

2. Свойства оценок

Необходимым условием получения положительного балла за задачу является присутствие комментариев в тексте, а также наличие окончательного вывода. Не забывайте об этом!

1. (К теоретической задаче 1) Сгенерируйте выборку X_1, \dots, X_N из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\bar{X}$, $\bar{X} + X_{(n)}/2$, $(n+1)X_{(1)}$, $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Постройте на одном графике разными цветами для всех оценок функции модуля разности оценки и истинного значения θ в зависимости от n . Если некоторые оценки (при фиксированном значении θ) сильно отличаются от истинного значения параметра θ , то исключите их и построьте еще один график со всеми кривыми (для измененного значения θ). Для избавления от больших значений разности в начале ограничьте масштаб графика. Для наглядности точки можно соединить линиями. Какая оценка получилась лучше (в смысле упомянутого модуля разности при $n = N$)? Проведите эксперимент для разных значений θ (количество графиков равно количеству значений θ).
2. (К теоретической задаче 5) Сгенерируйте выборку X_1, \dots, X_N из экспоненциального распределения с параметром $\theta = 1$ для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте оценку $\left(k!/\bar{X}^k\right)^{1/k}$ параметра θ . Проведите исследование, аналогичное предыдущей задаче, и выясните, при каком k оценка ведет себя лучше (рассмотрите не менее 10 различных значений k).
3. (К теоретической задаче 5) Придумайте распределение, у которого конечны первые четыре момента, а пятый — нет. Сгенерируйте выборку X_1, \dots, X_N из этого распределения для $N = 10^4$. Постройте график плотности, а также нанесите точки выборки на график (с нулевой y -координатой). Для всех $n \leq N$ посчитайте оценку $s^2 = s^2(X_1, \dots, X_n)$ для дисперсии. Постройте график зависимости модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения от n . Проведите аналогичное исследование для выборки из распределения Коши, где вместо графика модуля разности оценки дисперсии и ее истинного значения (которого не существует) постройте график оценки дисперсии.
4. Сгенерируйте выборку X_1, \dots, X_N из стандартного нормального распределения для $N = 10^4$. Для всех $n \leq N$ посчитайте по ней эмпирическую функцию распределения. Для некоторых n (например, $n \in \{10, 25, 50, 100, 1000, N\}$) постройте графики эмпирической функции распределения (отметьте на оси абсцисс точки “скачков” кривых, нанеся каждую из “подвыборок” на ось абсцисс на каждом соответствующем графике с коэффициентом прозрачности 0.2), нанеся на каждый из них истинную функцию распределения (количество графиков равно количеству различных значений n). Для всех $n \leq N$ посчитайте точное значение $D_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$ и постройте график зависимости статистик D_n и $\sqrt{n}D_n$ от n .