3 Einblick in die Elastostatik

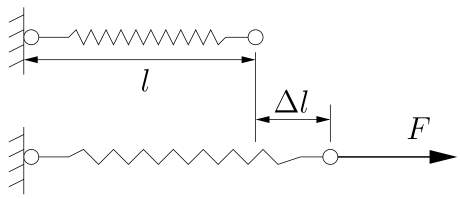
Reale Körper verformen sich unter Wirkung äußerer Kräfte und Momente. In der Elastostatik geht es um die innere Beanspruchung elastisch deformierbarer Festkörper. Die Idealisierung des starren Körpers wird damit aufgegeben. Ziel der Untersuchungen ist es, die Beanspruchung von Bauteilen und ihre Verformung unter auftretenden (oder angenommenen) Belastungen vorauszuberechnen. Das ermöglicht dann, die Bauteile so zu dimensionieren, dass ihre Festigkeit gewährleistet werden kann.

Wir beschränken uns hier auf stabförmige Körper.

3.1 Einachsiger Spannungszustand

In der Vorlesung werden zunächst wichtige Begriffe, physikalische Größen, ihre Formelzeichen und Einheiten sowie grundlegende Zusammenhänge erläutert.

Zugfeder:



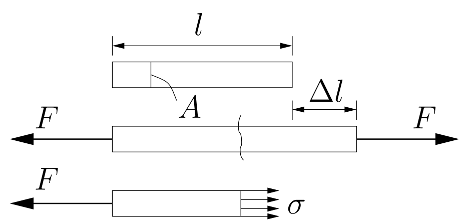
l	[m]	Länge im unbelasteten Zustand
Δl	[mm]	Längenänderung unter Wirkung der Zugkraft F [N]

Elastizitätsgesetz

$$F = c\Delta l$$

$c \left[\dfrac{\text{N}}{\text{mm}}\right]$ **Federkonstante**

Zylindrischer **Zugstab**:

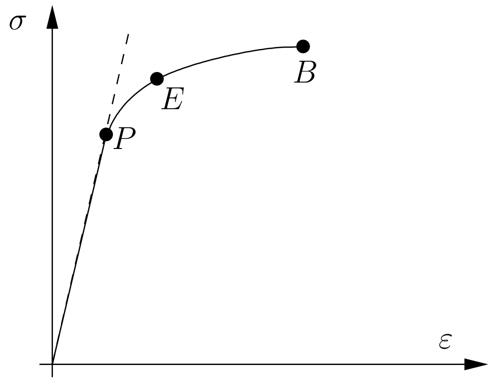


Länge l und Längenänderung Δl wie zuvor
A [mm^2] Querschnittsfläche

Dehnung $\quad \varepsilon := \dfrac{\Delta l}{l}\,[-]$

Normalspannung $\quad \sigma := \dfrac{F}{A}\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2} = \mathrm{MPa}\right]$ $\qquad$ beachte: $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$

Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines Werkstoffs im Zugversuch



P – Proportionalitätsgrenze

E – Elastizitätsgrenze

B – Bruchgrenze

Im linear-elastischen Bereich (bis zum Punkt P) gilt das **Hookesche Gesetz**

$$\sigma = E\varepsilon$$

$E\left[\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$ $\quad$ **Elastizitätsmodul** des Werkstoffs

Eliminiert man ε und σ mit den definierten Gleichungen, so erhält man

$$F = \frac{EA}{l}\Delta l \qquad \text{oder} \qquad \Delta l = \frac{Fl}{EA}$$

Somit ist $\dfrac{EA}{l}$ die Federkonstante eines Zugstabs.

EA [N] heißt **Dehnsteifigkeit**.

Ergänzungen:

a) Schneidet man einen Zugstab schräg zur Richtung der eingeleiteten Kraft, so findet man in dieser Schnittfläche nicht nur eine Normalspannung, sondern auch eine Tangentialspannung (Schubspannung).

b) Zum einachsigen Spannungszustand eines Zugstabs gehört ein mehrachsiger Verzerrungszustand, denn mit der Längenänderung Δl ist in der Regel eine Änderung Δd des Stabdurchmessers d verbunden. Es tritt also auch eine Querdehnung $\varepsilon_q := \Delta d/d$ auf.

   Die **Querkontraktionszahl**

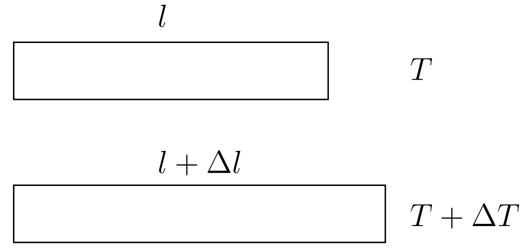
   $$\nu := -\frac{\text{Querdehnung}}{\text{Längsdehnung}} = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon}$$

   ist ein zweiter, vom E-Modul unabhängiger Materialparameter bei linear-elastischer Werkstoffbeanspruchung.

c) Erwärmt man einen Stab, so erfährt er eine zur Temperaturdifferenz ΔT [K] proportionale **Wärmedehnung**

$$\varepsilon_T = \alpha\, \Delta T$$

$\alpha \left[\dfrac{1}{\mathrm{K}}\right]$ heißt **thermischer Ausdehnungskoeffizient**



Bei gleichzeitiger mechanischer und thermischer Belastung des Stabes ergibt sich die Gesamtdehnung ε als Summe der Teildehnungen:

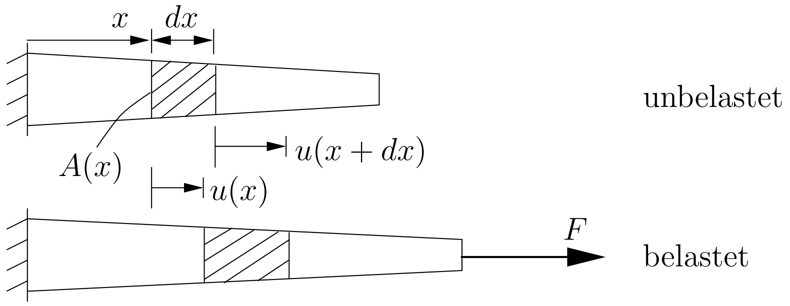
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha\, \Delta T$$

d) In einem Zugstab, dessen Querschnittsfläche $A(x)$ oder dessen Schnittkraft $N(x)$ sich in Längsrichtung (x-Richtung) ändern, gilt das Hookesche Gesetz

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

an jeder Position x mit den lokalen Werten für $\sigma(x) = \dfrac{N(x)}{A(x)}$ und $\varepsilon(x)$.

Zur Identifikation der lokalen Dehnung $\varepsilon(x)$ betrachten wir ein Stabelement der Länge dx. Seine Längenänderung ergibt sich aus den Verschiebungen der Randquerschnitte.



$u(x)$ [mm] ist die **Verschiebung** des Querschnitts $A(x)$ infolge der Belastung.

$$\begin{aligned}
\text{Dehnung} &= \frac{\text{Längenänderung}}{\text{Länge}} \\
\varepsilon(x) &= \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx} \\
\varepsilon(x) &= \frac{du(x)}{dx} \\
\rightarrow \qquad \frac{du(x)}{dx} &= \frac{N(x)}{EA(x)}
\end{aligned}$$

Die Längenänderung des Stabes ergibt sich dann durch Integration:

$$\Delta l = u(l) - u(0) = \int_0^l \frac{du(x)}{dx} dx = \int_0^l \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Die Tabelle enthält Richtwerte für die in der Elastostatik benötigten Stoffwerte technisch relevanter Werkstoffe.

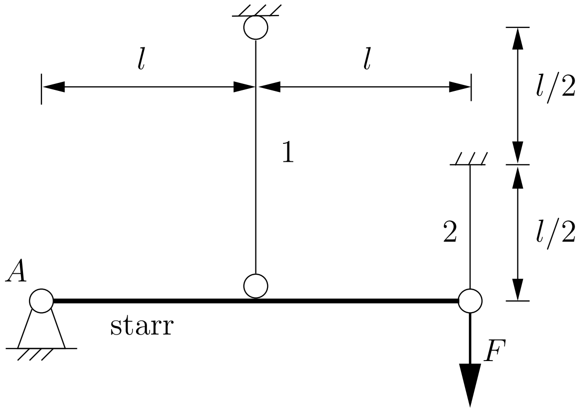
Werkstoff	Elastizitätsmodul $E \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right]$	Querkontraktionszahl ν [–]	thermischer Ausdehnungskoeffizient $\alpha \left[\frac{1}{\mathrm{K}}\right]$
Stahl	200 000	0,3	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	120 000	0,35	$1,6 \cdot 10^{-5}$
Gusseisen	100 000	0,25	$0,9 \cdot 10^{-5}$
Aluminium	70 000	0,33	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Glas	60 000	0,25	$0,9 \cdot 10^{-5}$

3.2 Statisch unbestimmte Stabsysteme

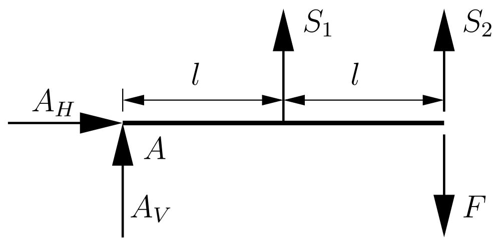
Bei statisch unbestimmten Stabsystemen können die Lagerreaktionen und/oder die Stabkräfte nicht aus den Gleichgewichtsbedingungen allein ermittelt werden. Außer den Gleichgewichtsbedingungen müssen dann auch die Elastizitätsgesetze der einzelnen Stäbe und die Geometrie der Verformung (**Kompatibilität**) betrachtet werden.

Nähere Erläuterung in der Vorlesung anhand einiger Beispiele.

Beispiel 3.1: Ein starrer Balken ist an zwei verschieden langen, zylindrischen Stäben mit der gleichen Dehnsteifigkeit EA aufgehängt und wird an seinem Ende durch die Kraft F belastet. Gesucht sind die Kräfte in den Stäben und die Auflagerreaktionen bei A.



Freischneiden des starren Balkens und Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen liefert

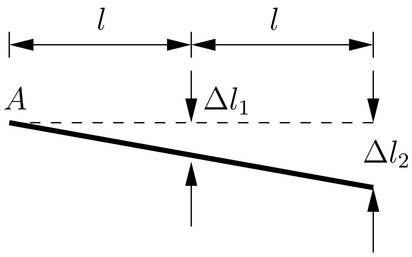


$$A_H = 0$$
$$A_V + S_1 + S_2 - F = 0$$
$$S_1 l + S_2 2l - F2l = 0$$

Außerdem gelten die Beziehungen für elastische Stäbe

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA}, \qquad \Delta l_2 = \frac{S_2 l}{2EA}$$

Da der Balken starr ist, besteht im übrigen der folgende geometrische Zusammenhang zwischen den Längenänderungen der Stäbe:

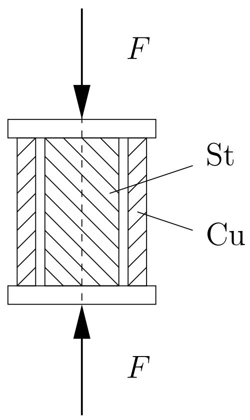


$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

Die Elimination der Längenänderungen ergibt zunächst das Zwischenergebnis $S_2 = 4S_1$. Mit den Gleichgewichtsbedingungen folgt dann

$$S_1 = \frac{2}{9}F, \quad S_2 = \frac{8}{9}F, \quad A_V = -\frac{1}{9}F$$

Beispiel 3.2: Ein Stahlzylinder (Querschnittsfläche A_{St}, Elastizitätsmodul E_{St}) und ein gleich langer kupferner Mantel (A_{Cu}, E_{Cu}) werden durch eine Kraft F zwischen zwei starren Platten gepresst. Wie groß sind die Kräfte im Zylinder und im Mantel und deren Dehnungen?

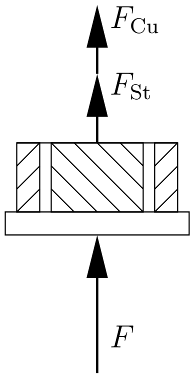


Allgemeiner Hinweise: Erst formelmäßig lösen, dann Zahlen einsetzen!

Hier: $A_{\mathrm{St}} = 360\ \mathrm{cm}^2$, $E_{\mathrm{St}} = 2,0 \cdot 10^5$ MPa, $A_{\mathrm{Cu}} = 300\ \mathrm{cm}^2$, $E_{\mathrm{Cu}} = 1,2 \cdot 10^5$ MPa, $F = 600$ kN.

Freischneiden führt zur Gleichgewichtsbedingung

$$F_{\mathrm{St}} + F_{\mathrm{Cu}} + F = 0$$



Außerdem haben wir die Beziehungen für elastische Zugstäbe

$$\Delta l_{\mathrm{St}} = \frac{F_{\mathrm{St}} l}{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}}}, \quad \Delta l_{\mathrm{Cu}} = \frac{F_{\mathrm{Cu}} l}{E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}}$$

und die geometrische Zwangsbedingung

$$\Delta l_{\mathrm{St}} = \Delta l_{\mathrm{Cu}}$$

Auflösen dieses linearen Gleichungssystems ergibt

$$F_{\mathrm{St}} = -\frac{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}}}{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}} + E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}} F, \quad F_{\mathrm{Cu}} = -\frac{E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}}{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}} + E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}} F$$

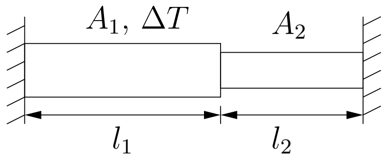
$$\Delta l_{\mathrm{St}} = \Delta l_{\mathrm{Cu}} = -\frac{F l}{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}} + E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{\mathrm{St}} = \varepsilon_{\mathrm{Cu}} = -\frac{F}{E_{\mathrm{St}} A_{\mathrm{St}} + E_{\mathrm{Cu}} A_{\mathrm{Cu}}}$$

Zahlenergebnisse: $F_{\mathrm{St}} = -400$ kN, $F_{\mathrm{Cu}} = -200$ kN, $\varepsilon = -5,6 \cdot 10^{-5}$

- Bei der Parallelschaltung gleich langer Stäbe (Federn) addieren sich die Dehnsteifigkeiten (Federkonstanten).

Beispiel 3.3: Ein abgesetzter Aluminiumstab liegt zunächst spannungsfrei zwischen zwei starren Wänden. Im linken Teil wird nun die Temperatur um $\Delta T = 50$ K erhöht. Welche Spannungen treten in den beiden Stabteilen auf, und wie groß ist die Verschiebung an der Fügestelle?

Gegeben sind $l_1 = 60$ cm, $l_2 = 40$ cm, $A_1 = 30\ \mathrm{cm}^2$, $A_2 = 10\ \mathrm{cm}^2$, $\alpha = 2.3 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, $E = 70\,000$ MPa



Lösungsskizze:

Gleichgewichtsbedingung

$$F_1 = F_2 \quad (= F)$$

Hookesches Gesetz unter Berücksichtigung der Wärmedehnung

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{F}{EA_1} + \alpha \Delta T, \quad \frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{F}{EA_2}$$

Geometrische Verträglichkeit

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$F = -\frac{\alpha \Delta T l_1}{\frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2}} = -80,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \qquad \sigma_1 = \frac{F}{A_1} = -26,8 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2} = -80,5 \text{ MPa}$$

$$\Delta l_1 = -\Delta l_2 = -\frac{F l_2}{EA_2} = 0,46 \text{ mm}$$

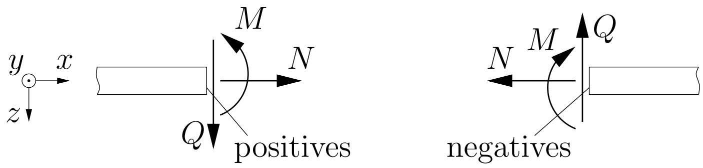
3.3 Biegung gerader Balken

Modellbildung der technischen Biegelehre:

- Stabförmige schlanke Bauteile, Querschnittsabmessungen klein im Verhältnis zur Länge,
- geradlinige Achse (x-Achse),
- homogene (überall gleiche) linear-elastische Werkstoffeigenschaften,
- Belastung senkrecht zur Achse, Beanspruchung auf Biegung,
- bei der Verformung des Balkens bleiben die Querschnitte eben und senkrecht zur Achse (**Bernoulli-Hypothese**),
- hier außerdem: Beschränkung auf Balken mit einer Symmetrieebene (x-z-Ebene), die äußere Belastung greife in dieser Ebene an, man spricht von **ebener Biegung**,
- aber: Querschnitt muss in Längsrichtung nicht notwendigerweise konstant sein.

Bei ebener Biegung treten im Balken folgende Schnittgrößen auf:

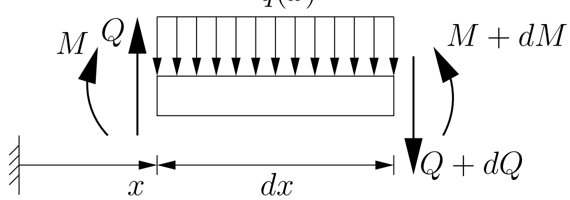
Normalkraft	N	in Richtung der Balkenachse (x-Richtung), hier: $N = 0$
Querkraft	Q	quer zur Balkenachse innerhalb der Symmetrieebene (z-Richtung)
Biegemoment	M	um die Schwerpunktachse senkrecht zur Lastebene (y-Achse)



Vorzeichenkonventionen:

- Ein Schnittufer heißt positiv, wenn die x-Achse aus der Schnittfläche heraus zeigt.
- Schnittgrößen sind positiv, wenn sie am positiven Schnittufer in die positive Koordinatenrichtung zeigen.
- Positive Schnittgrößen zeigen am negativen Schnittufer in die negative Koordinatenrichtung (Reaktionsaxiom).

In einem quer zur Achse belasteten Balken ändern sich die Schnittgrößen Q und M in Längsrichtung x.



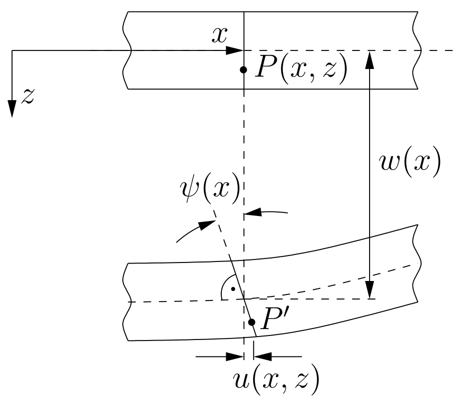
Die Gleichgewichtsbedingungen am Balkenelement unter Wirkung einer Streckenlast q [N/m] ergibt

$$dQ + q(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x)$$

$$dM - Q(x)dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

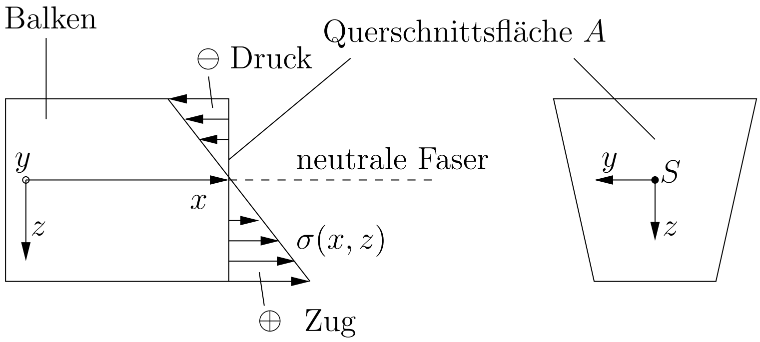
Mit der Biegung des Balkens ist eine Drehung der Querschnitte und eine Verschiebung der materiellen Punkte verbunden. Zur Beschreibung führt man folgende Größen ein:

$\psi(x)$	Drehwinkel des Querschnitts am Ort x
$w(x)$	Verschiebung der Achse in z-Richtung
$u(x,z)$	Verschiebung des Punktes $P(x,z)$ in x-Richtung



Die Bernoulli-Hypothese ergibt folgende (geometrische) Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}
&& \frac{dw(x)}{dx} &= -\tan\psi(x) \approx -\psi(x) \\
&& u(x,z) &= z\sin\psi(x) \approx z\psi(x) \\
\rightarrow && \varepsilon(x,z) &= \frac{d\psi(x)}{dx}z \quad \text{Dehnung} \\
\rightarrow && \sigma(x,z) &= E\psi'(x)z \quad \text{Normalspannung}
\end{aligned}$$



Die resultierende Normalkraft N entspricht dem Integral der Normalspannungsverteilung. N verschwindet bei Biegung, d.h.

$$N = \int_A \sigma(x,z)\,dA = E\psi'(x)\int_A z\,dA = E\psi'(x)z_S A = 0$$

$$\rightarrow \quad z_S = 0$$

- Die neutrale Faser eines gebogenen Balkens geht durch den Schwerpunkt der Querschnittsfläche.

Das aus der Spannungsverteilung resultierende Moment bezüglich der y-Achse ist

$$M(x) = \int_A z\sigma(x,z)\,dA = E\psi'(x)\int_A z^2\,dA = E\psi'(x)I_y$$

Wir begegnen hier dem **Flächenmoment 2. Ordung** bezüglich der y-Achse, das auch als (axiales) **Flächenträgheitsmoment** bezeichnet wird,

$$I_y := \int_A z^2 \, dA$$

Beachte: Die y-Achse geht durch den Flächenschwerpunkt S.

Die Tabelle enthält einige Beispiele.

Demnach ändert sich der Drehwinkel in x-Richtung proportional zum örtlichen Biegemoment:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI_y}$$

Das Produkt EI_y heißt **Biegesteifigkeit**.

Die Normalspannungsverteilung im gebogenen Balken kann deshalb auch folgendermaßen dargestellt werden:

$$\sigma(x, z) = \frac{M(x)}{I_y(x)} z$$

- Die größte Zugspannung tritt in einer Randfaser auf.

Wenn also wegen begrenzter Festigkeit des Werkstoffs zu fordern ist, dass eine **zulässige Spannung** nicht überschritten werden darf,

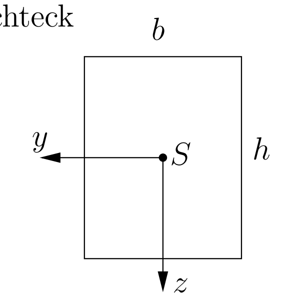
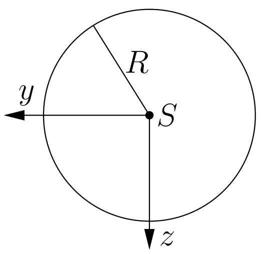
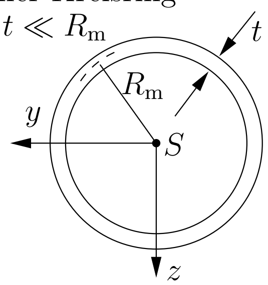
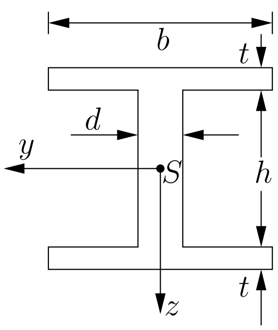
$$|\sigma|_{\max} \leq \sigma_{\text{zul}}$$

dann ist der Balken entweder so zu dimensionieren, dass an jeder Stelle x gilt:

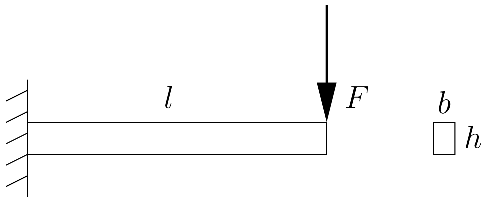
$$\frac{I_y}{|z|_{\max}} \geq \frac{|M|}{\sigma_{\text{zul}}}$$

Oder er darf nur so belastet werden, dass

$$|M| \leq \frac{I_y}{|z|_{\max}} \sigma_{\text{zul}}$$

Form der Fläche	Flächeninhalt	Flächenträgheitsmoment
Rechteck 	$A = bh$	$I_y = \dfrac{bh^3}{12}$
Kreis 	$A = \pi R^2$	$I_y = \dfrac{\pi R^4}{4}$
dünner Kreisring mit $t \ll R_\mathrm{m}$ 	$A = 2\pi R_\mathrm{m} t$	$I_y = \pi R_\mathrm{m}^3 t$
dünnes I-Profil mit $t \ll b$ 	$A = hd + 2bt$	$I_y = \dfrac{dh^3}{12} + \dfrac{h^2bt}{2}$

Beispiel 3.4: Ein zylindrischer Balken mit quadratischem Querschnitt (Kantenlänge $b = h = 0,2$ m, Länge $l = 3$ m) ist einseitig eingespannt. Wie groß darf die Kraft F höchstens sein, damit die zulässige Spannung $\sigma_{\text{zul}} = 150$ N/mm^2 nicht überschritten wird?



Lösung: Das größte Moment tritt an der Einspannungsstelle auf, es hat den Betrag $M_{\max} = Fl$.
Beim quadratischen Querschnitt sind (s. Tabelle) $I_y = h^4/12$ und $|z|_{\max} = h/2$. Die Bedingung $|\sigma|_{\max} \le \sigma_{\text{zul}}$ führt damit zu

$$F \le \frac{h^4/12}{(h/2)l}\sigma_{\text{zul}} = 66,7 \text{ kN}$$

Ergänzung: Die **Biegelinie** $w(x)$
Die oben erläuterten Zusammenhänge

$$Q'(x) = -q(x), \quad M'(x) = Q(x), \quad \psi'(x) = \frac{M(x)}{EI_y}, \quad w'(x) = -\psi(x)$$

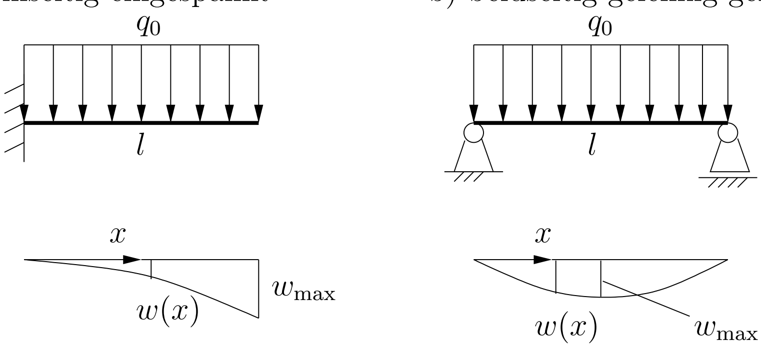
bilden ein Dgl.-System 4. Ordnung zur Berechnung von $Q(x)$, $M(x)$, $\psi(x)$ und $w(x)$ bei vorgegebener Belastung $q(x)$ und bekannter Biegesteifigkeit EI. Es kann in eine Dgl. 4. Ordnung für $w(x)$ überführt werden (**Differentialgleichung der Biegelinie**)

$$[EIw''(x)]'' = q(x)$$

Bei der Integration sind **Randbedingungen** an den Auflagerpunkten zu beachten, die den Bindungen der Lagerung entsprechen.

Beispiel 3.5: Balken konstanter Beigesteifigkeit EI unter konstanter Streckenlast q_0 bei unterschiedlicher Lagerung:

a) einseitig eingespannt b) beidseitig gelenkig gelagert



In beiden Fällen gilt

$$\begin{aligned}
EIw^{IV} &= q_0 \\
-Q(x) = EIw'''(x) &= q_0 x + C_1 \\
-M(x) = EIw''(x) &= \frac{1}{2}q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \\
EIw'(x) &= \frac{1}{6}q_0 x^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw(x) &= \frac{1}{24}q_0 x^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}$$

Die unterschiedlichen Randbedingungen führen jedoch auf unterschiedliche Werte der Integrationskonstanten.

a) einseitig eingespannt

$$\begin{aligned}
w(0) = 0 &\quad\rightarrow\quad C_4 = 0 \\
w'(0) = 0 &\quad\rightarrow\quad C_3 = 0 \\
Q(l) = 0 &\quad\rightarrow\quad q_0 l + C_1 = 0 \rightarrow C_1 = -q_0 l \\
M(l) = 0 &\quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}q_0 l^2 + C_1 l + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = \frac{1}{2}q_0 l^2
\end{aligned}$$

Damit erhält man die Biegelinie und den Momentenverlauf

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]$$

$$M(x) = -\frac{1}{2}q_0 (l-x)^2$$

$$\rightarrow \qquad w_{\max} = w(l) = \frac{q_0 l^4}{8EI} \qquad M_{\max} = M(0) = -\frac{1}{2}q_0 l^2$$

b) beidseitig gelenkig gelagert

$$\begin{aligned}
w(0) = 0 &\quad\rightarrow\quad C_4 = 0 \\
M(0) = 0 &\quad\rightarrow\quad C_2 = 0 \\
M(l) = 0 &\quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}q_0 l^2 + C_1 l = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}q_0 l \\
w(l) = 0 &\quad\rightarrow\quad \frac{1}{24}q_0 l^4 + \frac{1}{6}C_1 l^3 + C_3 l = 0 \rightarrow C_3 = \frac{1}{24}q_0 l^3
\end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$w(x) = \frac{q_0 l^4}{24EI}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + \frac{x}{l}\right]$$

$$M(x) = \frac{1}{2}q_0 x(l-x)$$

$$w_{\max} = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5q_0 l^4}{384EI}$$

$$M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{8}q_0 l^2$$

Zum Festigkeitsnachweis tragender Bauteile benötigt man insbesondere das maximale Biegemoment. In diesem Zusammenhang diskutiert man zweckmäßigerweise den Verlauf der Schnittgrößen $Q(x)$ und $M(x)$ anhand der Differentialgleichungen

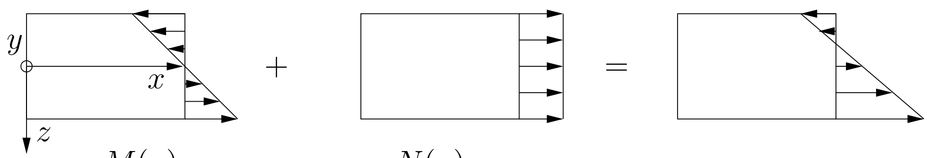
$$\frac{dQ(x)}{dx} = -q(x), \quad \frac{dM(x)}{dx} = Q(x)$$

unter Beachtung der Randbedingungen für Q und M (Lagerreaktionen). Die Tabelle enthält einige Beispiele.

Ergänzung: Superposition von Biegung und Zug

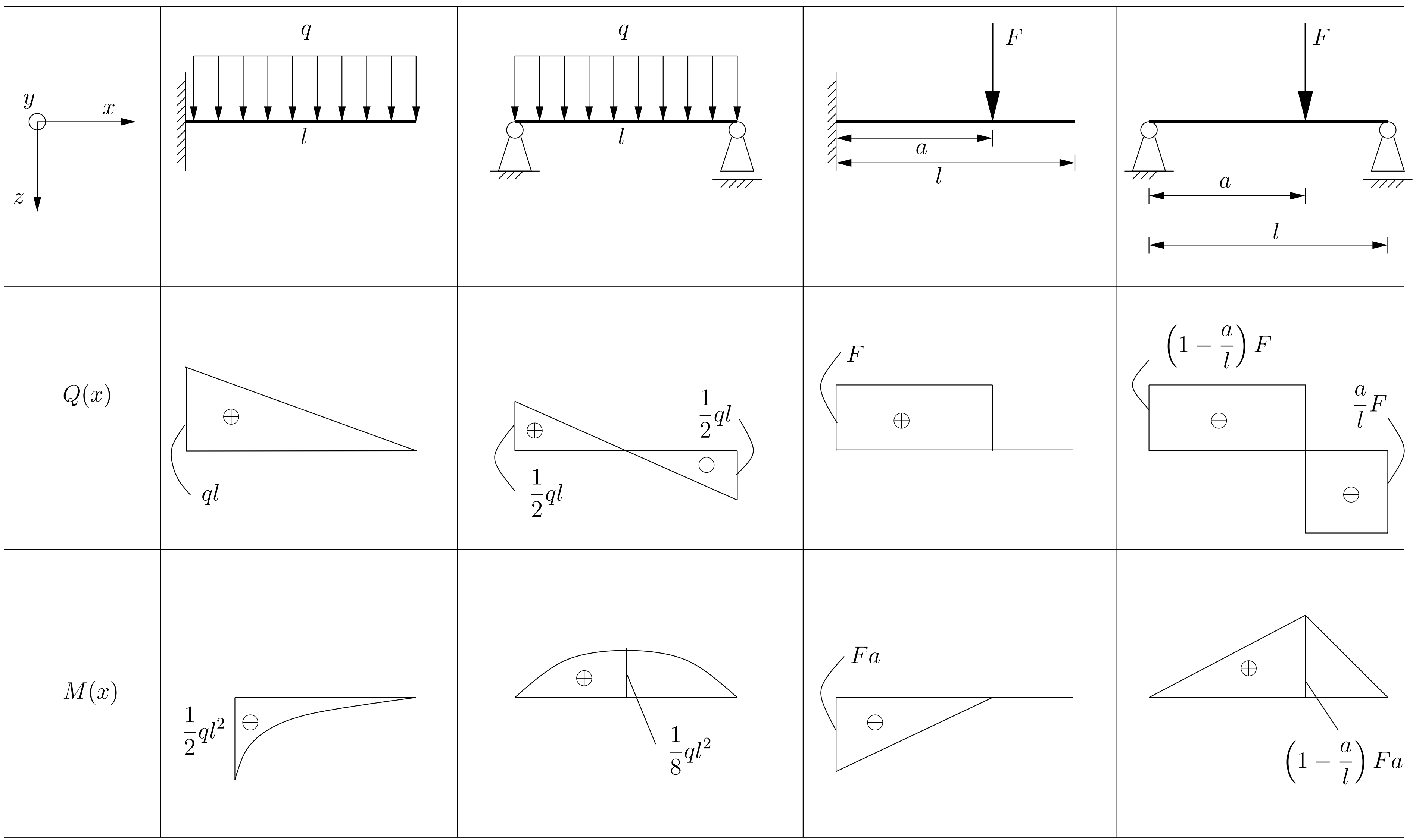
Wird bei einer ebenen Biegung der Balkenquerschnitt außer durch ein Biegemoment $M(x)$ noch durch eine Normalkraft $N(x)$ beansprucht, so überlagern sich die zugehörigen Spannungsverteilungen additiv:

Biege-Normalspannung + Zug-Normalspannung = Gesamt-Normalspannung



$$\frac{M(x)}{I_y(x)}z \quad + \quad \frac{N(x)}{A(x)} \quad = \quad \sigma(x,z)$$

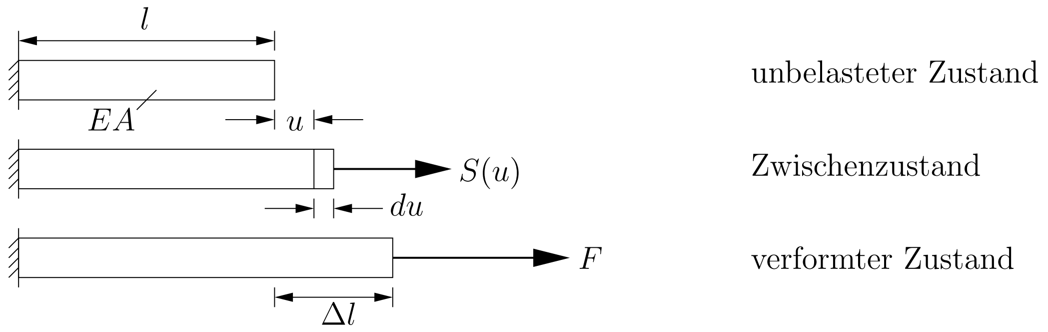
Zustandslinien $Q(x)$ und $M(x)$ für ausgewählte Lastfälle



3.4 Formänderungsenergien

Festkörper verformen sich unter Wirkung äußerer Kräfte, die dadurch verschoben werden und am Körper Arbeit verrichten (**Formänderungsarbeit**). In einem elastischen Körper wird diese Arbeit vollständig in Form von innerer Energie gespeichert (**Formänderungsenergie**).

Zur Illustration betrachten wir einen zylindrischen Zugstab, an dessen Ende eine Kraft S aufgebracht wird, die "langsam" (quasistatisch) von 0 auf F zunimmt.



$$\text{Bekanntlich gilt} \qquad F = \frac{EA}{l}\Delta l$$
$$\text{analog} \qquad S(u) = \frac{EA}{l}u$$

Die differentielle Arbeit der Kraft S ist $dW = S(u)\,du = \dfrac{EA}{l}u\,du$,
die Formänderungsarbeit beim Aufbau der Kraft F demzufolge

$$W = \frac{EA}{l}\int_0^{\Delta l} u\,du = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2 = \frac{F^2}{2EA}l$$

Diese Arbeit ist als potentielle innere Energie U im Stab gespeichert.

Bei einem Stab, dessen Dehnsteifigkeit oder dessen Schnittkraft sich in Längsrichtung ändern, gilt diese Formel sinngemäß für jedes infinitesimale Stabelement

$$l \to dx, \quad F \to N(x)$$

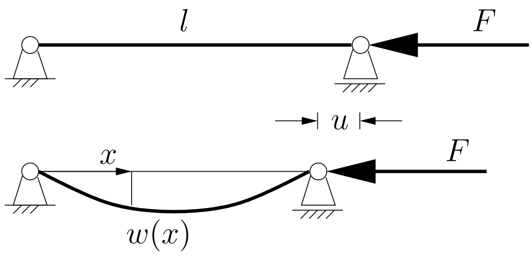
Die gesamte **Formänderungsenergie eines Stabs** ergibt sich dann durch Integration über die Stablänge:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2(x)}{EA(x)}\,dx$$

Analog gilt für die **Formänderungsenergie eines gebogenen Balkens**

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI_y(x)}\,dx$$

Anwendung auf ein Stabilitätsproblem der Elastostatik: Eulerscher Knickstab



Grundzustand, bedingt stabil

Nachbarzustand

Energieaussage: Der Grundzustand ist stabil, wenn die äußere Last weniger Arbeit verrichtet als zum Biegen erforderlich ist, d.h.

$$Fu < \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2(x)}{EI_y}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^l EI_y[w''(x)]^2\,dx$$

Geometrischer Zusammenhang zwischen der Verschiebung u und der Form der Biegelinie $w(x)$:

$$u = \frac{1}{2}\int_0^l [w'(x)]^2\,dx$$

Das Stabilitätskriterium ist demnach $F < F_{\text{krit}}$ mit

$$F_{\text{krit}} = \frac{\int_0^l EI_y[w''(x)]^2\,dx}{\int_0^l [w'(x)]^2\,dx}$$

Mit dieser Formel ist eine Abschätzung der **kritischen Last** möglich, indem $w(x)$ sinnvoll angenommen wird. Im Fall der oben skizzierten Lagerung ist jede zweimal differenzierbare Funktion $w(x)$ zulässig, die den Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(l) = 0$ genügt, z.B.

$$\begin{aligned} w(x) &= w_0 \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) \qquad \text{Ansatz} \\ w'(x) &= w_0\frac{\pi}{l}\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right) \\ w''(x) &= -w_0\frac{\pi^2}{l^2}\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) \end{aligned}$$

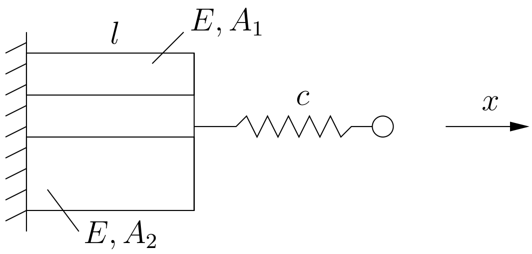
$$\rightarrow \qquad F_{\text{krit}} = \frac{\pi^2}{l^2}EI_y$$

3.5 Aufgaben

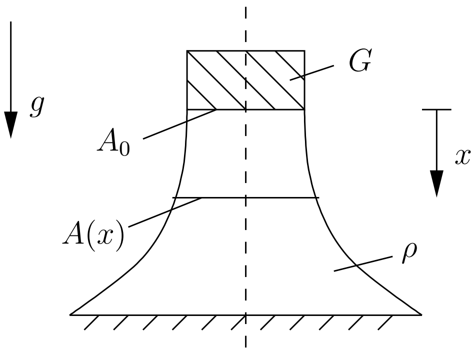
Aufgabe 3.1 Wie groß ist die maximale Länge eines frei hängenden Seils konstanten Querschnitts unter Eigengewicht?

	Dichte ρ[Mg/m^3]	Bruchspannung σ_B[N/mm^2]
a) Stahl	7,85	1280
b) Dural	2,7	500
c) Nylon	1,15	540

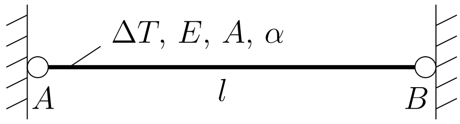
Aufgabe 3.2 Wie groß ist die Ersatzfedersteifigkeit des Systems in x-Richtung?



Aufgabe 3.3 Auf einem rotationssymmetrischen starren Körper (Dichte ρ) liegt ein Gewicht G. Wie muß die Querschnittsfläche $A(x)$ gestaltet sein, damit längs des Körpers an jeder Stelle x die gleiche Normalspannung herrscht?

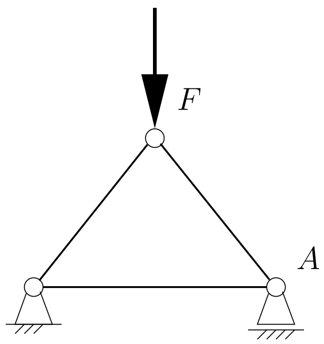


Aufgabe 3.4 Ein Stab ist spannungsfrei zwischen zwei festen Gelenken gelagert. Aus dem Ausgangszustand wird er homogen um ΔT erwärmt. Wie groß darf ΔT höchstens sein, damit die Druckspannung einen zulässigen Wert σ_{zul} nicht überschreitet?
Wie groß sind dann die Lagerreaktionen in A und B?

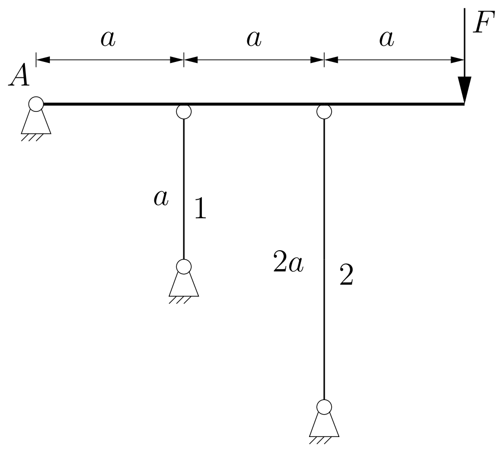


Gegeben: $E = 200\,000$ N/mm^2, $A = 9$ cm^2, $l = 80$ cm, $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, $\sigma_{\mathrm{zul}} = 300$ N/mm^2.

Aufgabe 3.5 Ein Stabwerk bestehend aus 3 identischen Stäben wird durch eine Kraft F belastet. Um wieviel verschiebt sich das Loslager in Punkt A?
Die Stäbe haben im unbelasteten Fall die Länge l und die Dehnsteifigkeit EA.

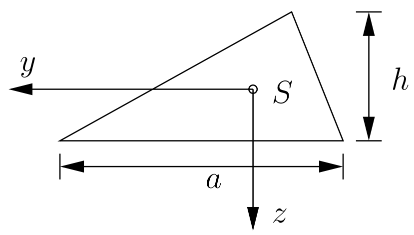


Aufgabe 3.6 Ein starrer Balken wird durch ein Festlager und zwei Stäbe mit der Dehnsteifigkeit EA gehalten.
Wie groß sind die Auflagerreaktionen im Lager A unter der Last F? Wie groß sind die Stabkräfte?

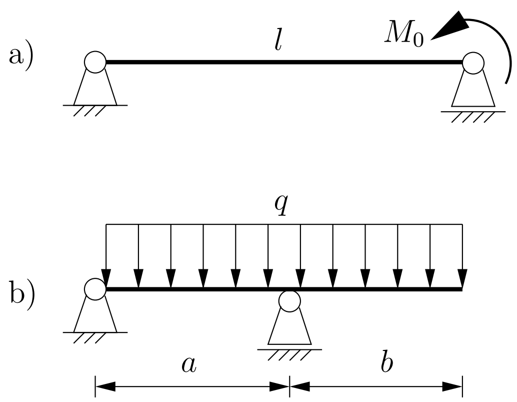


Gegeben: $a = 1$ m, $E = 200\,000$ N/mm^2, $A = 10$ cm^2, $F = 3$ kN.

Aufgabe 3.7 Wie groß ist das Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse I_y des Dreiecks?



Aufgabe 3.8 Ermitteln Sie Querkraft- und Momentenverläufe $Q(x)$ und $M(x)$ der Balkensysteme. Beide Balken haben den Elastizitätsmodul E und das Flächenträgheitsmoment I_y.



Aufgabe 3.9 Wie groß ist die Formänderungsenergie der Balken mit den Lastfällen der Aufgabe 3.8?

Gegeben: $A = 90$ cm^2 (quadratischer Querschnitt), $M_0 = 10$ kNm, $q = 2000$ N/m, $a = 2$ m, $b = 3$ m, $l = 5$ m.

Aufgabe 3.10 Ein einseitig eingespannter Balken wird durch eine Streckenlast q belastet. Am freien Ende befindet sich eine Feder mit der Federsteifigkeit c, die in der unausgelenkten Lage des Balkens entspannt ist.

Wieweit biegt sich das freie Ende des Balkens durch?