

Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Todennäköisyyslaskenta II

1. kurssikoe 23.10.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu. Ei taulukkokirjaa

1. Tavallista kuusisivuista noppaa heitetään viisi kertaa. Olkoon X niiden heittojen lukumäärä, joilla saadaan silmäluku 5 tai 6.
 - (a) Ilmoita satunnaismuuttujan X jakauma sekä kerro sen odotusarvo.
 - (b) Millä todennäköisyydellä $X = 3$ ehdolla, että ensimmäisellä heitolla saadaan 5?

2. Olkoon $Y \sim U(0, 1)$ ja määritellään $X = Y^3$.

- (a) Määää satunnaismuuttujan X kertymäfunktio F_X .
- (b) Määää satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f_X .
- (c) Laske $\mathbb{E}X$ ja $\text{var } X$.

3. Satunnaismuuttuja X noudattaa takajakaumaa välillä $(0, 2)$. Satunnaismuuttuja Y on eksponenttijakautunut odotusarvolla 2. Satunnaismuuttujat X ja Y ovat riippumattomia.

- (a) Laske $\mathbb{E}(X - 3Y)$
- (b) Laske $\text{var}(X + Y)$
- (c) Laske $\text{cov}(X, X + XY)$

4. (a) Satunnaismuuttujan X momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}e^{2t}$$

Määää $\mathbb{E}X$ ja $\mathbb{E}(X^2)$.

- (b) Oletetaan, että $Z \sim \text{Gam}(3, 2)$ ja $Y \sim \text{Gam}(5, 2)$ sekä Z ja Y ovat riippumattomia. Määää satunnaismuuttujan $Z + Y$ momenttiemäfunktio ja jakauma. Gammajakauman $\text{Gam}(\alpha, \lambda)$ momenttiemäfunktio on

$$M(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^\alpha, \quad (t < \lambda).$$