1 Einleitung

1.1 Definition und Einteilung der Mechanik

- Die Mechanik ist der älteste, grundlegende Zweig der Physik. Sie untersucht die Bewegungen und den inneren Zustand materieller Körper unter der Einwirkung von Kräften.

Die Bearbeitung technisch relevanter Aufgaben in der Mechanik erfolgt in der Regel in mehreren Schritten:

- Abbildung des realen technischen Systems auf ein mechanisches (Ersatz-) Modell,
- mathematische Formulierung der mechanischen Vorgänge, die anhand des Modells untersucht werden sollen,
- Entwicklung und Anwendung geeigneter Lösungsmethoden,
- mechanische Interpretation und Auswertung der Lösungen im Hinblick auf die Aufgabenstellung.

Die Modellbildung betrifft u.a. auch die Stoffeigenschaften der materiellen Körper. Daraus ergibt sich bereits eine grobe Einteilung der Mechanik.

Aggregatzustand	Werkstoffmodell	Teilgebiet	übergeordnete Begriffe	
fest	starr	Stereomechanik	Festkörpermechanik	Kontinuums–mechanik
	elastisch	Elastomechanik		
	plastisch	Plastomechanik		
flüssig	viskos	Hydromechanik	Fluidmechanik	
gasförmig	reibungslos	Aeromechanik		

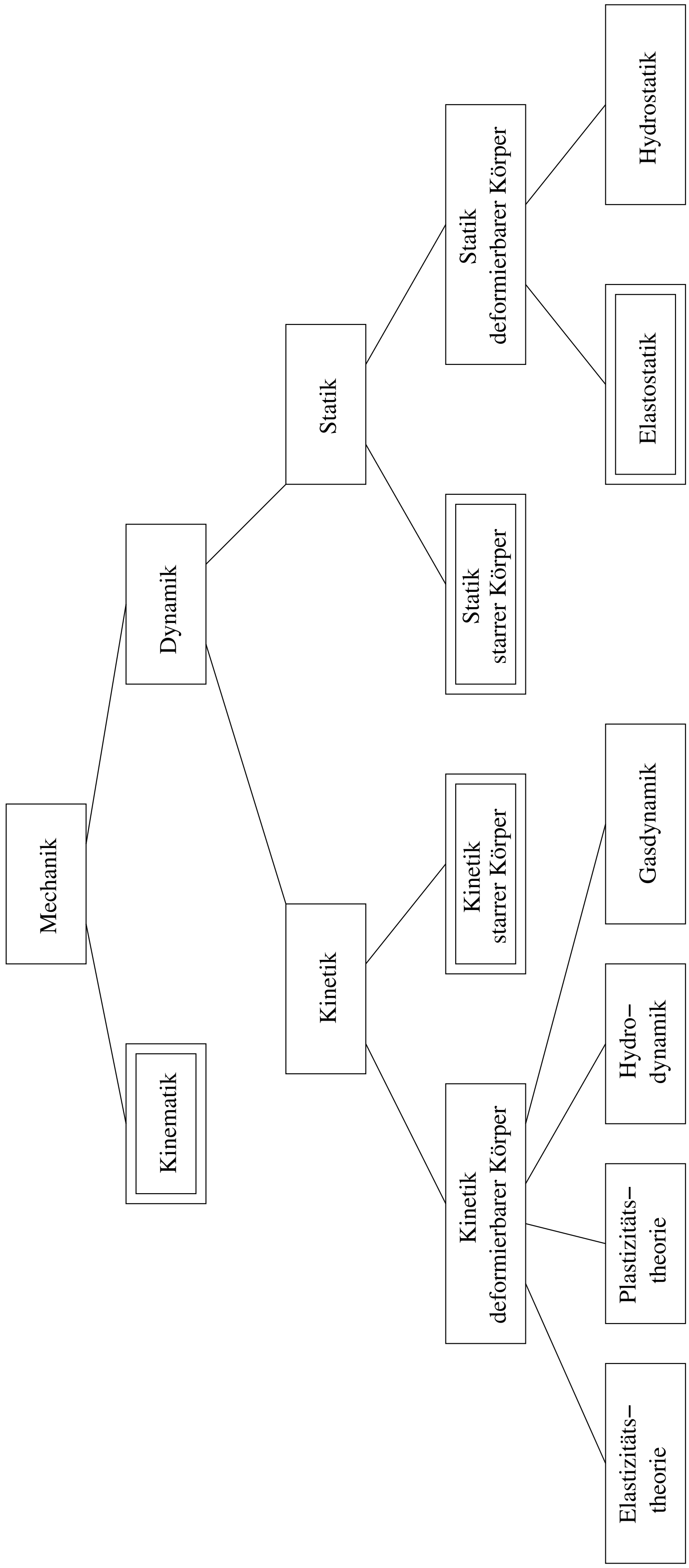
Im Hinblick auf die zu untersuchenden Vorgänge gliedert man die Mechanik in vier Bereiche:

- Die **Kinematik** beschreibt den geometrisch möglichen Bewegungsablauf in Raum und Zeit.
- Die **Dynamik** ist die Lehre von den Kräften und ihren Wirkungen und umfasst die Teilgebiete Statik und Kinetik.
- Die **Statik** ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte am ruhenden Körper.
- Die **Kinetik** untersucht den Zusammenhang zwischen den auf einen Körper wirkenden Kräften und den durch sie hervorgerufenen Bewegungen.

Die unterschiedlichen Eigenschaften technisch relevanter Werkstoffe führen dann zu einer weiteren Untergliederung in eigenständige Teilgebiete, s. Tabelle.

Historische Personen, die zur Entwicklung der Mechanik wesentlich beigetragen haben:

Archimedes	(287–212 v. Chr.)	Hebelgesetze, Auftrieb, Schwerpunkt
Tycho Brahe	(1546–1601)	Planetenbewegung
G. Galilei	(1564–1642)	Fallgesetze, Wurf
J. Kepler	(1571–1630)	Planetenbewegung
C. Huygens	(1629–1695)	Schwingungen, Stoß
I. Newton	(1643–1727)	Bewegungsgesetze
J. Bernoulli	(1667–1748)	Balkenbiegung
D. Bernoulli	(1700–1782)	Energiesatz
L. Euler	(1707–1783)	Hydrodynamik, Variationsrechnung
J.-B. d'Alembert	(1717–1783)	Prinzipien der Mechanik, Wellengleichung
J. L. Lagrange	(1736–1813)	Analytische Mechanik
W. R. Hamilton	(1805–1865)	Extremalprinzip
J. W. Rayleigh	(1842–1919)	Schwingungslehre, Akustik


Mechanik
Kinematik
Dynamik
Statik
Kinetik
Statik
starrer Körper
Statik
deformierbarer Körper
Elastostatik
Hydrostatik
Kinetik
starrer Körper
Kinetik
deformierbarer Körper
Elastizitäts–
theorie
Plastizitäts–
theorie
Hydro–
dynamik
Gasdynamik

1.2 Physikalische Größen und Einheiten

Wie überall in der Physik begegnen uns auch in der Mechanik dimensionsbehaftete Größen, die durch einen Zahlenwert (Maßzahl) und eine Einheit gekennzeichnet sind, z.B.

$$m = 70 \text{ kg}$$
$$v = 10 \text{ m/s}$$

Im internationalen Einheitensystem (SI) sind die voneinander unabhängigen Basisgrößen festgelegt.

Basisgrößen	SI-Basiseinheiten	
Masse	Kilogramm	kg
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Temperatur	Kelvin	K
elektrische Feldstärke	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

In der Mechanik werden (nur) die Basisgrößen Masse, Länge und Zeit benötigt. Die Einheiten andersartiger mechanischer Größen können aus kg, m und s abgeleitet werden.

Für einige abgeleitete SI-Einheiten sind besondere Namen üblich:

Größe	SI-Einheiten	
Kraft	Newton	$N = kg\ m/s^2$
Druck, Zugspannung	Pascal	$Pa = N/m^2$
Energie, Arbeit	Joule	$J = Nm$
Leistung	Watt	$W = J/s$

Oft ist es zweckmäßig, auch Vielfache oder Bruchteile der SI-Einheiten zu verwenden. Zur Kennzeichnung sind international vereinbarte Vorsätze üblich.

Faktor	Vorsatz	Zeichen
10^6	Mega	M
10^3	Kilo	k
10^2	Hekto	h
10^{-1}	Dezi	d
10^{-2}	Zenti	c
10^{-3}	Milli	m
10^{-6}	Mikro	μ

Wichtiger Hinweis: Unterscheiden Sie stets zwischen der Masse m und der Gewichtskraft G eines Körpers! Es gilt der Zusammenhang

$$G = mg$$

In der Technik rechnet man üblicherweise mit dem konstanten Wert

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

für die Fallbeschleunigung auf der Erde.

- Ein Körper mit einer Masse von 1 kg besitzt (auf der Erde ungefähr) ein Gewicht von 9,81 N.

Zweckmäßigerweise betrachtet man in der Mechanik oft die Kraft — statt der Masse — als Grundgröße.

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Teilgebiet</td><td>benötigte Grundgrößen</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Mechanik</td><td>Kinematik</td><td></td><td>Länge, Zeit</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Dynamik</td><td>Statik</td><td>Kraft, Länge</td></tr>
<tr><td>Kinetik</td><td>Kraft, Länge, Zeit</td></tr>
</table>

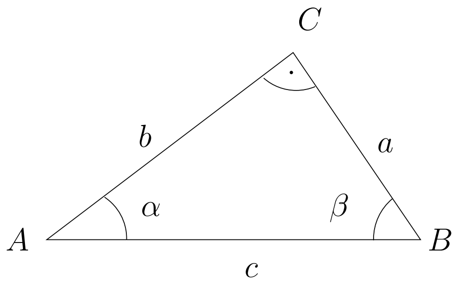
Zusammenstellung der verwendeten Symbole

Symbol	SI-Einheit	Bedeutung
a	m/s^2	Beschleunigung
A	m^2	Fläche
c	N/m	Federkonstante
d	m	Durchmesser
$\vec{e}$	–	Einheitsvektor
E	N/m^2	Elastizitätsmodul
F	N	Kraft
G	N	Gewichtskraft
h	m	Höhe
I	m^4	Flächenmoment 2. Ordnung
$J \quad (\Theta)$	kg m^2	Massenträgheitsmoment
l	m	Länge
L	kg m^2/s	Drehimpuls, Drall
m	kg	Masse
M	Nm	Moment
n	1/s	Drehzahl
p	kg m/s	Impuls, Bewegungsgröße
P	W	Leistung
r	m	Zylinderkoordinate, Radius
t	s	Zeit
T	J	kinetische Energie
U	J	Formänderungsenergie, potentielle Energie
v	m/s	Geschwindigkeit
V	m^3	Volumen
W	J	Arbeit
x, y, z	m	kartesische Koordianten
α, β, γ	–	Winkel
α	1/K	thermischer Ausdehnungskoeffizient
ε	–	Dehnung
ϱ	kg/m^3	Massendichte
σ	Pa	Normalspannung
φ	–	Polarkoordinate, Winkel
ω	1/s	Winkelgeschwindigkeit, Kreisfrequenz

1.3 Mathematische Grundlagen

a) Ebene Trigonometrie

Definition der Winkelfunktionen am Dreieck

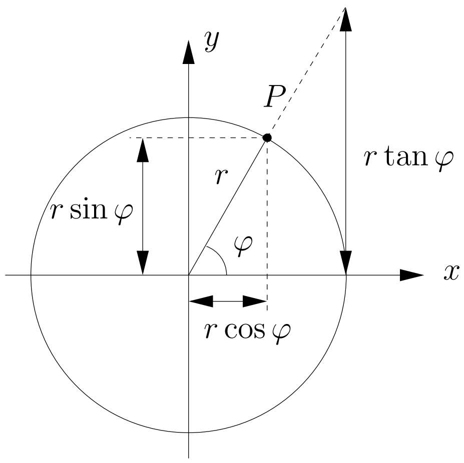


$$\text{Sinus} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$
$$\text{Cosinus} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$
$$\text{Tangens} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$
$$\text{Cotangens} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

Zusammenhänge zwischen den Winkelfunktionen

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Veranschaulichung der Winkelfunktionen am Kreis



Die Lage des Punktes P kann beschrieben werden entweder mit **kartesischen Lagekoordianten** x, y oder mit **Polarkoordinaten** r, φ.
Zusammenhang:

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

b) Vektorrechnung

Vektoren sind gerichtete Strecken im Raum. Kennzeichen einer solchen Strecke sind: Länge, Richtung und Richtungssinn. Das geometrische Bild eines Vektors $\vec{a}$ im 3d Raum unserer Anschauung ist ein Pfeil. Die Länge des Pfeils ist ein Maß für den **Betrag des Vektors**

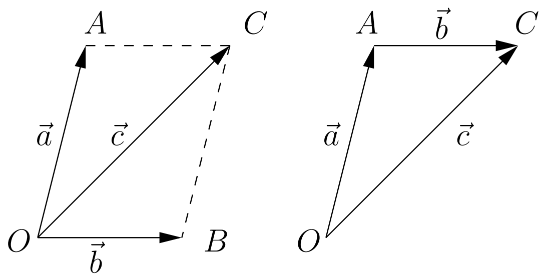
$$a = |\vec{a}|$$

Ein Vektor vom Betrag Null heißt **Nullvektor**. Ein Vektor $\vec{e}$, dessen Betrag Eins ist, d.h. $e = 1$, heißt **Einsvektor** (auch Einheitsvektor).

Multiplikation mit einem Skalar: Wird der Vektor $\vec{a}$ mit einer Zahl λ (Skalar) multipliziert, dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{b} = \lambda\vec{a} \qquad & \text{mit } b = |\lambda| a \\ & \text{und } \vec{b} \upuparrows \vec{a}, \text{ wenn } \lambda > 0 \text{ (gleichsinnig parallel)} \\ & \text{oder } \vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}, \text{ wenn } \lambda < 0 \text{ (gegensinnig parallel)} \end{aligned}$$

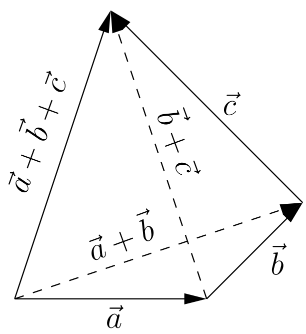
Die **Addition** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erfolgt nach der Parallelogrammregel. Zur grafischen Darstellung genügt es, ein Dreieck anstelle des vollständigen Parallelogramms zu zeichnen.



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Eigenschaften der Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \qquad \text{(kommutativ)}$$
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \qquad \text{(assoziativ)}$$



Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen inversen Vektor $-\vec{a}$, so dass gilt

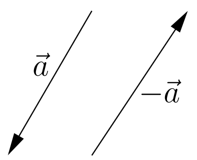
$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

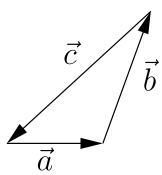
Beachte: Die Vektoren $\vec{a}$ und $-\vec{a}$ haben den gleichen Betrag a.

Die Beziehung

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

sagt aus, dass das aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildete Vektordreieck geschlossen ist: der Endpunkt von $\vec{c}$ fällt mit dem Anfangspunkt von $\vec{a}$ zusammen.

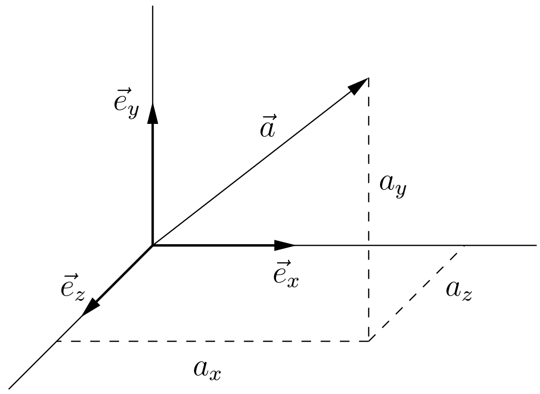




Komponentendarstellung eines Vektors bezüglich einer **kartesischen Basis** mit den Einsvektoren $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ und $\vec{e}_z$. Jeder Vektor kann als Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden:

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z$$

Die drei Summanden der rechten Seite heißen **Komponenten**, die skalaren Faktoren a_x, a_y und a_z heißen **Koordinaten** des Vektors $\vec{a}$.



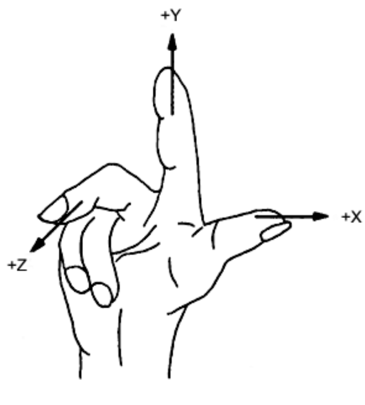
Nach Festlegung der Basisvektoren genügt es, die Koordinaten von $\vec{a}$ zu notieren. Man schreibt

$$\vec{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z) \qquad \text{“Zeilenvektor”}$$

oder

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad \text{“Spaltenvektor”}$$

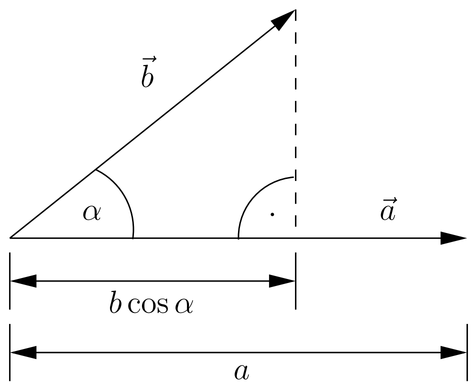
Achtung: Wir verwenden immer **Rechtshandsysteme**, d.h. der Richtungssinn der Basisvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ korrespondiert (in dieser Reihenfolge) mit der Richtung von Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand.



Das **Skalarprodukt** ("Punktprodukt", inneres Produkt) zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a\, b\, \cos \alpha$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.



Es kann auch folgendermaßen berechnet werden:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Hieraus folgt insbesondere (mit $\vec{b} = \vec{a}$)

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

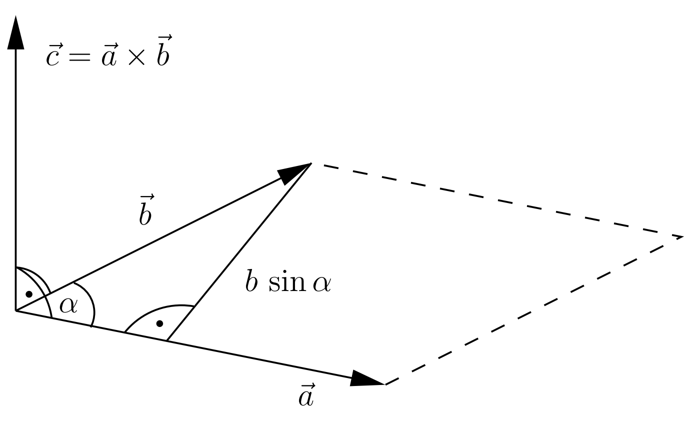
und (mit $\vec{b} = \vec{e}_x$ usw.)

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_x = a_x \qquad \text{usw.}$$

Beachte: Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die senkrecht aufeinander stehen, ist null,

$$\text{z.B.} \qquad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

Das **Vektorprodukt** ("Kreuzprodukt", äußeres Produkt) $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren ist ein Vektor $\vec{c}$ mit folgenden Eigenschaften:



- Der Betrag c ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:
$$c = a\,b\,\sin\alpha$$

- Die Richtung von $\vec{c}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Der Richtungssinn ist so festgelegt, dass $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.

Achtung: Es gilt
$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \qquad \text{nicht kommutativ!}$$

Zur Berechnung eines Kreuzproduktes ist folgende **Determinantenregel** hilfreich:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{e}_z$$

c) Andere Gebiete

Gelegentlich werden in dieser Vorlesung auch Kenntnisse aus folgenden Teilgebieten der Mathematik benötigt:

- Lineare Algebra (Auflösung einfacher Gleichungssysteme)
- Integralrechnung (Flächenmomente, Massenträgheitsmoment)
- Differentialrechnung (Ableitung von Funktionen)
- Differentialgleichungen (Biegelinie, Bewegungsgleichungen)

1.4 Lehrbücher zur Technischen Mechanik

Brommundt, E., Sachs, G.:
Technische Mechanik
R. Oldenbourg Verlag, München 1998 (3. Auflage)

Dankert, J., Dankert, H.:
Technische Mechanik: Statik – Festigkeitslehre – Kinematik/Kinetik
B. G. Teubner Verlag, Suttgart 2004 (3. Auflage)

Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Schröder, J.:
Technische Mechanik, Band 1: Statik
Springer-Verlag, Berlin 2004 (8. Auflage)

Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Schröder, J.:
Technische Mechanik, Band 2: Elastostatik
Springer-Verlag, Berlin 2005 (8. Auflage)

Gross, D., Hauger, W., Schnell, W., Schröder, J.:
Technische Mechanik, Band 3: Kinetik
Springer-Verlag, Berlin 2004 (8. Auflage)

Hagedorn, P.:
Technische Mechanik, Band 1: Statik
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 2001 (3. Auflage)

Hagedorn, P.:
Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 2003 (3. Auflage)

Hagedorn, P.:
Technische Mechanik, Band 3: Dynamik
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt a. M. 2003 (2. Auflage)

Holzmann, G., Meyer, H., Schumpich, G.:
Technische Mechanik 1: Statik
B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 2004 (10. Auflage)

Holzmann, G., Meyer, H., Schumpich, G.:
Technische Mechanik 2: Kinematik und Kinetik
B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 2000 (8. Auflage)

Holzmann, G., Meyer, H., Schumpich, G.:
Technische Mechanik 3: Festigkeitslehre
B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 2002 (8. Auflage)

Magnus, K., Müller-Slany, H. H.:
Grundlagen der Technischen Mechanik
B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 2005 (7. Auflage)

Wriggers, P., Nackenhorst, U., Beuermann, S., Spiess, H., Löhnert, S.:
Technische Mechanik kompakt: Starrkörperstatik – Elastostatik – Kinetik
B. G. Teubner Verlag, Stuttgart 2005

1.5 Aufgaben

Aufgabe 1.1: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (4, 5, 6)$. Berechnen Sie:

a) Den Vektor $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ und seinen Betrag c

b) Die Skalarprodukte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{b} \cdot \vec{a}$

c) Die Kreuzprodukte $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \times \vec{a}$

Aufgabe 1.2: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (4, -2, 1)$ und $\vec{b} = (1, 3, 2)$. Zeigen Sie, dass die Vektoren senkrecht aufeinander stehen und berechnen Sie den Vektor $\vec{c}$, der mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Rechtshandsystem bildet und den Betrag $c = 3$ besitzt.

Aufgabe 1.3: Berechnen Sie den Vektor $\vec{c} = (2\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a} \times \vec{b}$.