Todennäköisyyslaskenta, 2. kurssikoe 17.12.2012

Sallitut apuvälineet: MAOL-taulukot, kirjoitusvälineet, laskin sekä itse laadittu, A4-kokoinen lunttilappu.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = k\,x\,y, \qquad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla.

a) Ratkaise vakion k arvo.

b) Laske $P(0 < X < \frac{1}{2} \text{ ja } Y < X^2)$.

2. Olkoot X ja Y riippumattomia eksponenttijakaumaa Exp(1) noudattavia satunnaismuuttujia. (Tämän jakauman tiheysfunktio on $f(z) = \mathrm{e}^{-z}$, kun $z > 0$.) Määritellään positiiviset satunnaismuuttujat U ja V kaavoilla

$$U = XY, \qquad V = X^2.$$

Laske satunnaismuuttujien U ja V yhteistiheysfunktio $f_{U,V}(u,v)$, satunnaismuuttujan V reunatiheysfunktio $f_V(v)$ sekä $f_{U|V}(u \mid v)$ eli satunnaismuuttujan U ehdollinen tiheysfunktio, kun $V = v$ (jossa $v > 0$).

3. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$X \mid Y \sim N(0, (Y^2)^2)$$
$$Y \sim \mathrm{U}(0,1).$$

$N(\mu, \sigma^2)$ on normaalijakauma odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2, ja $\mathrm{U}(a,b)$ on tasajakauma välillä (a,b).

a) Laske EX.

b) Laske $\operatorname{var} X$.

c) Kerro perustelun kera, onko satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma kaksiulotteinen normaalijakauma

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ standardinormaalijakauma $N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$. Olkoon $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonaalinen vakiomatriisi (ts. $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$). Määritellään $\mathbf{Y} = \mathbf{QX}$.

Jaetaan $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ kahtia siten, että $\mathbf{U} = (Y_1, \ldots, Y_k)$ koostuu sen k ensimmäisestä komponentista (jossa $1 \le k < n$) ja $\mathbf{V} = (Y_{k+1}, \ldots, Y_n)$ sen lopuista komponenteista. Määritellään lopuksi satunnaismuuttujat Z_1 ja Z_2 kaavoilla

$$Z_1 = \mathbf{U}^T\mathbf{U}, \qquad Z_2 = \mathbf{V}^T\mathbf{V}.$$

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Perustele, miksi Z_1 ja Z_2 ovat riippumattomia.

c) Mitkä ovat satunnaismuuttujien Z_1 ja Z_2 jakaumat?