VEKTORIANALYYSI / CALCULUS OF SEVERAL VARIABLES
1. välikoe / exam 1
14.10.2013

1. Määritellään funktio $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \frac{4x^3 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Onko mahdollista määritellä arvoa $g(0,0)$ siten, että funktiosta g tulee jatkuva koko tasossa?

2. Muodosta yhdistetyn kuvauksen $f = h \circ g$ lauseke, kun $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(\bar{x}) = e^{-x_2} - \sin(\pi(x_1 + x_2)/2)$, sekä $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x + z - y^2, y^2)$. Laske osittaisderivaatat $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ ja $\partial_3 f$ (max. 4 pistettä). Onko funktiolla f lokaalia maksimia pisteessä $(1,2,0)$? (max. 2 pistettä)?

3. Laske funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 3y - y^3 - 3x^2 y$$

kriittiset pisteet ja tutki, ovatko ne lokaaleja ääriarvopisteitä.

4. Määritellään tason (kompakti) osajoukko $A_0 := \{(x,y) : x^2 + xy + y^2 = 1\}$. Tehtäväsi on etsiä ne A_0:n pisteet, joiden etäisyys origosta $(0,0)$ on pienin ja suurin mahdollinen.

****

1. We define the function $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ by

$$g(x,y) = \frac{4x^3 + y^2}{x^2 + y^2}.$$

Is it possible to define the value $g(0,0)$ such that the function g becomes continuous in the entire plane?

2. Write the expression of the composed function $f = h \circ g$, where $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(\bar{x}) = e^{-x_2} - \sin(\pi(x_1 + x_2)/2)$ and $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x + z - y^2, y^2)$. Calculate the partial derivatives $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ and $\partial_3 f$ (max. 4 points). Does the function f have a local maximum at $(1,2,0)$? (max. 2 points)?

3. Determine the critical points of the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = 3y - y^3 - 3x^2 y$$

and find out, if they are local extrema.

4. We define the (compact) subset of the plane $A_0 := \{(x,y) : x^2 + xy + y^2 = 1\}$. You are asked to find those points of A_0 having he largest and smallest possible distances to the origin $(0,0)$.