Tilastollinen päättely

1. kurssikokeen uusinta, 23.1.2014, klo 16-18

Tentissä saa olla mukana kirjoitusvälineet ja laskin.

1. Tarkastellaan tilastollista mallia $f_{\boldsymbol{Y}}(\boldsymbol{y};\boldsymbol{\theta})$, jossa $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_d)$ on tuntematon d-ulotteinen parametri. Määrittele ja selitä seuraavat käsitteet:
   (a) Uskottavuusyhtälö.
   (b) Havaittu informaatio.
   (c) Parametrien ortogonaalisuus.

2. Oletetaan, että $Y_1, \ldots, Y_n$ on riippumaton otos jakaumasta $G(3, 1/\theta)$, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\theta^{-3}y^2\exp(-\frac{y}{\theta}), & \text{kun } y > 0 \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

   jossa $\theta > 0$. Johda parametrin θ suurimman uskottavuuden estimaattori $\hat{\theta}$. Laske pistemääräfunktio ja Fisherin informaatio. Osoita, että estimaattori $\hat{\theta}$ on harhaton ja että sen varianssi yhtyy harhattomien estimaattorien varianssin alarajaan (informaatioepäyhtälö).

3. Havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}y^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\beta}{y}\right), \quad y > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

   Oletetaan, että α on tunnettu. Muodosta tämän mallin logaritminen uskottavuusfunktio $l(\beta;\boldsymbol{y})$ ja johda huolellisesti perustellen parametrin β suurimman uskottavuuden estimaatti $\hat{\beta}$, kun aineisto on $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

4. Oletetaan, että havaintoja vastaavat satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja noudattavat kukin jatkuvaa jakaumaa, jonka tiheysfunktio on

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{y^{\alpha+1}}, \quad y \geq \beta, \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

   (a) Osoita, että jakauman odotusarvo on

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1}, \quad \text{kun } \alpha > 1.$$

   (b) Oletetaan, että β on tunnettu ja tiedetään, että $\alpha > 1$. Johda parametrin α momenttiestimaattori.

Muistin tueksi

Satunnaismuuttuja X noudattaa gammajakaumaa parametrein κ ja λ, jos sen tiheysfunktio on muotoa

$$f_X(x;\kappa,\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\kappa}{\Gamma(\kappa)} y^{\kappa-1} e^{-\lambda y}, & \text{kun } x > 0, \\ \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tällöin merkitään $X \sim G(\kappa, \lambda)$, jossa $\kappa > 0$ ja $\lambda > 0$. Gammajakauman odotusarvo on κ/λ ja varianssi κ/λ^2. Kun $X_1, \ldots, X_k \perp\!\!\!\perp$ ja $X_i \sim G(\kappa_i, \lambda)$, niin $\sum_{i=1}^k X_i \sim G(\sum_{i=1}^k \kappa_i, \lambda)$.