

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matemaattisen analyysin kurssi
Kurssikoe 2, 14.12.2011

1. Määritä funktion $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2$ lokaalit ääriarvokohdat ja välit, joilla käyrä $y = f(x)$ on alaspäin kupera.

2. Esitä differentiaalilaskennan väliarvolause ja todista sen avulla, että funktio $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ toteuttaa kaikilla $x, y \in [2, 3]$ epäyhtälöt $3|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq 12|x - y|$.

3. Laske raja-arvot

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x},$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x - \sin x + 1}{\sin 2x} \text{ ja}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^{100}}{e^{2x}}.$$

4. Tarkastellaan funktiota $f(x) = e^{ax} - x$, missä $a > 0$ on vakio. Määritä f :n pienin arvo. Millä a :n arvolla pätee $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$?