

## 第7回 機械力学

# 質点の運動

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 <http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/>

# 学習目標

- ベクトルの微分
- 空間座標とニュートン力学
- 質点の直線運動
- 質点の平面運動

## 学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

# 数ベクトル・行列の時間微分

 **定義** 全成分を微分する

$$\dot{\boldsymbol{x}} = [x_i]^\cdot := [\dot{x}_i] \quad \left( \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{d[x_i]}{dt} := \left[ \frac{dx_i}{dt} \right] \right) \quad (6.1)$$

$$\dot{A} = [a_{ij}]^\cdot := [\dot{a}_{ij}] \quad \left( \frac{dA}{dt} = \frac{d[a_{ij}]}{dt} := \left[ \frac{da_{ij}}{dt} \right] \right) \quad (6.2)$$

## 例題 6.1, p.56

ベクトル  $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \end{bmatrix}$  を時間  $t$  で微分せよ。

# 演習タイム 1/3

ライプニッツ則  $\cdots (XY)' = X'Y + XY'$

**追加の例題** 次の行列とベクトルの積を時間微分せよ

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin t \\ e^t \end{bmatrix}$$

# 空間座標

点  $X$  の空間座標 ———  $\vec{x}$  … 幾何ベクトル (図形)       $x$  … 成分

- (1) 基準点  $O$  を決めて, 幾何ベクトル  $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$  をとる .  
     $\Rightarrow \vec{x}$  を「 $O$  から測った  $X$  の 位置ベクトル」という .
- (2) 基底  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \rangle$  を決めて,  $\vec{x}$  の成分  $x = [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$  をとる .
- (3) この成分  $x$  を,  $(O, \mathcal{E})$  で測った  $X$  の 空間座標 という .

## 演習タイム 2/3

問題 6.1 (p.58)

図示せよ .

# 座標系

■ ペア  $(O, \mathcal{E})$  を指定しないと,

空間座標  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  がどこを差すか, 食い違う!



命名

## 座標系

定義 基準点と基底のペア  $(O, \mathcal{E})$  のこと。(測量機材)

- 基準点  $O$  を変えると, 位置ベクトル  $\vec{x}$  が変わる.
- 基底  $\mathcal{E}$  を変えると,  $\vec{x}$  の成分  $x = [\vec{x}]_{\mathcal{E}}$  が変わる.

時間変化しない座標系を 静止座標系 という

# 静止座標系の成分

静止座標系  $(O, \mathcal{E})$  では …

幾何ベクトル

成分

運動	$\vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow}$	$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$
----	--------------	---	---

速度	$\frac{d}{dt} \vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow}$	$\frac{d}{dt} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$
----	---------------------------	---	--

加速度	$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow}$	$\frac{d^2}{dt^2} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}$
-----	-------------------------------	---	---

証明 :  $\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \dot{x}_1(t)\boldsymbol{i} + \dot{x}_2(t)\boldsymbol{j} + \dot{x}_3(t)\boldsymbol{k} \quad \therefore \quad \left[ \frac{d}{dt} \vec{x}(t) \right]_{\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$

# 動座標系の成分

動く座標系  $(O, \mathcal{E}(t))$  では …

幾何ベクトル

成分

運動	$\vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow}$	$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$
速度	$\frac{d}{dt} \vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow} /$	$\frac{d}{dt} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}$
加速度	$\frac{d^2}{dt^2} \vec{x}(t)$	$\overset{1 \text{ 対 } 1}{\longleftrightarrow} /$	$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}$

証明：  $\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \left( x_1(t) \mathbf{i}(t) + x_2(t) \mathbf{j}(t) + x_3(t) \mathbf{k}(t) \right)$

$$= \dot{x}_1(t) \mathbf{i}(t) + \dot{x}_2(t) \mathbf{j}(t) + \dot{x}_3(t) \mathbf{k}(t)$$

$$+ \underbrace{x_1(t) \dot{\mathbf{i}}(t) + x_2(t) \dot{\mathbf{j}}(t) + x_3(t) \dot{\mathbf{k}}(t)}_{\because \text{基底の時間微分}}$$



# ニュートンの法則（＝測定値の法則！）

以下， $x, f$   $\xleftrightarrow{\text{定義}}$  静止座標系で測った成分（測定値）  $\neq$  幾何ベクトル

## 力学法則 6.1 (p.60)

第 1 法則: 力を受けない質点は，その速度を保つ．（静止なら静止）

第 2 法則: 力  $f$  を受けた質量  $m$  の質点の運動  $x = x(t)$  は，

$$m\ddot{x} = f \quad (6.7)$$

に従う（運動方程式）


第 3 法則: 質点  $X_i$  が質点  $X_j$  から受ける力を  $f_{ij}$  とするとき，

$$f_{ij} = -f_{ji} \quad (6.8)$$

が成立する（作用・反作用の法則）

# ニュートンの法則は，ほとんど成立しない！

## 慣性系 (慣性座標系)

 定義 ニュートンの法則が成立する「成分」を与える特殊な座標系

### ■ 慣性系の例

- 静止座標系
- 等速で平行移動する座標系

### ■ 慣性系でない例

- 回転する座標系
- 曲線運動する座標系

∴ ロボットアームに固定したカメラに映る世界では，ニュートンの法則は成立しない．測定値が，ぐりぐり動く座標系の成分だから．

## 演習タイム 3/3

- 6.3 節と 6.4 節を自習せよ！
- 例題 6.2, p.61
- 例題 6.3, p.64
- 例題 6.4, p.65

# 質点の直線運動

## 運動方程式

$$m\ddot{x} = f \quad (m, f \text{ は定数とする}) \quad (6.9)$$

■ 微分方程式  $m\ddot{x} = f$  を解かずに分かる性質

$$\ddot{x} = \frac{f}{m} \quad (m, f \text{ は定数}) \quad (6.10)$$

# 初期値問題と境界値問題

## 準備

$$m\ddot{x} = \frac{f}{m} \quad (\text{運動方程式})$$

両辺  積分

$$\dot{x}(t) = \frac{f}{m}t + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

両辺  積分

$$x(t) = \frac{f}{2m}t^2 + Ct + D \quad (D \text{ も積分定数})$$

## ■ 未知数 $C$ , $D$ の決め方 (p.63 の表)

- 初期時刻で条件  $x(0) = x_0$ ,  $\dot{x}(0) = v_0$  を課す . (初期値問題)
- 終端時刻  $t_1$  でも条件  $x(t_1) = x_1$ ,  $\dot{x}(t_1) = v_1$  を課す . (境界値問題)

# 質点の平面運動

## 運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f} : \begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix} \quad (m \text{ は定数}, \mathbf{f} \text{ は定ベクトル}) \quad (6.16)$$

## 必要な公式

- 数ベクトルの積分  $\xLeftrightarrow{\text{定義}}$  全成分を同じく積分：

$$\int \mathbf{x}(\tau) d\tau = \int [x_i(\tau)] d\tau := \left[ \int x_i(\tau) d\tau \right] \quad (6.17)$$

- ベクトル版「微積分学の基本定理」

$\xLeftrightarrow{\text{定義}}$  微分を積分すると元に戻る．ただし積分定数がつく．

$$\int \dot{\mathbf{x}} dt = \mathbf{x} + \mathbf{C} \quad (\mathbf{C} \text{ は積分定数ベクトル}) \quad (6.18)$$