1

Feldgleichungen des Verschiebungsvektors $\mathfrak{s}$ (linear elastischer Festkörper)

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = (a^2 - b^2)\,\text{grad div}\,\mathfrak{s} + b^2\,\text{div grad}\,\mathfrak{s}$$

Randbedingungen: Kräftefreie Oberfläche

$$\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0, \qquad \sigma = f(\,\text{grad}\,\mathfrak{s})$$

in Zylinderkoordinaten r, φ, z
Elastische Koeffizienten

- a, b Wellengeschwindigkeiten
- λ, μ *Lame*-Konstanten
- E, ν Elastizitätskonstanten

2

Zerlegung: Potential ϕ, Vektorpotential Ψ

$$\mathfrak{s} = \text{grad}\,\phi + \text{rot}\,\Psi$$

Torsion Ω, Volumendilatation ϑ

$$\Omega = \text{rot}\,\mathfrak{s}, \quad \vartheta = \text{div}\,\mathfrak{s}$$

Skalare und vektorielle Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a^2\,\text{div grad}\,\phi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = b^2\,\text{div grad}\,\Psi$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = a^2\,\text{div grad}\,\vartheta, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} = b^2\,\text{div grad}\,\Omega$$

[?] Wellenansatz $\sim \exp i(kz + n\varphi - \omega t)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{s} = [u, v, w] &= [U(r), iV(r), -iW(r)] && \exp i(kz + n\varphi - \omega t)\\
\phi &= \Phi(r) && \exp i(kz + n\varphi - \omega t)\\
\Psi &= [\xi(r)\,, i\eta(r)\,, -i\zeta(r)] && \exp i(kz + n\varphi - \omega t)
\end{aligned}$$

Moden

- $n = 0$: Torsion, Längswellen
- $n = 1$: Biegewellen

[?]

$$\text{Lösung}\quad\begin{array}{rcl}\Phi &=& AJ_n(\alpha r),\quad \alpha^2=\omega^2/a^2-k^2\\ \zeta &=& BJ_n(\beta r),\quad \beta^2=\omega^2/b^2-k^2\\ \xi &=& CJ_{n-1}(\beta r)+DJ_{n+1}(\beta r)\\ \eta &=& CJ_{n-1}(\beta r)-DJ_{n+1}(\beta r)\end{array}$$

$$(n=0)\to\quad\begin{array}{rcl}U &=& \alpha AJ_1(\alpha r)+kCJ_1(\beta r)\\ V &=& BJ_1(\beta r)\\ W &=& kAJ_0(\alpha r)-C\beta J_0(\beta r)\end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}c^2U'+(c^2-2)(U+kW') &=& 0\\ V'-V &=& 0 \qquad \text{RB an } r=1\\ kU-W' &=& 0\end{array}$$

[?] Torsion

$$\left(\frac{\omega^2}{b^2}-k^2\right)J_2\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-k^2}\right)=0$$

$$\text{explizit}\quad \omega^2=b^2k^2,\qquad \omega^2=b^2(j_{2,m}^2+k^2)$$

Längswellen

$$\begin{vmatrix}\{\frac{a^2}{b^2}(k^2+\alpha^2)-2k^2\}J_0(\alpha)-2\alpha J_1(\alpha) & 2\beta J_0(\beta)-2kJ_1(\beta)\\ 2\alpha kJ_1(\alpha) & (k^2-\beta^2)J_1(\beta)\end{vmatrix}=0.$$

[?] Langwellennäherung (Taylor um $k=0$, $\omega=0$)

$$\omega^2\simeq\frac{(3a^2-4b^2)b^2}{a^2-b^2}k^2+\frac{(3a^2-4b^2)b^2}{4(a^2-b^2)}\omega^2k^4-\frac{6a^4-3a^2b^2-4b^4}{8a^2(a^2-b^2)}\omega^2k^2$$

Rayleigh–Love: $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\frac{E}{\rho}\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+\frac{\nu^2I}{A}\frac{\partial^4u}{\partial z^2\partial t^2}$

$$\omega^2=\frac{(3a^2-4b^2)b^2}{a^2-b^2}k^2-\frac{a^2-2b^2}{4(a^2-b^2)}\omega^2k^2$$

Kurzwellen $\to$ *Rayleigh*sche Oberflächenwellen (nicht dispersiv)

$$\left(k^2-\frac{\omega^2}{2b^2}\right)^2=k^2\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{a^2}}\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{b^2}}$$