Time Series Analysis(13)

重新审视GARCH和EWMA

在前面的文章中我们已经介绍了GARCH和EWMA模型，它们都把更高的权重放在最近的信息上。为了加深对它们的理解，本片文章从另外一个视角来重新审视GARCH和EWMA模型，并讨论它们的关系。我们很快就会看到实际上EWMA是GARCH的一种特殊形式，且都使用了指数平滑。

一. 简单回顾

1. GARCH

   $GARCH(p,q)$ 即：General AutoRegressive Conditional Heteroskedastic model 。其核心元素为：

- AR(AutoRegressive)：具备自回归特性
- Conditional：条件依赖于最近的信息
- Heteroskedastic：非方差齐性

2. EWMA

   $EWMA$即：Exponential Weighted Moving Average。其核心内容为：

所预测值为最近历史值与水平值的加权平均。

实际上GARCH和EWMA模型在金融时序分析领域的最多应用是来做波动性分析和预测。这里我们需要详细介绍一下波动性是如何计算的。

在《量化投资技术》系列中，我们讲过波动率可被用作对风险的度量，它指的是收益率的标准差。

简单的日收益率计算方法为：$\mu_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{S_{i-1}}$

这种计算方式的显著缺点就是我们无法通过累积日收益率来得到年化收益率，因为这种方法是无法计算复利的。所以我们一般采用的计算日收益率的公式为：$\mu_i = \ln(\frac{S_i}{S_{i-1}})$，称为对数收益率。

相比于简单收益率，对数收益率将会更加收敛于0.

方差的无偏估计为：$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - \overline{\mu})^2$

简化的计算方法就是假设$\overline{\mu} = 0$，其最大似然估计：$\sigma_n^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i^2$

二. 详细讨论

我们从GARCH(1,1)模型的公式开始研究，

$\sigma_n^2 = \gamma V_L + \alpha\mu_{n-1}^2 + \beta\sigma_{n-1}^2$

式中的第一项γV_L代表时序的长期方差的平均值V_L乘以权重系数γ，最后一项代表前一期的方差，而中间一项代表观测值的残差平方.

GARCH模型中融入了一个重要概念持续度(Persistence)，它等于$\alpha+\beta-1$。持续度代表了序列方差向其长期方差靠拢的速度，高持续度意味着靠拢的速度慢，而低持续度意味着靠拢的速度快。具体来说，

持续度在0，1之间：较慢的向均值收敛。

持续度<0 : 反转向均值现象明显。

持续度>1: 序列为非平稳序列，EWMA可能更为合适。

让我们再来看一下EWMA:

$$EWMA=\sigma_t^2=\lambda\sigma_{t-1}^2+(1-\lambda)r_{n-1}^2$$

式中的r^2与garch模型中的μ^2相同，$lambda$代表着衰减参数。

可以看到，相比于GARCH，EWMA只是没有了长期方差的平均值这一项。所以EWMA模型很明显可以认为是GARCH模型的一种特殊形式，它并不支持向均值反转的特性。

GARCH模型又多个变种，例如Z-Garch、GJR-Garch、M-Garch等等，这些变种可能分别适合于不同的场合。我们也会在后续系列中介绍。