Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第5講
強制振動と共振

宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

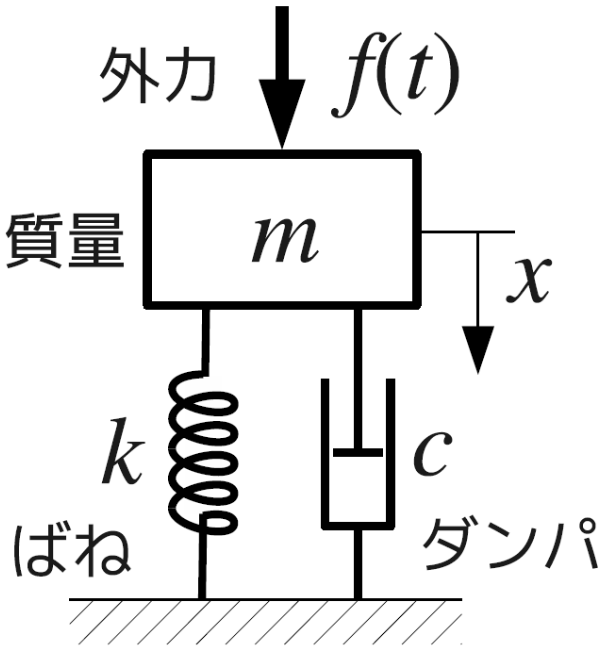
※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

- 強制振動
  - インパルス外力，ステップ外力
  - 調和外力（正弦波状外力）
- 共振
  - 実験，シミュレーション
- 過渡応答と定常応答

強制振動

強制振動モデル（1自由度線形**強制**振動系）



状態量	x	変位 [m]
パラメータ	m	質量 [kg]
	k	ばね定数 [N/m]
	c	減衰係数 [Ns/m]
外力（外乱）	$f(t)$	外力 [N]

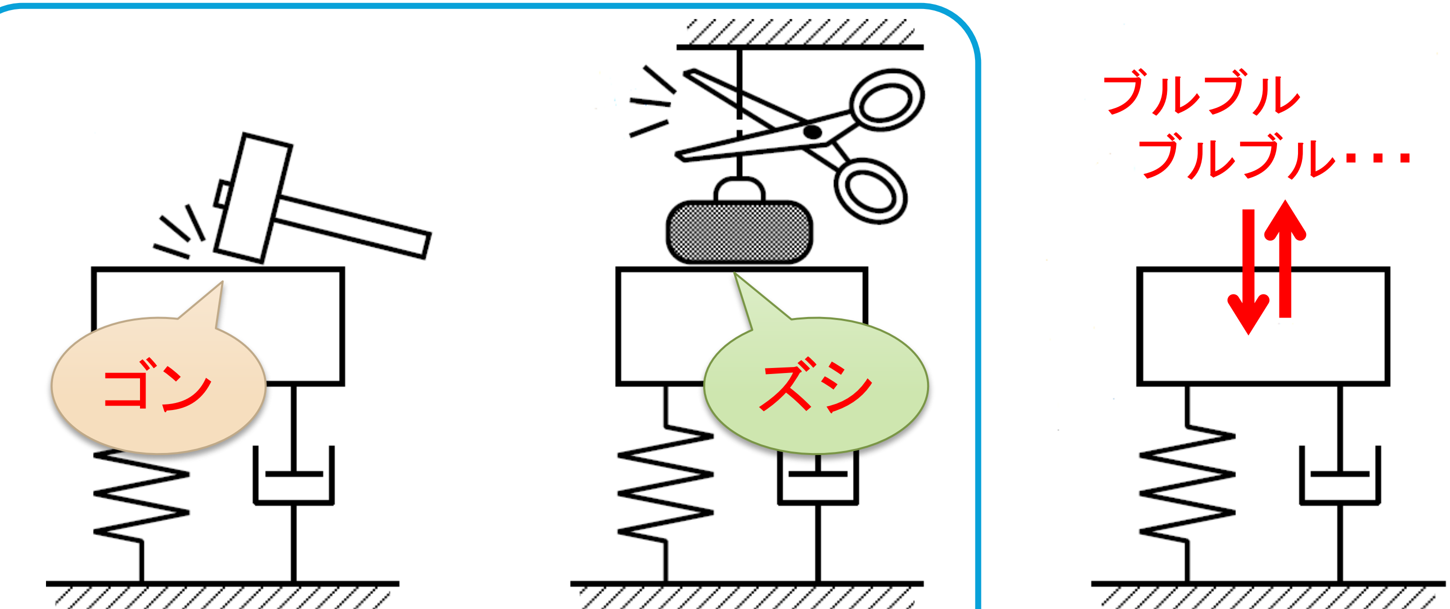
- 強制振動系＝自由振動系＋外力 $f(t)$
- 運動方程式

（重力無視）

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

外力の種類（テスト入力） 1/2

- 現実の外力は，これらとは違う．（単純化）

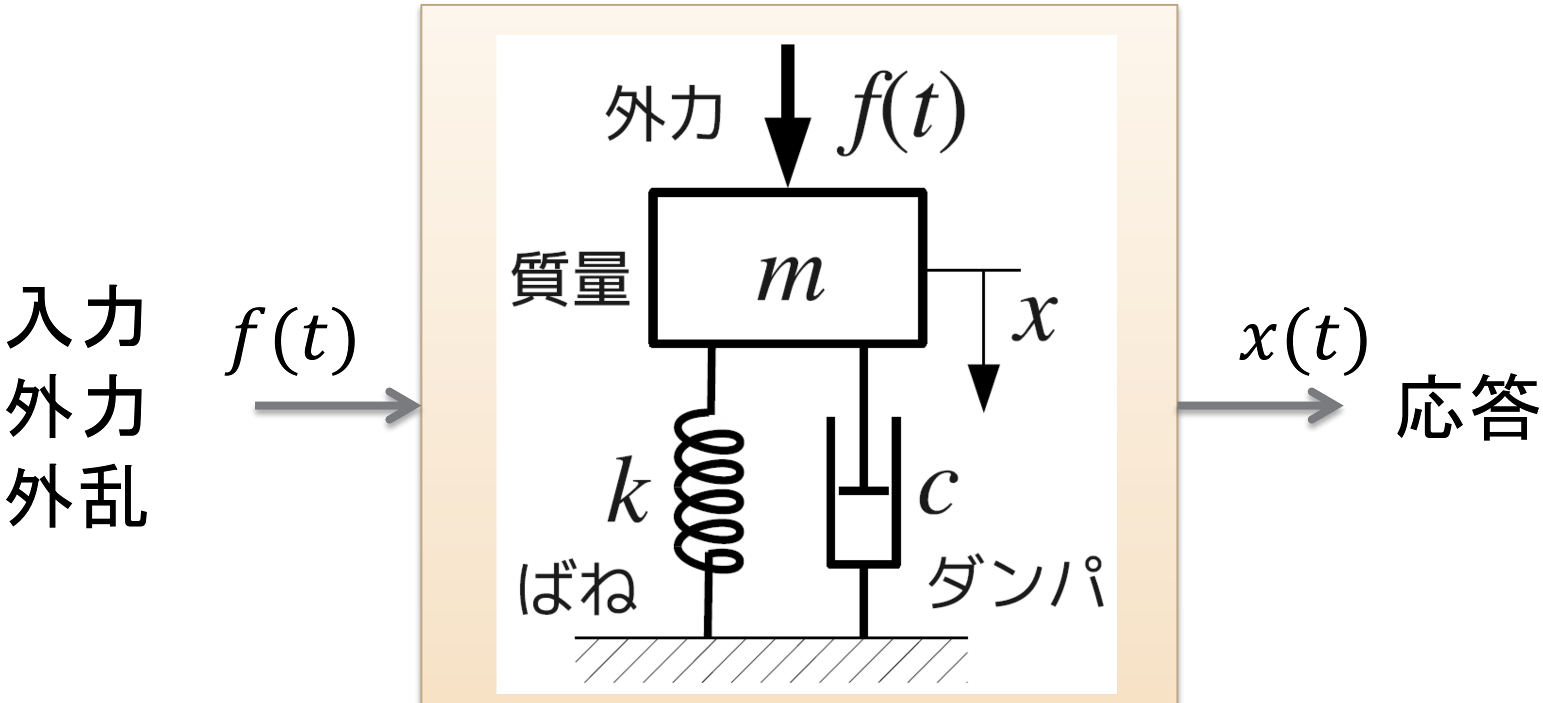


インパルス外力　ステップ外力　調和外力

調和＝
正弦波状

自由振動と等価
∴固有値で6パターン解明

《用語》〇〇応答

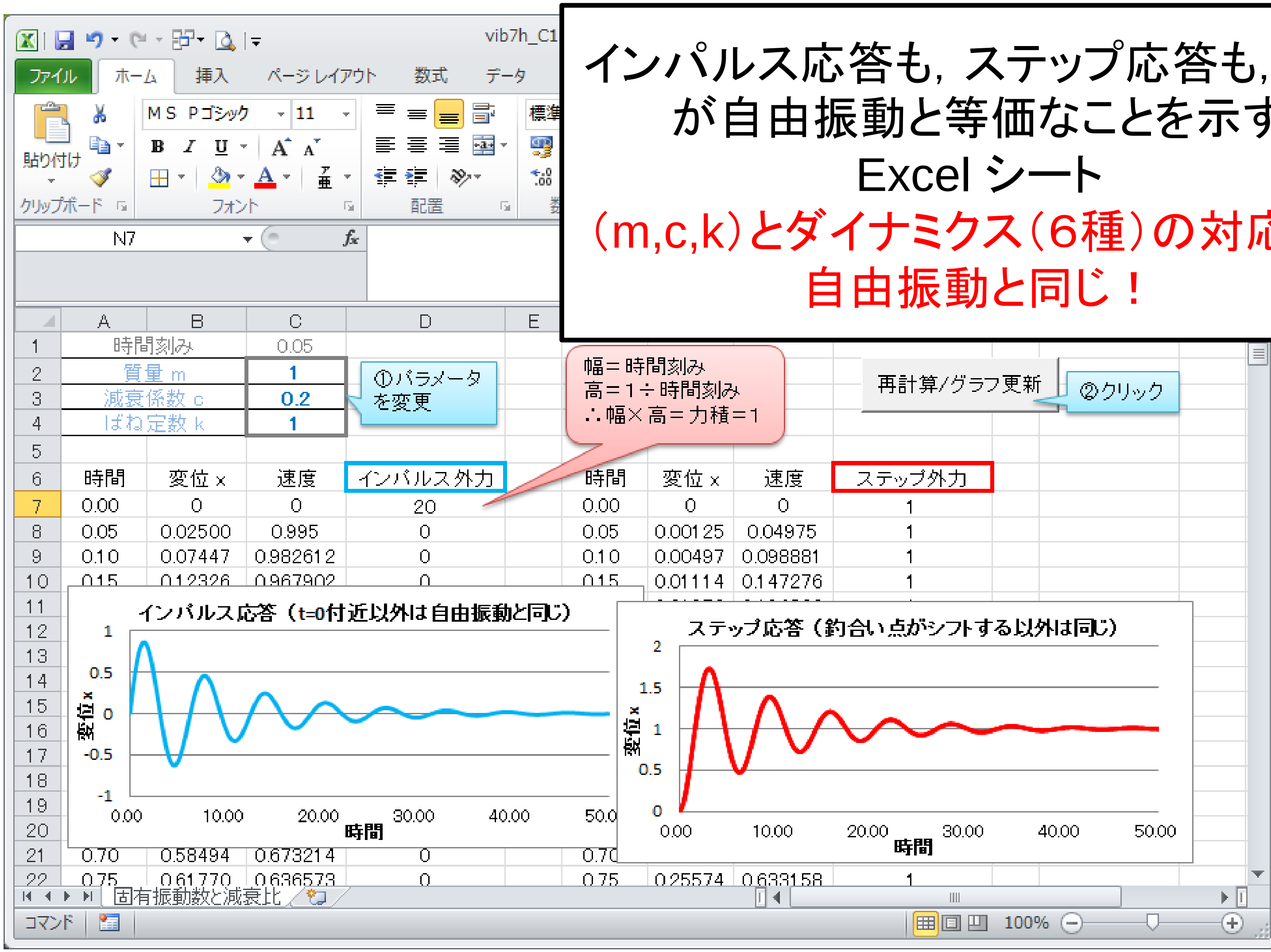


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

- 〇〇外力に対する応答 ➔ 〇〇応答
  - インパルス応答，ステップ応答，調和応答，etc

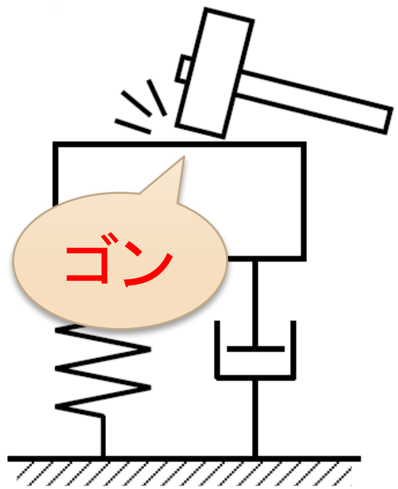
実習（vib7h_C1.xls）

インパルス応答も，ステップ応答も，動きが自由振動と等価なことを示す
Excel シート
（m,c,k）とダイナミクス（6種）の対応は，
自由振動と同じ！

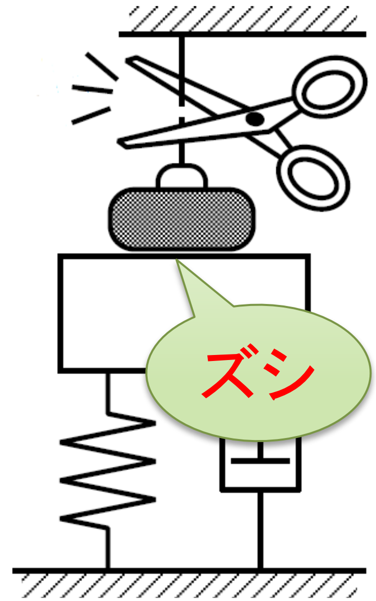


外力の種類（テスト入力） 2/2

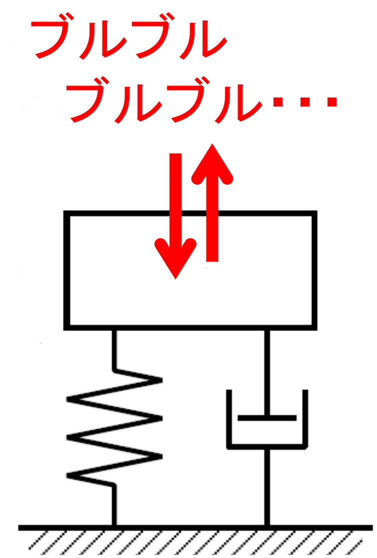
- 現実の外力は，これらとは違う．（単純化）



インパルス外力



ステップ外力



調和外力

調和＝
正弦波状

何が起こるか？

強制振動特有の「共振」が発生

共振(実験)

モータ・振り子系

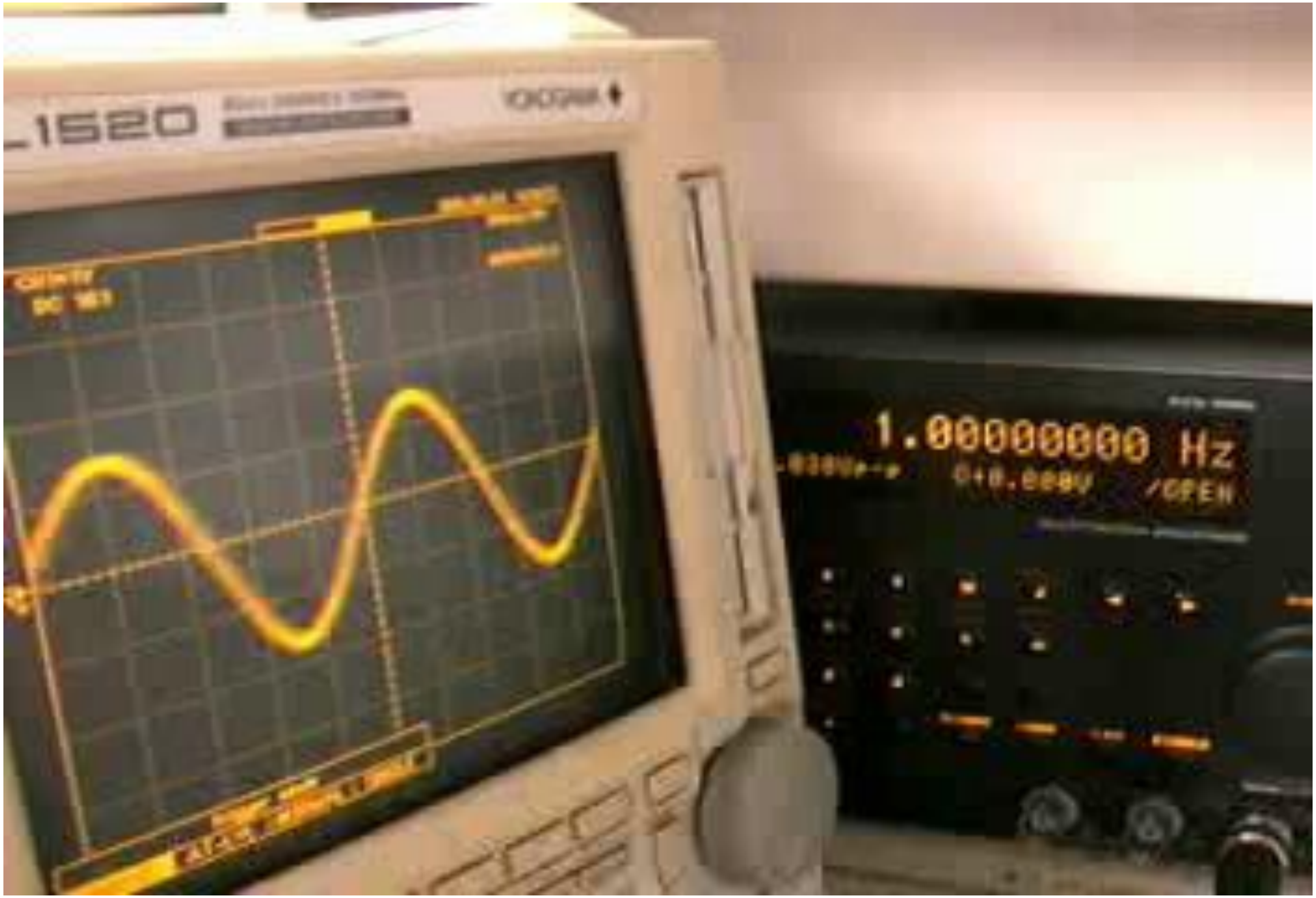
- 強制振動に特有な現象に，共振がある．
- 実験方法：

① モーターに振り子を接続．

② 交流電圧をかける．

③ 振り子の振幅を観察．

入力電圧一定，周波数を変化



自由振動

電源OFFでは
減衰振動

共振現象（前半）

周波数を1Hz
から増加

実習

- さらに周波数を増すと，振り子の振幅はどうなるか？
- まわりと議論して，予想せよ．

共振現象(後半)

周波数をさらに増加

実習

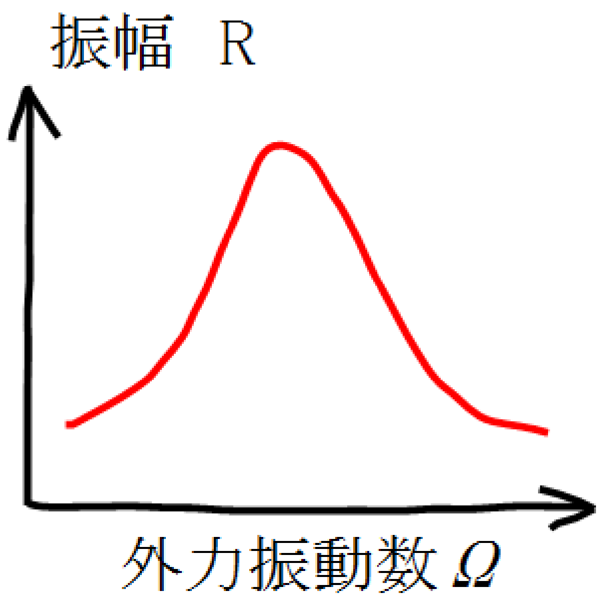
- 振幅の変化(通し)を観察し，グラフを描け.
  - 横軸･･･周波数(1Hz～2.5Hz)
  - 縦軸･･･振幅
- 得られたグラフを **共振曲線** という.

共振現象(通し)

周波数

1Hz～2.5Hz

解答例



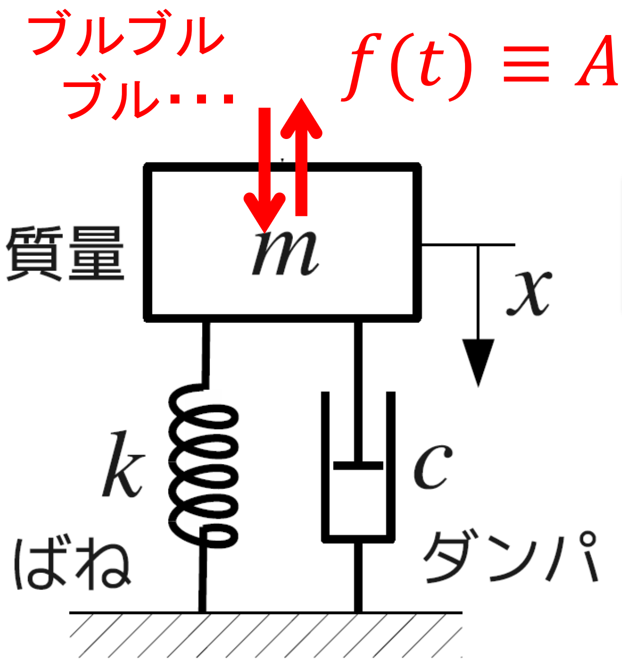
ゲイン線図
（共振曲線）

共振（シミュレーション）

調和外力を受ける振動モデル

調和＝
正弦波状

$f(t) \equiv A\cos(\Omega t)$ ※sin でもよい

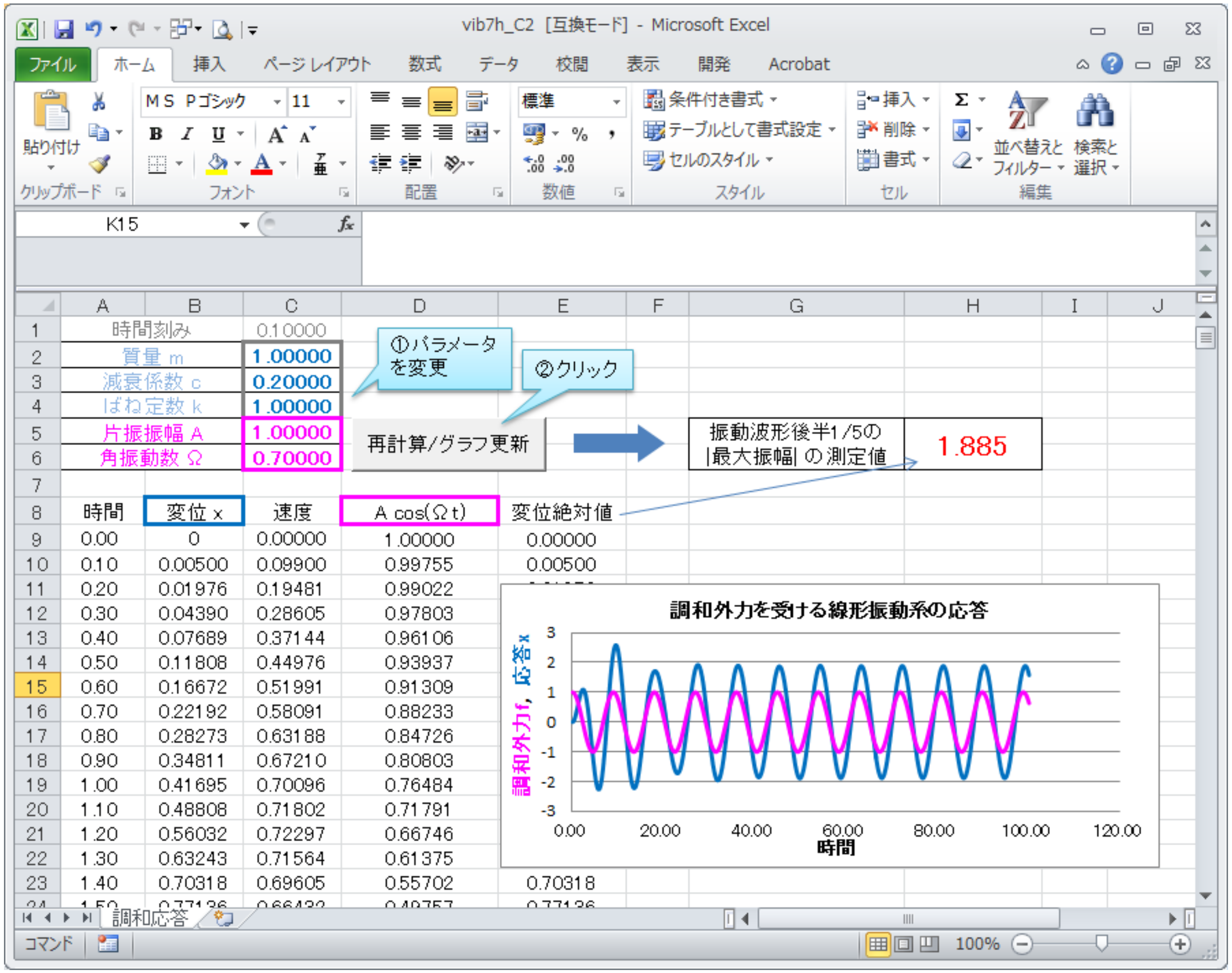


$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\cos\Omega t$$

m	質量〔kg〕
k	ばね定数〔N/m〕
c	減衰係数〔Ns/m〕
A	調和外力の片振振幅〔N〕
Ω	調和外力の角振動数〔rad/s〕

- この単純モデルで共振は再現するか？

実習（vib7h_C2.xls）



課題

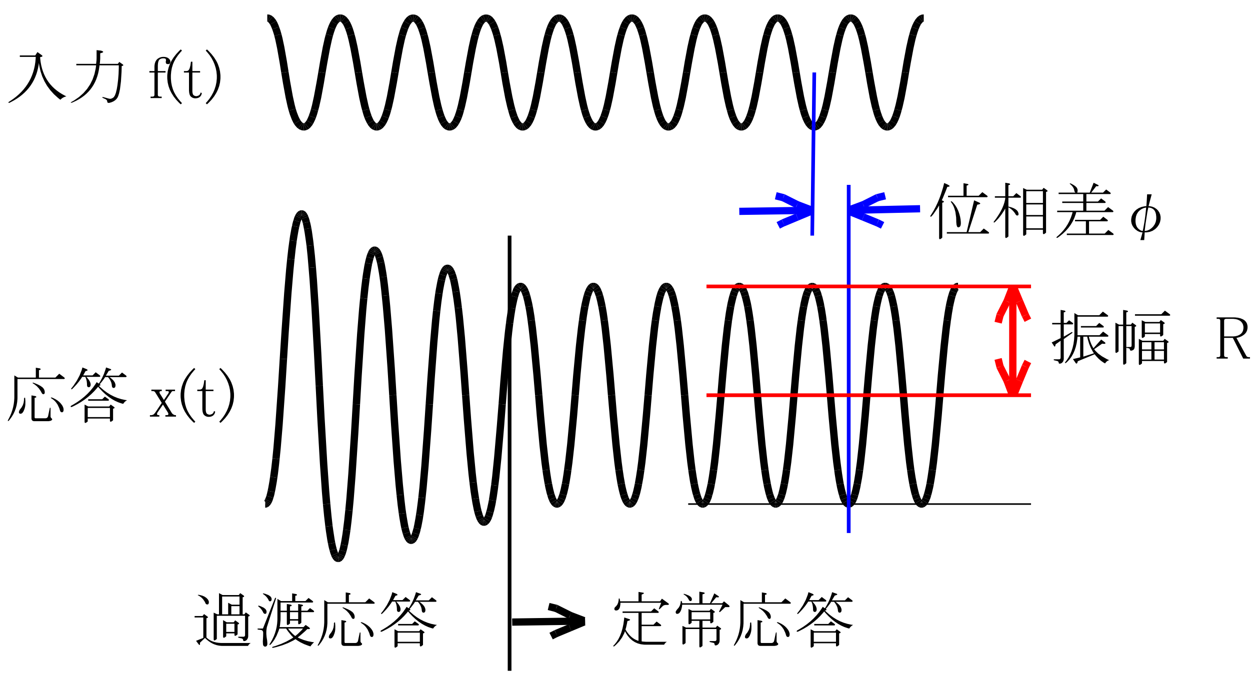
試行錯誤的に
Ω を変化させ，

振幅が最大となる
Ω を求めよ．

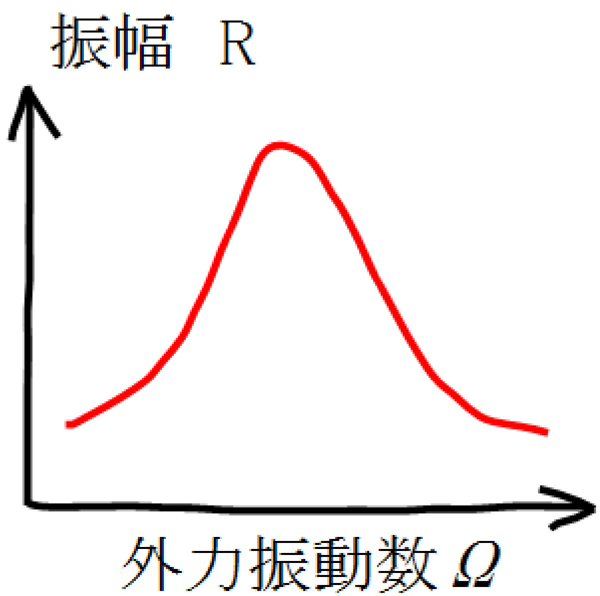
振幅と位相差

課題

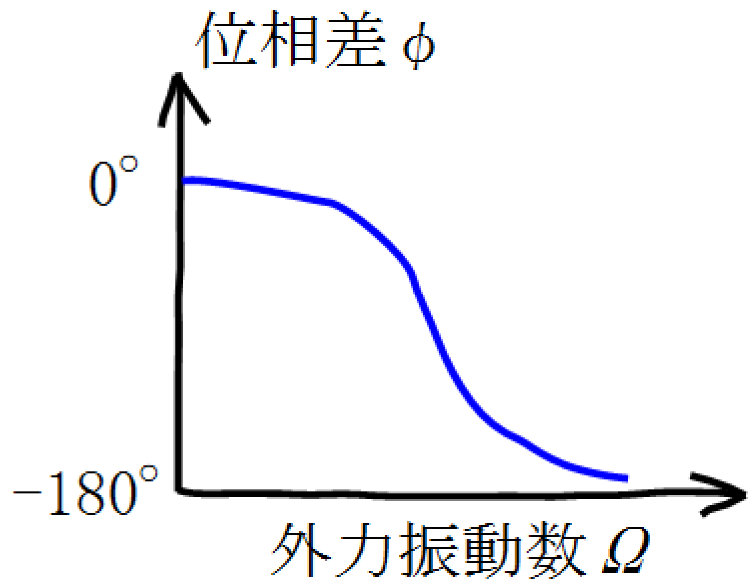
Ω を変化させて波形を観察し，振幅と位相差のグラフ(横軸Ω)を，大雑把にスケッチせよ



解答例



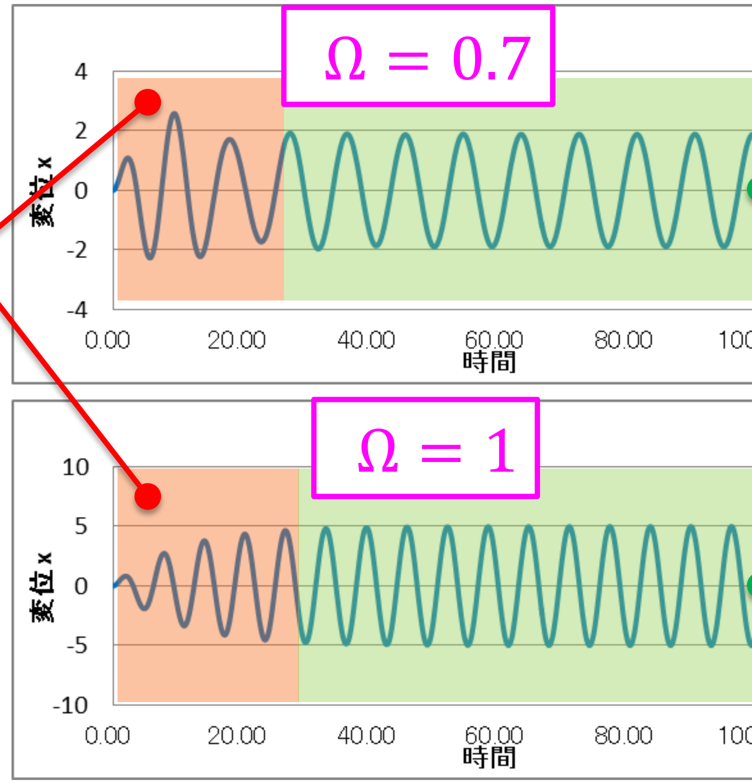
ゲイン線図
（共振曲線）



位相線図

過渡応答と定常応答　1/2

初期のバタツキを
過渡応答
という.



その後の
一定な振動を
定常応答
という.

《力学法則》調和応答の成分

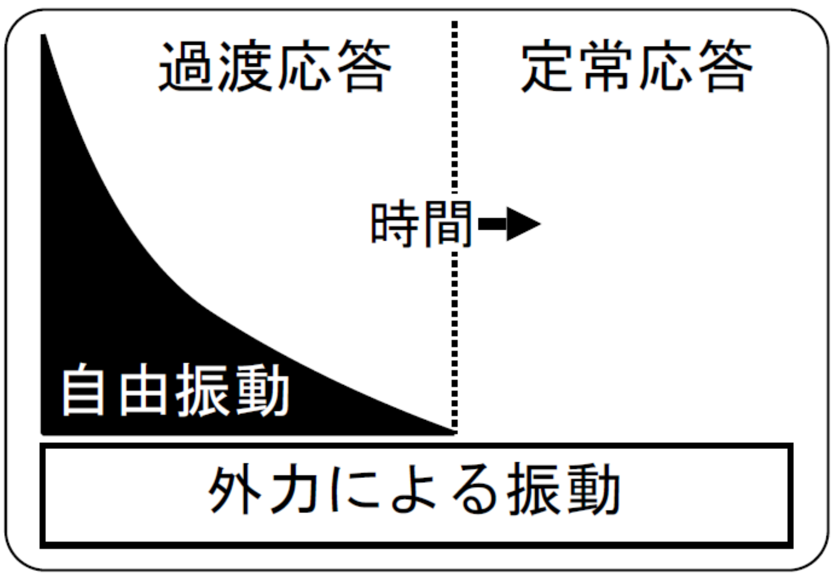
　　＝ バタツキ成分（→0）＋ 正弦波成分！

調和応答の安定性

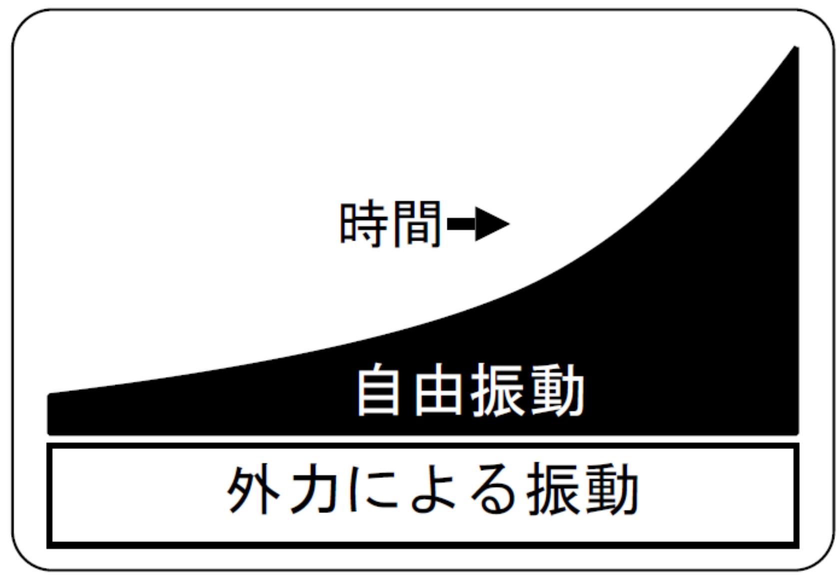
＝ バタツキ成分（→0）＋ 正弦波成分！

自由振動系
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$
と同じ解

強制振動系
$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\cos\Omega t$
に特有の特解



安定な強制振動



不安定な強制振動

過渡応答と定常応答　2/2

調和応答 ＝ バタツキ(→0) ＋ 正弦波成分！

自由振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ と同じ解	強制振動系 $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\cos\Omega t$ に特有の特解
狭義の過渡応答	定常応答

- 解析方法
  - 過渡応答 … $f(t) = 0$ のときの固有値を調べる
  - 定常応答 … ゲイン線図と位相線図(ボード線図)を調べる ➔ 周波数応答という.

「強制振動」のまとめ

- 強制振動
  - インパルス応答，ステップ応答は自由振動と同じ
  - 調和応答には「共振」が起こる
- 過渡応答と定常応答
  - 調和応答

    ＝ 自由振動成分 ＋ 強制振動成分（正弦波）

Excelで学ぶ振動基礎（7時間）

第6講
周波数応答

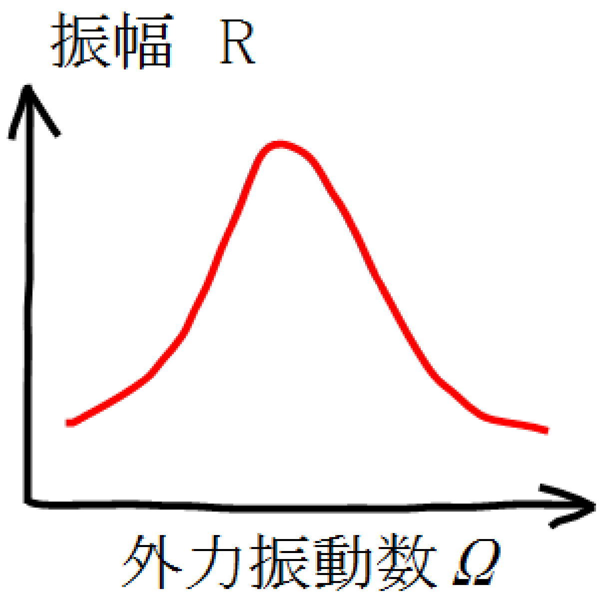
宇都宮大学大学院工学研究科
機械知能工学専攻　吉田　勝俊

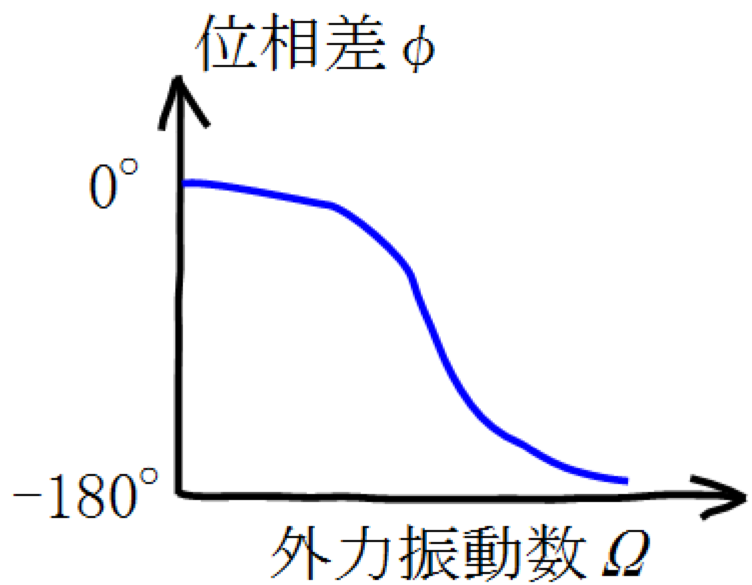
※教材のダウンロード
➔ http://edu.katzlab.jp/lec/vib7h/

学習目標

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\cos\Omega t$$

- 振幅 $R(\Omega)$ と位相差 $\phi(\Omega)$ を式で求める！





周波数応答解析の手順

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

① 外力を仮定　$f(t) \equiv \cos \Omega t$

② 応答を仮定　$x(t) \equiv R \cos(\Omega t + \phi)$

③ 運動方程式に代入して，R, ϕ を求める

2つ合わせて
周波数応答という

- ふつうに代入すると，ϕ の扱いが面倒

➔複素数の活用が一般的

複素数とオイラーの公式

数学的な準備

高校レベルの複素数

① $i \equiv \sqrt{-1}$ を虚数単位という. $i^2 = -1$

② $z = a + bi$ を複素数という(a, b は実数)

③ a を実部と呼び, $\mathrm{Re}[a + bi]$ と書く

④ b を虚部と呼び, $\mathrm{Im}[a + bi]$ と書く

⑤ $a + bi = c + di \overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} a = c$ かつ $b = d$

⑥ $(a + bi) + (c + di) \equiv (a + c) + (b + d)i$

⑦ $\overline{a + bi} \equiv a - bi$ を $a + bi$ の共役という

練習問題

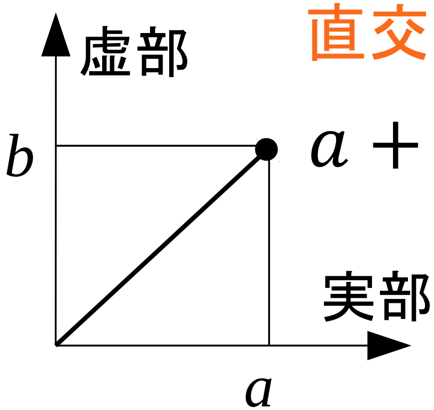
1. 複素数の積 $(a+bi)(c+di)$ を求めよ
2. $\mathrm{Re}[p]$ を求めよ
3. $\mathrm{Im}[p]$ を求めよ
4. p の共役を求めよ

解答例

1. 複素数の積 $p=(a+bi)(c+di)$ を求めよ
   - $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$
2. $\mathrm{Re}[p]$ を求めよ
   - $=ac-bd$
3. $\mathrm{Im}[p]$ を求めよ
   - $=bc+ad$
4. p の共役を求めよ
   - $\bar{p}=(ac-bd)-(bc+ad)i$

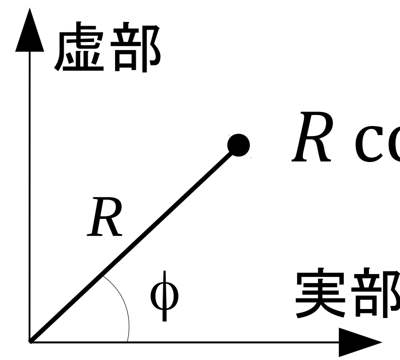
大学レベルの複素数(極座標)

直交形式



$a + bi$

極形式(極座標)



$R\cos\phi + (R\sin\phi)i$

$\equiv Re^{i\phi}$

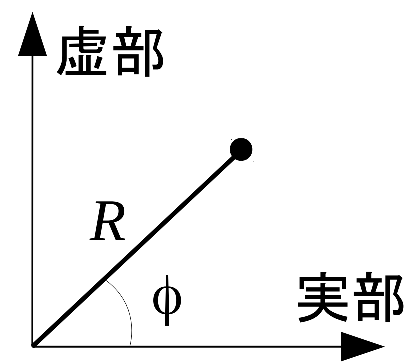
- □ $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ を「絶対値」と呼び，$|a + bi|$と書く
- □ $\phi = \tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ を「偏角」と呼び，$\angle(a + bi)$と書く

- 四則演算や微積分が指数関数と同じなので，$Re^{i\phi} \equiv R(\cos\phi + i\sin\phi)$ と表記 オイラーの公式

練習問題

1. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ を「極形式」に書き直せ
2. $z = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i}$ を「直交形式」に書き直せ

ヒント: 図を描いて考える！

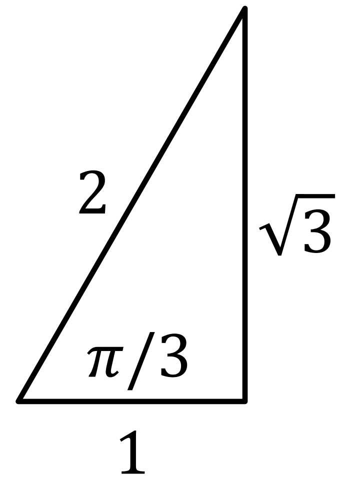


解答例

1. $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ を「極形式」に書き直せ

- $R = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$
- $\phi = \tan^{-1}\frac{2\sqrt{3}}{2} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \quad z = 4e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i}$



2. $z = 2e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)i}$ を「直交形式」に書き直せ

- $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$

オイラーの公式

周波数応答の計算

運動方程式への複素数の代入？

- 線形振動系では，実部と虚部は混じらない！
  - 外力 $f \equiv f_a + f_b i$，　応答 $x \equiv x_a + x_b i$
  - $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$ に代入
  - ➔ $m(\ddot{x}_a + \ddot{x}_b i) + c(\dot{x}_a + \dot{x}_b i) + k(x_a + x_b i) = f_a + f_b i$
  - ➔ $(m\ddot{x}_a + c\dot{x}_a + kx_a) + (m\ddot{x}_b + c\dot{x}_b + kx_b)i = f_a + f_b i$

∴　次の2連立と等価

$$\begin{cases} m\ddot{x}_a + c\dot{x}_a + kx_a = f_a \\ m\ddot{x}_b + c\dot{x}_b + kx_b = f_b \end{cases}$$

周波数応答の計算（複素数活用） 1/3

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

① 入力 $f(t) \equiv e^{(\Omega t)i} = \cos \Omega t + i \sin \Omega t$

② 応答 $x(t) \equiv Re^{(\Omega t + \phi)i}$

$$= R\cos(\Omega t + \phi) + iR\sin(\Omega t + \phi)$$

- 代入すると，実部・虚部は混じらないので，

	実部では	虚部では
外力 $f(t) \equiv$	$\cos \Omega t$	$\sin \Omega t$
応答 $x(t) \equiv$	$R\cos(\Omega t + \phi)$	$R\sin(\Omega t + \phi)$

cos型・sin型の計算が同時進行してくれる！

周波数応答の計算(複素数活用) 2/3

③ 運動方程式へ代入

- $x(t) \equiv Re^{(\Omega t+\phi)i} = Re^{(i\Omega)t+i\phi} = Re^{(i\Omega)t}e^{i\phi}$

  ➔ $\dot{x}(t) = Ri\Omega e^{(i\Omega)t}e^{i\phi}$

  ➔ $\ddot{x}(t) = R(i\Omega)^2 e^{(i\Omega)t}e^{i\phi} = -R\Omega^2 e^{(i\Omega)t}e^{i\phi}$

- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx$

$$= -mR\Omega^2 e^{(i\Omega)t}e^{i\phi} + cRi\Omega e^{(i\Omega)t}e^{i\phi} + kRe^{(i\Omega)t}e^{i\phi}$$

$$= R\{(k - m\Omega^2) + (c\Omega)i\}\cancel{e^{(i\Omega)t}}e^{i\phi} = f(t) = \cancel{e^{(i\Omega)t}}$$

$$\therefore Re^{i\phi} = \frac{1}{(k-m\Omega^2)+(c\Omega)i}$$

周波数応答の計算（複素数活用） 3/3

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{(k - m\Omega^2) + (c\Omega)i}$$ ←複素振幅という

④ 右辺→極形式

$$分母 = (k - m\Omega^2) + (c\Omega)i$$

$$= \sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}\, e^{i\left(\tan^{-1}\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right)}$$

$$\therefore\ Re^{i\phi} = \frac{1}{分母} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}}\, e^{i\boxed{\left(-\tan^{-1}\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}\right)}}$$

⑤ 周波数応答

$$\begin{cases} R(\Omega) = \dfrac{1}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}} & （振幅比） \\ \phi(\Omega) = -\tan^{-1}\dfrac{c\Omega}{k - m\Omega^2} & （位相差） \end{cases}$$

3つの基本振動数（通説にご用心）

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + {\omega_n}^2 x = f(t)$$

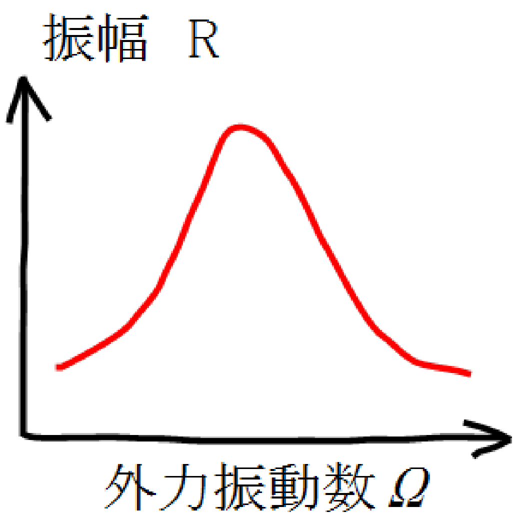
自由振動 $f(t) = 0$	固有振動数	ω_n	大
	減衰振動の振動数	$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	中
強制振動 $f(t) = A\cos\Omega t$	共振点 $\Omega = \omega_p$ （共振曲線のピーク）	$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$	小

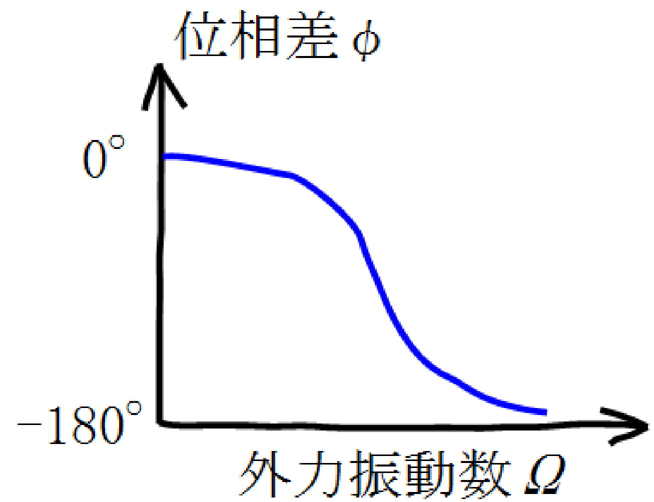
- 通説1…外力がないと固有振動数で揺れる
- 通説2…共振は $\Omega = \omega_n$（固有振動数）で起こる
- 通説3…共振は $\Omega = \omega_d$（減衰振動数）で起こる

減衰があると（$\zeta \neq 0$），これら通説は全て嘘！

「周波数応答」のまとめ

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A\cos\Omega t$$





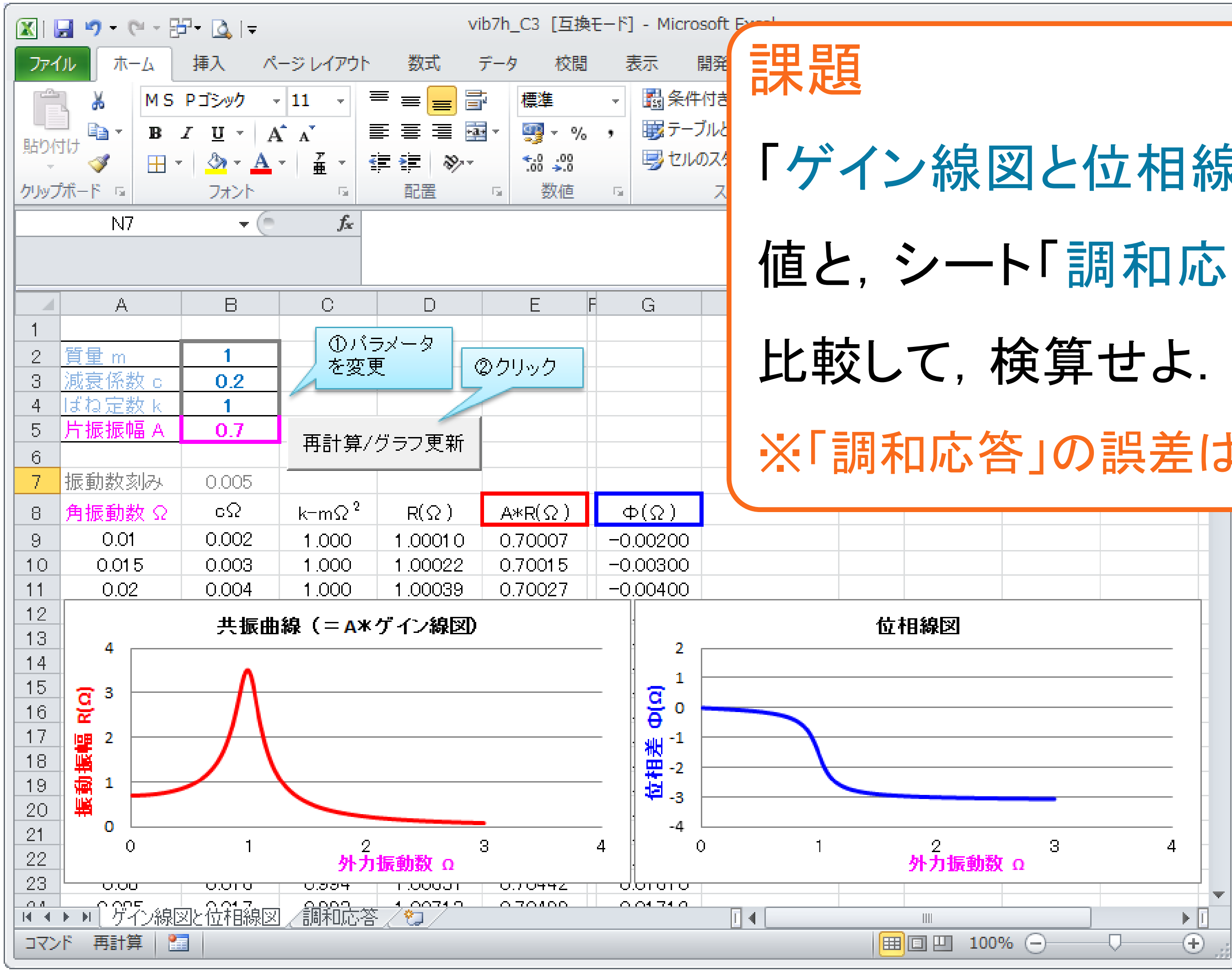
$$R(\Omega) = \frac{A}{\sqrt{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}}$$

$$\phi(\Omega) = -\tan^{-1}\frac{c\Omega}{k - m\Omega^2}$$

※$A = 1$ で計算したので A 倍

➔実習あり

実習（vib7h_C3.xls）



課題

「ゲイン線図と位相線図」のA＊R(Ω)の値と，シート「調和応答」の最大振幅を比較して，検算せよ．

※「調和応答」の誤差は，時間刻みによる