Todennäköisyyslaskenta s-2010, 2. kurssikoe 20.12.2010

Kokeessa saa käyttää laskinta sekä MAOL-taulukoita. Tehtäväpaperin lopussa on joukko kaavoja, jotka saattavat olla hyödyllisiä.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x, y) = 3\,x, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla. Johda lauseke (a) X:n reunatiheysfunktiolle ja (b) Y:n reunatiheysfunktiolle, sekä ilmoita näiden lausekkeiden pätevyysalueet. (c) Laske odotusarvo $E(XY)$.

Ratkaisu **(a)** Kun $0 < x < 1$, on

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x 3\,x\,\mathrm{d}y = 3\,x^2. \end{aligned}$$

Muualla $f_X(x) = 0$.

(b) Kun $0 < y < 1$, on

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_y^1 3\,x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\,(1 - y^2). \end{aligned}$$

Muualla $f_Y(y) = 0$.

(c)

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy\,f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 3 \int_0^1 \mathrm{d}x\,x^2 \int_0^x y\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{2} \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Arvostelu: 2 pistettä kustakin kohdasta. Sekä a- että b-kohdassa on yhdentekevää, miten tiheysfunktiot määritellään yksittäisissä pisteissä (kuten pisteissä 0 ja 1); c-kohdassa tasointegraalin voi tietenkin laskea iteroituna integraalina myös toisessa järjestyksessä.

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X|Y &\sim \mathrm{Exp}(Y) \\ Y &\sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1), \end{aligned}$$

jossa $\alpha > 1$. (Tehtäväpaperin lopussa on selvitetty eksponenttijakauman ja gammajakauman ominaisuuksia.) Laske (a) EX ja (b) ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y|X}(y \mid x)$ (kun $x > 0$).

Ratkaisu **(a)** Odotusarvo kannattaa laskea iteroituna odotusarvona, ja tässä kannattaa hyödyntää tehtäväpaperin lopussa annettuja kaavoja.

$$EX = EE(X \mid Y) = E\frac{1}{Y} = \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{1}{\alpha-1}.$$

(b) Ehdollisen tiheyden voi selvittää ainakin kahdella eri tavalla. Kummassakin tavassa hyödynnetään tehtäväpaperin lopussa annettua gammajakauman tiheysfunktion kaavaa.

Tapa 1) Lasketaan ensin reunatiheys f_X ja sitten $f_{Y|X}$ jakolaskulla. Kun $x > 0$, on

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-y}\, y\, \mathrm{e}^{-yx}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+1-1}\, \mathrm{e}^{-(1+x)y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} \qquad \left(= \frac{\alpha}{(1+x)^{\alpha+1}} \right). \end{aligned}$$

Integraalin arvo saatiin laskettua pohtimalla, mikä on gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha+1, 1+x)$ normalisointivakio. Jakolaskulla saadaan johdettua lauseke

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{(1+x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\, y^{\alpha}\, \mathrm{e}^{-(1+x)y}, \qquad y > 0,$$

kun $x > 0$.

Tapa 2) Kun $x > 0$, niin muuttujan y funktiona

$$\begin{aligned} f_{Y|X}(y \mid x) &\propto f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)\, f_{X|Y}(x \mid y) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\, y^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-y}\, y\, \mathrm{e}^{-yx} \\ &\propto y^{\alpha+1-1}\, \mathrm{e}^{-(1+x)y}, \qquad y > 0. \end{aligned}$$

Tämä lauseke ymmärrettynä muuttujan y funktiona on verrannollinen gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha+1, 1+x)$ tiheysfunktioon, ja koska ehdollinen tiheysfunktio on tiheysfunktio (eli sen integraali koko avaruuden yli on yksi), niin tästä nähdään, että

$$f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{(1+x)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\, y^{\alpha+1-1}\, \mathrm{e}^{-(1+x)y}, \qquad y > 0,$$

joka on jakauman $\mathrm{Gam}(\alpha+1, 1+x)$ tiheysfunktio kirjoitettuna niin, että sen argumentti on y.

Arvostelu: a-kohdasta 3 p, ja b-kohdasta 3 p.

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla kummallakin on eksponenttijakauma odotusarvolla yksi. Määritellään

$$U = Y, \quad V = \frac{X}{Y}.$$

Johda kaava muuttujien U ja V yhteistiheysfunktiolle. Johda lisäksi muuttujan V reunatiheysfunktio.

Ratkaisu Riippumattomuuden nojalla

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{-y}, \qquad x, y > 0.$$

Muuttujanvaihtokaavalla

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|,$$

jossa

$$\begin{cases} u = y \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = uv \\ y = u \end{cases}$$

Jacobiaani on

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} v & u \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -u$$

Tässä kuvauksessa tason ensimmäinen neljännes $x, y > 0$ kuvautuu itselleen. Näistä huomioista saadaan

$$f_{U,V}(u,v) = f_X(uv)\, f_Y(u) u = u\,\mathrm{e}^{-(1+v)u}, \qquad u, v > 0.$$

Reunatiheys saadaan yhteistiheydestä integroimalla,

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\infty} u\,\mathrm{e}^{-(1+v)u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(2)}{(1+v)^2} = \frac{1}{(1+v)^2}, \qquad v > 0 \end{aligned}$$

Integraali saatiin laskettua pohtimalla, mikä on gammajakauman $\mathrm{Gam}(2, 1+v)$ normalisointivakio. Sen saa laskettua myös osittaisintegroinnilla.

Arvostelu: yhteistiheyden $f_{U,V}$ johtamisesta 4 p (yhden pisteen menetys, jos lauseke on negatiivinen); 2 p reunatiheyden johtamisesta.

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ normaalijakauma $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, jossa $\boldsymbol{\Sigma}$ on kääntyvä matriisi, jolle tunnetaan hajotelma $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on kääntyvä neliömatriisi. Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ kaavalla $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$.

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi? Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Olkoon $\mathbf{V}$ kokoa $k \times n$ oleva matriisi (jossa $k \leq n$), jolle $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$. Mikä on satunnaismuuttujan $Z = \|\mathbf{V}\mathbf{Y}\|^2 = (\mathbf{V}\mathbf{Y})^T(\mathbf{V}\mathbf{Y})$ jakauma?

Ratkaisu a) Odotusarvo on

$$E\mathbf{Y} = E[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})] = \mathbf{A}^{-1}E(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{0}.$$

Kovarianssimatriisi on

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}) &= \mathrm{Cov}(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathrm{Cov}(\mathbf{X})\,(\mathbf{A}^{-1})^T \\ &= \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A}^T\,(\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

Koska satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ saadaan affinilla muunnoksella moniulotteista normaalijakaumaa noudattavasta satunnaisvektorista, on sillä itsellään moniulotteinen normaalijakauma, joka tässä tapauksessa on n-ulotteinen standardinormaalijakauma, eli

$$\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}).$$

b) Satunnaisvektorilla $\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{Y}$ on moniulotteinen normaalijakauma parametreillä

$$E\mathbf{U} = \mathbf{V}E(\mathbf{Y}) = \mathbf{0}, \qquad \mathrm{Cov}(\mathbf{U}) = \mathbf{V}\,\mathrm{Cov}(\mathbf{Y})\,\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\,\mathbf{I}\,\mathbf{V}^T = \mathbf{I},$$

jossa identiteettimatriisin dimensio on $k \times k$. Ts.

$$\mathbf{U} \sim N_k(\mathbf{0}, \mathbf{I})$$

Sen pituuden neliöllä on khiin neliön jakauma vapausasteluvulla k, eli

$$\|\mathbf{U}\|^2 = \|\mathbf{V}\,\mathbf{Y}\|^2 \sim \chi^2_k.$$

Arvostelu: a-kohdasta 4 p ja b-kohdasta 2 p. Monet yrittivät oikaista b-kohdassa ja väittää, että kaavassa $(\mathbf{V}\mathbf{Y})^T(\mathbf{V}\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}\mathbf{V}^T\mathbf{V}\mathbf{Y}$ matriisi $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ olisi identiteettimatriisi, minkä perusteella kysytty jakauma olisi khiin neliö vapausasteluvulla n. Tämä on virhe, josta seurasi yhden pisteen menetys. Jos $\mathbf{V}$ ei ole neliömatriisi, niin tiedosta $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$ ei seuraa, että $\mathbf{V}^T$ olisi matriisin $\mathbf{V}$ käänteismatriisi (koska vain neliömatriisit voivat olla kääntyviä) ja tällöin $\mathbf{V}^T\mathbf{V}$ ei ole identiteettimatriisi.