Vastaukset harjoitustehtäviin 1/2016. Osan vastauksista tuotti LaTexilla Heikk Korpela Ta3a kurssilta.

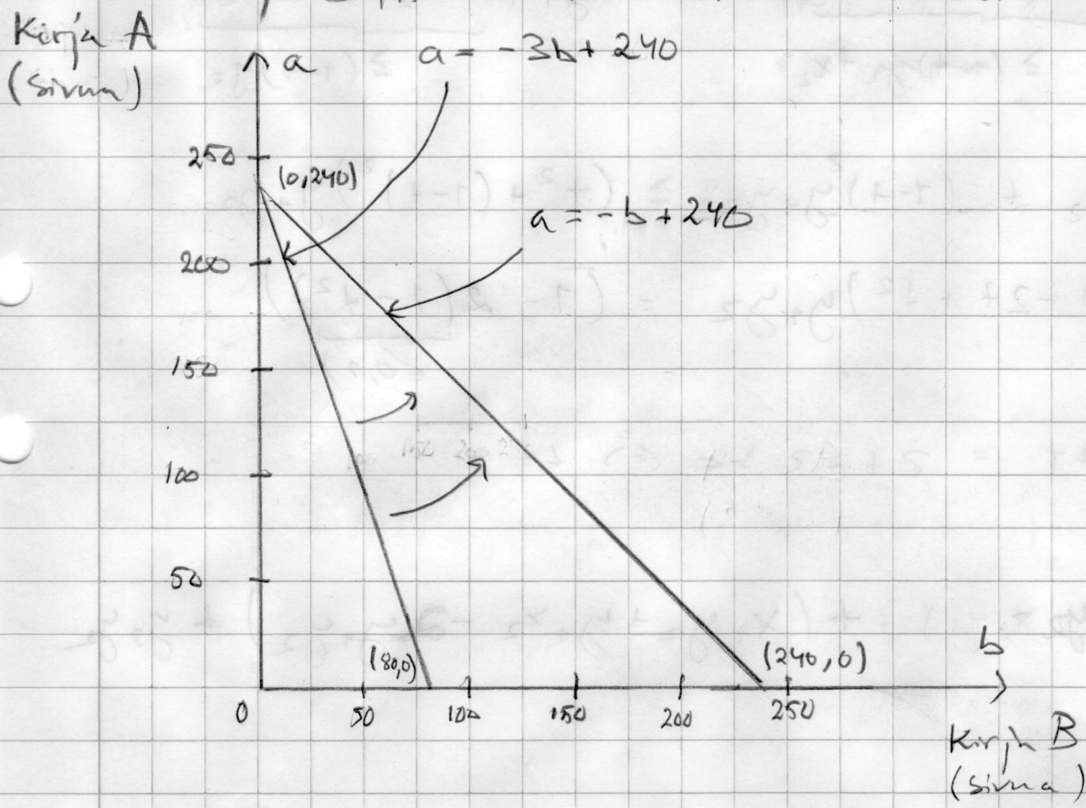
1.

a) Jos Kaisa lukee A kirjaa a sivua, kuluu siihen aikaa $\frac{a \text{ sivua}}{30 \text{ sivua}/h} = \frac{a}{30} h$

Vastaavasti b sivua kirjaa B hän lukee $\frac{b}{10}$:issä tunnissa

Käytössä aikaa 8h

$\Rightarrow \frac{a}{30} + \frac{b}{10} = 8 \Leftrightarrow a = -3b + 240$, joka on Kaisan aikarajoite. Sivujen lkm. aina positiivinen. Piirretään suoran kuvaaja $\mathbb{R}_+^2$:ssa



Kun Kaisa ostaa Suomennokseen suora muuttuu: $\frac{a}{30} + \frac{b}{30} = 8 \Leftrightarrow a = -b + 240$

$\Rightarrow$ Kuten kuvasta näkyy kirjan A lukumahdollisuudet pysyvät entisellään, mutta kirjan B lukemisen nopeutuminen

1.

b) Merkitään hyödykettä 1 x_1:llä ja hyödykettä 2 x_2:lla

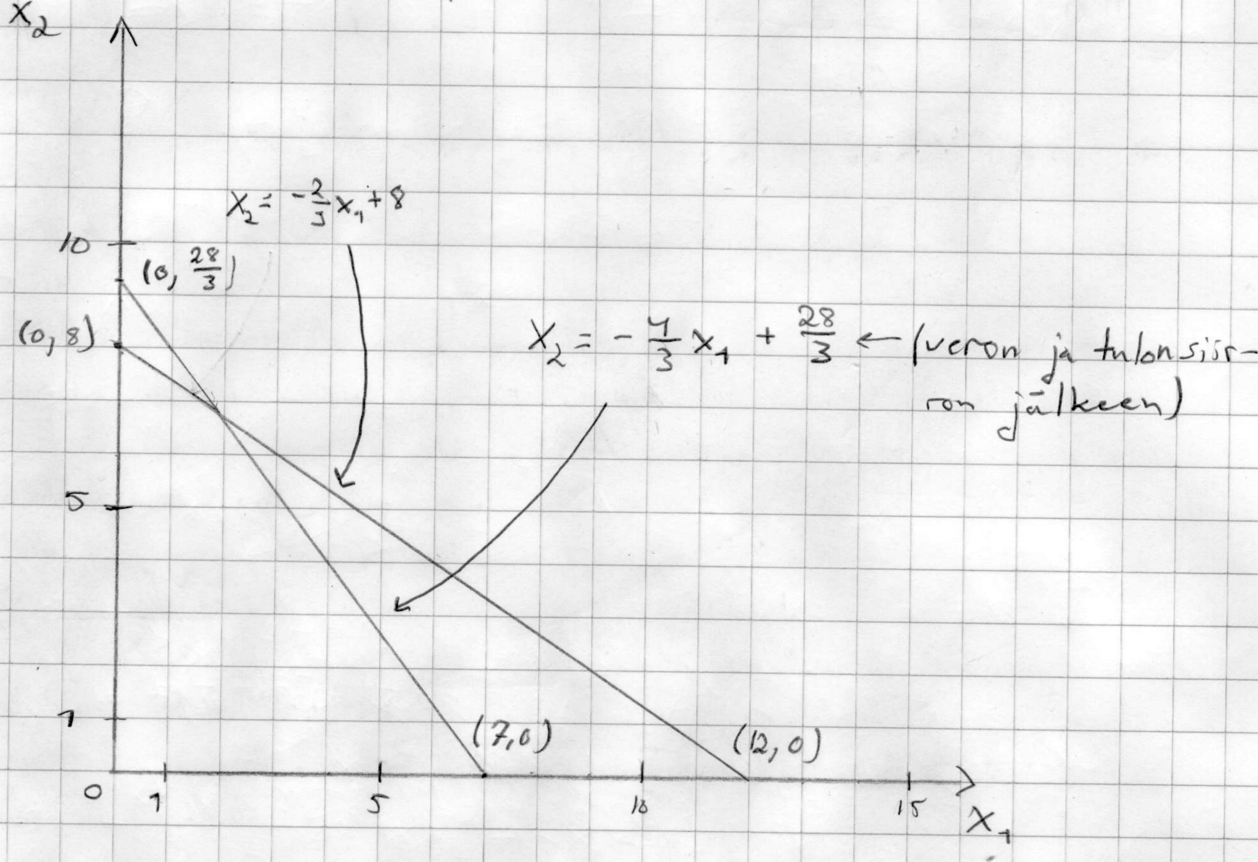
Kuluttaja käyttää hyödykkeen 1 ostoihin rahaa:

$p_1 \cdot x_1 = 2x_1$ ja hyödykkeen 2 ostoihin

$p_2 \cdot x_2 = 3x_2$. Yhteensä hän käyttää $m = 24$.

$\Rightarrow \ 2x_1 + 3x_2 = 24 \iff x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 8$

Piirretään rajoite (x_1, x_2)-koordinaatistoon:



Määrävero $t = 2$ hyödykkeelle 1 $\Rightarrow$ kuluttaja maksaa veroja yht. $t \cdot x_1 \Rightarrow$ Kuluttaja käyttää hyödykkeen 1 ostoihin yht. $p_1x_1 + tx_1 = (p_1 + t)\,x_1$.

Käytössä olevat tulot kasvavat tulonsiirrolla S.

1.

b) (jatkuu)

Käytetty rahamäärä = tulot

$\Leftrightarrow (p_1 + t)\, x_1 + p_2 x_2 = m + S$

$\Leftrightarrow (2+2)\, x_1 + 3x_2 = 24 + 4$

$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{4}{3} x_1 + \frac{28}{3}$ (kuvaaja piirretty edelliseen kuvaan)

(2.)

Merkitään:	Pelaajien ominaisuuksille pätee:
V = Veksi	Koko: $J_K < H_K < V_K$
H = Hanski	Nopeus: $V_N < J_N < H_N$
J = Jaska	Sosiaalisuus: $H_S < V_S < J_S$

Heikin preferensseille pätee, että $A > B \Leftrightarrow A_i > B_i$ vähintään kahdella ominaisuudella i.

a) Koska $V_K > H_K$ ja $V_S > H_S$ yllä oleva ehto täyttyy $\Rightarrow V > H \Rightarrow$ Veksi parempi kuin Hanski.

b). Koska $H_K > J_K$ ja $H_N > J_N$, $H > J$
$\Rightarrow$ Hanski parempi kuin Jaska

c) Koska $J_N > V_N$ ja $J_S > V_S$, $J > V$
$\Rightarrow$ Jaska parempi kuin Veksi

d) Väite: Heikin preferenssit eivät ole transitiiviset.

Todistus: Vastaoletus: Heikin preferenssit transitiiviset.
Nyt $\underset{(a)}{V > H}$ ja $\underset{(b)}{H > J} \Rightarrow$ Transitiivisuuden nojalla tulee päteä $V > J$. Kuitenkin c)-kohdan nojalla $J > V$, mikä on ristiriita $\Rightarrow$ vastaoletus epätosi. $\square$

3. Piirrä indifferenssikäyrät korille (x_1, x_2), kun x_1 on tavallinen hyödyke, ja x_2 on tavallinen hyödyke arvoilla $x_2 < \overline{x}_2$, neutraali hyödyke arvoilla $\overline{x}_2 \leq x_2 \leq \widehat{x}_2$ ja haitake arvoilla $x_2 > \widehat{x}_2$.

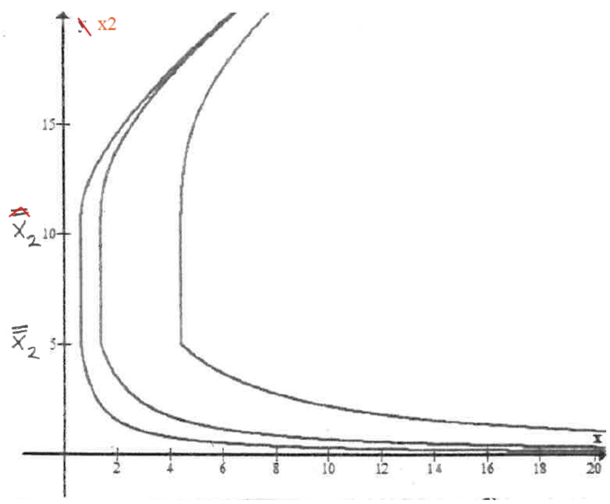
Olennaista kuvan piirtämisessä ovat seuraavat asiat:

1. (a) Kun $x_2 < \overline{x}_2$, molemmat hyödykkeet ovat tavallisia. Jos hyödykekorista otetaan pois jompaa kumpaa hyödykettä, kuluttaja pysyy indifferenttinä vanhan ja uuden korin välillä vain jos toista hyödykettä lisätään. Indifferenssikäyrän täytyy siis olla laskeva.

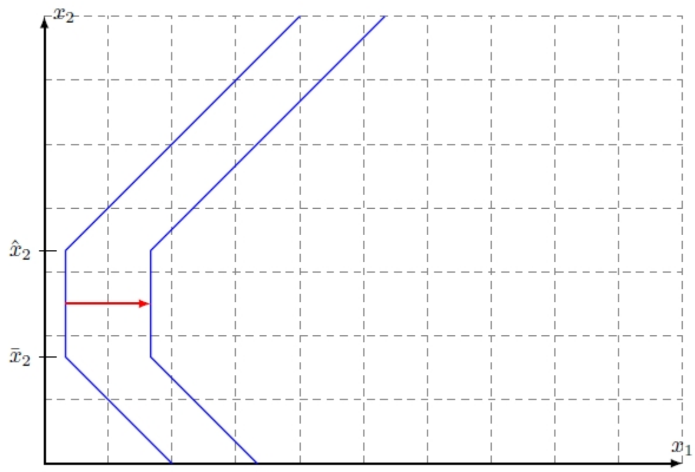
   (b) Kun $\overline{x}_2 \leq x_2 \leq \widehat{x}_2$, hyödyke 2 on neutraali. Hyödykkeen 2 lisääminen tai vähentäminen ei johda hyödyn muuttumiseen. Indifferenssikäyrä on x_2-akselin suuntainen.

   (c) Kun $x_2 > \widehat{x}_2$, hyödyke 2 on haitake. Jos haitaketta lisätään, kuluttajan täytyy saada lisää tavallista hyödykettä x_1, jotta hän olisi indifferentti kahden korin välillä. Indifferenssikäyrä on nouseva.

Kuviin on piirretty muutama tällaiseen tilanteeseen liittyvä indifferenssikäyrä
Kuviossa alla $\overline{x}_2 = 5$ ja $\widehat{x} = 10$.



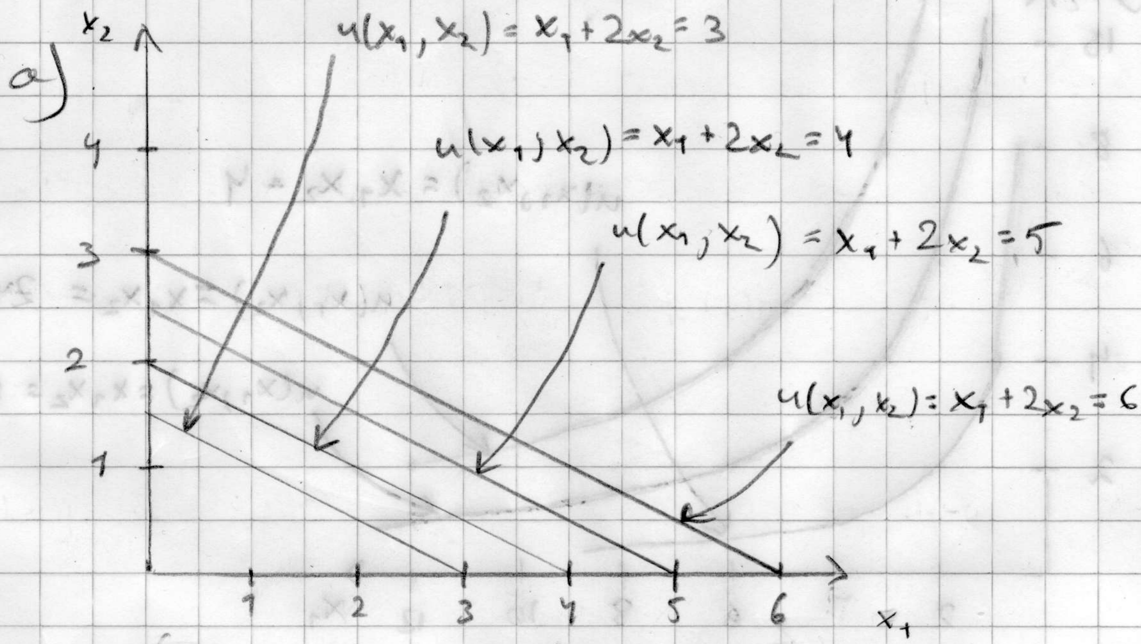
Toinen mahdollinen kuvio:



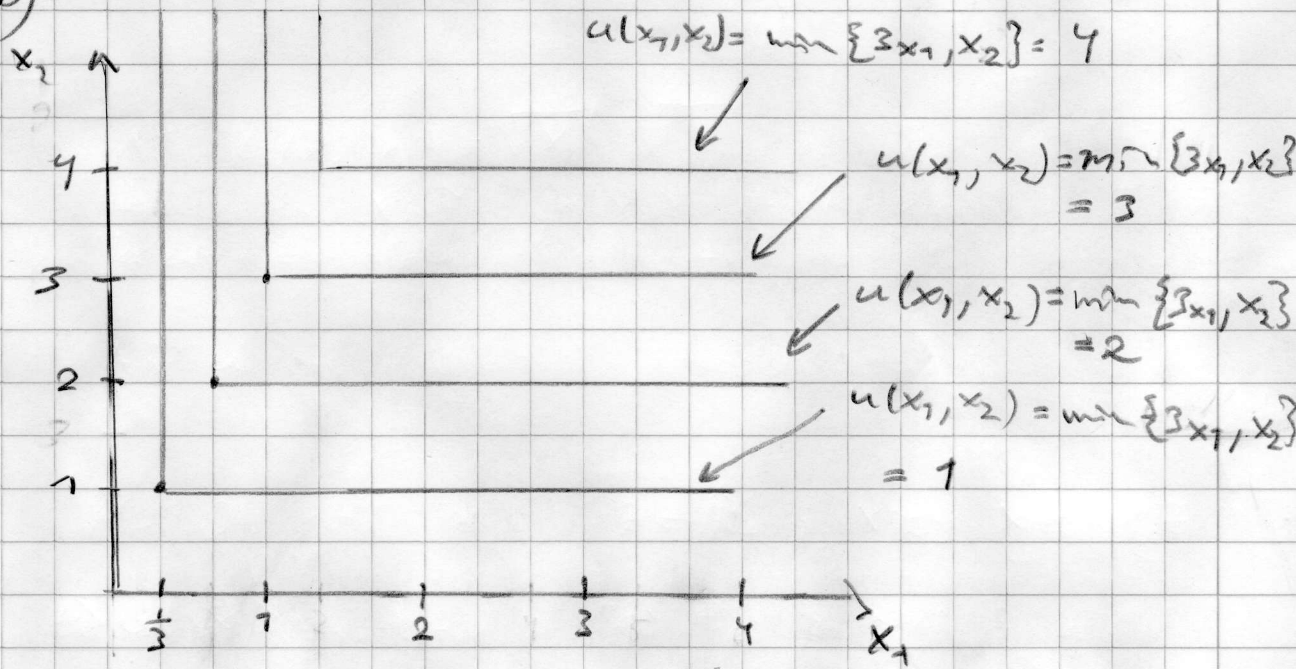
~~5~~ Tehtävä 4 2016

Täydelliset substituutit

a)

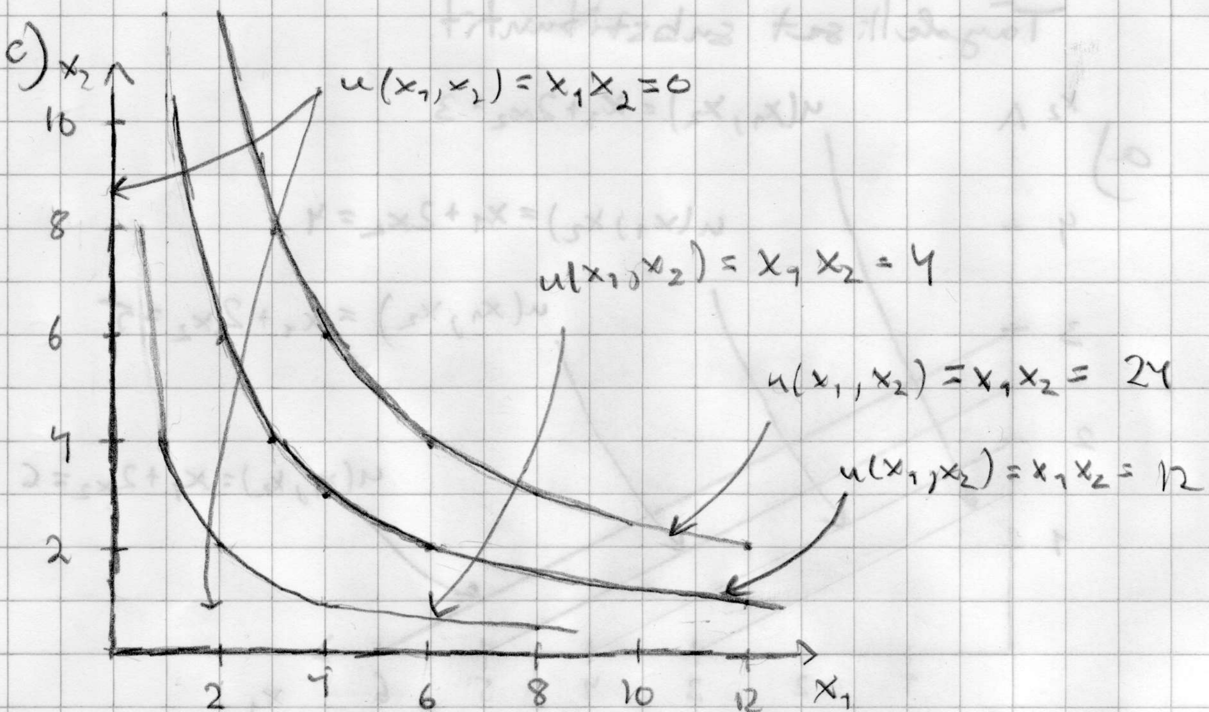


b) Komplementit

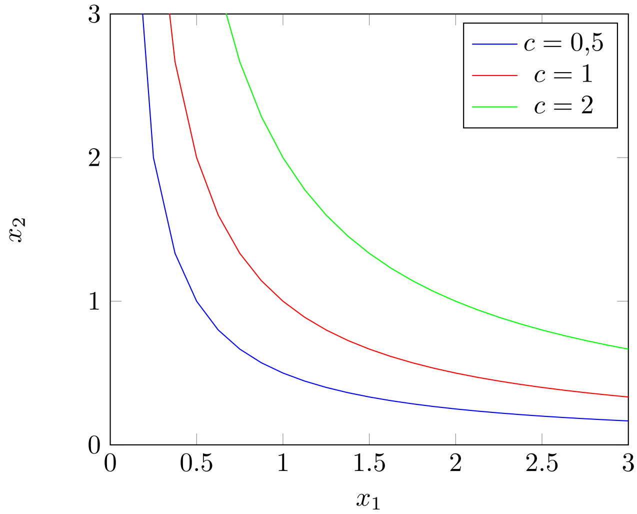


~~5.~~ Tehtävä 4 2016 jatk.

c)



Edellisen tehtävän kuva tietokoneella tehtynä



Tehtävä 5. Arttu pitää sekä pähkinöistä (hyödyke 1) että kirsikoista (hyödyke 2). Sellaisten hyödykekombinaatioiden joukko, jotka ovat Artun mielestä yhtä hyviä kuin kombinaatio $A = (1, 16)$, voidaan kirjoittaa $x_2 = 20 - 4\sqrt{x_1}$. Sellaisten hyödykekombinaatioiden joukko, jotka ovat Artun mielestä yhtä hyviä kuin kombinaatio $B = (36, 0)$, voidaan kirjoittaa $x_2 = 24 - 4\sqrt{x_1}$.

(a) Taulukoi ja piirrä (tehtävä vaatii melko tarkkaa kuvaa) indifferenssikäyrän I_A ja I_B pisteitä ja hahmottele nämä indifferenssikäyrät.

(b) Mikä on Artun indifferenssikäyrän IA kulmakerroin pisteessä $(9, 8)$? Entä pisteessä $(4, 12)$? Arvioi graafisesti.

(c) Minkä muotoinen on Artun hyötyfunktio? Tarkista matemaattisesti kohdan b tulokset.

(d) Olkoon pähkinöiden hinta $p_1 = 1$ ja kirsikoiden vastaavasti $p_2 = 2$. Olkoon Artun käytössä 24 euroa. Piirrä Artun budjettisuora yo. kuvaan. Ratkaise graafisesti, montako pähkinää ja kirsikkaa Artun on ostettava, jotta hänen hyötynsä olisi suurin mahdollinen?

Vastaus: 5.

(a) Taulukoidaan ensin joitain arvoja:

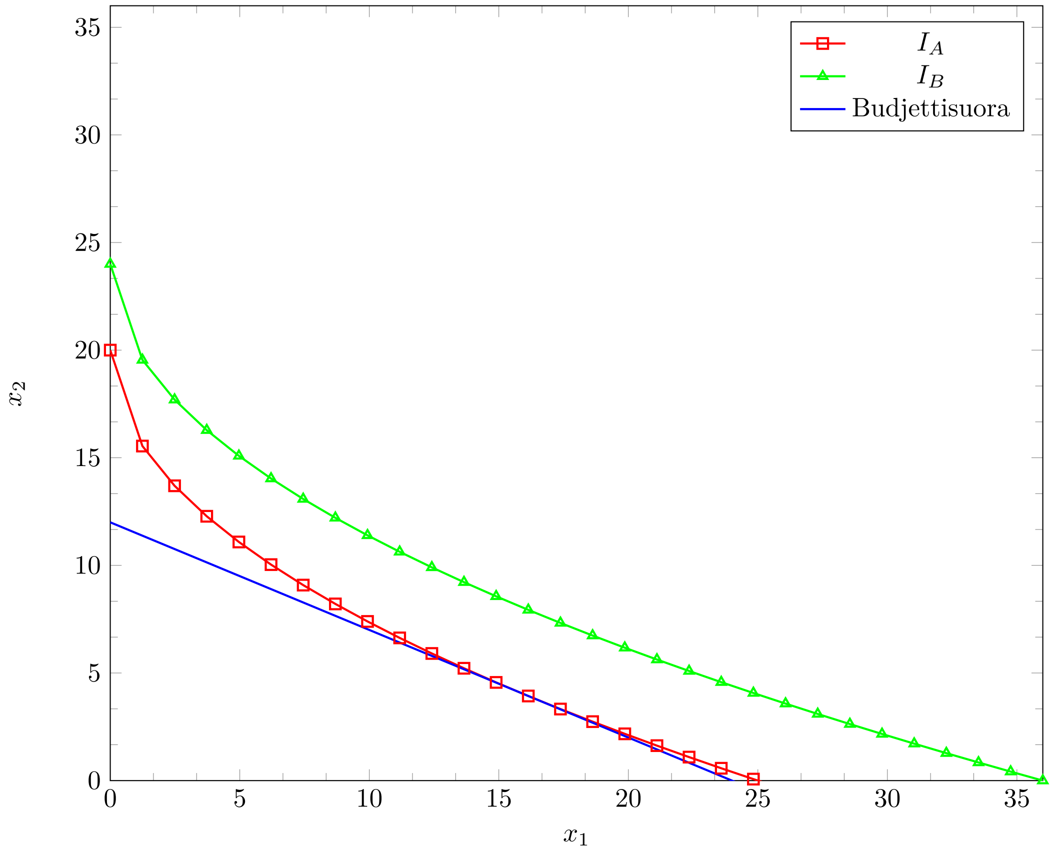
I_A:

x_1	x_2
0	20
1	16
2	$20 - 4\sqrt{2} \approx 20 - 4 \cdot 1{,}4 = 14{,}4$
3	$20 - 4\sqrt{3} \approx 20 - 4 \cdot 1{,}7 = 13{,}2$
4	12
5	$20 - 4\sqrt{5} \approx 20 - 4 \cdot 2{,}2 = 11{,}2$
8	$20 - 4\sqrt{8} \approx 20 - 4 \cdot 2{,}8 = 8{,}6$
9	8
10	$20 - 4\sqrt{10} \approx 20 - 4 \cdot 3{,}2 = 7{,}4$
16	4
25	0

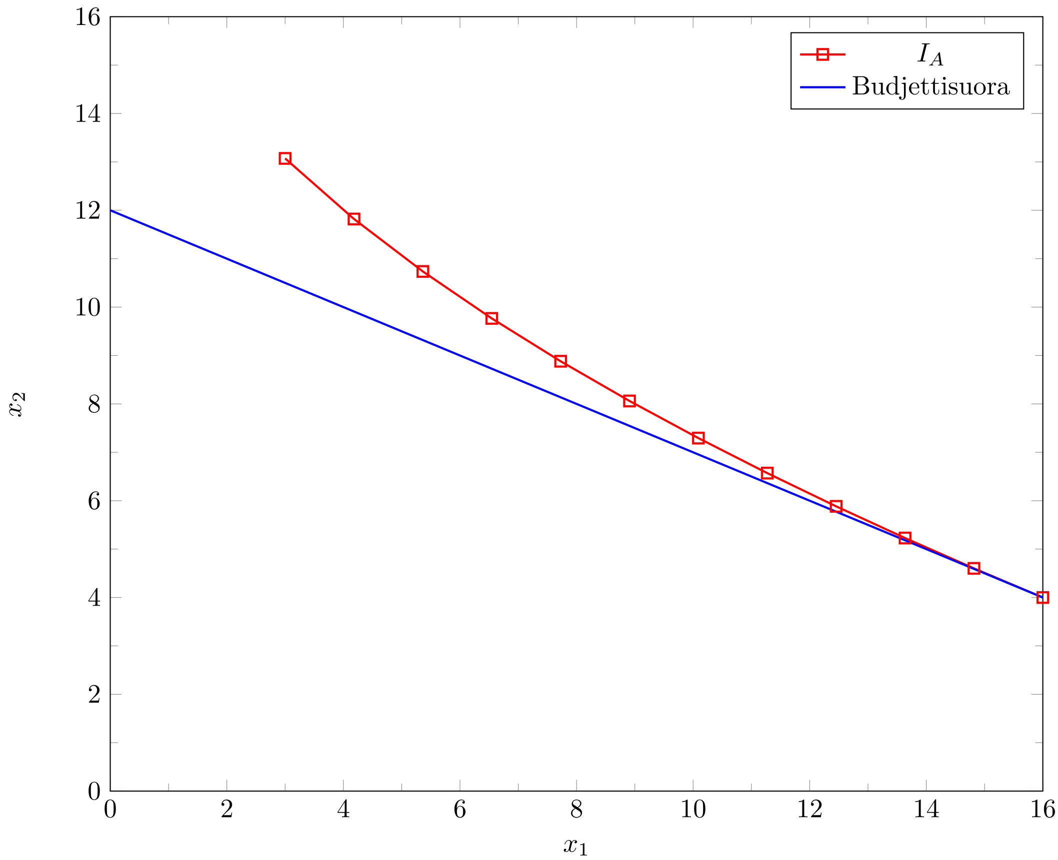
, I_B:

x_1	x_2
0	24
1	20
2	$24 - 4\sqrt{2} \approx 24 - 4 \cdot 1{,}4 = 18{,}4$
3	$24 - 4\sqrt{3} \approx 24 - 4 \cdot 1{,}7 = 17{,}8$
4	16
9	12
16	8
25	4
36	0

Piirretään sitten ensin molemmat indifferenssikäyrät ja budjettisuora samaan kuvaajaan:



Koska tästä on vaikea löytää vastauksia muihin kohtiin, hahmotellaan vielä I_A ja budjettisuora tarkemmin välillä $[3, 16]$:



(b) Käsivaralla piirretyn kuvaajan perusteella olisi voinut arvioida pisteen $(9, 8)$ kulmakertoimeksi n. $-4/5$ ja pisteen $(4, 12)$ kulmakertoimeksi n. -1.

(c) Jos indifferenssikäyrät hyödyllä c ovat muotoa $x_2 = c - 4\sqrt{x_1}$, niin hyötyfunktio on muotoa $u(x_1, x_2) = x_2 + 4\sqrt{x_1}$.

Rajasubstituutiosuhdetta laskiessa MU_2 on vakio 1, koska hyötyfunktiossa komponentti x_2 on lineaarinen. Saadaan $MRS(x_1, x_2) = (-MU_1/MU_2)(x_1, x_2) = -MU_1(x_1, x_2) = -\partial_1 u(x_1, x_2) = -4 \cdot 1/2\sqrt{x_1} = -2\frac{1}{\sqrt{x_1}}$.

Siis täsmälliset arvot b-kohtaan ovat $MRS(9, 9) = -2 \cdot 1/\sqrt{9} = -\frac{2}{3}$, $MRS(4, 12) = -2 \cdot 1/\sqrt{4} = -1$.

(d) Budjettisuoran yhtälö on $x_1 + 2x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = 12 - \frac{1}{2}x_1$. Tiedetään, että hyöty maksimoituu, kun budjettisuora tangeeraa indifferenssikäyrää. Tämä piste on kuvaajan perusteella on piste $(16, 4)$. Tässä pisteessä todella indifferenssikäyrän tangentin kulmakerroin eli $MRS(16, 4) = -2 \cdot 1/\sqrt{16} = -\frac{1}{2}$ on sama kuin budjettisuoran kulmakerroin $-\frac{1}{2}$.

Tehtävä 6. Laske seuraavien yleisten hyötyfunktioiden rajahyödyt ja rajasubstituutiosuhteet.

$u(x_1, x_2)$	$MU_1(x_1, x_2)$	$MU_2(x_1, x2)$	$MRS(x_1, x_2)$
$2x_1 + 3x_2$			
$4x_1 + 6x_2$			
$ax_1 + bx_2$			
$2\sqrt{x_1} + x_2$			
$\ln x_1 + x_2$			
$v(x_1) + x_2$			
$x_1 x_2$			
x_1^a			
x_2^b			
$a \ln x_1 + b \ln x_2$			
$(x_1 + 1)(x_2 + 2)$			
$(x_1 + a)(x_2 + b)$			
$x_1^a + x_2^a$			

Vastaus: Vastaukset saadaan suoraviivaisesti derivoimalla: 6.

$u(x_1, x_2)$	$MU_1(x_1, x_2)$	$MU_2(x_1, x2)$	$MRS(x_1, x_2)$
	$\partial_1 u(x_1, x_2)$	$\partial_2 u(x_1, x2)$	$-\frac{MU_1}{MU_2}$
$2x_1 + 3x_2$	2	3	$-\frac{2}{3}$
$4x_1 + 6x_2$	4	6	$-\frac{2}{3}$
$ax_1 + bx_2$	a	b	$-\frac{a}{b}$
$2\sqrt{x_1} + x_2$	$\frac{1}{\sqrt{x_1}}$	1	$-\frac{1}{\sqrt{x_1}}$
$\ln x_1 + x_2$	$\frac{1}{x_1}$	1	$-\frac{1}{x_1}$
$v(x_1) + x_2$	$v'(x_1)$	1	$-v'(x_1)$
$x_1 x_2$	x_2	x_1	$-\frac{x_2}{x_1}$
$x_1^a x_2^b$	$x_2^b a x_1^{a-1}$	$x_1^a b x_2^{b-1}$	$-\frac{ax_2}{bx_1}$
$a \ln x_1 + b \ln x_2$	$\frac{a}{x_1}$	$\frac{b}{x_2}$	$-\frac{ax_2}{bx_1}$
$(x_1 + 1)(x_2 + 2)$	$(x_2 + 2)$	$(x_1 + 1)$	$-\frac{x_2+2}{x_1+1}$
$(x_1 + a)(x_2 + b)$	$(x_2 + b)$	$(x_1 + a)$	$-\frac{x_2+b}{x_1+a}$
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Ks. seuraava sivu

Huomautus. Huomataan, että osassa tapauksista osittaisderivaattoja tai niiden suhdetta ei välttämättä ole määritelty reaalilukuna joissain yksittäisissä pisteissä, esimerkiksi pisteissä $x_1 = 0$ tai

$x_2 = 0$. Tällöin voidaan esimerkiksi sopia, että ko. pisteessä rajahyöty tai -substituutiosuhde ei ole tällaisissa pisteissä määritelty.

6. Laske seuraavien yleisten hyötyfunktioiden rajahyödyt ja rajasubstituutiosuhteet.

$u(x_1, x_2)$	$MU_1(x_1, x_2)$	$MU_2(x_1, x_2)$	$MRS(x_1, x_2)$
$2x_1 + 3x_2$			
$4x_1 + 6x_2$			
$ax_1 + bx_2$			
$2\sqrt{x_1} + x_2$			
$\ln x_1 + x_2$			
$v(x_1) + x_2$			
$x_1 x_2$			
$x_1^a x_2^b$			
$a \ln x_1 + b \ln x_2$			
$(x_1 + 1)(x_2 + 2)$			
$(x_1 + a)(x_2 + b)$			
$x_1^a + x_2^a$	ax_1^{a-1}	ax_2^{a-1}	$-\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a-1}$