5 Kinetik

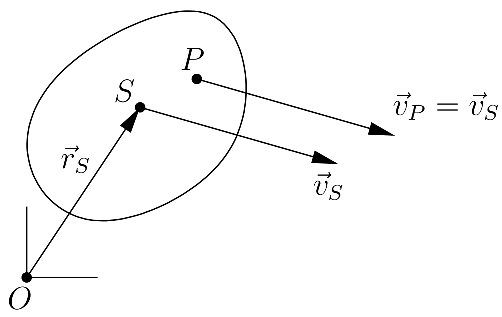
In der Kinetik wird der Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungen untersucht. Er kann durch Gleichungen mathematisch formuliert werden, die auf einigen wenigen grundlegenden Beziehungen beruhen. Die Grundgesetze spiegeln allgemeine Erfahrungen wider und werden axiomatisch eingeführt. Ihre Darstellung hängt vom **Bezugssystem** ab, das zur Beschreibung verwendet wird. Zweckmäßigerweise wählt man (zunächst) sog. **Inertialsysteme**, das sind Bezugsysteme, in denen das folgende **Trägheitsgesetz** (Galilei, Newton) gilt:

- Jeder Körper bleibt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmig geradlinigen Bewegung, sofern keine äußeren Kräfte auf ihn einwirken.

Häufig verwendet man ein mit der Erde fest verbundenes Bezugsystem, das für die meisten technischen Anwendungen als ruhendes Inertialsystem angesehen werden kann.

5.1 Kinetische Grundbegriffe

In den ersten beiden Abschnitten betrachten wir **rein translatorische Bewegungen** starrer Körper gegenüber einem Inertialsystem. Alle Punkte des Körpers haben also dieselbe Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ und erfahren dieselbe Beschleunigung $\vec{a}_S$ wie der Schwerpunkt S. Eine solche Bewegung muss nicht geradlinig sein. Die Bahnkurven können gekrümmt sein und sind kongruent.



Die Bewegung des Körpers kann dann auf die Bewegung des Schwerpunkts reduziert werden. Man spricht von der **Kinetik des Schwerpunkts** oder auch von der **Kinetik des Massen(mittel)punkts**.

Zur Formulierung der kinetischen Grundgleichungen benötigt man einige kinetische Begriffe, die zunächst erklärt werden müssen:

Impuls des Körpers $\quad \vec{p} := m\vec{v}_S$

- Der Impuls $\vec{p}$ eines mechanischen Systems ist das Produkt aus der Masse m und der Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ des Massenmittelpunkts.

Drehimpuls oder **Drall** (auch **Impulsmoment**) bezüglich eines Punktes O:

$$\vec{L}_O := \vec{r}_S \times \vec{p}$$

$$\text{oder} \quad \vec{L}_O := \vec{r}_S \times m\vec{v}_S$$

Beachte: Impuls und Drall sind Vektoren. Der Impulsvektor $\vec{p}$ hat dieselbe Richtung wie der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_S$. Der Drallvektor hängt von der Lage des Bezugspunkts O ab.

Kinetische Energie der Translationsbewegung

$$T := \frac{1}{2} m v_S^2$$

5.2 Kinetik des Schwerpunkts

Das fundamentale **Bewegungsgesetz** für einen Körper konstanter Masse lautet folgendermaßen (2. Newtonsches Axiom):

- Die zeitliche Änderung des Impulses ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F} \\ \text{oder} \quad m\frac{d\vec{v}_S}{dt} &= \vec{F} \\ \text{oder} \quad m\,\vec{a}_S &= \vec{F} \end{aligned}$$

"Masse mal Beschleunigung ist Kraft". Bei einer ebenen Bewegung folgen daraus zwei skalare Komponentengleichungen

$$m\ddot{x}_S = F_x, \qquad m\ddot{z}_S = F_z$$

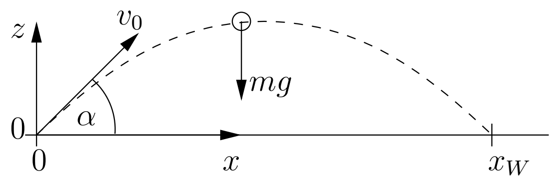
Beachte: $\vec{F}$ ist die Resultierende der am frei geschnittenen Körper angreifenden Kräfte. Bei einer rein translatorischen Bewegung geht ihre Wirkungslinie naturgemäß durch den Schwerpunkt. Der Beschleunigungsvektor $\vec{a}_S$ hat demnach dieselbe Richtung wie $\vec{F}$.

- Bei Abwesenheit äußerer Kräfte bleibt der Impuls eines Systems erhalten (**Impulserhaltungssatz**):

  $$\vec{p} = m\vec{v}_S = \text{ const, wenn } \vec{F} = \vec{0}.$$

  Infolgedessen ist dann die Schwerpunktsgeschwindigkeit konstant (gleichförmige Bewegung).

Beispiel 5.1: Schiefer Wurf unter Wirkung der Schwerkraft. Die Punktmasse m wird zur Zeit $t = 0$ unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v_0 abgeschossen. Der Luftwiderstand wird vernachlässigt. Wir verwenden zweckmäßigerweise kartesische Koordinaten x (horizontal) und z (vertikal nach oben).



Integration der Bewegungsgleichungen:

$$m\ddot{x}(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}(t) = C_1 \quad \rightarrow \quad x(t) = C_1 t + C_2$$

$$m\ddot{z}(t) = -mg \quad \rightarrow \quad \dot{z}(t) = -gt + C_3 \quad \rightarrow \quad z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_4$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \quad \rightarrow \quad C_1 = v_0 \cos\alpha$$

$$z(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0$$

$$\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha \quad \rightarrow \quad C_3 = v_0 \sin\alpha$$

Analytisches Ergebnis mit der Zeit t als Parameter:

$$x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t$$

Elimination der Zeit t:

$$z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2 + \tan\alpha \cdot x \qquad \text{Wurfparabel}$$

Die Wurfweite x_W folgt aus der Bedingung, dass $z(x_w) = 0$:

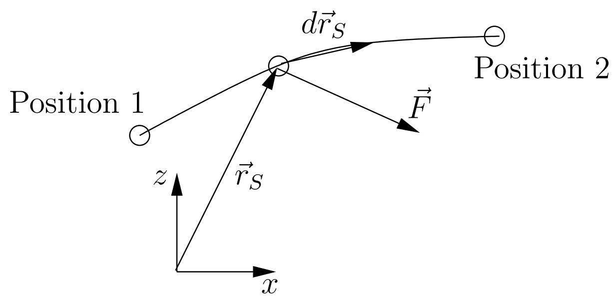
$$x_w = \frac{2v_0^2 \cos^2\alpha}{g} \tan\alpha \quad \rightarrow \quad x_w = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Die Wurfzeit t_w folgt dann aus der Bedingung $x(t_w) = x_w$:

$$t_w = \frac{x_w}{v_0 \cos\alpha} \quad \rightarrow \quad t_w = \frac{2v_0}{g} \sin\alpha$$

Bei der Verschiebung des Schwerpunkts längs der Bahn leisten die an ihm angreifenden Kräfte **Arbeit**.

Definitionen:
differentielle Arbeit $dW := \vec{F} \cdot d\vec{r}_S$
Arbeit, die zwischen zwei Positionen verrichtet wird, $W_{12} := \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}_S$
mechanische Leistung $P := \vec{F} \cdot \vec{v}_S$



Beachte: Kräfte senkrecht zur Bahn leisten keine Arbeit.

Integriert man das Bewegungsgesetz zwischen den Positionen 1 und 2, so erhält man die folgende Aussage:

- Die bei der Schwerpunktsverschiebung verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung der kinetischen Energie (**Arbeitssatz**),

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

Eine besondere Form des Arbeitssatzes entsteht, wenn die Arbeit leistenden Kräfte ein Potential besitzen, d.h. wenn die Arbeit W_{12} nur von den Ortskoordinaten der Bahnpunkte 1 und 2, nicht aber vom durchlaufenen Weg abhängt. Das gilt z.B. für die Gewichtskraft:

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \qquad d\vec{r}_S = \begin{pmatrix} dx_S \\ dy_S \\ dz_S \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \vec{G} \cdot d\vec{r}_S = -mg\, dz_S$$

$$\rightarrow \quad W_{12} = -mg \int_1^2 dz_S = -mg(z_{S2} - z_{S1}) = -(U_2 - U_1)$$

$$\text{mit} \quad U := mgz_S \quad \textbf{potentielle Energie}$$

Unter der Voraussetzung, dass andere am Massenpunkt angreifende Kräfte senkrecht zur Bahn gerichtet sind und somit keine Arbeit verrichten, gilt dann:

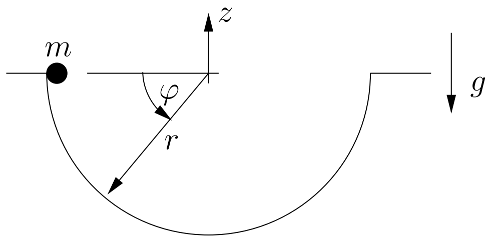
$$T_2 + U_2 = T_1 + U_1$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{2} m v_S^2 + mgz_S = \text{const.}$$

d.h. die Summe aus kinetischer Energie und potentieller Energie bleibt während der Bewegung konstant (**Energieerhaltungssatz**).

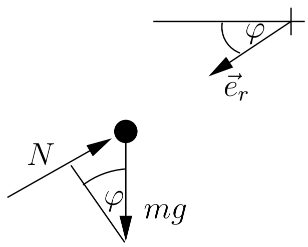
Achtung: Keine Potentialkräfte sind Reibungskräfte oder Luftwiderstandskräfte.

Beispiel 5.2: Reibungsfreie, geführte Bewegung einer Punktmasse m in einer halbkreisförmigen Schale (Radius r) aus der skizzierten Ruhelage heraus.



Gesucht sind die Bahngeschwindigkeit v der Masse und die von der Schale auf die Masse ausgeübte Stützkraft N in Abhängigkeit vom Winkel φ.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Energieerhaltungssatz:} & \frac{m}{2}v^2 + mgz = 0 + 0 \\ \text{Geometrische Beziehung:} & z = -r\sin\varphi \end{array}\right\} \to \underline{v = \sqrt{2gr\sin\varphi}}$$



Bewegungsgleichung in radialer Richtung $\vec{e}_r$:

$$ma_r = -N + mg\sin\varphi$$

Bei einer Kreisbewegung gilt (s. §4.1)

$$a_r = -r\dot{\varphi}^2 = -\frac{v^2}{r}$$

$$\to \quad N = mg\sin\varphi + m\frac{v^2}{r}$$

$$\underline{N = 3mg\sin\varphi}$$

Ergänzung: Das Bewegungsgesetz des Schwerpunkts

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad \text{(Impulsform)}$$

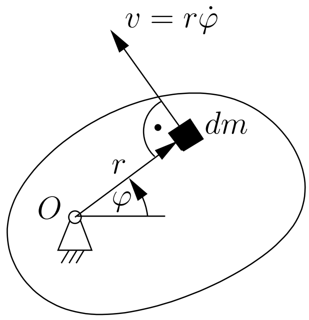
kann auch folgendermaßen formuliert werden:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad \text{(Drehimpulsform)}$$

- Die zeitliche Änderung des Drehimpulses eines Massenpunktes bezogen auf einen ruhenden Bezugspunkt O ist gleich dem resultierenden Moment der angreifenden Kräfte, bezogen auf denselben Punkt O.

5.3 Rotation um eine feste Achse

In diesem Abschnitt geht es um den Zusammenhang zwischen den Kräften und der Bewegung eines starren Körpers, der sich um eine feste Achse drehen kann. Dabei durchläuft jedes Massenelement eine Kreisbahn. Die Geschwindigkeit v hängt vom Abstand r zur Drehachse ab; die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist für alle Massenelemente gleich, ändert sich aber i. allg. mit der Zeit t.



Masse des Elements	dm
Geschwindigkeit	$v = r\dot{\varphi}$
Impuls	$dp = r\dot{\varphi}\, dm$
Drehimpuls bezüglich der Drehachse	$dL_O = r^2\dot{\varphi}\, dm$
Drehimpuls des gesamten Körpers	$L_O = \int_{\text{Körper}} r^2\, dm\, \dot{\varphi}$, kurz: $L_O = J_O\dot{\varphi}$

Dabei bezeichnet

$$J_O := \int_{\text{Körper}} r^2\, dm$$

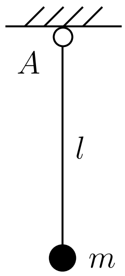
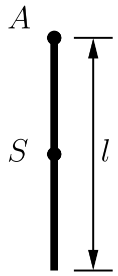
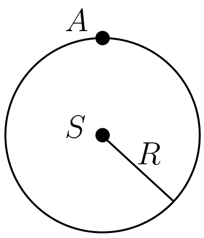
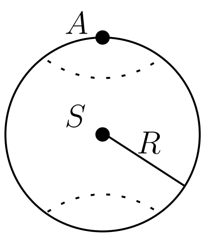
das axiale **Massenträgheitsmoment**.

Durch Integration über alle Massenelemente des Körpers kann das Bewegungsgesetz für die einzelnen Massenelemente (Drehimpulsform) in einen Drehimpulssatz für den gesamten Körper überführt werden:

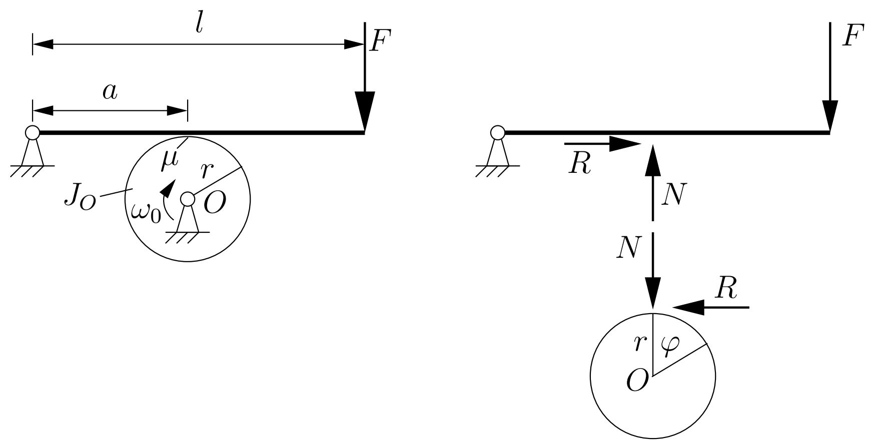
$$\frac{dL_O}{dt} = M_O$$

$$\text{oder} \quad J_O\ddot{\varphi} = M_O$$

Die Tabelle gibt Auskunft über die Massenträgheitsmomente einiger geometrisch einfacher Körper.

Form des Körpers		Massenträgheitsmoment
	Punktmasse	$J_A = ml^2$
	dünner Stab	$J_A = \frac{1}{3}ml^2$ $J_S = \frac{1}{12}ml^2$
	homogener Kreiszylinder	$J_A = \frac{3}{2}mR^2$ $J_S = \frac{1}{2}mR^2$
	homogene Kugel	$J_A = \frac{7}{5}mR^2$ $J_S = \frac{2}{5}mR^2$

Beispiel 5.3: Eine Trommel (Radius r, Massenträgheitsmoment J_O) dreht sich anfangs mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 und wird dann durch einen Hebel (Hebellängen l und a, Reibkoeffizient μ) mit konstanter Bremskraft F abgebremst. Wie lange dauert der Bremsvorgang bis zum Stillstand?



Lösungsskizze:

a) Trennen der Bindung zwischen Trommel und Hebel unter Berücksichtigung des Reaktionsprinzips, Gleichgewichtsbedingungen am Hebel, Coulbombsches Reibgesetz (§ 2.6):

$$N = \frac{l}{a} F$$

$$R = \mu N = \mu \frac{l}{a} F$$

b) Bewegungsgleichung der rotierenden Trommel, Integration mit der Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$:

$$\stackrel{\frown}{O}: \quad J_O \ddot{\varphi}(t) = -rR$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{r\mu l F}{a J_O} = \text{const}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\varphi}(t) = -\frac{r\mu l F}{a J_O} t + \omega_0$$

c) Aus der Bedingung $\dot{\varphi}(t_s) = 0$ folgt die Bremszeit bis zum Stillstand

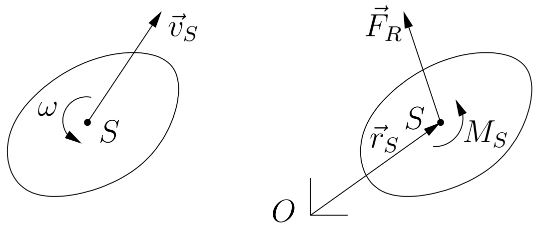
$$\underline{t_s = \frac{a J_O \omega}{r \mu l F}}$$

Hinweis auf die Analogie zwischen der Rotationsbewegung um eine feste Achse und einer geradlinigen Translationsbewegung

Translation		Rotation	
Lagekoordinate	$x(t)$	Winkelkoordinate	$\varphi(t)$
Geschwindigkeit	$v = \dot{x}$	Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \dot{\varphi}$
Beschleunigung	$a = \dot{v} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung	$\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Masse	m	Massenträgheitsmoment	J_O
Impuls	$p = mv$	Drehimpuls	$L_O = J_O\omega$
Kraft	F	Moment	M_O
Bewegungsgleichung	$m\ddot{x} = F$		$J_O\ddot{\varphi} = M_O$
kinetische Energie	$T = \frac{1}{2}mv^2$		$T = \frac{1}{2}J_O\omega^2$
Arbeit	$W_{12} = \int_1^2 F\,dx$		$W_{12} = \int_1^2 M_O\,d\varphi$
mechanische Leistung	$P = Fv$		$P = M_O\omega$

5.4 Kinetik ebener Starrkörperbewegungen

Die ebene Bewegung eines starren Körpers kann als Überlagerung einer Translation (2 Freiheitsgrade) und einer Rotation (1 Freiheitsgrad) aufgefasst werden (§ 4.2). Ein solcher Bewegungszustand kann durch die Geschwindigkeit eines körperfesten Punkts, z.B. die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ des Schwerpunkts, und durch die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers beschrieben werden. Zum Studium des zeitlichen Ablaufs der Bewegung benötigt man drei Bewegungsgleichungen. Die Behandlung einer Starrkörperbewegung als ebene Bewegung setzt voraus, dass die am Körper angreifenden Kräfte auf eine Resultierende innerhalb der Bewegungsebene und auf ein Moment senkrecht zur Bewegungsebene reduziert werden können.



Zur Formulierung der Bewegungsgesetze benötigt man die zuvor schon verwendeten kinetischen Grundbegriffe, zum Teil in sinngemäßer Verallgemeinerung.

Impuls des Körpers

$$\vec{p} = m\vec{v}_S$$

Drehimpuls oder **Drall** des Körpers **bezüglich** einer zur Bewegungsebene senkrechten Achse durch den **bewegten Schwerpunkt** S

$$L_S = J_S\omega$$

Kinetische Energie des Körpers als Summe aus der Translations- und Rotationsenergie

$$T = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2$$

Drehimpuls bezüglich eines raumfesten Punkts O

$$\vec{L}_O = \vec{r}_S \times \vec{p} + \vec{L}_S$$

Das **Bewegungsgesetz** für den **translatorischen Anteil der Bewegung** wurde bereits in § 5.2 formuliert.

- Die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers ist gleich der Resultierenden der an ihm angreifenden Kräfte (2. Newtonsches Axiom):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_R$$

$$\text{oder} \quad m\frac{d\vec{v}_S}{dt} = \vec{F}_R$$

- Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden ("Schwerpunktsatz").

Bei einer ebenen Bewegung folgen daraus zwei Bewegungsgleichungen. Bei Verwendung kartesischer Koordinaten lauten sie

$$m\ddot{x}_S = \sum_i F_{ix}, \qquad m\ddot{y}_S = \sum_i F_{iy}$$

Für den **rotatorischen Anteil der Bewegung** gilt folgendes **Bewegungsgesetz**:

- Die zeitliche Änderung des Dralls eines Körpers ist gleich dem Moment der an ihm angreifenden Kräfte, jeweils **bezogen auf** denselben **raumfesten Punkt** O (Eulersches Axiom):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O \quad \text{mit} \quad \vec{M}_O = \vec{r}_S \times \vec{F}_R + \vec{M}_S$$

Die Anwendung dieses Drallsatzes wird erleichtert, wenn man ihn mit dem Impulssatz verknüpft. Dann folgt nämlich eine analoge Aussage **bezüglich des bewegten Schwerpunkts**:

$$\frac{dL_S}{dt} = M_S$$

$$\text{oder} \quad J_S\dot{\omega} = M_S$$

$$\text{oder} \quad J_S\ddot{\varphi} = M_S$$

- Die zeitliche Änderung des auf den Schwerpunkt bezogenen Dralls eines Körpers ist gleich dem Moment der angreifenden Kräfte bezüglich des Schwerpunkts.

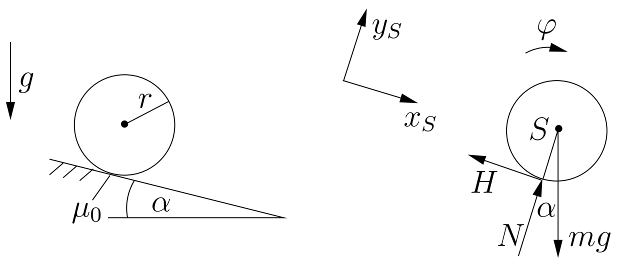
Im **Sonderfall einer Drehung** des Starrkörpers **um eine feste Achse** durch den Punkt O kann man alternativ auch folgende Bewegungsgleichung verwenden (§ 5.3):

$$J_O\ddot{\varphi} = M_O$$

Zwischen den beiden Massenträgheitsmomenten J_S und J_O besteht folgender Zusammenhang (Steinerscher Satz):

$$J_O = J_S + mr_S^2$$

Beispiel 5.4: Rollendes Rad (Radius r, Masse m, Massenträgheitsmoment $J_S = \frac{1}{2}mr^2$) auf abschüssiger Straße (Neigungswinkel α)



Bewegungsgleichungen:

$$\begin{array}{lrcll} \searrow & m\ddot{x}_S & = & mg\sin\alpha - H & \\ \nearrow & 0 & = & N - mg\cos\alpha & \rightarrow \quad \underline{N = mg\cos\alpha} \\ \overset{\frown}{S} & J_S\ddot{\varphi} & = & Hr & \end{array}$$

Rollbedingung:

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \underline{\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}_S}{r}}$$

Elimination der Haftkraft H ergibt die Schwerpunktsbeschleunigung

$$m\ddot{x}_S = mg\sin\alpha - \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S \quad \rightarrow \quad \underline{\ddot{x}_S = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{J_S}{mr^2}} = \frac{2}{3}g\sin\alpha}$$

Danach folgt für die Haftkraft

$$H = \frac{J_S}{r^2}\ddot{x}_S \quad \rightarrow \quad \underline{H = \frac{\frac{J_S}{r^2}}{1 + \frac{J_S}{mr^2}}g\sin\alpha = \frac{1}{3}mg\sin\alpha}$$

Haftbedingung:

$$H \leq \mu_0 N \quad \rightarrow \quad \frac{H}{N} = \frac{1}{3}\tan\alpha \leq \mu_0$$

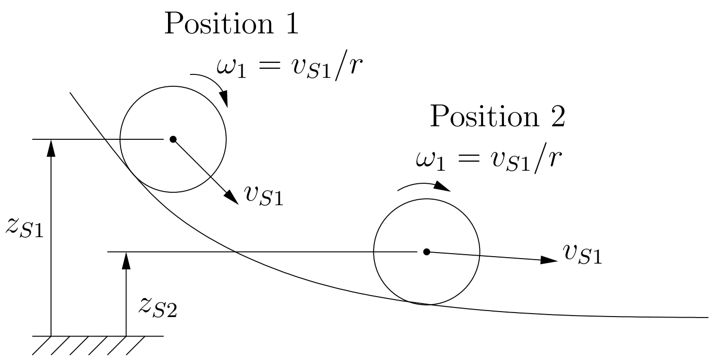
Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, rutscht das Rad.

Bei einem rollenden Rad ist der Kontaktpunkt mit der Straße der Momentanpol der Bewegung. Die Kontaktkräfte N und H leisten deshalb keine Arbeit. Die Schwerkraft mg besitzt ein Potential (s. § 5.2, potentielle Energie $U = mgz_S$). In Abwesenheit anderer äußerer Kräfte gilt deshalb der **Energieerhaltungssatz**

$$T + U = \text{konst}$$

$$\frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}J_S\omega^2 + mgz_S = \text{konst}$$

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{r^2}\right)v_{S1}^2 + mgz_{S1} = \frac{1}{2}\left(m + \frac{J_S}{r^2}\right)v_{S2}^2 + mgz_{S2}$$

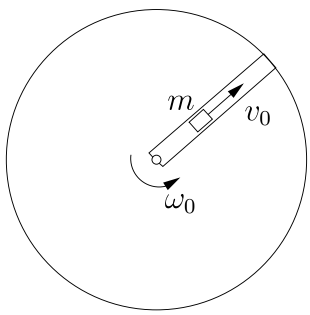


Weitere Anwendungsbeispiele in der Vorlesung.

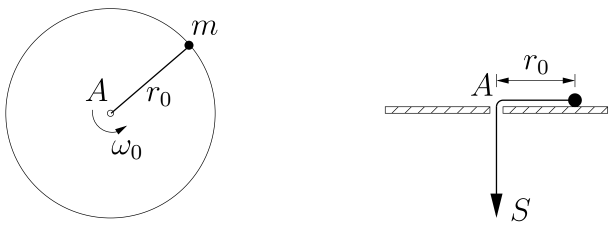
5.5 Aufgaben

Aufgabe 5.1: Von der Spitze eines Turmes wird eine Masse mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 8$ m/s unter einem Winkel $\alpha = 30°$ gegen die Horizontale abgeworfen. Sie trifft im Abstand $L = 10$ m vom Fuß des Turmes auf.
a) Welche Höhe H hat der Turm? b) Wie lange fliegt der Körper? c) Mit welcher Geschwindigkeit schägt er auf?

Aufgabe 5.2: Eine Kreisscheibe dreht sich in einer horizontalen Ebene mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_0. In einer glatten Führungsschiene bewegt sich eine Punktmasse m in radialer Richtung. Die Masse soll dabei relativ zur Scheibe eine konstante Geschwindigkeit v_0 besitzen.
Welche Kräfte wirken auf die Masse?



Aufgabe 5.3: Eine Masse m, die von einem Faden gehalten wird, bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 auf einer glatten waagrechten Kreisbahn vom Radius r_0. Der Faden wird durch ein Loch A in der Mitte der Kreisbahn geführt.
a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit ω, wenn der Faden so angezogen wird, daß sich die Masse im Abstand r bewegt?
b) Wie ändert sich hierbei die Fadenkraft S?



Aufgabe 5.4: Ein Gewicht G_1 ist durch ein Seil mit einer Walze (Masse m_2, Massenträgheitsmoment J_2, Radius r) verbunden, die auf einer horizontalen Ebene rollt. Die Walze wird durch eine Feder (Federsteifigkeit c gehalten). Seil und Umlenkrolle seien masselos. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Gewichts in Abhängigkeit vom Weg, wenn das System bei entspannter Feder aus der Ruhe losgelassen wird?