量化投资技术篇(7)

投资组合策略性能评价（上）

前言

在我们实施任何一种技术方法用以解决某个问题时，我们首先需要建立一个评价方法或者体系。做量化投资和建立资产组合策略也是同样的，所以我们需要有量化的指标来评价投资是否有效。

本章我们总结和介绍常见的投资组合策略性能评价指标。从投资来说，投资者一般只关于收益率和风险，所以一般来说这些评价指标都是建立在对收益率和风险的评价之上，而且基本上是收益率指标和风险指标的一个比率。

性能评价指标类别

总的来看，投资组合性能指标基本上分为几类：

1. 相对性的评价： 单位风险上收益的各种变种
2. 绝对性的评价： 参考一个组合标准的额外收益
3. 基于密度的评价： 考虑收益的分布的一些属性
4. 基于效用的评价： 显示表示投资者的效用
5. 基于波动的评价
6. 特殊的风险评价

主要性能评价指标

1. 夏普比率(Sharpe Ratio)
   $SR = \frac{E(r_p)-r_f}{\sigma_{r_p}}$

> 夏普比率定义为投资收益的期望收益率与无风险收益率的差与投资收益的标准差的比率。
>
> 夏普比率基本上是最常用的投资性能评价指标，它非常直观，可解释性很强。但是它有如下缺点：

- 用标准差定义风险并不是非常合理，因为标准差对上下行波动的权重是一样的。
- 不能捕捉一些风险资产的流动性问题。
- 不能完全表示不同的投资者对待风险的态度。
- 假设无风险利率的借入和借出是一样的。
- 依赖一阶和二阶统计量的估算的稳定性。
- 对于非正态分布数据或者高频数据结果不稳定。
- 对于较好的投资技巧所呈现的正偏度和负向超额峰度会收缩；对于不好的投资显示的负偏度和正向超额峰度会放大。

2. Double Sharpe Ratio
   $DSR = SR * \frac{1}{\sigma_{SR}}$

双夏普比率相比于夏普比率多考虑了采样误差。

3. Probabilistic Sharpe Ratio

PSR针对夏普比率的放大效果做了统计上的不确定性调整，但是这种方法需要比较长时间的数据。PSR在对偏度和峰度校准后计算投资组合收益击败市场收益的概率。

4. VaR-adjusted Sharpe Ratio

   即使资产的收益不是正态分布，但夏普比率是符合正态分布的。然而，传统夏普比率计算一般是用有限的时序数据，经常会计算出一些错误来，例如数据的限制、负偏度和正向超额峰度等。

   VaRSR考虑到了夏普比率估算的不确定性，包含了高阶统计量的影响。

5. 特雷诺比率(Treynor Ratio)

   $TR = \frac{E(r_p)-r_f}{\sigma_{r_p}} * \frac{1}{\beta(r_p, r_{mkt})}$

   特雷诺比率就是夏普比率除以与市场的贝塔值，它评价了相对于市场的风险补偿。

6. 索提诺比率(Sortino Ratio)

   $S = \frac{r_p - T}{DT}$

   $DR = \sqrt{\int_{-\infty}^{T} (T - r_p)^2 f(r_p) dr_p}$

   $f(r_p)$是资产收益的分布，DR是下行波动性，T是自定义的目标收益。

   索提诺比率就是在自定义的目标上的超额收益除以下行波动率。

7. 效率比率(Efficiency Ratio)

   ER就是对收益和风险都使用最小方差组合作为参考点而得到的比率。

8. Jensen alpha

   $J_\alpha = (E(r_p) - r_f) - (E(r_{mkt}) - r_f) * \frac{1}{\beta(r_p, r_m kt)}$

   Jensen alpha是资产超额收益与CAPM预测收益的差。

9. M^2 Risk Adjusted Measure

   $M^2 = \gamma_p * (E(r_p) - r_f) + r_f$

   这里，$\gamma_p = \frac{\sigma_{r_{mkt}}}{\sigma_{r_p}}$, 可以理解为杠杆系数。

   M^2可以让投资者评价资产的风险相对于市场风险的补偿收益。

10. Omega Ratio

    $\Omega(T) = \frac{\int_T^\infty (1 - F(r_p)) dr_p}{\int_{-\infty}^{r_p} F(r_p) dr_p}$

    这里，T是目标收益，$F(r_p)$是资产收益的累积分布函数。

    Omega比率同时捕捉了资产的上下行潜在收益，它描述了在目标收益以上的收益的潜在概率和目标收益以下收益的比率。

    购建一个投资组合策略以最大化Omega比率不是一个简单的数值分析问题，主要因为Omega比率并不是凸函数，所以需要应用模拟技术和退火算法来搜索最优解，但结果很不稳定。

11. 晨星风险调整收益(Morningstar Risk-Adjusted Return)

    这里我们详细介绍一下MARA，笔者在实践中经常会使用此评价指标。

前面我们讲了许多Risk-Adjusted Return指标，这些指标都各有特点和优缺点。我们经常会发现可能A资产的某些指标要好于B资产，同时B资产的其他一些指标却要好于A资产。这种情况使我们量化地评价和比较不同的投资组合策略出现了困难。另外，不同的投资者的投资偏好不同，所以他们对某个投资策略的评价也会不同，因此我们可能需要考虑投资者的风险偏好。MRAR尝试在一定程度上缓解这两个问题。

讲述MRAR的构造过程，需要先回顾一下期望效用理论：

设资产的财富总额为W，效用函数为u，有$u(E[W]) > E[u(W)]$,

相对风险系数为$RRA = -\frac{Wu''(W)}{u'(W)}$，$RRA$保证当投资者的财富增加时，他对风险的态度是不变的。

令$RRA = \gamma + 1$，可以得到

$u(W) = -W^{-\gamma}$，$\gamma > -1$ 且 $\gamma \neq 0$

$u(W) = ln(W)$，$\gamma = 0$

令W_0为投资初始财富，TR为收益率，可以得到

$u(W_0(1+TR)) = {W_0}^{-\gamma}u(1+TR), \gamma > -1, \gamma \neq 0$

$u(W_0(1+TR)) = ln(W_0) + u(1+TR), \gamma = 0$

这里γ代表了风险厌恶程度，如果γ< -1，代表投资者是喜爱风险的；$\gamma = -1$，代表投资者是风险中性的，如果资产的算术平均收益是一样的；$\gamma = 0$，代表投资者是风险中性的，如果资产的几何平均收益是一样的；$\gamma > 0$，代表投资者需要风险溢价来补偿风险。

MRAR利用期望效用理论并结合一些特殊条件来构建。另外我们不妨假设，投资者可以以无风险利率RF来投资并在结束时获得财富1(归一化)，这样可以得到$W_0 = \frac{1}{1+RF}$，可以得到

$u(w_0(1+TR)) = \frac{1+TR}{1+RF} = u(1+ER)$，这里$ER = \frac{1+TR}{1+RF} - 1$代表几何超额收益。

$\gamma > -1$。$\gamma \neq 0$时，$u(1+ER) = -\frac{(1+ER)^{-\gamma}}{\gamma}$

$\gamma = 0$时，$u(1+ER) = ln(1+ER)$

在风险调整收益上应用期望效用理论意味着我们有机会来量化的比较两个资产的投资收益分布。高收益低风险的资产肯定优于低收益高风险的资产。但是，事实上投资者经常需要在收益率和风险之间做权衡。在某些高风险点上，投资者可能希望以损失期望收益为代价而降低风险；同样，在一些低收益点上，投资者希望提高风险从而提高收益。

MRAR借用期望效用理论来确定投资者愿意用期望收益来换取风险降低的权衡点，无风险收益的期望效用和某超额收益波动的投资组合的期望效用时在同一水平的。我们称这个无风险收益为"Certainty Equivalent"几何超额收益。

举例来说，如果投资者对一个12%收益率的有风险收益和另一个8%的无风险收益的投资偏好时一样的，那么也就是说，投资者可以接受以4%的收益来换取风险的消除。通过把收益率时序转换成对应的无风险等价序列，MRAR就可以比较不同资产的优劣。这有点类似于在相同的风险因子下做比较。

我们令$ER^{CE}(\gamma)$为给定风险厌恶程度γ下的确定等值几何超额收益，下式表明确定等值几何超额收益的效用水平和资产的期望超额收益的效用水平时一样的，

$u(1+ER^{CE}(\gamma)) = E[u(1+ER)]$

得到

当$\gamma > -1$，且$\gamma \neq 0$时，$1 + ER^{CE} = (E[(1+ER)^{-\gamma}])^{-\frac{1}{\gamma}}$

当$\gamma = 0$时， $1 + ER^{CE} = e^{E[ln(1+ER)]}$

$MRAR(\gamma)$被定义为年化后的确定等值，采用时序平均的$(1+ER)^{-\gamma}$作为$E[(1+ER)^{-\gamma}]$的估算值，我们有

当$\gamma \neq 0$时，

$MRAR(\gamma) = [\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(1+ER_t)^{-\gamma}]^{-\frac{12}{\gamma}} - 1$

当$\gamma = 0$时，

$MRAR(\gamma) = [\prod_{t=1}^{T}(1+ER_t)]^{\frac{12}{T}} - 1$

这里，

ER_t为第t月的几何超额收益，

T为投资的月数。

最后一个问题就是，γ应该设为多少？晨星经常采用$\gamma = 2$。

值得一提的是，晨星risk定义为$MRAR(0) - MRAR(2)$.

未完待续……