

第0回 機械力学

ガイダンス

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

講義の内容

■ 機械工学に必要な初等力学

- 工業力学（剛体の運動）
- 機械力学（機械振動学）
- 関連科目：材料力学，自動制御工学，ロボット力学

■ 運動方程式の立て方

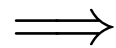
- ラグランジュ形式の解析力学

■ ロボット制御への応用

- 力学シミュレーション
- フィードバック制御

受講上の注意

- テキスト … 生協販売の「機械力学」を購入
- 日程と場所 … <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn> に掲載



成績評価

- 必修科目 … 落すな！
- 出席点 + 課題レポート × 7 （試験は実施しない）

メディア基盤センターでの自習

- 第 11 週までに，テキスト 15 章を自習せよ．単独で進めず，実習の班で助け合うこと．この自習を前提にレポート課題を課す．
- プログラム例は <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/code> にある．

第1回 機械力学

ベクトル化

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

学習目標

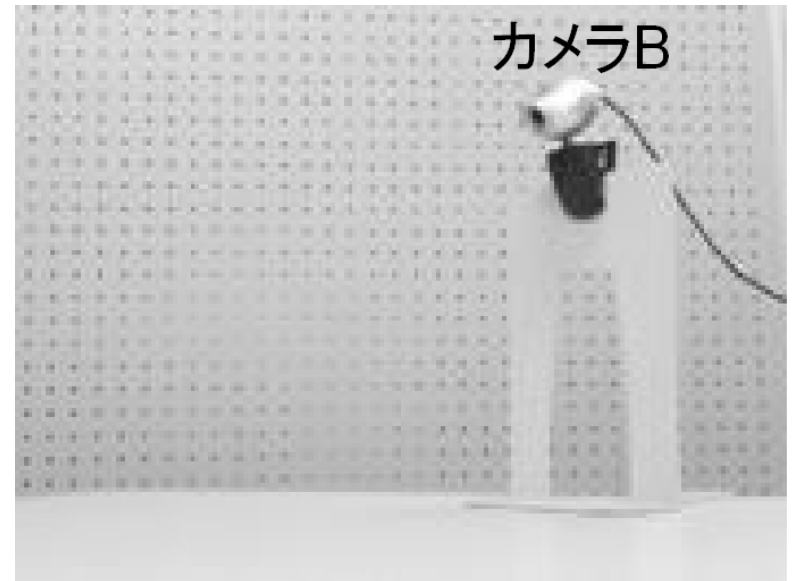
- 位置ベクトルと力ベクトル (復習)
- ベクトルの算法
- 具体的対象のベクトル化
- ベクトルの成分表示
- 位置ベクトルの例題

位置ベクトル (1/3)

- カメラ B に対象物が映り，それをカメラ A が映している．
- この 2 枚の映像から，A に対する対象物の位置を割り出せ．



カメラ B に写った映像



カメラ A に写った映像

位置ベクトル (2/3)

■ もちろん，超越的なカメラが使えれば，全体像，

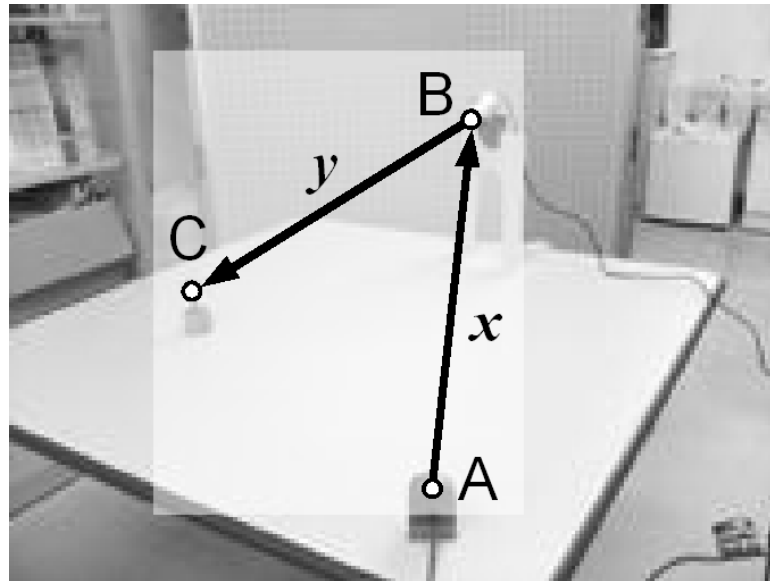


が判明するが，ここでは使えないとする．

位置ベクトル (3/3)

■ 「虚構」の導入 (その1)

- 空間の2点を結ぶ「矢印」を導入．これらを太字 x, y で表す．

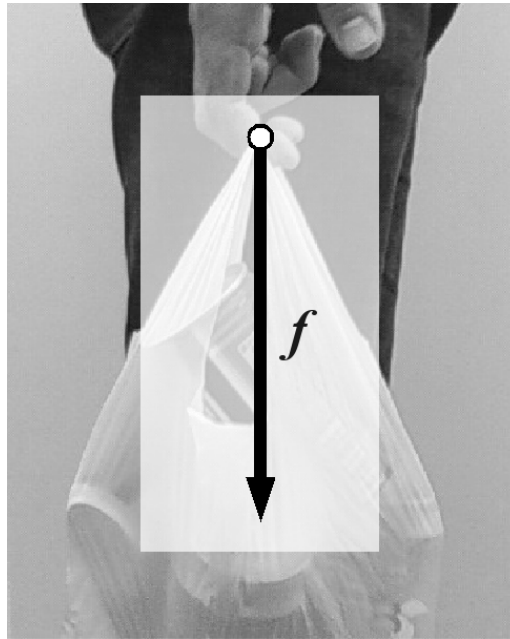


- このような, 2 点の配置を表わす架空の矢印 x, y を「位置ベクトル」という．

カベクトル

■ 「虚構」の導入（その2）

- 力を表わす「矢印」を導入．これらを太字 f で表す．



- このような，力を表わす架空の矢印 f を「カベクトル」という．

筆算用のベクトル

- 「虚構」を計算したい．
- 位置と力は，紙の上で同じように筆算できる．
- その共通の筆算ルールを「ベクトル」という．

ベクトルの筆算ルール（ベクトルの公理）

■ 次の公式で計算する「太字 x, y, \dots 」をベクトルという．

$$(L1) \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}.$$

$$(L5) \quad \lambda(\mu \boldsymbol{x}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{x}.$$

$$(L2) \quad (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}). \quad (L6) \quad \text{スカラ } 1 \text{ の作用は, } 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}.$$

$$(L3) \quad \text{どんな } \boldsymbol{x} \text{ に足しても}$$

$$(L7) \quad (\lambda + \mu)\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}.$$

$$\boldsymbol{x} + \mathbb{O} = \mathbb{O} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \quad (L8) \quad \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}.$$

となる零ベクトル \mathbb{O} が使える．

$$(L4) \quad \text{どんな } \boldsymbol{x} \text{ にも, 相方 } (-\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = \mathbb{O}$$

が存在する（逆ベクトル）

太字のまま筆算するための
式変形ルール

この公式で計算する限り，
成分のチェックは無用！

具体的対象のベクトル化（虚構と現実のつなぎ方）

■ 考察対象に，具体的な 5 つの操作を定める．

5 つの操作

(a) 等号 $x = y$ の判定基準

(d) 零ベクトル $\mathbf{0}$ の作り方

(b) 加法 $x + y$ のやり方

(e) 逆ベクトル $(-x)$ の作り方

(c) スカラ倍 λx のやり方

■ 考察対象に対する以上の操作が，公式 (L1) ~ (L8) を満たせば，その対象は「ベクトル」として筆算可能．

■ 満たさないなら，操作の定義を改良する．どうやってもダメなら「ベクトル」としての筆算はあきらめる．

幾何ベクトル

■ 「矢印」は図形．そのままではベクトルではない．

■ 「矢印」を (L1) ~ (L8) で筆算可能にする 5 つの操作とは？

表 1.1, p.4

操作項目	表記	対応する図形的な操作
(a) 等号	$x = y$	矢印 x と y が平行移動でぴったり重なること．長さ 0 の矢印は全て等しいとみなす．
(b) 加法	$x + y$	x の終点を y の始点としたとき, x の始点から y の終点到引いた第 3 の矢印．(それを $x + y$ と書く)
(c) スカラ倍	λx	x の長さを λ 倍した矢印．(それを λx と書く)
(d) 零ベクトル	$\mathbf{0}$	長さが 0 の矢印．(それを $\mathbf{0}$ と書く)
(e) 逆ベクトル	$-x$	x の向きを反転した矢印．(それを $-x$ と書く)

■ (L1) ~ (L8) を満すことは, 高校で体験済み．

■ 表 1.1 の操作が付与された「矢印」を「幾何ベクトル」という．

演習タイム

■ 問題 1.1, p5

数ベクトル

- 数の並び $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ を, $[x_i]$ と短縮表記する .
- 数の並び $x = [x_i]$ は, そのままではベクトルではない .
 - 数の並びを (L1) ~ (L8) で筆算可能にする 5 つの操作とは ?

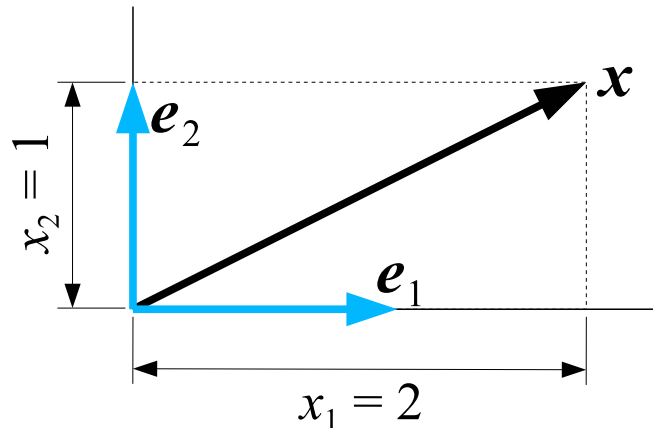
表 1.2, p.5

操作項目	表記	対応する数学的な実体
(a) 等号	$[x_i] = [y_i]$	各成分 x_i, y_i が互いに等しいこと .
(b) 加法	$[x_i] + [y_i]$	「各成分の和 $x_i + y_i$ 」を成分とする数の並び .
(c) スカラ倍	$\lambda[x_i]$	「各成分の λ 倍 λx_i 」を成分とする数の並び .
(d) 零ベクトル	\mathbb{O}	成分が全て 0 .
(e) 逆ベクトル	$-[x_i]$	「各成分の -1 倍 $-x_i$ 」を成分とする数の並び .

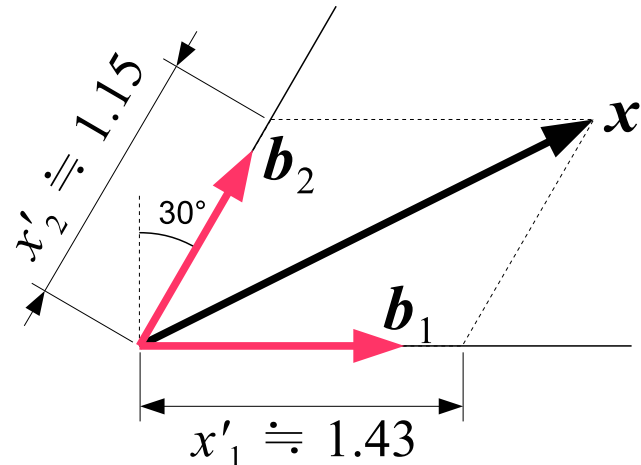
- (L1) ~ (L8) を満すことは, 高校で体験済み .
- 表 1.2 の操作が付与された「数の並び」を「数ベクトル」という .

幾何ベクトルの成分表示

- 「矢印」は図形．太字 x, y, \dots で筆算 \therefore 数値に非ず！
- 平行四辺形の「寸法」で数値化．寸法の並びが「成分」．



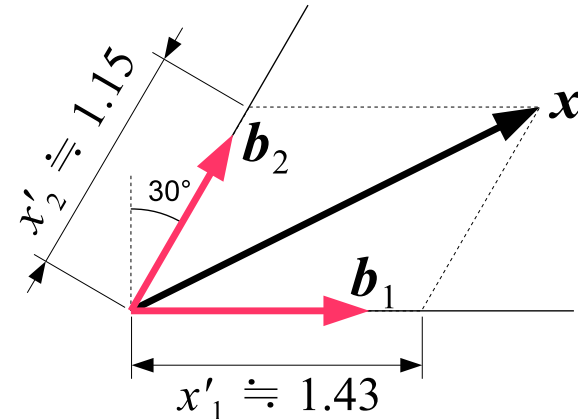
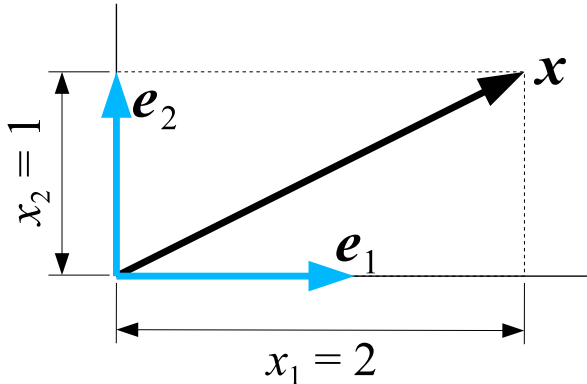
x の直交成分



同じ x の斜交成分

- 寸法の取り方で，成分は変化する！

筆算による成分表示



- 直交成分...直方体を単位ベクトル e_1, e_2 で表す (直交基底)

$$\text{ベクトル } x \xrightarrow{\text{展開}} x = x_1 e_1 + x_2 e_2 \xrightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \text{成分} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \equiv \tilde{x}$$

- 斜交成分...平行四辺形を単位ベクトル b_1, b_2 で表す (斜交基底)

$$\text{ベクトル } x \xrightarrow{\text{展開}} x = x'_1 b_1 + x'_2 b_2 \xrightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \text{成分} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} \equiv \tilde{x}'$$

ベクトルの成分表示（一般論）

—— 算法 1.2, p.6 ——

成分測定用のベクトルの組 $\mathcal{E} = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ を，基底という．ベクトル x を基底 \mathcal{E} で展開する．

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \xrightarrow[\text{係数}]{\text{展開}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \tilde{x} \quad (1.3)$$

この展開係数 \tilde{x} を，ベクトル x の成分という．

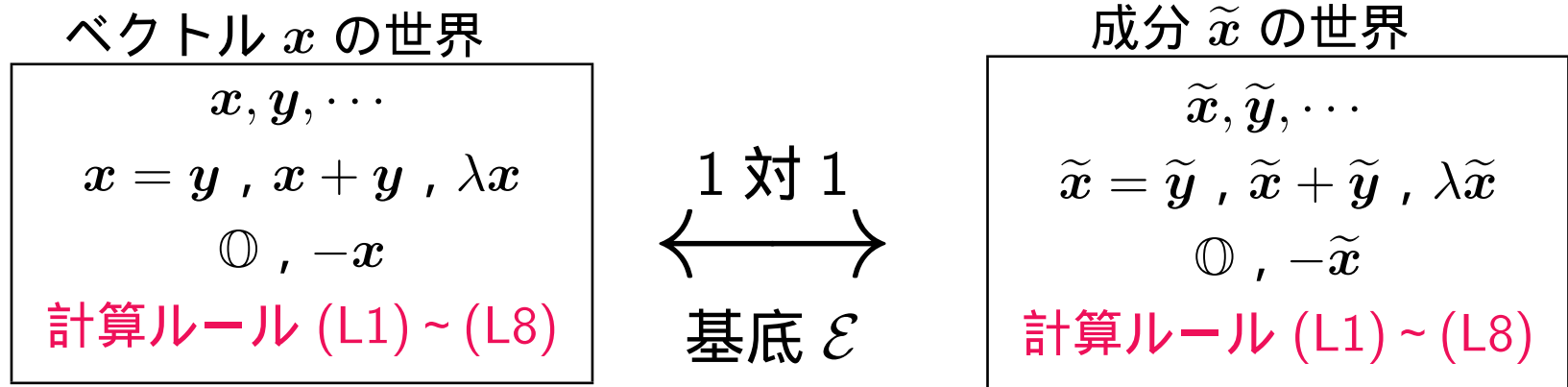
以降， \mathcal{E} で測った x の成分を， $\tilde{x}_{\mathcal{E}}$ または $[x]_{\mathcal{E}}$ と書く

演習タイム

■ 例題 1.1, p6

ベクトルと成分の1対1対応 (図 1.3, p.7)

■ 基底 \mathcal{E} を1つ選んで固定すると,



■ 成分 $\tilde{x} = [x_i]$ から, ベクトル x の復元

■ 成分を測った基底 $\mathcal{E} = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$ を使って,

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad n \text{ 次元} \quad (1.4)$$

■ 成分を測る基底と, ベクトルを復元する基底を同じにしないと, 同じベクトルは復元できない.

演習タイム（位置ベクトルの例題）

■ 例題 1.2, p7

■ 例題 1.3, p7

■ 問題 1.2, p8

■ 問題 1.3, p8

束縛ベクトル

- 位置ベクトル x ...始点 O を変えると差す場所が変わる .
 - 力ベクトル f ...作用点 P を変えると作用が変わる .
- ⇨ 始点とペア (O, x) , (P, f) で指定しないと , 性質が確定しない .

このようなベクトルを「束縛ベクトル」という .

∴ 束縛ベクトルをベクトル x, f だけで書くのは不正確 .

しかし , 慣例上 , 始点の表記は省略されることが多い .