第 11 回 機械力学

エネルギーの保存則

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

実習の班で相談し，自習を始めてください！

- **第 11 週までに，テキスト 15 章を自習せよ．**
  - 単独で進めず，実習の班で助け合うこと．
  - この自習を前提に，第 6 回レポートを課す．
- **必要なプログラム例は，**

  `http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/code`

  にある．

学習目標

運動方程式を解かずに，運動を調べる 2 つ目の方法

- **仕事と動力**
  - 内積，線積分
- **様々なエネルギー**
  - ポテンシャル（重力，ばね）
  - 運動エネルギー
- **エネルギーの保存則**

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

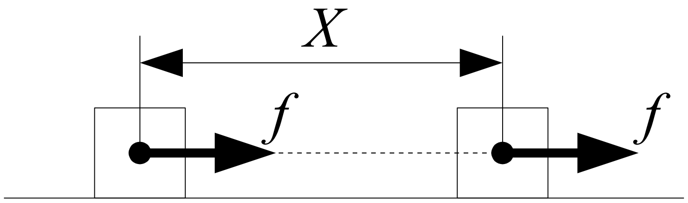
仕事と動力

$$\text{エネルギー} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \text{蓄えられた仕事}$$

仕事 — 力が変動しない場合

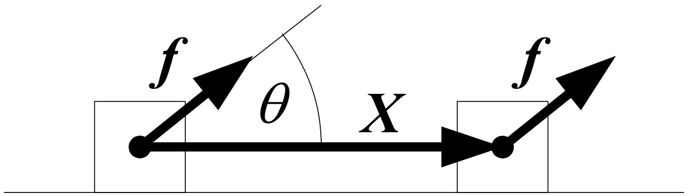
仕事 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 加えた力×移動距離　[J]=[Nm]

(a) 力と変位が同方向 ※かけ算



$$W := f \cdot X \quad \text{[J]}$$

(b) 力と変位が別方向 ※内積



$$\begin{aligned} W &= f_x \cdot X \\ &= |\boldsymbol{f}|\,|\boldsymbol{X}|\cos\theta \\ &= \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{X} \quad \text{[J]} \end{aligned}$$

内積

$$\overset{\text{定義}}{\iff} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = f_1X_1 + f_2X_2 + f_3X_3$$

内積は太字 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \cdots$ のまま計算可能！

算法 10.1 (p.95)

次のルールで計算可能な，太字の積 $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ を，**内積** という．

(1) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}$. (対称性)

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z},$
$(k\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = k(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x}\cdot(k\boldsymbol{y}) = k(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$. (分配則)

(3) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \geq 0$.
とくに，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} = 0$ となるのは，$\boldsymbol{x} = \mathbb{O}$ のときに限る．(正定値性)

演習タイム 1/4

例題 10.1, p.95

- 力 $f = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ を受けた物体が $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ だけ変位した．
- 力 f が物体に与えた仕事 W を求めよ．

力が変動する場合 — 積分

$$\left.\begin{array}{l}\text{力が着力点の関数 } \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ \text{着力点が時間の関数 } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)\end{array}\right\} \Longrightarrow \boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big)$$

- **微小時間 Δt の間におこる変位：**

$$\Delta\boldsymbol{x}(t_i) \approx \Delta t\,\dot{\boldsymbol{x}}(t_i) \quad \because \text{時間×速度＝移動距離}$$

- **微小時間 Δt の間の仕事：**

$$W_i = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t_i)\big)\cdot\Delta\boldsymbol{x}(t_i) = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t_i)\big)\cdot\big(\Delta t\,\dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\big)$$

- **時間 t の間の仕事（算法 10.2 p.96）**

$$W_n = \sum_{i=1}^{n}\left\{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t_i)\big)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t_i)\right\}\Delta t \xRightarrow{\text{積分へ}} W = \int_0^t \left\{\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(s)\right\}ds \,/\!\!/$$

演習タイム 2/4

- **例題 10.2 p.96**

回転と並進の相似性（仕事）

	変位	力	仕事
並進運動	x [m]	f [N]	$W = f \cdot x$ [Nm]=[W]
回転運動	θ [rad]	T [Nm]	$W = T \cdot \theta$ [Nm]=[W]

$\because$ rad は無単位

動力

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 時間あたりの仕事 $P := \dfrac{dW}{dt}$ [W] = [Nm/s]

積分の微分 $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_0^t F(s)ds = F(t)$ より

算法 10.3 (p.97)

$$P = \frac{d}{dt}\int_0^t \Big(\boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(s)\big)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(s)\Big)ds = \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{x}(t)\big)\cdot\dot{\boldsymbol{x}}(t)$$

(1) $x, f(x)$ **がスカラのとき** $P = f\big(x(t)\big)\cdot\dot{x}(t)$ ※かけ算

(2) 回転運動のトルク T **と角速度** $\dot{\theta}$ **に対して，** $P = T\big(\theta(t)\big)\cdot\dot{\theta}(t)$

演習タイム 3/4

- **例題 10.3 p.97**

エネルギー

$$\text{エネルギー} \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \text{蓄えられた仕事}$$

ポテンシャル $\mathcal{U}$

重力 $f = -mg$ のポテンシャル

定義 $\Longleftrightarrow$ **重力に逆らって物体を移動させるのに要する仕事**

- 逆らう力 $-f = -(-mg) = mg$,　　変位 $X = h_2 - h_1$
- $\mathcal{U} = -f \cdot X = mg(h_2 - h_1)$ //

ばねの復元力 $f = -kx$ のポテンシャル

定義 $\Longleftrightarrow$ **復元力に逆らって物体を移動させるのに要する仕事**

- 逆らう力 $-f(x) = -(-kx) = kx$,　　変位 $X = x$
- $\mathcal{U} = -\int_0^x f(s)ds = -\int_0^x ks\,ds = \frac{k}{2}x^2$ //

運動エネルギー $\mathcal{T}$

並進運動 $x(t)$ のエネルギー

$\overset{定義}{\Longleftrightarrow}$ **静止状態から速度 $\dot{x}(t)$ まで加速するのに要する仕事**

- 逆らう力 $\boldsymbol{f} = m\ddot{\boldsymbol{x}}(t), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = \mathbb{O}$ （運動方程式）
- $\boxed{\mathcal{T}} = W = \int_0^t \{\boldsymbol{f} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(s)\} ds$ $\because$ 算法 10.2 p.96

$$= \boxed{m \int_0^t \{\ddot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(s)\} ds}$$

$$= m\Big[\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Big]_0^t - \boxed{m \int_0^t \{\ddot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(s)\} ds} \quad \because \text{部分積分}$$

$$\Longrightarrow 2\boxed{\mathcal{T}} = m\Big[\dot{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t)\Big]_0^t = m|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^2 \quad \therefore \boxed{\mathcal{T}} = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}(t)|^2 \;/\!/$$

回転と並進の相似性（運動エネルギー）

	慣性	速度	運動エネルギー
並進運動	m [kg]	$\dot{x}$ [m/s]	$\mathcal{T} = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ [J]
回転運動	I [kg·m^2]	$\dot{\theta}$ [rad/s]	$\mathcal{T} = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2$ [J]

$\because$ rad は無単位

エネルギーの保存則

保存力しか受けない質点系の法則！

保存力とは？

初級の判定則：

- 「一定力」は保存力
- 「2 点間の距離で決まる力」は保存力（重力，ばね）

中級の判定則：

算法 10.4 (p.99)

位置 $\boldsymbol{x} = [x_i]$ に依存する力 $\boldsymbol{f} = [f_i]$ について，次は保存力

(1) $f = f(x)$ ※ 1 次元

(2) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} := \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} = 0$

※ 2 次元

(3) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{f} := \begin{bmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \mathbb{O}$

※ 3 次元

エネルギーの保存則

力学法則 10.1 (p.99)

保存力しか受けない系 (質点，質点系，剛体，弾性体など) において，ポテンシャル $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \cdots$ と，運動エネルギー $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \cdots$ の総和，

$$E = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \cdots$$

は保存する (時間的に変化しない).

演習タイム 4/4

- **問題 10.1 p.100（弾速測定器 — Step 2）**
- **問題 10.2 p.100（はずみ車の急制動による振り上げ — Step 2）**

第 5 回 機械力学レポート

※ **機械力学サイト** `http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn`

- **第 10 週授業にて出題.**
- **レポート用紙：機械力学サイトからダウンロード・印刷.**
  - **1 枚以内**. 裏面使用時は「裏につづく」と明記.

  ※ よく似たレポートは**不正行為の証拠**とする. (当期全単位 0)
- **提出期限：次回の前日.(次々回以降は受け取らない)**
  - 公欠などは早めの提出で対応せよ.
- **提出先：機械棟 3F・システム力学研究室 (2) の BOX.**