Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kurssikoe
19.10.2011

Kokeessa saa käyttää laskinta mutta ei taulukkokirjaa.

1. a) Määritellään

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laske tulo AB. Kirjoita kertolaskun välivaiheet näkyviin.

b) Oletetaan, että A ja B ovat matriiseja, joille pätee $AB = \bar{0}$. Osoita, että tästä ei välttämättä seuraa, että $A = \bar{0}$ tai $B = \bar{0}$.

c) Oletetaan, että A, B ja C ovat matriiseja, joille pätee $AB = AC$. Oletetaan myös, että $A \neq \bar{0}$. Osoita, että tästä ei välttämättä seuraa $B = C$.

2. a) Määrittele käsite kääntyvä matriisi.

b) Määritä matriisin

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi.

3. Onko joukko

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ kanta?

4. a) Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v}, \bar{w} \in V$. Osoita, että

$$\bar{v}, \bar{w} \in \operatorname{span}\{\bar{v}, \bar{v} + \bar{w}\}.$$

b) Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Olkoon matriisi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kääntyvä. Osoita, että jos joukko $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k\}$ on vapaa, niin myös joukko $\{A\bar{v}_1, A\bar{v}_2, \ldots, A\bar{v}_k\}$ on vapaa.