Todennäköisyyslaskenta s-2010, 2. kurssikoe 20.12.2010

Kokeessa saa käyttää laskinta sekä MAOL-taulukoita. Tehtäväpaperin lopussa on joukko kaavoja, jotka saattavat olla hyödyllisiä.

1. Satunnaismuuttujien X ja Y yhteistiheysfunktio on

$$f(x,y) = 3\,x, \quad \text{kun } 0 < y < x < 1,$$

ja nolla muualla. Johda lauseke (a) X:n reunatiheysfunktiolle ja (b) Y:n reunatiheysfunktiolle, sekä ilmoita näiden lausekkeiden pätevyysalueet. (c) Laske odotusarvo $E(XY)$.

2. Tarkastellaan hierarkkista mallia

$$\begin{aligned} X|Y &\sim \mathrm{Exp}(Y) \\ Y &\sim \mathrm{Gam}(\alpha, 1), \end{aligned}$$

jossa $\alpha > 1$. (Tehtäväpaperin lopussa on selvitetty eksponenttijakauman ja gammajakauman ominaisuuksia.) Laske (a) EX ja (b) ehdollinen tiheysfunktio $f_{Y|X}(y \mid x)$ (kun $x > 0$).

3. Olkoot X ja Y riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla kummallakin on eksponenttijakauma odotusarvolla yksi. Määritellään

$$U = Y, \quad V = \frac{X}{Y}.$$

Johda kaava muuttujien U ja V yhteistiheysfunktiolle. Johda lisäksi muuttujan V reunatiheysfunktio.

4. Olkoon n-ulotteisella satunnaisvektorilla $\mathbf{X}$ normaalijakauma $N_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, jossa $\boldsymbol{\Sigma}$ on kääntyvä matriisi, jolle tunnetaan hajotelma $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$, jossa $\mathbf{A}$ on kääntyvä neliömatriisi. Määritellään satunnaisvektori $\mathbf{Y}$ kaavalla $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$.

a) Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ odotusarvovektori ja kovarianssimatriisi? Mikä on satunnaisvektorin $\mathbf{Y}$ jakauma?

b) Olkoon $\mathbf{V}$ kokoa $k \times n$ oleva matriisi (jossa $k \le n$), jolle $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}$. Mikä on satunnaismuuttujan $Z = \|\mathbf{V}\mathbf{Y}\|^2 = (\mathbf{V}\mathbf{Y})^T(\mathbf{V}\mathbf{Y})$ jakauma?

Kaavoja

- Gammajakauman $\mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ tiheysfunktio on
$$f(z) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, z^{\alpha-1} \exp(-\lambda\, z), \qquad z > 0.$$
- Jos $Z \sim \mathrm{Gam}(\alpha, \lambda)$ ja $r > -\alpha$, on $EZ^r = \dfrac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}\,\dfrac{1}{\lambda^r}$.
- Eksponenttijakauma $\mathrm{Exp}(\lambda)$ on sama kuin $\mathrm{Gam}(1, \lambda)$.
- Gammafunktion funktionaaliyhtälö: $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$, kun $t > 0$.
- Yhteys kertomaan: $\Gamma(n+1) = n!$, kun $n \ge 0$ on kokonaisluku.
- Jos $\mathbf{A}$ on kääntyvä matriisi, niin $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$.