - \frac{u}{\sqrt{v}} \right) \end{aligned}$$

ja $f_{U,V}(u,v) = 0$ muualla.

Satunnaismuuttujan V reunatiheyden saa yhteistiheydestä integroimalla pois muuttujan u. Kun $v > 0$, on

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_0^\infty \frac{1}{2\,v} \exp\left(-\sqrt{v} - \frac{u}{\sqrt{v}} \right) \mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{v}}}{2\,v} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{u}{\sqrt{v}}}\, \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{v}}}{2\,v} \Big/_{0}^{\infty} -\sqrt{v}\mathrm{e}^{-\frac{u}{\sqrt{v}}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{v}}}{2\,\sqrt{v}}. \end{aligned}$$

Muualla $f_V(v) = 0$.

Ehdollisen tiheyden lauseke saadaan selville jakolaskulla.

$$f_{U|V}(u \mid v) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)} = \frac{1}{\sqrt{v}} \exp\left(-\frac{u}{\sqrt{v}} \right), \qquad \text{kun } u > 0 \text{ ja } v > 0.$$

Toinen tapa, jossa ehdollinen jakauma $U \mid (V = v)$ päätellään suoraan annettujen kaavojen perusteella, reunajakauma lasketaan yksiulotteisen muuttujanvaihdon perusteella ja yhteisjakauma kertolaskulla.

Koska X ja Y ovat riippumattomia, niin ehdolla $X = x$ satunnaismuuttujan XY jakauma on sama kuin satunnaismuuttujan xY jakauma, joka taas on $\mathrm{Exp}(1/x)$. Koska $V = X^2$, niin edellisen perusteella ehdolla $V = v > 0$ satunnaismuuttujalla XY on sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla $\sqrt{v}\,Y \sim \mathrm{Exp}(1/\sqrt{v})$. Siis

$$f_{U|V}(u \mid v) = \frac{1}{\sqrt{v}}\, \mathrm{e}^{-u/\sqrt{v}}, \qquad \text{kun } u > 0 \text{ ja } v > 0.$$

Satunnaismuuttujan $V = X^2$ saadaan yksiulotteisella muuttujanvaihdolla $v = x^2$ eli $x = \sqrt{v}$, jossa $v > 0$ ja $x > 0$:

$$f_V(v) = f(x) \left| \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} \right| = \mathrm{e}^{-\sqrt{v}}\, \frac{1}{2\sqrt{v}}, \qquad \text{kun } v > 0.$$

Yhteistiheys saadaan lopuksi kertolaskulla,

$$f_{U,V}(u, v) = f_V(v)\, f_{U|V}(u \mid v) = \frac{1}{2\,v} \exp\left(-\sqrt{v} - \frac{u}{\sqrt{v}} \right) \qquad \text{kun } u > 0 \text{ ja } v > 0.$$

3. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X \mid Y \sim N(0, (Y^2)^2)$$
$$Y \sim \mathrm{U}(0, 1).$$

$N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2, ja $\mathrm{U}(a, b)$ on tasajakauma välillä (a, b).

a) Laske EX.

b) Laske $\operatorname{var} X$.

c) Kerro perustelun kera, onko satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma kaksiulotteinen normaalijakauma

Ratkaisu. a) Odotusarvo kannattaa laskea iteroituna odotusarvona:

$$EX = EE(X \mid Y) = E0 = 0.$$

b) Varianssin voi laskea esim. seuraavasti.

$$\begin{aligned}\operatorname{var} X &= E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) = EE(X^2 \mid Y) \\ &= E\left[\operatorname{var}(X \mid Y) + (E(X \mid Y))^2\right] = EY^4 = \int_0^1 y^4 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Toinen yksinkertainen laskutapa on seuraava.

$$\operatorname{var} X = E \operatorname{var}(X \mid Y) + \operatorname{var} E(X \mid Y) = E(Y^4) + \operatorname{var} 0 = E(Y^4) = \frac{1}{5}.$$

c) Yhteisjakauma ei ole kaksiulotteinen normaalijakauma. Tämän voi perustella esim. millä tahansa seuraavista huomioista

- jos yhteisjakauma olisi normaalijakauma, niin Y:n reunajakauman pitäisi olla normaalijakauma, jota se ei ole;
- kaksiulotteisen normaalijakauman tiheysfunktio on aidosti positiivinen koko tasossa, mutta annetun jakauman tiheysfunktio on nolla ellei $0 < y < 1$;
- kertolaskukaavalla saatava yhteisjakauman tiheysfunktion kaava ei ole oikeaa muotoa;
- kaksiulotteisessa normaalijakaumassa ehdollisen jakauman $X \mid (Y = y)$ jakauman varianssin tulisi olla riippumaton y:n arvosta, mitä se ei ole.

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ standardinormaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonaalinen vakiomatriisi (ts. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$.

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ kahtia siten, että $\mathbf{U} = (Y_1, \dots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista (jossa $1 \le k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \dots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään lopuksi satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mitkä ovat satunnaismuuttujien Z_1 ja Z_2 jakaumat?

Ratkaisu. a) Koska $\mathbf{Y}$ on satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ lineaarimuunnos, sillä on multinormaalijakauma, jonka parametrit ovat

$$\begin{aligned} E\mathbf{Y} &= E(\mathbf{Q}\,\mathbf{X}) = \mathbf{Q}\,E\mathbf{X} = \mathbf{Q}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}, \\ \operatorname{Cov}\mathbf{Y} &= \mathbf{Q}\,\operatorname{Cov}(\mathbf{X})\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\,\mathbf{I}\,\mathbf{Q}^T = \mathbf{I} \end{aligned}$$

Siis $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ ts. $\mathbf{Y}$:n komponentit ovat riippumattomia ja noudattavat standardinormaalijakaumaa.

b) a-kohdan perusteella $U_i \perp\!\!\!\perp V_j$ kaikilla i ja j, minkä takia $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{V}$. Z_1 on funktio satunnaisvektorista $\mathbf{U}$ ja Z_2 on funktio satunnaisvektorista $\mathbf{V}$, joten $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2$.

c) $Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U} = U_1^2 + \cdots + U_k^2$, jossa $\mathbf{U} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, joten $Z_1 \sim \chi^2_k$. Vastaavasti $Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}$, jossa $\mathbf{V} \sim N_{n-k}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$, joten $Z_2 \sim \chi^2_{n-k}$. (Vektorilla $\mathbf{V}$ on $n-k$ komponenttia, sillä vektorilla $\mathbf{U}$ on k komponenttia ja vektoreilla $\mathbf{U}$ ja $\mathbf{V}$ on yhteensä n komponenttia.)

- Toinen tapa perustella b-kohdassa vektorien riippumattomuus on todeta, että yhdistetyllä vektorilla $\mathbf{Y} = (\mathbf{U}, \mathbf{V})$ on normaalijakauma, ja

  $$\operatorname{cov}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathbf{0}$$

  (sillä $U_i \perp\!\!\!\perp V_j$ kaikilla i, j), joten $\mathbf{U} \perp\!\!\!\perp \mathbf{V}$.

- Sen sijaan on virheellistä väittää, että (todesta) tuloksesta $\operatorname{cov}(Z_1, Z_2) = 0$ seuraisi, että Z_1 ja Z_2 olisivat riippumattomia, sillä nyt vektorilla (Z_1, Z_2) ei ole multinormaalijakauma.