Ratkaisut, Harjoitus 2 (kirjan luvut 5-6)

1. (a) Riston budjettirajoite $p_x x + p_y y = m$. Tämä y:n funktiona: $y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$. Riston hyötyfunktio

$$u(x,y) = a\sqrt{x} + \sqrt{y} = ax^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}.$$

Ratkaistaan MRS : $-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} / \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\left(a\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) / \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = -\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right) / y^{-\frac{1}{2}}$.
Optimipisteessä rajahyöty on $-\frac{p_x}{p_y}$ (budjettisuoran kulmakerroin). Risto valitsee kulutustasonsa siten, että $MRS = -\frac{p_x}{p_y}$ eli

$$\begin{aligned}
-\left(ax^{-\frac{1}{2}}\right) / y^{-\frac{1}{2}} &= -\frac{p_x}{p_y} \Leftrightarrow \left(\frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)^{\frac{1}{2}} / \left(a^{-1}x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{p_x}{p_y} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right) / \left(a^{-2}x\right) = \frac{p_x^2}{p_y^2} \Leftrightarrow \frac{m}{p_y} = \frac{p_x}{p_y}x + \frac{p_x^2}{p_y^2}a^{-2}x \\
&\Leftrightarrow \frac{m}{p_y} = \frac{p_x}{p_y}x\left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{m}{p_x} / \left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right)
\end{aligned}$$

Siis

$$x(p_x, p_y, m) = \frac{m}{p_x} / \left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right).$$

Budjettirajoitteen avulla saadaan

$$y(p_x, p_y, m) = \frac{m}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} \cdot \frac{m}{p_x} / \left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right) = \frac{m}{p_y} \cdot \left(\frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right) / \left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right).$$

Kahvin y kulutusosuus:

$$\frac{p_y y(p_x, p_y, m)}{m} = \left(\frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right) / \left(1 + \frac{p_x}{p_y}a^{-2}\right).$$

Huom! Tehtävä voidaan ratkaista myös sijoittamalla budjettisuorasta ratkaistu y hyötyfunktioon ja maksimoimalla x:n suhteen tai käyttämällä Lagrangen menetelmää.
(b) Olkoon $a = \frac{1}{2}$, $m = 9$, $p_x = 2$ ja $p_y = 1$, tällöin suklaata kulutetaan

$$x(2,1,9) = \frac{9}{2} / \left(1 + \frac{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right) = \frac{9}{2} / (1 + 2 \cdot 4) = \frac{1}{2}$$

ja kahvia

$$y(2,1,9) = \frac{\frac{9}{1}\left(\frac{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right)}{1 + \frac{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}} = \frac{9}{1}\frac{8}{1+8} = 8.$$

Tarkastetaan, että tulos on oikein: $2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 8 = 9$.

2. Hyötyfunktio on

$$u(x,y) = a\ln(x_1) + (1-a)\ln(x_2),$$

jossa $0 < a < 1$. Kallen hyödykekori $(x_1, x_2) = (5, 10)$. Kalle on valmis luopumaan pienestä määrästä hyödykettä x_1 pisteessä (x_1, x_2), mikäli pätee

$$MRS(x_1, x_2) > \text{budjettisuoran kulmakerroin.} \tag{1}$$

Yleisesti $MRS(x_1, x_2) = -\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1} / \frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -a\frac{1}{x_1}/(1-a)\frac{1}{x_2}$, joten $MRS(5,10) = -a\frac{1}{5}/(1-a)\frac{1}{10} = -\frac{2a}{(1-a)}$. Kallen budjettirajoitteen $p_1x_1 + p_2x_2 = m$ perusteella saadaan kulmakertoimeksi $-\frac{p_1}{p_2}$, joten (1) perusteella saadaan

$$\frac{2a}{(1-a)} < \frac{p_1}{p_2}.$$

TÄSTÄ PIIRRETTÄVÄ KUVA!

3. Liisan hyötyfunktio on

$$u(s,x) = x + s - \frac{1}{2}s^2$$

ja budjettirajoite $m = ps + x$. Oletetaan, että $0 < p < 1$. Liisan ongelma voidaan kirjoittaa muotoon

$$\max_s \left\{ m - ps + s - \frac{1}{2}s^2 \right\}$$

Jos ongelmaan on sisäpisteratkaisu se määräytyy ensimmäisen kertaluvun ehdosta

$$-p + 1 - s = 0$$

eli $s = 1-p$. Budjettirajoitetta käyttäen saadaan $x = m-ps = m-p(1-p)$.

4. (a) Jos $m = p(1-p)$, niin $x = 0$, joten Liisan tulojen on oltava vähintään $p(1-p)$.

(b) Jos oletetaan sisäpisteratkaisu, kun $m < p(1-p)$, seuraa että $x < 0$. Siis täytyy olla $x = 0$ ja kaikki tulot käytetään shampooseen eli $m = ps$. Joten $s = \frac{m}{p}$ (siis $s < (1-p)$, eli rajahyötyjen suhde on suurempi kuin hintasuhde, nurkkaratkaisu). Jos $p > 1$, kaikki tulot kannattaa käyttää muuhun kulutukseen.
(c) Jos $m > p(1-p)$, niin $s = 1-p$ ja $x = m - p(1-p) > 0$. Nyt shampoon kysyntä ei riipu tuloista m. Kaikki $p(1-p)$:n ylittävät tulot menevät muuhun kulutukseen ($\frac{\partial s}{\partial m} = 0$ ja $\frac{\partial x}{\partial m} = 1$).

Harjoitus 2 tehtävä 5

Kuluttajan tulo = m ja hyötyfunktio on muotoa

$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2 .$$

a. Formuloi kuluttajan päätösongelma ja ratkaise kuluttajan kysyntäfunktiot käyttäen Lagrangen menetelmää.
b. Piirrä Engel-käyrät, kun hyödykkeen 1 hinta on 0.5 € ja hyödykkeen 2 hinta on 1 €. Ilmoita Engel-käyrien kulmakertoimet.
c. Kuinka suuri on tulon rajahyöty?

VASTAUS

a. $\max\limits_{x_1, x_2} x_1 x_2$ s.t. $p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$

Lagrangen funktio:

$$L = x_1 x_2 - \lambda[p_1 x_1 + p_2 x_2 - \mathrm{m}]$$

FOCs:

$$x_2 - \lambda p_1 = 0$$
$$x_1 - \lambda p_2 = 0$$
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 - \mathrm{m} = 0$$

$$x_2 = \lambda p_1 \quad \leftrightarrow \quad \lambda = \frac{x_2}{p_1} = \frac{x_1}{p_2} \quad \leftrightarrow \quad x_2 = \frac{p_1 x_1}{p_2}$$

Sijoitetaan ehtoon (3):

$$p_1 x_1 + p_2 \frac{p_1 x_1}{p_2} - \mathrm{m} = 0 \quad \leftrightarrow \quad p_1 x_1 + p_1 x_1 - \mathrm{m} = 0$$

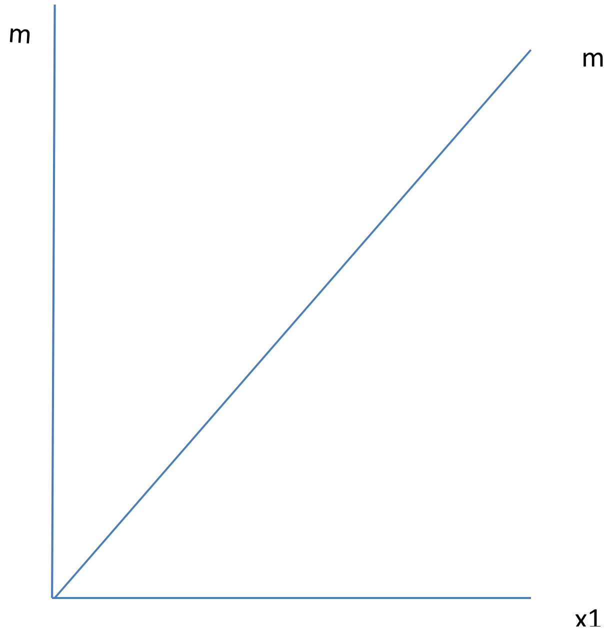
$$\leftrightarrow \quad 2 p_1 x_1 = m \quad \leftrightarrow \quad x_1 = \frac{m}{2 p_1} \text{ . } \quad \text{Samoin} \quad x_2 = \frac{m}{2 p_2}$$

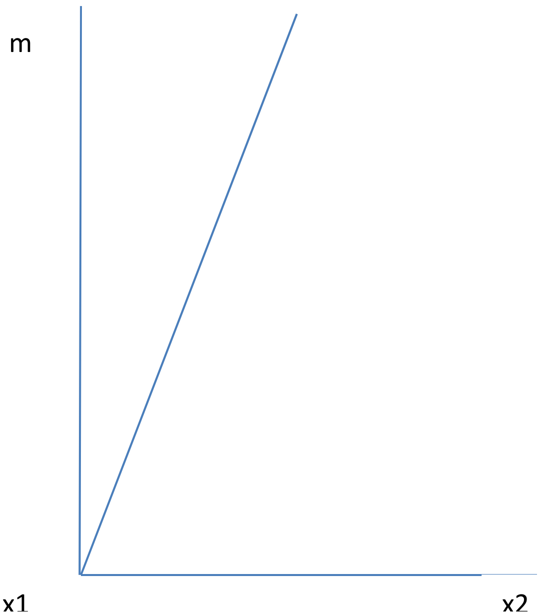
b. Hyödykkeen 1 hinta on nyt 0.5, joten Engel-käyrä saadaan piirtämällä $x_1 = m$.
Engel-käyrän kulmakerroin on 1.

Hyödykkeen 2 hinta on 1, joten Engel-käyrän yhtälö on $x_2 = \frac{1}{2} m$ tai m=$2x_2$

Kulmakerroin on 2 tai 0.5.

c. Tulon rajahyöty on $\lambda = \frac{x_2}{p_1} = \frac{m}{2 p_2 p_1} = m$


m
x1


m
x2

6. (a) Molempien hyödykkeiden kysyntä pienenee, kun p_1 tai p_2 kasvaa. Hyödykkeet ovat siis komplementteja, eli niitä kulutetaan yhdessä.
(b) Koska hyödykkeiden kysynnät ovat

$$x_1(p_1, p_2, m) = \frac{m}{p_1 + 2p_2} \text{ ja } x_2(p_1, p_2, m) = 2\frac{m}{p_1 + 2p_2}$$

tiedetään, että kaikilla hinnoilla ja tulotasoilla $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. Hyötyfunktio voi siis olla esim.

$$u(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$$

tai mikä tahansa sen monotoninen transformaatio.
(c) Preferenssit ovat sellaiset, että x_1 ja x_2 ovat täydellisiä komplementteja.