第 11 回 機械力学

ロボットの運動方程式

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

実習の班で相談し，自習を完了してください！

- **第 11 週までに，テキスト 15 章を自習せよ．**
  - 単独で進めず，実習の班で助け合うこと．
  - この自習を前提に，第 3 回レポートを課す．
- **必要なプログラム例は，**

  `http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/code`

  にある．

学習目標

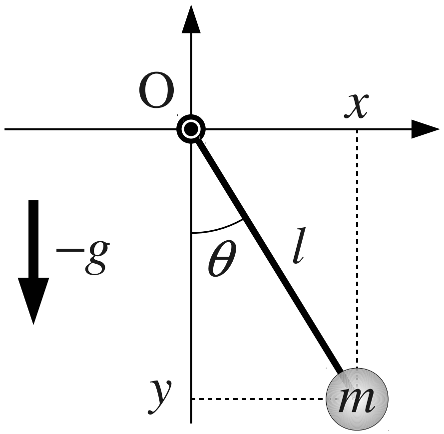
- **解析力学入門**
  - ニュートン力学の難点
  - 座標変換とエネルギーから，運動方程式を算出する！
- **オイラー・ラグランジュ方程式**
- **自立ロボットへの応用**

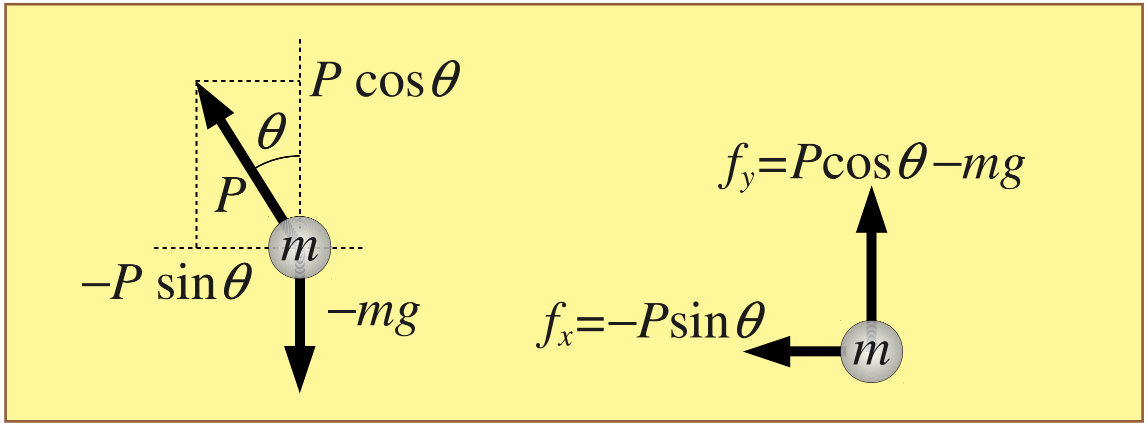
学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

ニュートン力学の難点

単振り子





$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P\sin\theta & (= f_x) \\ m\ddot{y} = P\cos\theta - mg & (= f_y) \end{cases}$$

- **運動方程式× 2 本** $\Longleftrightarrow$ **未知数 4 個** $x(t), y(t), P, \theta$
- **張力 (内力)** P **の消去！** $\Longrightarrow$ $l = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$ **は一定**

張力 P とその方向 θ の消去？

4 連立の微分代数方程式を解かねばならない！

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -P\sin\theta & \text{(運動方程式)} \\ m\ddot{y} = P\cos\theta - mg & \text{(運動方程式)} \\ l = \sqrt{x^2 + y^2} & \text{(代数方程式)} \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 & \text{(代数方程式)} \end{cases}$$

- **例えば y と $P\sin\theta$ を消去するには，**
  - $y = \pm\sqrt{l^2 - x^2} \quad \Longrightarrow \ddot{y} = \mp\left\{(l^2 - x^2)\ddot{x} + l^2\dot{x}^2\right\}(l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$
  - $P\cos\theta = mg + m\ddot{y} \quad = mg \mp m\left\{(l^2 - x^2)\ddot{x} + l^2\dot{x}^2\right\}(l^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\therefore P\sin\theta = P\sqrt{1 - \cos^2\theta} = \cdots \qquad \text{もうやだ！}$$

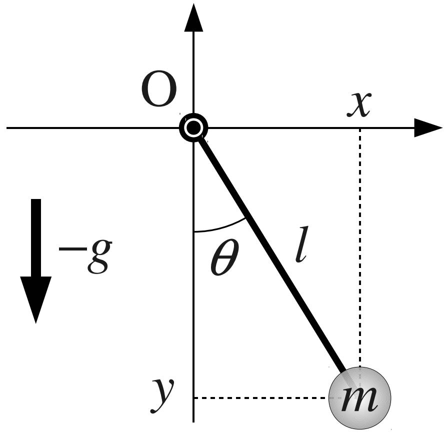
解析力学入門

ロボットの運動方程式を求める標準的方法

「座標変換」と「エネルギー」から
運動方程式を算出できる！

機構学的な自由度

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 機構の姿勢を表すのに最低限必要な変数の数



- **振り子の姿勢は $\theta(t)$ だけで表せる．**
  - 運動方程式は一本でいい？
  - どうせ消去する張力 P を考えるのは無駄？

ラグランジュ形式の解析力学

運動方程式の求め方

(1) **座標変換を定める．**

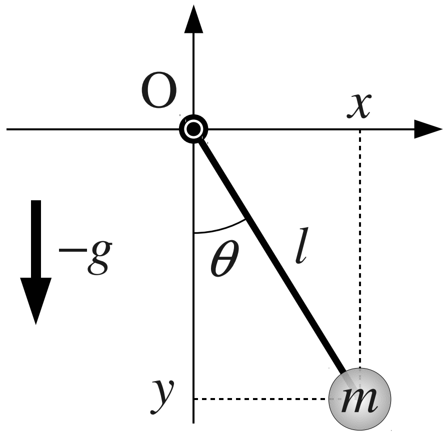
(2) **全運動エネルギー $\mathcal{T}$ を求める．**

(3) **全ポテンシャル $\mathcal{U}$ を求める．**

(4) **その差 $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ を，公式に代入する．**

4 段階の操作で，運動方程式が「算出」される！

振り子の運動方程式 1/4



(1) 座標変換を定める． 直交座標 $(x, y) \leftarrow$ 角度 θ

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = l \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \quad /\!/$$

振り子の運動方程式 2/4

(2) 全運動エネルギー $\mathcal{T}$ を求める．

$$\boldsymbol{x} = l \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} = l\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\therefore \mathcal{T} = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{x}}|^2 = \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \quad = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 /\!\!/$$

(3) 全ポテンシャル $\mathcal{U}$ を求める．

$$\boldsymbol{x} = l \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \Longleftarrow \text{質点の高さ } h = -l\cos\theta$$

$$\therefore \mathcal{U} = mgh \quad = -mgl\cos\theta /\!\!/$$

振り子の運動方程式 3/4

(4) その差 $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ を，公式に代入する．

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} = \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta \,/\!/$$

公式（オイラー・ラグランジュ方程式）

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

演習タイム 1/3

- 次の微分を計算せよ． $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}, \quad \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}, \quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right)$
- **公式**に代入して，運動方程式を求めよ．

振り子の運動方程式 4/4

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\Downarrow$$

公式： $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

$$\Downarrow$$

運動方程式： $$ml^2\ddot{\theta} + mgl\sin\theta = 0 \,//$$

オイラー・ラグランジュ方程式

オイラー・ラグランジュ方程式

一般形

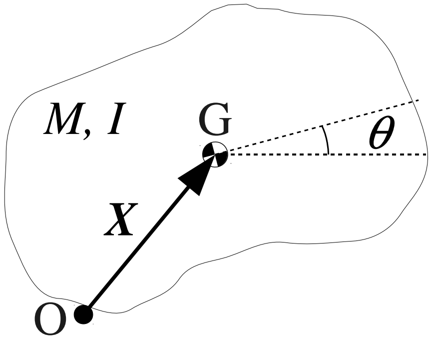
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad (i = 1, \cdots, n)$$

(11.10) p.110

- $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$ ••••• **ラグランジュ関数**
  - $\mathcal{T}$ ⋯ 運動エネルギー
  - $\mathcal{U}$ ⋯ ポテンシャル
- q_i ••••• **一般化座標** $\Longrightarrow$ **後述**
- $\mathcal{F}_i$ ••••• **一般化力** $\Longrightarrow$ **後述**
- $\mathcal{D}$ ••••• **散逸関数** **10.4.2 節 p.101**

一般化座標 q_i

$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 単位の異なる成分を並べた座標



$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x_1 & \text{[m]} \\ x_2 & \text{[m]} \\ \theta & \text{[rad]} \end{bmatrix} \quad \text{とか} \quad \begin{bmatrix} \theta & \text{[rad]} \\ x_1 & \text{[m]} \\ x_2 & \text{[m]} \end{bmatrix} \quad \text{など}$$

成分の並べ順は，各自の勝手でよい！

一般化力 $\mathcal{F}_i$

「力」とは何か？

- **力** F は，質点の運動方程式： $m\ddot{X} = F$ を介して，
- 質点の座標 X を増加・減少させる！

⇩ 同様に

「一般化力」とは何か？

- **一般化力** $\mathcal{F}_i$ は，オイラー・ラグランジュ方程式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{F}_i \quad \text{を介して，}$$

- **一般化座標** q_i を増加・減少させる！

換算： 普通の力 F $\Longrightarrow$ 一般化力 $\mathcal{F}$

■ **直交成分：普通の力** $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$, **着力点** $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

■ **座標変換：着力点の直交成分** $x_i \Longleftarrow$ **一般化座標** q_i

$$x_i = x_i(q_1, \cdots, q_m)$$

■ **換算の公式：** $\mathcal{F}_i = \dfrac{\partial x_1}{\partial q_i} F_1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial q_i} F_2 + \dfrac{\partial x_3}{\partial q_i} F_3$ **(算法 11.2)**

演習タイム 2/3

- **例題 11.1 p.111**
  - 直交成分： 力 $\boldsymbol{F}$ と，先端の着力点 $\boldsymbol{x}$ を直交成分で表せ.
  - 座標変換： 着力点の直交成分 x_i を，角度 q_1, q_2 で表せ.
  - 換算の公式： 次式に代入して，トルク $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ を求めよ.

$$
\begin{cases}
\mathcal{F}_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1} F_1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial q_1} F_2 \\[2ex]
\mathcal{F}_2 = \dfrac{\partial x_1}{\partial q_2} F_1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial q_2} F_2
\end{cases}
$$

演習タイム 3/3

- 11.3 節 p.112〜113 を自習せよ！