量化投资--技术篇(4) 效用理论

Expect Utility Theory

一. 前言

前面在我们介绍MVO理论和CAPM理论的时候，曾经提到过投资者会以最大化$u-\sigma$为其目标，此目标基本上符合我们的直观理解和感觉。但是其理论基础在哪里？是否存在其他目标呢？这些问题需要引入这篇文章所要讨论的期望效用理论来解释。

二. 基本知识

在经济学中，效用理论通过数学模型帮助我们在可选策略集上以我们所偏爱的策略排在前面为标准进行排序，或者说是以我们对该选项的满意度来排序。这个数学模型的形式一般来说是一个效用函数。因此，我们在做选择时，就转换成求效用函数的最大值问题。

效用函数从大类上可以被分为基数效用函数和序数效用函数。我们这里并不涉及详细的效用理论，而关注于金融学所关心的期望效用理论。期望效用理论主要用来对有风险的多个可能有多个结果的项目，从多个维度进行选择，追求效用最大化，也就是说期望结果更令人满意。

我们引入一个例子：

假设有一个投资机会，投资者有可能使其投资翻倍或者失去所有，翻倍的概率为p。如果投资者的初始资金为X_0，且这个投资可以重复多次，为了最大化资产收益，每次应该投资多少呢？

令每次的投资比例为α，这个问题可以转化成为求解最优α值，使资金增长量最高。每次的资金的变化有两种可能：$1+\alpha$或$1-\alpha$，其中α取值在0，1之间。

令X_k为k次投资后的资产总数，$X_k=R_kX_{k-1}$，$k=1,2,...$，这里R_k使收益随机变量，代表第k次投资的收益，收益率为R_k-1，资产增长为X_k-X_{k-1}.

这里我们假设所有的R_k使独立同分布的。总资产量在n期以后变为$X_n=R_nR_{n-1}...R_2R_1X_0$。对其两边取对数得到

$\ln(X_n)=\ln(X_0)+\sum_{k=1}^{n}\ln(R_k)$

$\Longrightarrow \ln(\frac{X_n}{X_0})^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(R_k)$ (4.1)

由于R_k是独立无关同分布随机变量，那么$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(R_k)\longrightarrow E[\ln(R_1)]$，当$n\rightarrow\infty$. 这里$E[\ln(R_k)]$与$k$无关。

令$m=E[\ln(R_k)]$，得到

$(\frac{X_n}{X_0})^{1/n}\longrightarrow e^m$，$X_n\longrightarrow X_0e^{mn}$ $n\longrightarrow\infty$ (4.2)

上式说明，当n很大时，资本的每个投资周期以e^m为因子而呈现指数增长。

如果我们定义效用函数为对数函数$U(x)=\ln(x)$，最大化增长因子e^m就可转换为最大化期望效用$E[U(X_1)]$，因为：

$m+\ln(X_0)=E[\ln(R_1)]+\ln(X_0)=E[ln(R_1X_0)]=E[\ln(X_1)]$

通过采用对数效用函数，我们可以把投资问题看成单期问题。单期最大化可以保证长期增长最大化。

回到我们引入的原始问题，如何找到最优α使增长因子最大。

$m = E[\ln(R1)] = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)$

让上式对α求导，并使导数为0，我们可以解得$\alpha = 2p - 1$。这个结果是符合我们的直观感觉的。

首先当$p = 1$时，也就是说我们有绝对的把握可以赚钱，那么就应该100%投入，所以$\alpha = 1$。其次当$p > 0.5$时，$\alpha > 0$，我们应该按照一定比例投入。最后，我们可以看到当$p < 0.5$时，我们应该投入负的比例，意味着应该做空，如果不能做空，那就应该选择不投资。

从这个例子中，我们可以看出采用合适的效用函数可以让我们对有风险的投资决策进行比较，从而进行选择。效用函数的构造有多种方式，下面我们将介绍最常采用的期望效用函数von Neumann–Morgenstern效用函数，并引入Risk aversion概念。

三. 详解

期望效用函数表示了投资者在面临风险抉择时对未来收益的满意度，很显然的是每个投资者很可能有不同的选择标准，意味着有不同的期望效用函数。

期望效用函数记为：$E[U(W)]$，其中W指资产总量，U称为期望效用函数。期望效用函数应具有如下特性：

- 对于所有的W，$U'(W) > 0$，其一阶导数大于零。
- 具备风险厌恶属性
    - 投资者是风险厌恶的，在任何财富水平W，投资者不会喜欢碰运气，如果期望收益为0。也就是说，投资者更偏爱确定性的收入，并不喜欢碰运气。

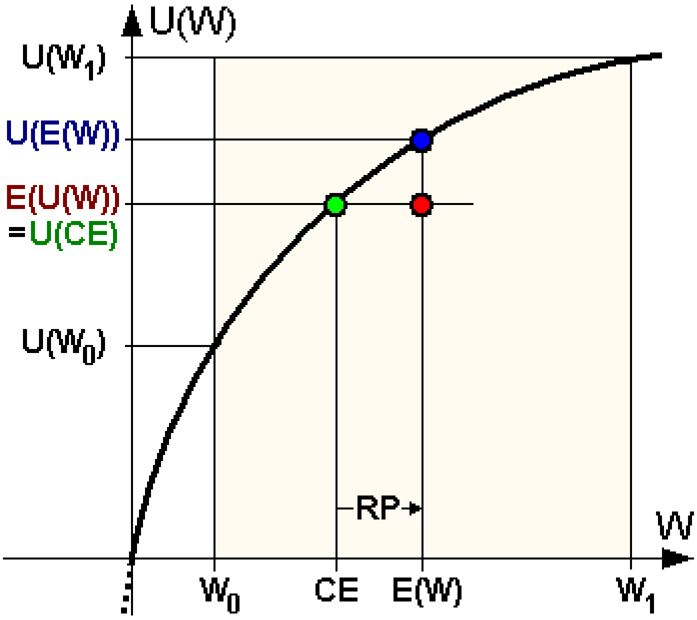
      $E[U(W+\epsilon)] < U(W)$
    - 通过Jenson不等式，我们可以得到如果风险厌恶条件满足的化，其充要条件是$U''(W) < 0$

      注：显然对数函数同时满足这两个条件。

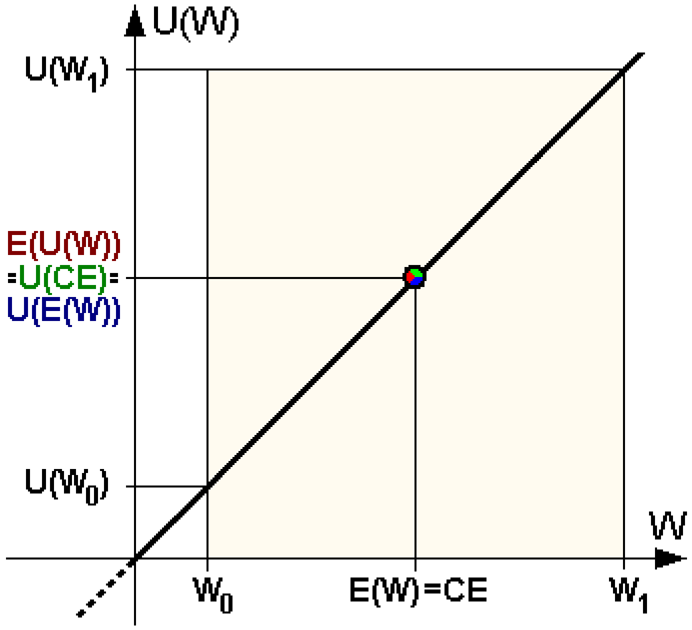
下面让我们详细讨论一下风险厌恶(Risk Aversion)这个非常重要的概念。

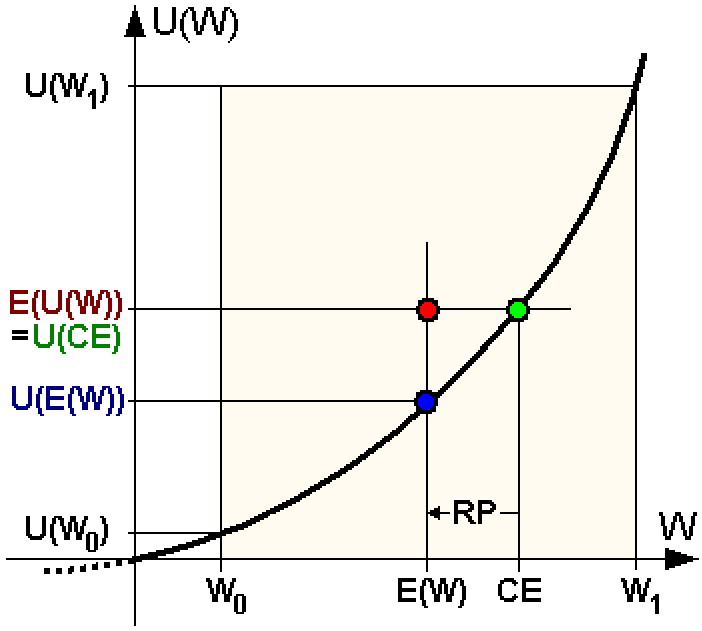
我们还是通过一个例子来说明。如果有两个选择，第一个是可以得到确定的50元，第二个是有50%概率得到100元而50%概率什么也得不到。两个选择的期望收益都是50元，这种情况下风险厌恶者会选择第一个，而风险中性者(Risk-neutral)则认为这两个选择没有不同，最后偏好风险者(Risk Loving)会选择第二种方案即使第一种方案中的确定性收入比50要多。

第一种方案中的确定性收入50元称为确定等值，第二种方案中的期望收入50元与确定等值之间的差称为风险溢价(Risk premium).



Risk Aversion





Risk Neutral Risk Loving

从图中我们可以看出，风险厌恶者需要正的风险溢价，风险中性者的风险溢价为0，而风险偏好者可以接受负的风险溢价。

接下来，我们要说明一下如何衡量风险厌恶，因为不同投资者具有不同的风险厌恶程度。

风险厌恶者讨厌期望收益为0的风险，我们可以用投资者接受付出多少来消除0收益风险ϵ。关于风险溢价，我们可以这样理解：

$$E(U(W+\epsilon)) = U(W-RP)$$

上式表明，当出现风险的时候，必须有相应的风险溢价进行补偿。

上式左边做二阶泰勒展开：

$$E(U(W+\epsilon)) \simeq E[U(W) + \epsilon U'(W) + \frac{\epsilon^2}{2}U''(W)]$$

$$= U(W) + \frac{\sigma_\epsilon^2}{2}U''(W)$$

其中$\sigma_\epsilon^2 := E(\epsilon^2)$

右边做一阶泰勒展开：

$U(W-RP) \simeq U(W) - RP * U'(W)$

把结果带回原式，得到：

$RP \simeq \frac{\sigma_\epsilon^2}{2} A(W)$,

其中 $A(W) := -\frac{U''(W)}{U'(W)}$，这个就是**绝对风险厌恶系数**，它表示了投资者对风险厌恶的程度，从数学上就是效用函数曲线的凹度。直观上可以解释为财富增长的速度的变化程度再以财富增长的速度进行规范化。

实践中，我们经常采用**相对风险厌恶系数**，它表示了风险厌恶程度与财富多少的关系，定义为：

$R(W) = -W * \frac{U''(W)}{U'(W)}$

最后，我们需要讨论一下MPT理论中的优化目标与期望效用理论的结合点：

首先，我们定义一个偏好函数$V(\mu, \sigma)$, μ, σ分别代表投资收益的均值和标准差。

我们认为

$V_\mu := \frac{\partial V(\mu,\sigma)}{\partial \mu} > 0$,

$V_\sigma := \frac{\partial V(\mu,\sigma)}{\partial \sigma} < 0$

随着收益的增加，投资者喜好程度增加；

随着风险的增加，投资者喜好程度减少。

回想MPT中所定义的优化目标为最小化$W\Sigma W^T - q * R^T W$。（注意：这里的W为权重）

这个问题可以转化为最大化

$q * R^T W - W\Sigma W^T$，这里的q非负，为风险容忍因子；$R^T W = \mu$是收益，$W\Sigma W^T = \sigma^2$为收益的方差。

又可转化为最大化

$\mu - \frac{1}{2}\lambda\sigma^2$, 其中$\lambda = \frac{1}{q}$，多出来的$\frac{1}{2}$不改变任何事情和参数，只是为了求导时化简方便。

这里的λ就是风险厌恶系数。

我们观察MPT的优化目标不难发现其符合偏好函数$V(\mu, \sigma)$的特性，实施上其严格的数学推导还需要收益为正态分布的假设，这些已经超出本文的范围，有兴趣的读者可以查阅相关文献。

四. 总结

实际上，效用理论的应用范围非常广，效用函数的构造方法非常多。本文只是简要介绍了期望效用理论在资产组合优化上的应用，并给出了其最核心的概念，例如风险厌恶系数等。

从资产组合理论上来说，均值方差分析是一个重要分支。另外一个同样重要的分析方法是边缘条件随机优势(Marginal conditional stochastic dominance)，该方法主要是通过比较投资组合是否具备二阶随机优势来半段投资组合的有效性。这套理论和方法将在《实践篇》中给出介绍。