

第5回 機械力学

剛体の重心 1

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

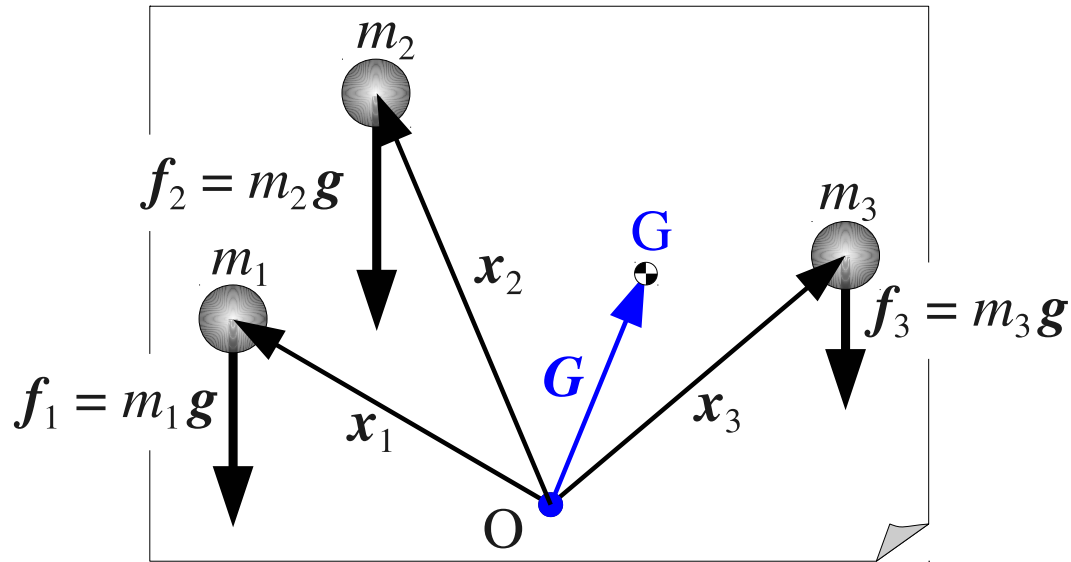
学習目標

- 離散剛体の重心
- 連続剛体の重心 (1 次元)

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

質量 0 の平板に取り付けた 3 質点



- G を壁面にピン止めする .
- G の位置を調整して , 釣り合わせる .
- このときの G の位置を「**重心**」という .

G における平板の釣合い

■ 力の釣合い方程式

■ 支点 G からの反力 f に対して, $F = f - f_1 - f_2 - f_3 = \textcircled{0} //$

■ トルクの釣合い方程式

■ $T = (x_1 - G) \wedge f_1 + (x_2 - G) \wedge f_2 + (x_3 - G) \wedge f_3 = 0$

$$\begin{aligned} &= (x_1 - G) \wedge (m_1 g) + (x_2 - G) \wedge (m_2 g) + (x_3 - G) \wedge (m_3 g) \\ &= \left(m_1 (x_1 - G) \right) \wedge g + \left(m_2 (x_2 - G) \right) \wedge g + \left(m_3 (x_3 - G) \right) \wedge g \\ &= \left(m_1 (x_1 - G) + m_2 (x_2 - G) + m_3 (x_3 - G) \right) \wedge g \\ &= \left(\underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) - (m_1 + m_2 + m_3) G}_{\heartsuit} \right) \wedge g = \textcircled{0} // \end{aligned}$$

∴ トルクの釣合い条件は, $\heartsuit = \textcircled{0}$

離散剛体の重心

■ トルクの釣り合い条件:

$$\heartsuit = (m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3) - (m_1 + m_2 + m_3) \mathbf{G} = \textcircled{0}$$

$$\therefore \mathbf{G} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + m_3 \mathbf{x}_3}{m_1 + m_2 + m_3} // \quad (n \text{ 質点も同様})$$

算法 5.1 (p.45)

n 質点からなる剛体の重心 G は,

$$\mathbf{G} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + m_n \mathbf{x}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{x}_i}{M} \quad (5.2)$$

$M = \sum_{i=1}^n m_i$ を全質量 (total mass) という.

演習タイム 1/3

追加の例題

p.43 の離散剛体の重心を，次の条件で計算せよ．

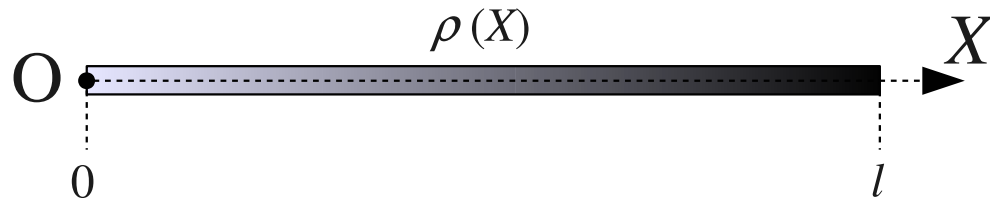
$$m_1 = m_2 = m_3 = 1, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

離散剛体と連続剛体

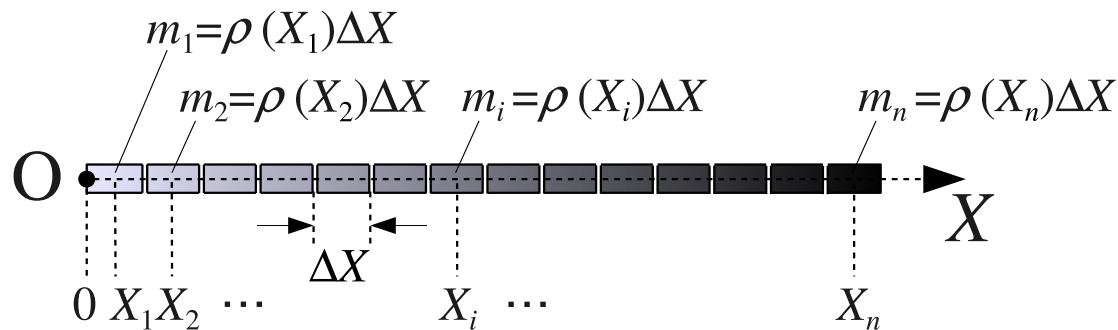
- 例題のような質量が偏在した剛体を，離散剛体という．
- 質量が連続的に分布した剛体を，連続剛体という．

1次元・連続剛体の重心 1/5

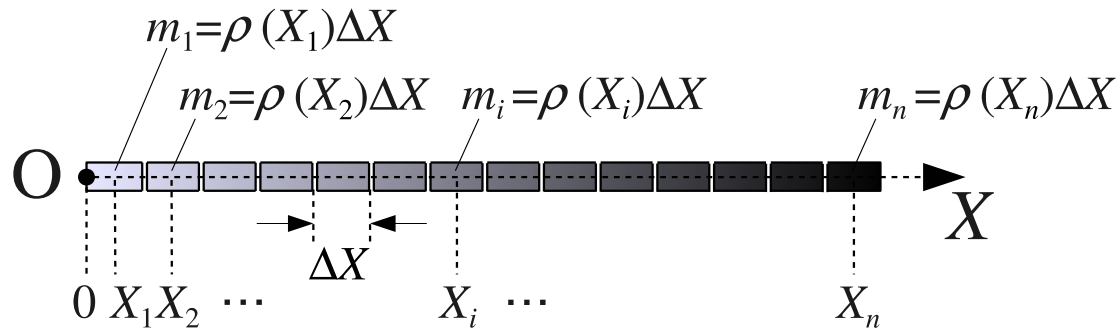
- 場所 X に応じた密度 $\rho(X)$ [kg/m] を持つ剛体 .
- $\rho(X)$ を 線密度 という .



- 重心を求めるため , n 分割する . \Rightarrow 幅 ΔX の小片



1次元・連続剛体の重心 2/5



■ 仮定「小片内の密度は一定」

■ 小片の位置 X_i に対して，小片の質量 $m_i = \rho(X_i)\Delta X$

■ 算法 5.1, p.45 に代入．近似的な全質量を得る．

$$M_n = \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \rho(X_i)\Delta X //$$

1次元・連続剛体の重心 3/5

積分への書き換え

- 総和記号 $\sum_{i=1}^n$ を積分記号 \int_0^l に書き直す．
- とびとびの変数 X_i を，連続的な変数 X に書き直す．
- 細分幅 ΔX を無限小 dX に書き直す．

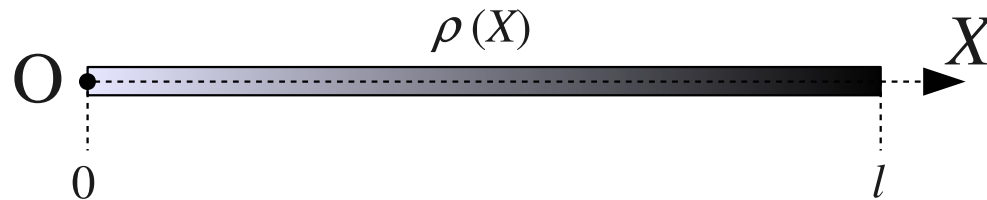
■ 全質量

$$M_n = \sum_{i=1}^n \rho(X_i) \Delta X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M = \int_0^l \rho(X) dX \quad (5.3)$$

演習タイム 2/3

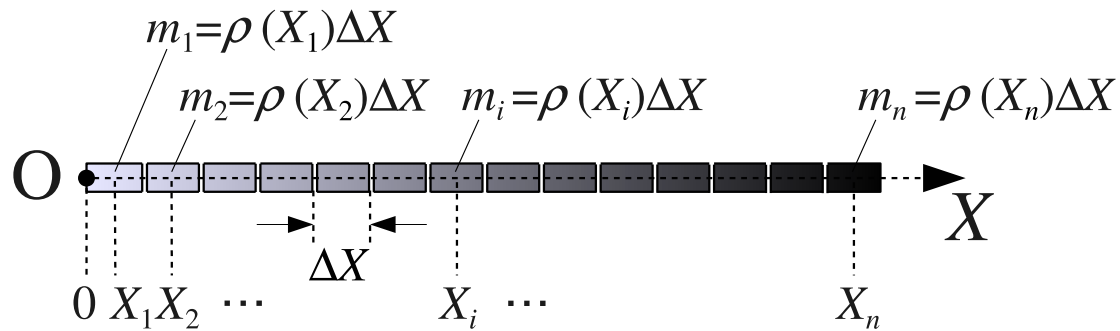
$$M = \int_0^l \rho(X) dX \quad (5.3)$$

例題 5.1 の分問



線密度 $\rho(X) = aX$ に対する全質量 M を求めよ .

1次元・連続剛体の重心 4/5



■ 仮定「小片内の密度は一定」

■ 小片の位置 X_i に対して，小片の質量 $m_i = \rho(X_i)\Delta X$

■ 算法 5.1, p.45 に代入．近似的な重心を得る．

$$G_n = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i X_i = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n X_i \rho(X_i) \Delta X //$$

1次元・連続剛体の重心 5/5

積分への書き換え

- 総和記号 $\sum_{i=1}^n$ を積分記号 \int_0^l に書き直す．
- とびとびの変数 X_i を，連続的な変数 X に書き直す．
- 細分幅 ΔX を無限小 dX に書き直す．

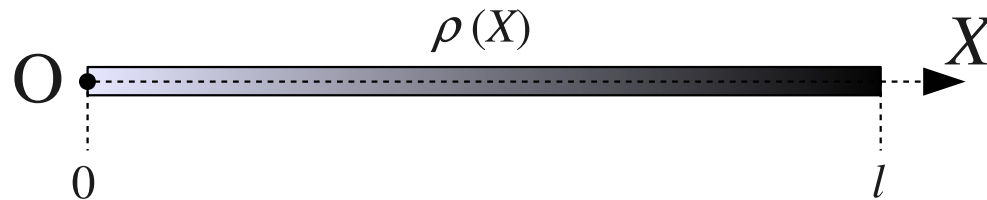
■ 重心

$$G_n = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n X_i \rho(X_i) \Delta X \xrightarrow{n \rightarrow \infty} G = \frac{1}{M} \int_0^l X \rho(X) dX \quad (5.6)$$

演習タイム 3/3

$$G = \frac{1}{M} \int_0^l X \rho(X) dX \quad (5.5)$$

例題 5.1 の分問



線密度 $\rho(X) = aX$ に対する重心 G を求めよ。

自習 & 宿題タイム

■ 問題 5.1, p.51 (略解あり)