

Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Todennäköisyyslaskenta II  
2. kurssikoe 18.12.2015

Sallitut apuvälineet: kirjoitusvälineet, laskin sekä käsinkirjoitettu, A4-kokoinen lunttilappu ja MAOL taulukkokirjaa

1. Satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = c(3+x^2y) \mathbf{1}\{0 < x < 1, 0 < y < x^2\}$$

- a) Laske vakion  $c$  arvo. (2p)  
b) Laske ehdollinen odotusarvo  $E(Y | X = x)$ , kun  $0 < x < 1$ . (4p)

2. Olkoon  $X$  ja  $Y$  satunnaismuuttujia, joiden yhteistiheysfunktio on

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{x^2}{8y^2} \mathbf{1}\{0 < x < 2, y > \frac{1}{4}x^2\}$$

Määritellään satunnaismuuttujat

$$U = \frac{X}{2}, \quad V = 1 - \frac{X^2}{4Y}$$

Laske satunnaismuuttujien  $U$  ja  $V$  yhteistiheysfunktio (4p) ja vastaa lyhyesti perustellen seuraaviin kysymyksiin (vihje: ainakin toinen vastauksista on kyllä):

- a) Noudattaako  $(U, V)$  tasajakaumaa jossakin tasoalueessa?  
b) Ovatko  $U$  ja  $V$  riippumattomia?

3. Olkoon  $X$ ,  $Y$  ja  $W$  satunnaismuuttujia, joiden jakauman kuvaa hierarkinen malli

$$\begin{cases} X | Y \sim N(0, Y^2) \\ Y = W + 1, \\ W \sim \text{Bin}(3, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

- a) Kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen tiheysfunktio  $f_{X|Y}$  ja kerro mallin avulla, mikä on ehdollinen odotusarvo  $E(X | Y)$ . (2p)  
b) Laske  $EX$ . (2p)  
c) Laske  $\text{var } X$ . (2p)

4. Olkoon  $X = (X_1, X_2)$  ja  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$  riippumattomia standardinormaalijakautuneita satunnaisvektoreita ja olkoon  $Z = (X_1 - Y_2 + 3, 3Y_1 - X_2, 2X_1 + Y_3 - 2) = (Z_1, Z_2, Z_3)$ .

- a) Määrittää satunnaisvektorin  $Z$  jakauma. (4 p)  
b) Selitä miksi satunnaismuuttujat  $Z_1^2$  ja  $\exp(Z_2 - 3)$  ovat riippumattomia. (2 p)