Tilastollinen päättely

1. kurssikoe 11.12.2012

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet ja laskin.

1. Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\theta)$, jossa θ on tuntematon reaaliarvoinen parametri. Määrittele ja selitä seuraavat käsitteet:

   (a) Havaittu informaatio.

   (b) Estimaattorin tehokkuus.

2. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \begin{cases} \theta(1+y)^{-(1+\theta)}, & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{kun } y \leq 0 \end{cases}$$

   jossa $\theta > 0$. Hae parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$. Perustele ratkaisu huolellisesti.

3. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin gammajakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \theta^{-2} y \exp(-y/\theta), \quad y > 0,$$

   jossa θ on positiivinen parametri. Osoita, että mille tahansa parametrin θ harhattomalle estimaattorille T on voimassa

$$\mathrm{var}(T) \geq \theta^2/2n.$$

   Esitä parametrin θ momenttiestimaattori ja perustele miksi se on tai ei ole hyvä estimaattori tässä tapauksessa.

4. Erään elektronisen komponentin kestoaika noudattaa eksponenttijakaumaa odotusarvona μ. Tutkittaessa n komponenttia toisistaan riippumatta saatiin niiden kestoajoiksi $y_1, \ldots, y_n$ aikayksikköä. Johda huolellisesti perustellen suurimman uskottavuuden estimaatti todennäköisyydelle, että umpimähkään valitun komponentin kestoikä on vähintään y_0 aikayksikköä eli parametrille $\theta = g(\mu) = P(Y \geq y_0)$.

Muistin tueksi

- Jos satunnaismuuttuja Y noudattaa eksponenttijakaumaa parametrina λ (eli $Y \sim Exp(\lambda)$), niin sen tiheysfunktio on $f(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}$ ja kertymäfunktio on $F(y;\lambda) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$. Lisäksi $E(Y) = 1/\lambda$ ja $\mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

- Satunnaismuuttuja X noudattaa gammajakaumaa parametrein κ ja λ, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f_X(x;\kappa,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} e^{-\lambda y}, & \text{kun } x > 0, \\ \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

  Tällöin merkitään $X \sim G(\kappa,\lambda)$, jossa $\kappa > 0$ ja $\lambda > 0$. Gammajakauman odotusarvo on κ/λ ja varianssi κ/λ^2. Kun $X_1,\ldots,X_k \perp\!\!\!\perp$ ja $X_i \sim G(\kappa_i,\lambda)$, niin $\sum_{i=1}^k X_i \sim G(\sum_{i=1}^k \kappa_i, \lambda)$.

- Gamma-funktion $\Gamma(x)$ ominaisuuksia:

  (a)
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \;\; x > 0.$$

  (b)
$$\Gamma(n) = \prod_{i=1}^{n-1} i = (n-1)!, \;\; n = 1,2,3,\cdots.$$