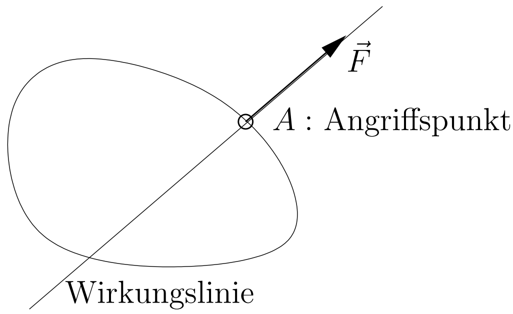
2 Statik starrer Körper

2.1 Grundoperationen mit Kräften

Ein wichtiger Grundbegriff der Mechanik ist die Kraft. Die Kraft ist eine physikalische Größe, die sich der direkten Beobachtung entzieht. Kräfte lassen sich indirekt an ihren Wirkungen erkennen, z.B. an den Bewegungsänderungen (→ Kinetik) oder den Formänderungen (→ Elastostatik) der Körper, auf die sie einwirken.

Beispiele für Kräfte: Gewichtskraft, Muskelkraft, magnetische Kraft, Federkraft, Windkraft usw.

Als gerichtete Größe hat die Kraft Vektorcharakter, man spricht vom **Kraftvektor**. Die übliche Bezeichnung ist $\vec{F}$. Zur vollständigen Beschreibung eines Kraftvektors gehören sein **Betrag** F, sein **Angriffspunkt**, seine **Richtung** und sein **Richtungssinn**.

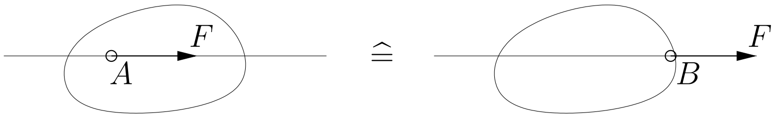


Mit dem Angriffspunkt A und der Richtung liegt die sogenannte **Wirkungslinie** der Kraft fest.

Jeder feste Körper wird bei einer Belastung durch Kräfte etwas verformt. Die Formänderungen sind oft gering und bei der Analyse gewisser mechanischer Probleme unwesentlich. Man verwendet dann zweckmäßigerweise das Modell eines idealisierten **starren Körpers**, der sich unter der Einwirkung von Kräften gar nicht verformt.

Zwei Kräfte(gruppen) heißen **gleichwertig** (äquivalent), wenn sie auf einen starren Körper die gleiche Wirkung hervorrufen.

- Zwei Kräfte, die den gleichen Betrag, die gleiche Wirkungslinie und den gleichen Richtungssinn, aber verschiedene Angriffspunkte haben, sind gleichwertig.

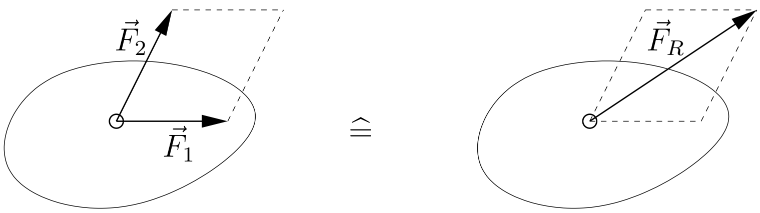


Mit anderen Worten:

- Am starren Körper darf der Kraftvektor längs seiner Wirkungslinie verschoben werden (Verschiebungsaxiom). Jeder Punkt auf der Wirkungslinie kann als Angriffspunkt der Kraft aufgefasst werden.

Man spricht deshalb von **linienflüchtigen** Kraftvektoren.

- Zwei Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ mit einem gemeinsamen Angriffspunkt sind einer Einzelkraft $\vec{F}_R$ mit demselben Angriffspunkt gleichwertig, die sich als Diagonale des von den Vektoren $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ gebildeten Parallelogramms ergibt (Parallelogrammaxiom).

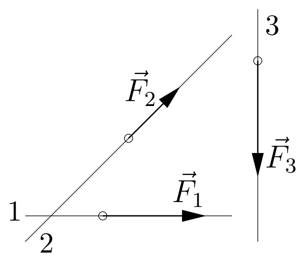


Man bezeichnet $\vec{F}_R$ als **Resultierende** der Kräftegruppe $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Die Parallelogrammkonstruktion entspricht einer vektoriellen Addition, d.h.

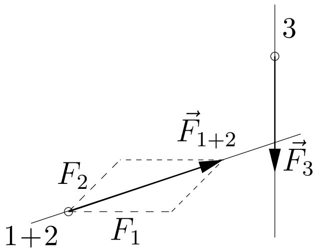
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Man spricht von einer **zentralen Kräftegruppe**, wenn sich die Wirkungslinien aller Kräfte $\vec{F}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ in einem Punkt schneiden. Die Wirkungslinie der Resultierenden $\vec{F}_R$ verläuft dann auch durch diesen Punkt.

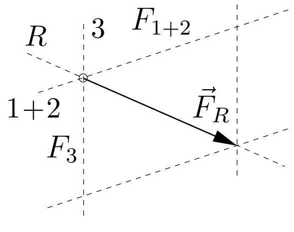
Die Resultierende $\vec{F}_R$ einer allgemeinen ebenen Kräftegruppe $\vec{F}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ und ihre Wirkungslinie können grundsätzlich durch fortgesetzte Anwendung von Verschiebungsaxiom und Parallelogrammaxiom grafisch erzeugt werden.



Gegebene ebene Kräftegruppe
Lageplan



1. Schritt:
Zusammenfassen von $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$
zum Kraftvektor $\vec{F}_{1+2}$



2. Schritt:
Zusammenfassen von $\vec{F}_{1+2}$ und $\vec{F}_3$ zum
resultierenden Kraftvektor $\vec{F}_R$

Die grafische Methode ist zeitraubend und dient vor allem der Veranschaulichung. In der Regel **berechnet** man die Resultierende auf der Basis der Vektorsumme

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Zweckmäßigerweise zerlegt man erst einmal die Kräfte in ihre kartesischen Komponenten

$$\vec{F}_i = F_{ix}\vec{e}_x + F_{iy}\vec{e}_y + F_{iz}\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_R = F_{Rx}\vec{e}_x + F_{Ry}\vec{e}_y + F_{Rz}\vec{e}_z$$

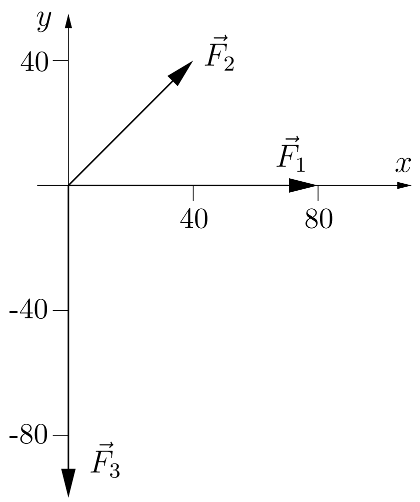
und führt dann die **Vektoradditionen koordinatenweise** durch:

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}, \quad F_{Ry} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}, \quad F_{Rz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

Auf diese Weise erhält man $\vec{F}_R$ nach Größe und Richtung. Zur Berechnung der Wirkungslinie benötigt man das Moment der Kräfte.

Beispiel 2.1: Gegeben sind

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N},\ \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 40 \end{pmatrix} \mathrm{N},\ \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -90 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

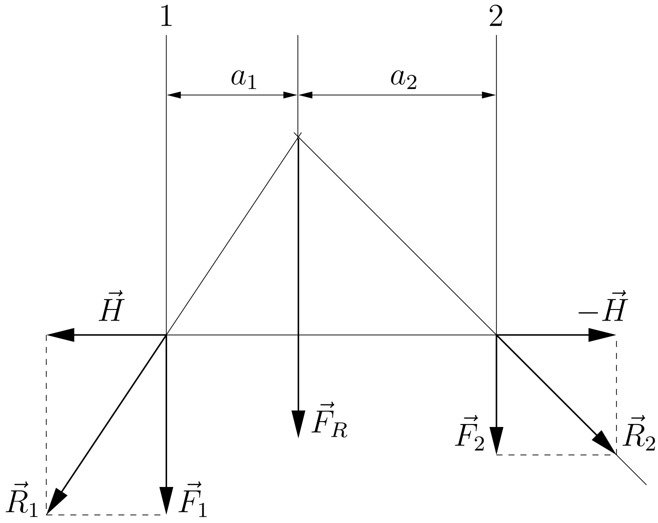


Gesucht sind $\vec{F}_R$ und dessen Betrag F_R.

$$\vec{F}_R = \begin{pmatrix} 80 + 40 + 0 \\ 0 + 40 - 90 \end{pmatrix} \mathrm{N} \ \rightarrow\ \vec{F}_R = \begin{pmatrix} 120 \\ -50 \end{pmatrix} \mathrm{N}$$

$$F_R = \sqrt{(120)^2 + (50)^2}\,\mathrm{N} \ \rightarrow\ F_R = 130\,\mathrm{N}$$

Um zwei **parallele Kräfte** $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ **zusammenzufassen**, fügt man zwei Hilfskräfte hinzu, die denselben Betrag, dieselbe Wirkungslinie, aber entgegengesetzte Richtung besitzen (Nullsystem).



Die Resultierende hat natürlich den Betrag $F_R = F_1 + F_2$. Ihre Wirkungslinie teilt den Abstand zwischen den Wirkungslinien 1 und 2 im Verhältnis

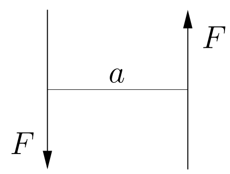
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

Es gilt also

$$a_1 F_1 = a_2 F_2$$

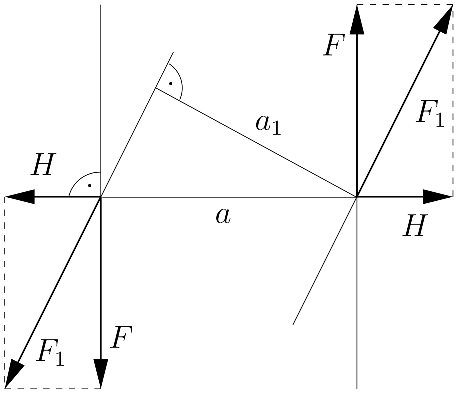
2.2 Kräftepaar und Moment

Zwei gleich große Kräfte, die auf parallelen Wirkungslinien in entgegengesetzter Richtung wirken, werden als **Kräftepaar** bezeichnet.



- Ein Kräftepaar lässt sich nicht zu einer Einzelkraft zusammenfassen. Es muss daher als eigenständiges Grundelement eines Kräftesystems angesehen werden.

Das Hinzufügen eines Nullsystems führt wieder zu einem Kräftepaar.



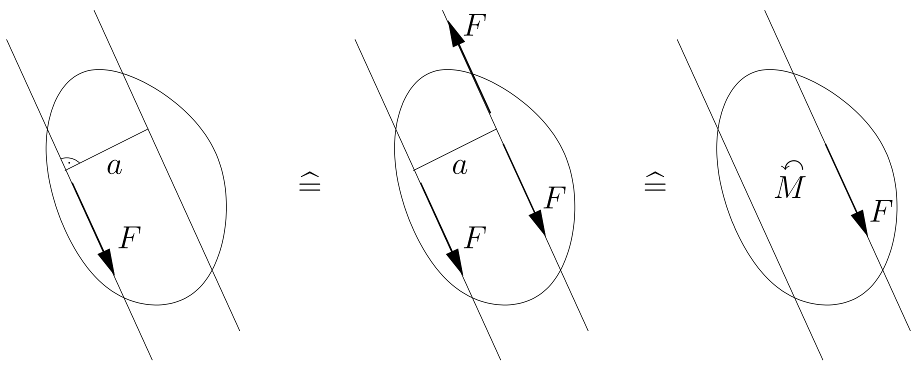
Aus der Konstruktion entnimmt man den Zusammenhang

$$Fa = F_1 a_1$$

für die Gleichwertigkeit (Äquivalenz) der beiden Kräftepaare. Demnach ist das Produkt aus Kraft F und Abstand a der Wirkungslinien kennzeichnend für ein Kräftepaar. Man spricht vom **Moment des Kräftepaars**

$$M = Fa \qquad \text{Symbol: } \curvearrowleft$$

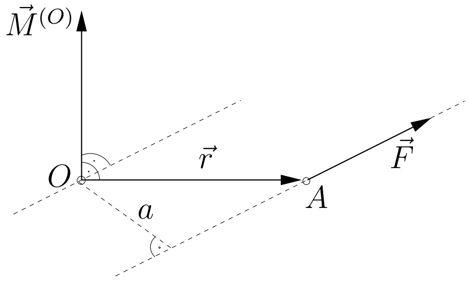
- Zwei Kräftepaare mit entgegengesetzt gleichen Momenten(vektoren) heben sich gegenseitig auf.
- Beim Versetzen einer Kraft auf eine parallele Wirkungslinie (Abstand a) kommt ein **Versetzungsmoment** $M = Fa$ hinzu.



Das **Moment einer Kraft $\vec{F}$ bezüglich eines Punktes** O wird definiert durch

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F}$$

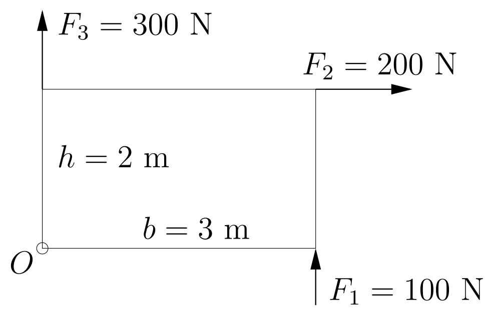
Dabei bezeichnet $\vec{r}$ den Ortsvektor vom Momenenbezugspunkt O zum Angriffspunkt A der Kraft (oder einem beliebigen anderen Punkt der Wirkungslinie).



Der Vektor $\vec{M}^{(O)}$ steht senkrecht auf der von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene. Er hat den Betrag Fa ("Kraft mal Hebelarm"); dabei ist a der Abstand des Momentenbezugspunktes von der Wirkungslinie der Kraft. Der Richtungssinn ergibt sich aus der Rechtshandregel.

Beispiel 2.2: Die in den Ecken des Rechtecks angreifenden Kräfte üben bezüglich O folgende Momente aus (positiv, wenn $\curvearrowleft$):

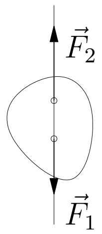
$$\begin{aligned} M_1^{(O)} &= \quad F_1 b &&= 300 \text{ Nm} \\ M_2^{(O)} &= -F_2 h &&= -400 \text{ Nm} \\ M_3^{(O)} &= \quad F_3 \cdot 0 &&= 0 \text{ Nm} \qquad \text{sprich: Newtonmeter!} \end{aligned}$$

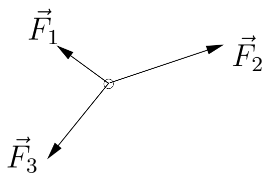


2.3 Gleichgewicht starrer Körper

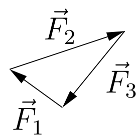
Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn er ruht und das an ihm angreifende Kräftesystem einer Nullkraft äquivalent ist. Man spricht dann auch vom "Gleichgewicht der Kräfte".

- Zwei Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie auf derselben Wirkungslinie liegen, gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind.





Lageplan



Kräfteplan

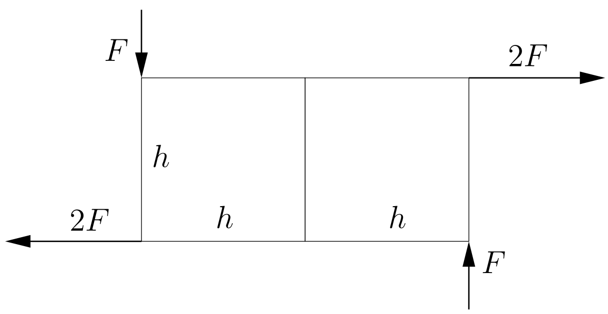
- Eine zentrale Kräftegruppe ist im Gleichgewicht, wenn die Resultierende null ist, so dass sich das Krafteck schließt.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\text{in Komponenten:} \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0$$

- Allgemeinere Kraftsysteme sind im Gleichgewicht, wenn außerdem auch das resultierende Moment bezüglich eines beliebigen Punktes null wird.

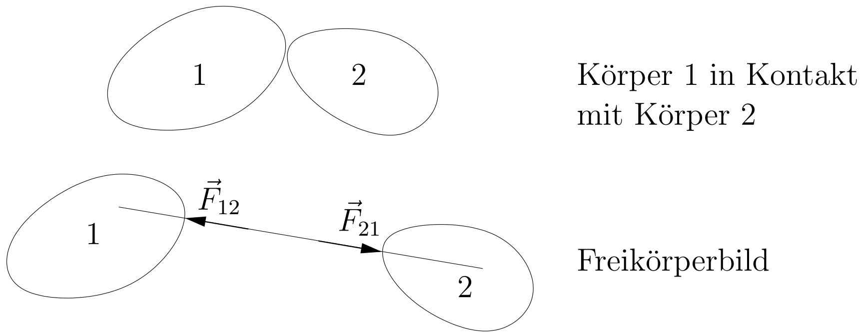
$$\sum_{i} M_i = 0$$



- Befindet sich ein mechanisches System im statischen Gleichgewicht, dann ist auch jedes gedanklich herausgeschnittene Teilsystem unter Wirkung aller an ihm angreifenden Kräften einschließlich der **Schnittkräfte** im Gleichgewicht.

Dieses nützliche **Schnittprinzip** wird in der Mechanik vielfältig angewandt, oft in Verbindung mit dem **Reaktionsaxiom** (Gegenwirkungsprinzip):

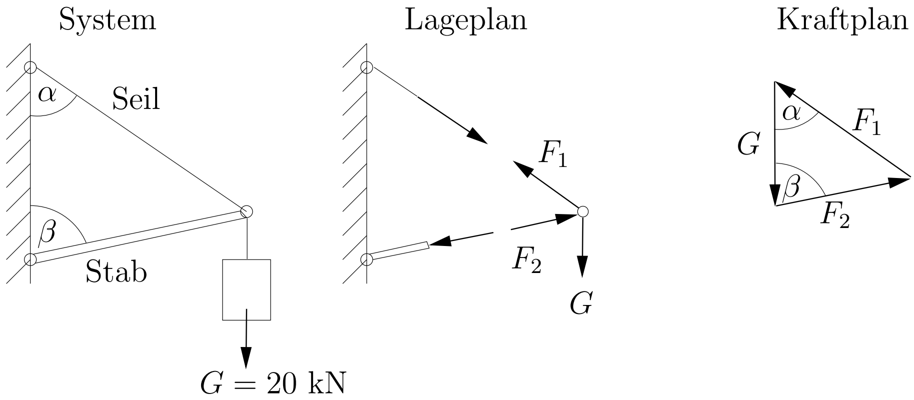
- Wenn zwei Körper Kräfte aufeinander ausüben, dann sind Kraft und Gegenkraft dem Betrag nach gleich groß, liegen auf der gleichen Wirkungslinie, sind aber entgegengesetzt gerichtet.



$\vec{F}_{12}$ – Kraft, die Körper 2 auf Körper 1 ausübt
$\vec{F}_{21}$ – Kraft, die Körper 1 auf Körper 2 ausübt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{aber} \quad F_{12} = F_{21}$$

Beispiel 2.3

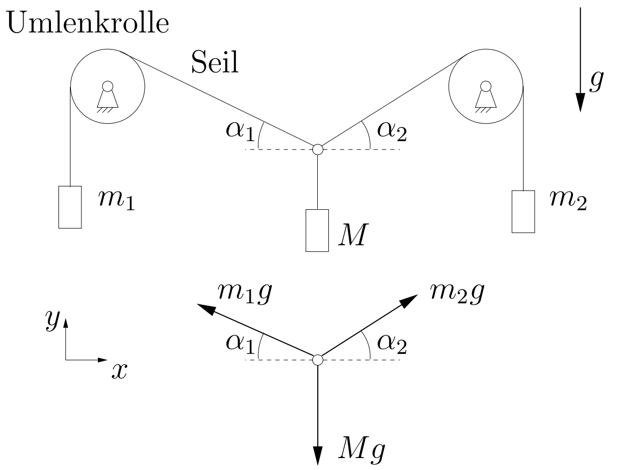


Die Geometrie des Kraftdreiecks liefert

$$F_1 = G\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad F_2 = G\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Zahlen für $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$: $F_1 = 17,93$ kN, $F_2 = 14,64$ kN.

Beispiel 2.4



$$\sum F_{xi}: \quad -m_1 g \cos\alpha_1 + m_2 g \cos\alpha_2 = 0$$

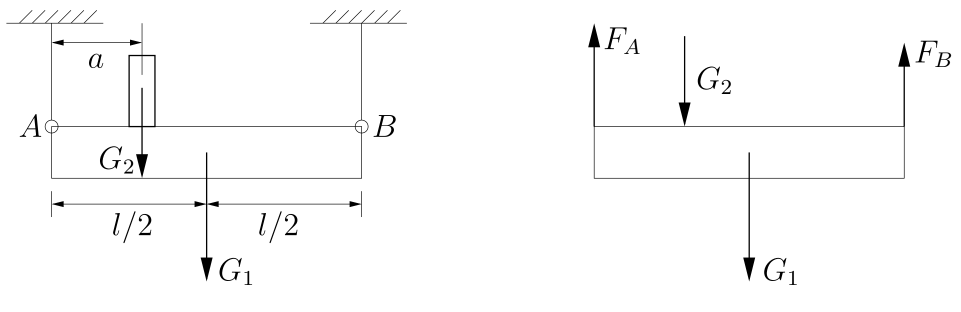
$$\sum F_{yi}: \quad m_1 g \sin\alpha_1 + m_2 g \sin\alpha_2 - Mg = 0$$

Das sind 2 Gleichungen für α_1 und α_2 bei vorgegebenen Massen m_1, m_2 und M.

Spezialfall:

$$m_2 = m_1 \quad \to \quad \alpha_2 = \alpha_1 = \arcsin \frac{M}{2m_1}$$

Beispiel 2.5

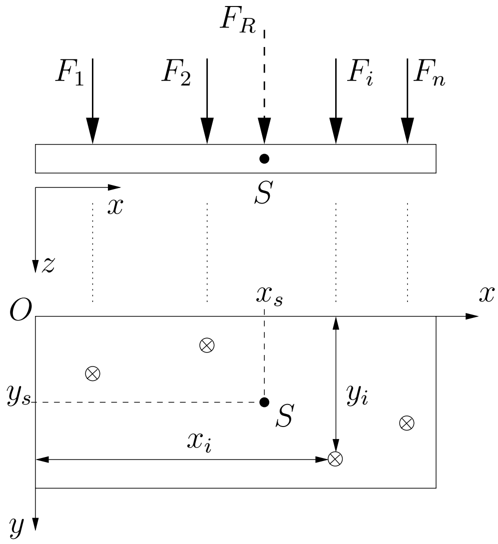


Die Auswertung der Gleichgewichtsbedingungen ergibt

$$F_A = \frac{1}{2}G_1 + \frac{l-a}{l}G_2, \quad F_B = \frac{1}{2}G_1 + \frac{a}{l}G_2$$

2.4 Verteilte Kräfte und Schwerpunkt

Wir betrachten eine Gruppe **paralleler Kräfte** F_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und fragen nach Größe und Lage der äquivalenten resultierenden Einzelkraft, d.h. nach der Lage ihrer Wirkungslinie (**Kraftmittelpunkt** S).



Die Äquivalenz der Einzelkraft F_R zur Kräftegruppe erfordert die Gleichheit der Kräfte und Momente:

$$F_R = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$x_s F_R = \sum_{i=1}^{n} x_i F_i$$

$$y_s F_R = \sum_{i=1}^{n} y_i F_i$$

Eingeprägte Kräfte und äußere Lasten treten oft kontinuierlich verteilt auf. Zur Ermittlung des Kräftemittelpunktes sind dann Integrale statt endlicher Summen auszuwerten.

a) Räumlich verteilte Schwerkraft

F_R	$\rightarrow$	$G = mg$	Gewicht des gesamten Körpers
F_i	$\rightarrow$	$dG = g\,dm$	Gewicht eines Massenelements
x_i, y_i	$\rightarrow$	x, y	Position des Massenelements

Die Koordinaten des Schwerpunkts (**Massenmittelpunkt**) sind also folgendermaßen zu berechnen:

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\text{Körper}} x\,dm$$

$$y_s = \frac{1}{m} \int_{\text{Körper}} y\,dm$$

Wenn der Körper gedanklich gedreht wird, erkennt man, dass analog gilt

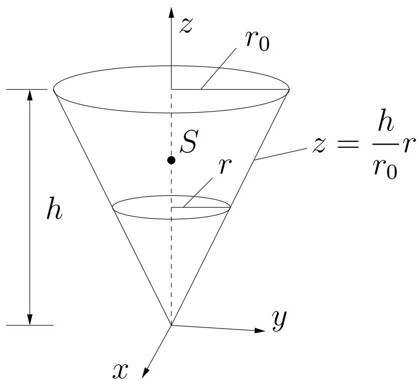
$$z_s = \frac{1}{m} \int_{\text{Körper}} z\,dm$$

Spezialfall: **homogener** Körper, d.h. die Massendichte $\rho = dm/dV$ ist räumlich konstant. Der Massenmittelpunkt stimmt dann mit dem **Volumenmittelpunkt** überein:

$$x_s = \frac{1}{V}\int_{\text{Volumen}} x\,dV, \quad y_s = \frac{1}{V}\int_{\text{Volumen}} y\,dV, \quad z_s = \frac{1}{V}\int_{\text{Volumen}} z\,dV$$

- Besitzt ein homogener Körper eine Symmetrieachse oder eine Symmetrieebene, dann liegt sein Schwerpunkt auf dieser Achse, bzw. in dieser Ebene.

Beispiel 2.6: Für einen Kegel mit dem Grundkreisradius r_0 und der Höhe h gilt



$$\begin{aligned}
V &= \frac{\pi}{3} r_0^2 h \\
x_s &= 0, \quad y_s = 0 \quad \text{(Symmetrie)} \\
z_s &= \frac{1}{\frac{\pi}{3} r_0^2 h}\int_0^h z\pi r^2\,dz \\
&= \frac{3}{r_0^2 h}\int_0^h \left(\frac{r_0}{h}\right)^2 z^3\,dz = \frac{3}{h^3}\frac{h^4}{4} \\
z_s &= \frac{3}{4} h
\end{aligned}$$

b) Schwerpunkt ebener Flächen ($z =$ konst)

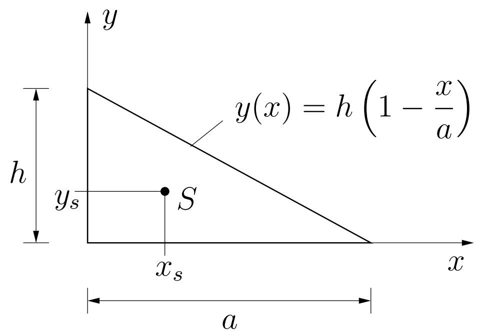
Anwendung der Formeln auf eine dünne Scheibe konstanter Dicke t ergibt $dV = t\,dA$, $V = tA$ und

$$x_s = \frac{1}{A}\int_{\text{Fläche}} x\,dA$$

$$y_s = \frac{1}{A}\int_{\text{Fläche}} y\,dA$$

Die Integrale auf der rechten Seite bezeichnet man als **Flächenmomente 1. Ordnung**.

Beispiel 2.7: Für ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kantenlängen a und h berechnet man

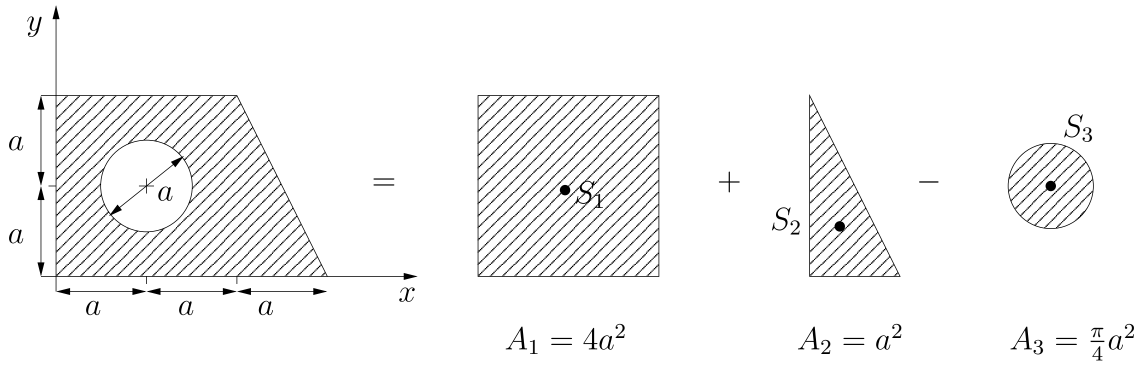


$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}ah \\
x_s &= \frac{1}{\frac{1}{2}ah}\int_0^a xy(x)\,dx \\
&= \frac{2}{ah}\int_0^a xh\left(1 - \frac{x}{a}\right)\,dx = \frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3a}\right) \\
x_s &= \frac{a}{3} \\
y_s &= \frac{h}{3} \quad \text{(analog)}
\end{aligned}
$$

Die Lage des Schwerpunkts (x_s, y_s) einer **zusammengesetzten Fläche** lässt sich aus den Schwerpunkten (x_{si}, y_{si}) der Teilflächen A_i berechnen:

$$
x_s = \frac{1}{A}\sum_i x_{si}A_i, \quad y_s = \frac{1}{A}\sum_i y_{si}A_i \quad \text{mit} \quad A = \sum_i A_i
$$

Beispiel 2.8: Schwerpunkt eines Trapezes mit einem Loch

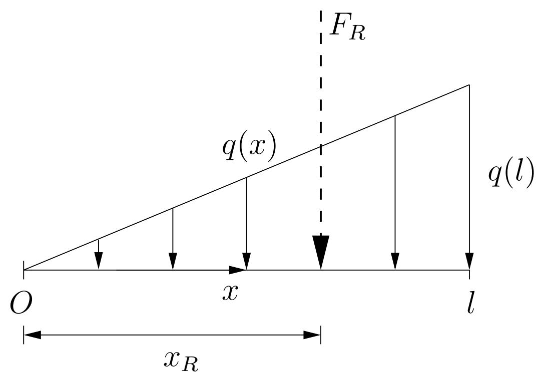


$A_1 = 4a^2$	$A_2 = a^2$	$A_3 = \frac{\pi}{4}a^2$
$x_{S_1} = a$	$x_{S_2} = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$	$x_{S_3} = a$
$y_{S_1} = a$	$y_{S_2} = \frac{2}{3}a$	$y_{S_3} = a$

Daraus folgt für die gelochte Trapezfläche

$$A = \left(5 - \frac{\pi}{4}\right) a^2$$
$$x_s = \frac{\left(4 + \frac{7}{3} - \frac{\pi}{4}\right) a^3}{\left(5 - \frac{\pi}{4}\right) a^2} = 1,316a$$
$$y_s = \frac{\left(4 + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4}\right) a^3}{\left(5 - \frac{\pi}{4}\right) a^2} = 0,921a$$

c) Resultierende einer Streckenlast $q \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$



$$F_R = \int_0^l q(x)\,dx$$

$$x_R = \frac{1}{F_R}\int_0^l xq(x)\,dx$$

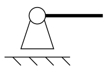
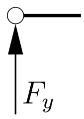
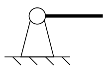
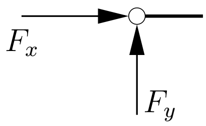
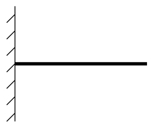
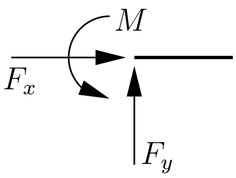
Beispiel 2.9: Dreieckslast $q(x) = q(l)\dfrac{x}{l}$

Dazu gehören $F_R = \frac{1}{2}q(l)l$

und $x_R = \frac{2}{3}l$

2.5 Lagerreaktionen

Mechanische Systeme sind stets in irgendeiner Form durch Auflager, Stützen, Hängungen oder Führungen mit der Umgebung verbunden. Die Tabelle zeigt die Eigenschaften gängiger Lagerungen ebener Systeme. Sie unterscheiden sich in der **Wertigkeit der Bindung**, d.h. in der Anzahl möglicher Lagerreaktionen.

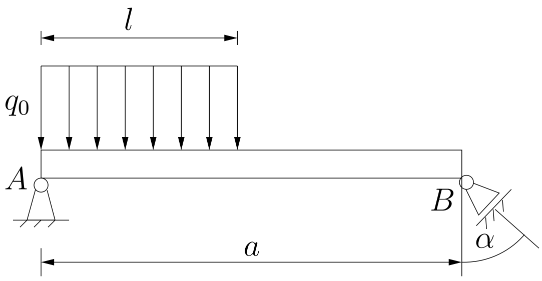
Bezeichnungen	Symbol	Lagerreaktionen		Wertigkeit
Loslager (Pendelstütze, Rollenlager)			$F_x = 0$ $M = 0$	1
Festlager (Doppelstütze, Gelenklager)			$M = 0$	2
Einspannung				3

Die rechnerische Ermittlung von Lagerreaktionen geschieht in konkreten Lastfällen zweckmäßigerweise folgendermaßen:

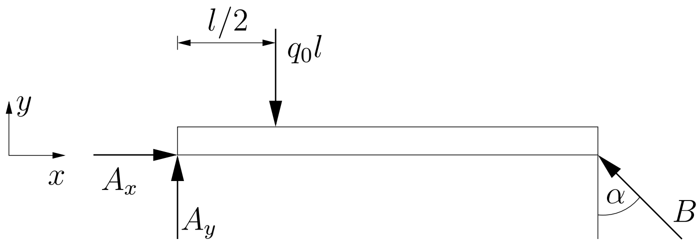
- Wahl eines rechtwinkligen Bezugssystems für die Komponenten der Kraftvektoren,
- Befreien des Körpers von seinen Bindungen und Berücksichtigung zunächst unbekannter Lagerreaktionen gemäß Wertigkeit der Bindung,
- Anschreiben der Gleichgewichtsbedingungen in Form algebraischer Gleichungen,
- Lösung des Gleichungssystems nach den unbekannten Lagerreaktionen.

Ein mechanisches System heißt **statisch bestimmt**, wenn die Lagerreaktionen allein aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können.

Beispiel 2.10 einer statisch bestimmten Lagerung:



mechanisches System



Lageplan der Kräfte am freigeschnittenen System

Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_i F_{ix} = 0 \quad \rightarrow \quad A_x - B \sin\alpha = 0$$

$$\sum_i F_{iy} = 0 \quad \rightarrow \quad A_y + B \cos\alpha - q_0 l = 0$$

$$\sum_i \overset{\curvearrowleft}{M}{}_i^{(B)} = 0 \quad \rightarrow \quad -A_y a + q_0 l \left(a - \frac{l}{2} \right) = 0$$

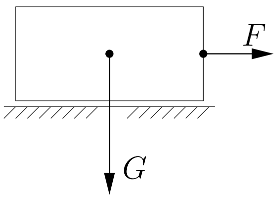
Auflösung des Gleichungssytems ergibt

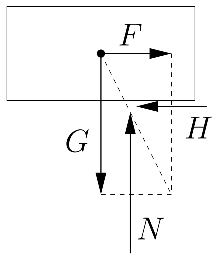
$$A_y = q_0 l \left(1 - \frac{l}{2a} \right), \quad B = \frac{q_0 l^2}{2a \cos\alpha}, \quad A_x = \frac{q_0 l^2}{2a} \tan\alpha$$

2.6 Haften und Gleiten

Bekanntes Phänomen: Um einen schweren Körper, z.B. eine Kiste auf rauher Unterlage zu verschieben, bedarf es einer Kraft parallel zuf Kontaktfläche.
Genauer: Der Körper ruht, wenn diese Tangentialkraft nicht groß genug ist.

Wir betrachten also zuerst den ruhenden Körper unter Wirkung von G und F.





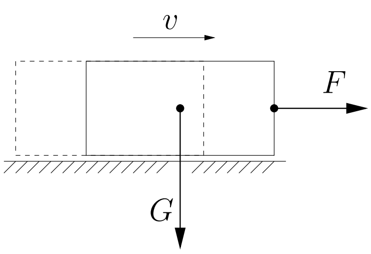
Gleichgewichtsbedingungen: $N = G$ Normalkraft
$H = F$ Haftkraft

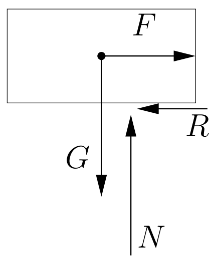
Experimentelle Befunde besagen, dass der Körper ruht, solange

$$|H| \leq H_{\max} = \mu_0 N \quad \textbf{Haftbedingung}$$

μ_0 heißt **Haftkoeffizient, Haftbeiwert** oder **Haftzahl**.

Ist $F > H_{\max}$, dann gleitet der Körper über die rauhe Unterlage, bewegt sich also ($\rightarrow$ Kinetik).





Auch jetzt gilt noch

$$N = G,$$

aber die **Reibkraft** R ist i. a. kleiner als F.

Bei trockener Reibung ist R unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit v, und es gilt das **Coulombsche Reibgesetz**

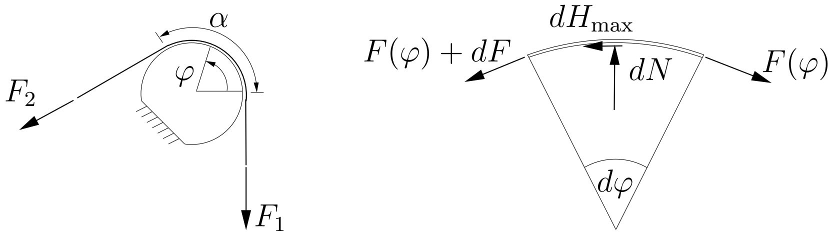
$$|R| = \mu N$$

μ heißt **Reibkoffizient, Reibbeiwert** oder **Reibzahl**.

Die Tabelle enthält ungefähre Richtwerte für Haft- und Reibkoeffizienten.

Materialpaarung	Haftzahl μ_0	Reibzahl μ
Stahl – Stahl	0,2 – 0,8	0,1 – 0,7
Holz – Metall	0,4 – 0,7	0,2 – 0,4
Holz – Holz	0,4 – 0,6	0,3 – 0,5
Stahl – Eis	0,03	0,01
Gummi – Asphalt	0,8	0,5

In der Technik wird häufig von der **Seilreibung** Gebrauch gemacht. Wir betrachten beispielsweise ein Seil, das über einen fest verankerten, nicht drehbaren Zylinder läuft. Die Last F_1 kann mit Unterstützung der maximalen Haftkraft $H_{\max}(\varphi)$ von einer kleineren Kraft F_2 gehalten werden.



Das Kräftegleichgewicht an einem Seilelement ergibt

$$\begin{aligned} dN &= F(\varphi)\, d\varphi \\ dF &= -dH_{\max} = -\mu_0\, dN = -\mu_0 F(\varphi)\, d\varphi \end{aligned}$$

Dieser differentielle Zusammenhang kann durch Trennen der Veränderlichen integriert werden:

$$F(\varphi) = F_1 e^{-\mu_0 \varphi}$$

insbesondere

$$F_2 = F_1 e^{-\mu_0 \alpha}$$

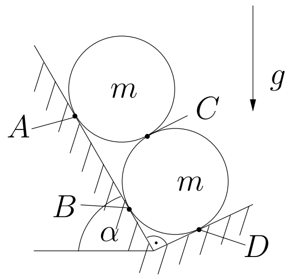
Die Kräftereduktion infolge Seilreibung ist zahlenmäßig beachtlich: Mit $\mu_0 = 0,5$ erhält man bei $\alpha = \pi$ den Faktor 0,2 und bei einmaligem Umschlingen des Zylinders ($\alpha = 2\pi$) den Faktor 0,04.

Anwendungen: Poller, Riemenantriebe, Bandbremsen (mit μ statt μ_0).

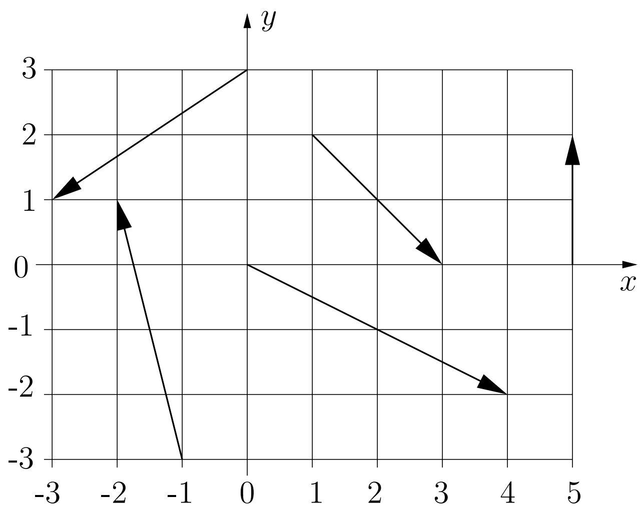
2.7 Aufgaben

Aufgabe 2.1 An einem Punkt eines Körpers greifen drei Kräfte mit den Beträgen $F_1 = 1$ N, $F_2 = 2$ N, $F_3 = 3$ N unter den Winkeln $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 120°$, $\alpha_3 = -120°$ bezüglich der Horizontalen an. Berechnen Sie Betrag und Winkel der Resultierenden F_R, α_R.

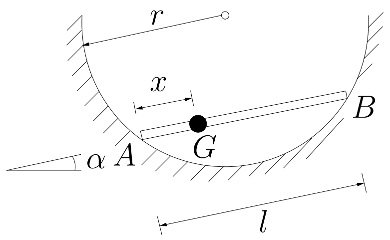
Aufgabe 2.2 Zwei glatte Walzen mit der Masse m sind wie dargestellt angeordnet. Berechnen Sie die Kontaktkräfte in den Punkten A, B, C, D, die sich unter Wirkung der Fallbeschleunigung g einstellen.



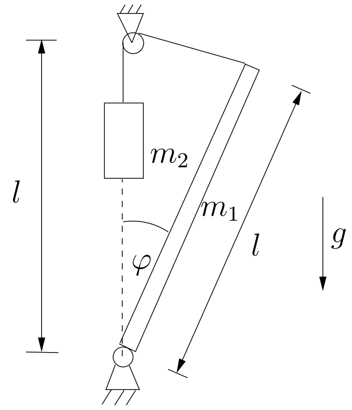
Aufgabe 2.3 Berechnen Sie die resultierende Kraft $\vec{F}_R$ und das Moment M_R, welches die eingezeichneten Kräfte auf den Ursprung ausüben. In der Darstellung ist die Längeneinheit 1 m und die Krafteinheit 1 kN.



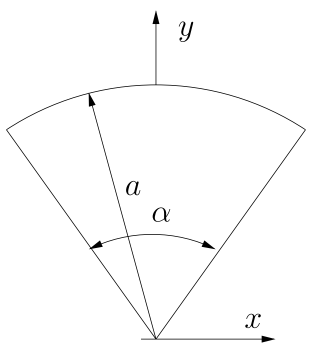
Aufgabe 2.4 In einer glatten Kugelkalotte vom Radius r liegt ein gewichtsloser Balken der Länge $l = \sqrt{2}r$. In welchem Abstand x vom Punkt A muß ein Gewicht G angebracht werden, damit sich der Balken unter dem Winkel $\alpha = 15°$ im Gleichgewicht befindet? Wie groß sind dann die Kontaktkräfte in A und B?



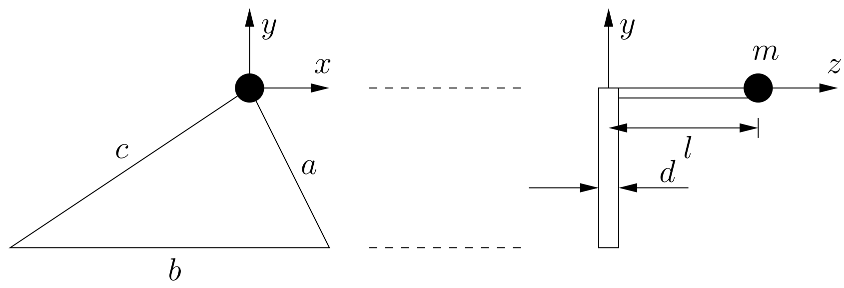
Aufgabe 2.5 Ein Stab der Masse m_1 und der Länge l ist am unteren Ende gelenkig gelagert. Am oberen Ende ist ein Seil befestigt, an welchem über eine Umlenkrolle ein Körper der Masse m_2 hängt. Unter welchem Winkel $\varphi > 0$ befindet sich das System im statischen Gleichgewicht?



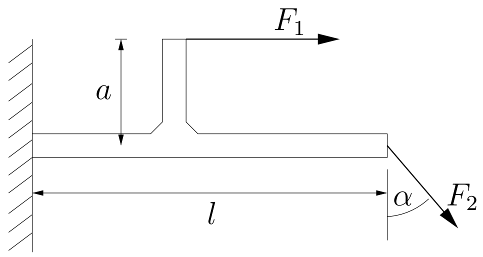
Aufgabe 2.6 Gesucht ist die Schwerpunktlage des Kreisausschnitts.



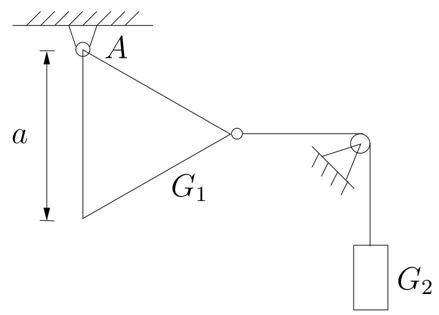
Aufgabe 2.7 An einer dreieckigen Scheibe der Dicke d mit der Dichte ρ ist über einen masselosen Träger eine Kugel der Masse m befestigt. Wo liegt der Schwerpunkt des Systems?



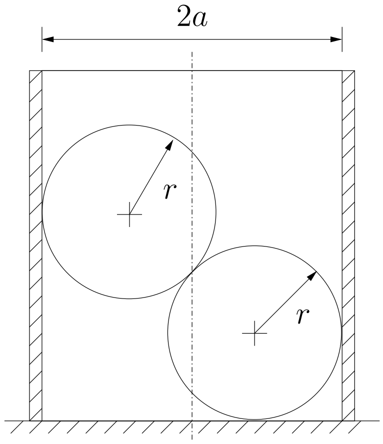
Aufgabe 2.8 Ein einseitig eingespannter Balken ist durch zwei Kräfte F_1 und F_2 belastet. Wie lauten die Lagerreaktionen?



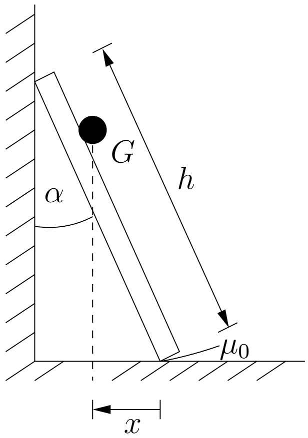
Aufgabe 2.9 Eine homogene Scheibe (gleichseitiges Dreieck, Gewicht G_1) wird durch ein Gewicht G_2 in der dargestellten Lage (linker Scheibenrand vertikal, Seil horizontal) im Gleichgewicht gehalten. Wie groß ist das Gewicht G_2 und wie groß sind die Lagerreaktionen bei A?



Aufgabe 2.10 Zwei glatte Kugeln (Gewicht G, Radius r) liegen in einem kreiszylindrischen Rohrstück (Gewicht G_R, Radius a). Unter welcher Bedingung kippt das Rohr nicht?



Aufgabe 2.11 Auf einer Leiter (Länge h) steht ein Mann vom Gewicht G. Bis zu welcher Stelle x kann er steigen, wenn die Wand glatt und der Boden rauh ist (Haftkoeffizient μ_0)?



Aufgabe 2.12 Für welchen Wertebereich von F befindet sich das System im Gleichgewicht? Gegeben sind G, α, μ_0 und μ_s.