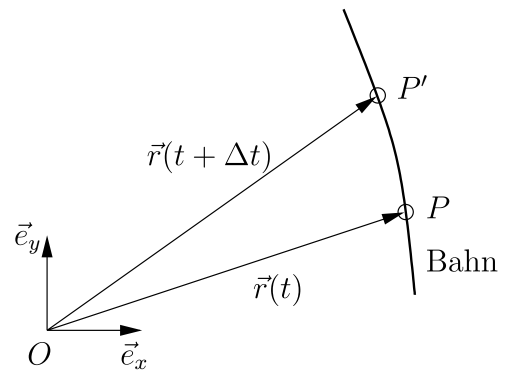
4 Kinematik

Aufgabe der Kinematik ist es, die Lage mechanischer Systeme im Raum sowie die Lageänderungen als Funktionen der Zeit zu beschreiben. Kinematik kann deshalb als Geometrie von Lagebeziehungen und Bewegungen aufgefasst werden. Nach der Ursache der Bewegung wird dabei (noch) nicht gefragt.

4.1 Punkt-Bewegungen

Die Lage eines Punktes P im Raum kann durch einen **Ortsvektor** $\vec{r}$ gekennzeichnet werden, der von einem Bezugspunkt O aus zum Punkt P zeigt. Bewegt sich P im Raum, dann ändert sich $\vec{r}$ mit der Zeit t.



Der **Geschwindigkeitsvektor** $\vec{v}$ des Punktes P ist definiert als Grenzwert der zeitlichen Änderung des Ortsvektors:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

kurz: $\quad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$

- Der Geschwindigkeitsvektor hat stets die Richtung der Bahntangente. Sein Richtungssinn zeigt, wie die Bahn durchlaufen wird.

Der **Beschleunigungsvektor** $\vec{a}$ eines Punktes ist ein Maß für die zeitliche Änderung seiner Geschwindigkeit. Er wird aus dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ in der selben Weise gebildet wie dieser aus dem Ortsvektor $\vec{r}$. Es gilt demnach

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

kurz: $\quad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) \quad$ oder $\quad \vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$

Zur Darstellung der Vektoren benötigt man ein geeignetes Koordinatensystem. Wir verwenden nunächst ein **kartesisches Koordinatensystem** mit raumfesten, orthogonalen Einsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$ als Basis:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \\
\vec{v}(t) &= \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \\
\vec{a}(t) &= \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Im Sonderfall einer **geradlinigen Bewegung** längs der x-Achse zeigen alle drei Vektoren in die x-Richtung, besitzen also jeweils nur eine Koordinate x, v bzw. a. Zum Studium solcher Bewegungen genügen deshalb die skalaren Beziehungen

$$v(t) = \dot{x}(t) \qquad \text{und} \qquad a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

Eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit heißt **gleichförmige Bewegung**. Für sie gilt

$$v = v_0 \quad \rightarrow \quad x = v_0 t + x_0 \quad \text{und} \quad a = 0$$

Eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung heißt **gleichförmig beschleunigte Bewegung**. Für sie gilt

$$a = a_0 \quad \rightarrow \quad v = a_0 t + v_0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

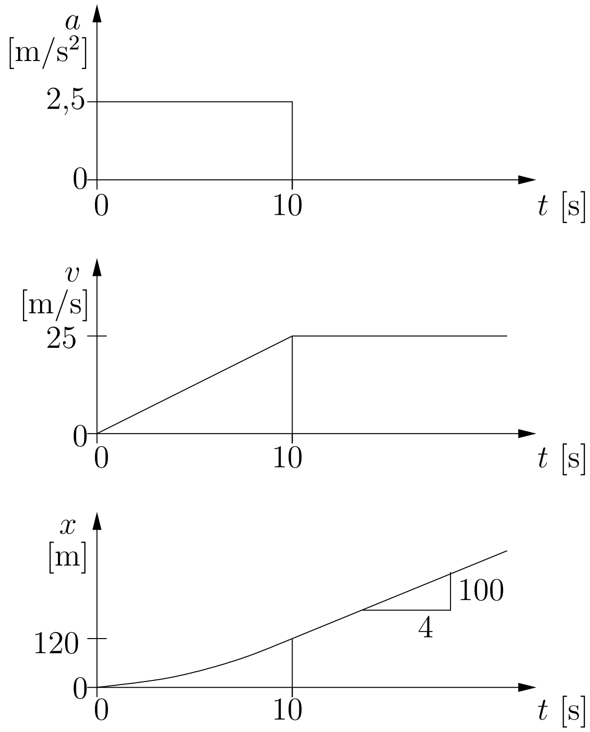
Zur Veranschaulichung einer geradlinigen Bewegung sind grafische Darstellungen der Funktionen $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ in **kinematischen Diagrammen** hilfreich.

Beispiel 4.1: Ein Fahrzeug beschleunigt aus dem Stand in 10 s gleichförmig auf 90 km/h und fährt dann gleichförmig mit der Geschwindigkeit 90 km/h weiter. Welchen Weg legt es in der Beschleunigungsphase zurück, und wie sehen die kinematischen Diagramme aus?

Umrechnung in SI-Einheiten: $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90}{3,6}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Berechnung der Beschleunigung: $a_0 = \frac{25\,\text{m/s}}{10\,\text{s}} = 2,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

zurückgeleger Weg in den ersten 10 s: $\frac{1}{2}\,2,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\,(10\,\text{s})^2 = 125\,\text{m}$



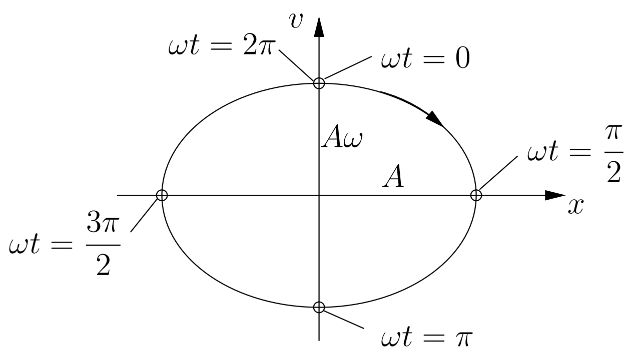
Eindimensionale Bewegungen können auch im **Phasendiagramm** (x-v-Ebene) veranschaulicht werden.

Beispiel 4.2: Harmonische Schwingung längs der x-Achse mit der Wegamplitude A und der Kreisfrequenz ω, d.h.

$$x = A\sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad v = A\omega\cos(\omega t)$$

Das ist die Parameterdarstellung einer Ellipse im x-v-Diagramm:

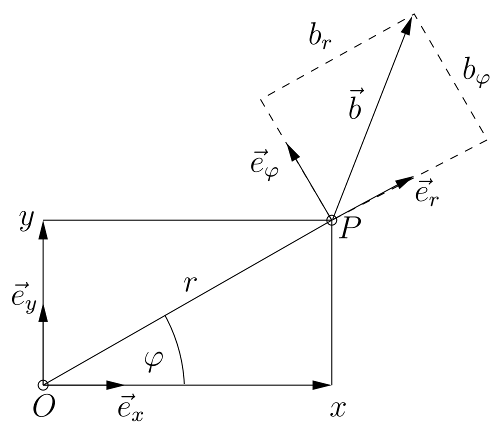
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 = 1$$



Ebene Bewegung in Polarkoordinaten

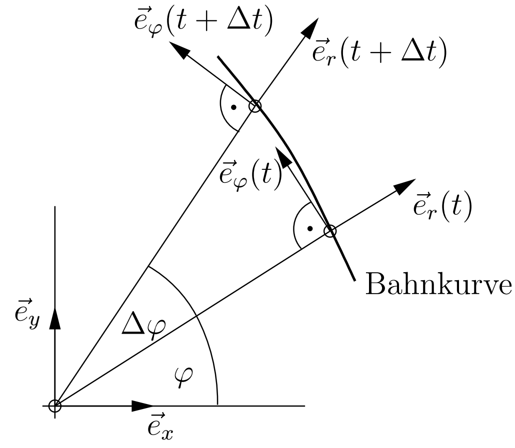
Ein dem Punkt P zugeordneter Vektor $\vec{b}$ wird dann folgendermaßen dargestellt:

$$\vec{b} = b_r\vec{e}_r + b_\varphi\vec{e}_\varphi$$



Bei der Zeitableitung von $\vec{b}$ ist zu berücksichtigen, dass sich nicht nur b_r und b_φ, sondern auch die Basisvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ längs der Bahn ändern:

$$\dot{\vec{b}} = \dot{b}_r\vec{e}_r + b_r\dot{\vec{e}}_r + \dot{b}_\varphi\vec{e}_\varphi + b_\varphi\dot{\vec{e}}_\varphi$$



Es gilt

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$
$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r$$

$$\rightarrow \qquad \dot{\vec{b}} = (\dot{b}_r - b_\varphi\dot{\varphi})\vec{e}_r + (\dot{b}_\varphi + b_r\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Anwendung auf den Ortsvektor

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

und danach auf den Geschwindigkeitsvektor ergibt die wichtigen Formeln

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

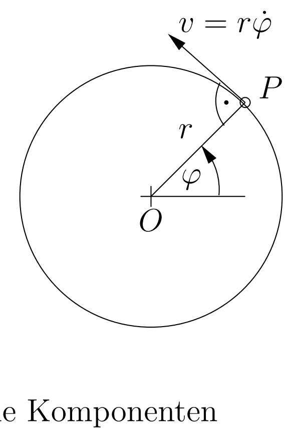
oder komponentenweise

$$\begin{array}{ll} v_r = \dot{r}, & v_\varphi = r\dot{\varphi} \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, & a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} \end{array}$$

Die Größe $\dot{\varphi}$ heißt **Winkelgeschwindigkeit**, $\ddot{\varphi}$ **Winkelbeschleunigung**.

Im Sonderfall der **Kreisbewegung** ist die Koordinate r konstant, und $\vec{e}_\varphi$ zeigt stets in Richtung der Bahntangente. Die Geschwindigkeit besitzt dann nur die zirkulare Komponente

$$v = v_\varphi = r\dot{\varphi} \qquad \text{“Umfangsgeschwindigkeit”}$$



Die Beschleunigung hat dann die Komponenten

$$\begin{array}{ll} a_\varphi = r\ddot{\varphi} & \text{Bahnbeschleunigung} \\ a_r = -r\dot{\varphi}^2 & \text{Zentralbeschleunigung (zum Zentrum hin gerichtet)} \end{array}$$

Beispiel 4.3: Ein Rotor rotiert gleichförmig mit einer Drehzahl von $n = 1000\ \text{min}^{-1}$. Wie groß sind die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines Punktes im Rotor mit dem Abstand $r = 10$ cm von der Drehachse?

Gleichförmig bedeutet: $\dot{\varphi} = \text{konst} \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad a_\varphi = 0$

Winkelgeschwindigkeit: $\dot{\varphi} = 2\pi n = 2\pi \dfrac{1000}{60\ \text{s}} = 105\ \text{s}^{-1}$

Geschwindigkeit: $v = r\dot{\varphi} = 0,1\ \text{m}\cdot 105\ \text{s}^{-1} = 10,5\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

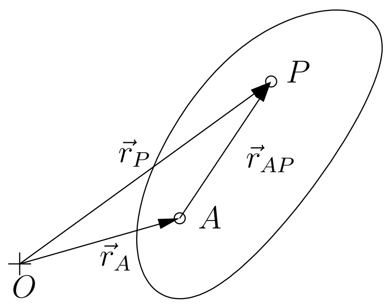
Beschleunigung: $a = a_r = -0,1\ \text{m} \cdot (105\ \text{s}^{-1})^2 = -1100 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$

4.2 Ebene Bewegung starrer Körper

Ein starrer Körper ist dadurch gekennzeichnet, dass der Abstand beliebiger Punkte des Körpers zeitlich konstant ist.

Eine **ebene Bewegung** liegt vor, wenn die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_P$ aller Punkte P des Körpers parallel zu einer festen Ebene sind. Man denke an ein Blatt Papier, das auf dem Tisch liegt. Es kann in der Tischebene verschoben werden (2 Freiheitsgrade der **Translation**), und es kann um eine Achse senkrecht zur Tischebene gedreht werden (1 Freiheitsgrad der **Rotation**).

Die Bewegung eines Punktes P eines starren Körpers lässt sich zusammensetzen aus der Translationsbewegung eines Bezugspunktes A im Körper und der Relativbewegung zwischen P und A.



$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP}$$
$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{AP}$$

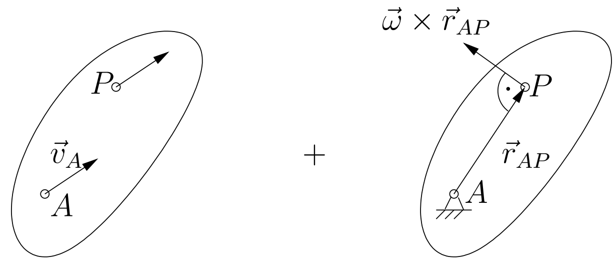
Im starren Körper gilt:

$|\vec{r}_{AP}| = \text{konst}$

P kann sich deshalb relativ zu A nur auf einem Kreis bewegen, d.h.

$$\dot{\vec{r}}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

Dabei bezeichnet $\vec{\omega}$ den "axialen" **Vektor der Winkelgeschwindigkeit** in Richtung der Drehachse; $\vec{\omega}$ steht also senkrecht auf der Ebene.



Translation:

Parallelverschiebung aller Punkte des Körpers mit gleicher Geschwindigkeit $\vec{v}_A$

Rotation:

Drehung aller Punkte des Körpers um den Bezugspunkt A mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Es gilt also die Geschwindigkeitsformel (Euler)

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

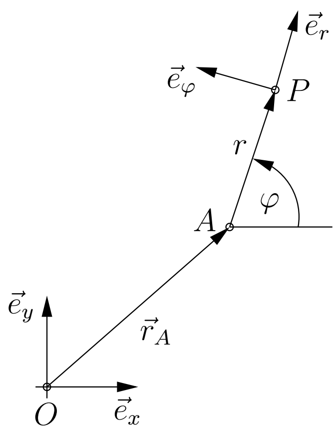
Anmerkung: Der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ eines starren Körpers ist unabhängig vom Bezugspunkt A (freier axialer Vektor).

Für den Beschleunigungsvektor $\vec{a}_P$ folgt dann

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_P &= \dot{\vec{v}}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_{AP} \\ \vec{a}_P &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{AP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}) \end{aligned}$$

Bei einer ebenen Bewegung steht der Vektor $\vec{\omega}$ senkrecht auf $\vec{r}_{AP}$.

Unter Verwendung ebener Polarkoordianten r, φ und der zugehörigen Zylinderkoordinate z nehmen die kinematischen Beziehungen folgende Gestalt an:



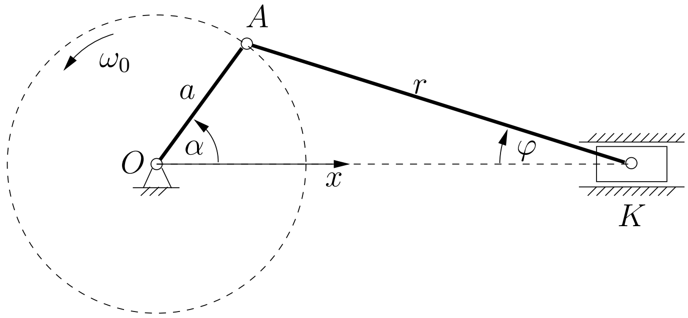
$$\vec{r}_{AP} = r\,\vec{e}_r, \qquad \vec{\omega} = \omega\,\vec{e}_z$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r}_{AP} = r\omega\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + r\omega\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A + r\dot{\omega}\,\vec{e}_\varphi - r\omega^2\,\vec{e}_r$$

Beispiel 4.4: Bei dem skizzierten Kurbeltrieb dreht sich die Kurbel $\overline{OA}$ gleichförmig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0.
Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit und die Winkelbeschleunigung der Pleuelstange $\overline{AK}$ sowie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Kolbens K in Abhängigkeit vom Kurbelwinkel α?



Lösungsskizze:

$$\omega = \text{konst} \quad \rightarrow \quad \alpha = \omega_0 t \quad \text{Kurbelwinkel wächst proportional zur Zeit}$$

geometrische Zwangsbedingung: $r \sin\varphi = a \sin\alpha$

$$\rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{a\cos\alpha}{r\cos\varphi}\omega_0 \quad \text{Winkelgeschwindigkeit der Pleuelstange}$$

$$\text{mit} \quad \cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}\sin^2\alpha}$$

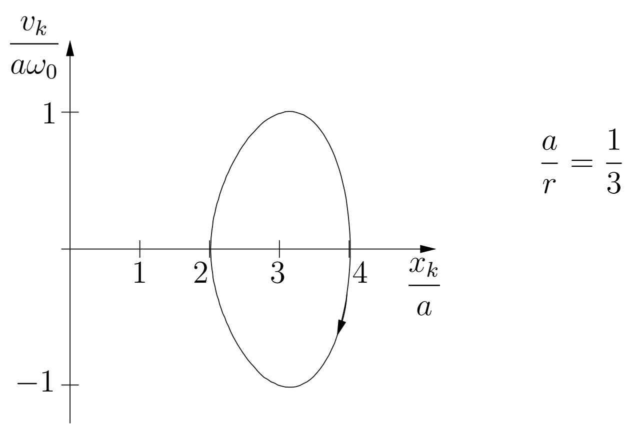
$$\rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \cdots$$

Lagekoordinate des Kolbens: $x_k = a\cos\alpha + r\cos\varphi$

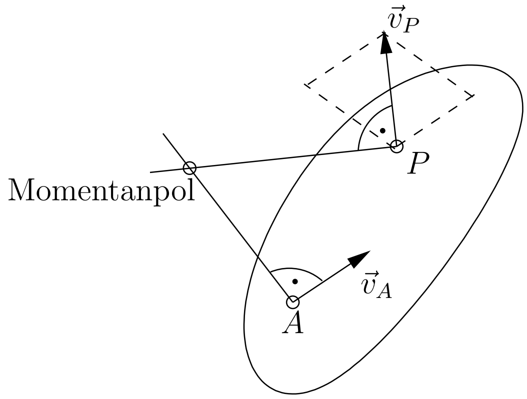
$$\rightarrow \quad \dot{x}_k = -a\omega_0 \sin\alpha - r\sin\varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$v_k = \dot{x}_k = -a\omega_0 \sin\alpha \left[1 + \frac{a\cos\alpha}{r\cos\varphi}\right] \quad \text{Geschwindigkeit des Kolbens}$$

$$a_k = \ddot{x}_k = \cdots$$



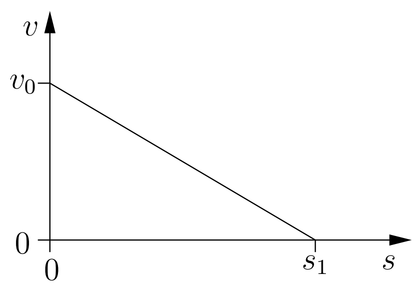
Ergänzung: Jede ebene Bewegung eines starren Körpers kann zu jedem Zeitpunkt als Drehung um einen Pol aufgefasst werden.



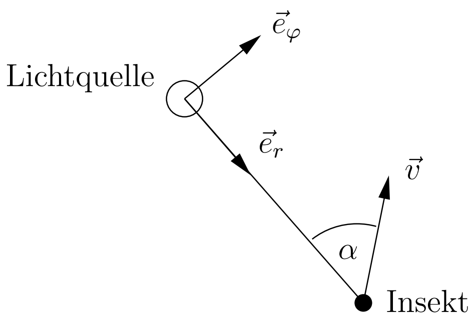
4.3 Aufgaben

Aufgabe 4.1: Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit von $v_1 = 100$ km/h. Zu welcher Zeit t_1 muß es bremsen, damit es insgesamt eine Strecke von 300 m zurückgelegt hat, wenn die Verzögerung $a_1 = -5$ m/s^2 beträgt.

Aufgabe 4.2: Ein Punkt bewegt sich geradlinig mit der Geschwindigkeit $v(t)$. Dabei legt er die Strecke $s(t)$ zurück. Gegeben ist die Geschwindigkeit v am jeweiligen Ort s. Sie nimmt entsprechend der Abbildung linear ab. Nach welcher Zeit ist der Punkt am Ort s_1?



Aufgabe 4.3: Ein Insekt will mit konstanter Geschwindigkeit v geradeaus fliegen. Dazu orientiert es sich an der Sonne und hält den Winkel α stets konstant. Nachts verwechselt es irrtümlicherweise eine Straßenlaterne mit der Sonne.
Welche Flugbahn legt das Insekt zurück?
Geben Sie die Bahn in Polarkoordinaten r, φ an.



Gegeben: $|\vec{v}| = v = \text{konst}$, $\alpha = \text{konst}$ $0 < \alpha < \pi/2$.
Gesucht: $r(t)$, $\varphi(t)$ mit $r(0) = r_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$.

Aufgabe 4.4: Ein Rad (Radius a) rollt in einem Zylinder (Radius R). Wie groß ist die Geschwindigkeit v_P des Punktes P außen am Rad in Abhängigkeit des Winkels α(t)?
In der Ausgangsposition $\alpha = 0$ befinde sich P im Kontakt mit dem Zylinder.