

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスと制御工学

(数列と複素数の使い道)

宇都宮大学 工学研究科
准教授 吉田勝俊

この教材は、下記からダウンロードできます。
<http://edu.katzlab.jp/lec/kyoin/>

教員免許講習 機械工学 1

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

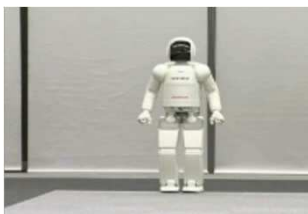
自己紹介

- 所属: 機械システム工学科 / 機械知能工学専攻
- 担当授業: 機械力学, 機構学, ロボット力学
※機械の動き方・動かし方
- 研究内容:
 - マルチヒューマンダイナミクス ※手押し相撲
 - 対戦・協調ロボットシステム
 - 複雑系工学(カオス, 確率過程など)

教員免許講習 機械工学 2

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

講義の目標



- ロボットの設計 = 機械 + 電気 + IT + α ?

答: α = **ダイナミクスの設計!**

- **ダイナミクス**を題材に、「数列」や「複素数」の使い道を紹介する。(当初予定より変更)

教員免許講習 機械工学 3

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

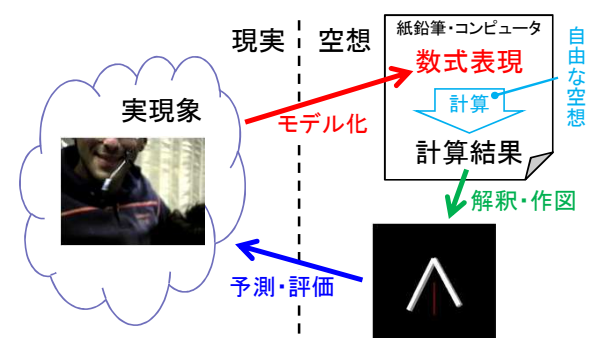
数学という空想

- 数列はまだしも, 複素数 $\alpha + \beta i$ て何?
 - 虚数 $i \equiv \sqrt{-1}$ ← **こんなもの実在するのか?**
 - 不思議なことに, 現実を説明できる.
 - ダイナミクスはその一例.
- 数学は, 紙に文字で書く空想
 - 小説と同じく, 実在しないものも記述できる.
 - 違いは客観性. 数学による空想(計算)では, 個人差を排除できる.

教員免許講習 機械工学 4

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

空想の使い方 — モデル化



現実 | 空想

自由な空想

紙鉛筆・コンピュータ

数式表現

計算

計算結果

解釈・作図

予測・評価

教員免許講習 機械工学 5

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

講義の内容

- ① ダイナミクスの実例
- ② ダイナミクスの分類
- ③ ダイナミクスのモデル化
 - 離散時間モデル ※等比数列
 - 連続時間モデル ※複素数
- ④ 制御工学への展開 ※複素数

教員免許講習 機械工学 6

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスの実例

※dynamics

ダイナミクス ⇔ 動き方(時間変動)

教員免許講習 機械工学 7

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ロボットのダイナミクス



位置と角度の時間変動

教員免許講習 機械工学 8

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ペンチのダイナミクス(無重力)



角度の時間変動

教員免許講習 機械工学 9

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

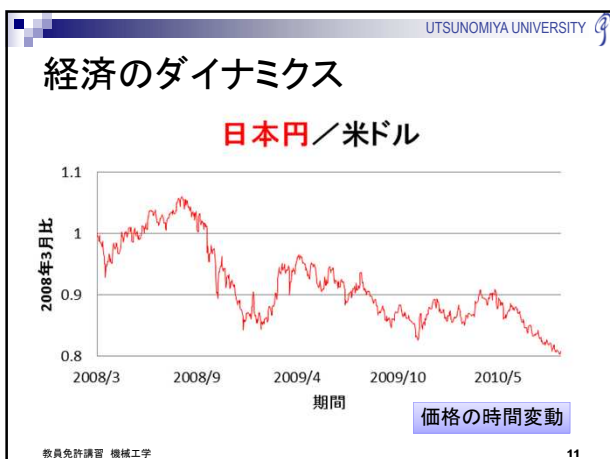
化学反応のダイナミクス(BZ反応)

Réaction oscillante

William Escudier

物質濃度の時間変動

教員免許講習 機械工学 10



UTSUNOMIYA UNIVERSITY

まとめ — ダイナミクスの実例

- ダイナミクスとは、時間変動のこと。
- 世界は、ダイナミクスに満ち溢れている。
 - 力学, 化学, 経済, 電気, 生体, ...

無数に存在する！

教員免許講習 機械工学 12

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスの分類

→大きく5種類に類別される

教員免許講習 機械工学 13

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

5種類のダイナミクス

非振動

単調減衰

安定

振動

減衰振動

単振動

発散振動

不安定

教員免許講習 機械工学 14

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

ダイナミクスのモデル化

→ダイナミクスを計算する！

教員免許講習 機械工学 15

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

目的と方法

- 5種類のダイナミクスを説明・予測したい。
→計算可能なモデルを作る。

↓

- 2つの方法がある！
 - 数列を使う（離散時間モデル）
 - 関数を使う（連続時間モデル）

教員免許講習 機械工学 16

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデル

→ダイナミクスを「数列」で表す方法

教員免許講習 機械工学 17

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

離散時間モデル

$$X_{n+1} = C X_n$$

- n 時間(整数)
- X_n 現在の数量(実数)
- X_{n+1} ... 未来の数量(実数)
- C パラメータ(実数) ※模倣用の係数

C を調整すると、様々なダイナミクスが模倣できる！（本当に？）

教員免許講習 機械工学 18

数列の復習

等差数列の例: 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...

等比数列の例: 1, 3, 9, 27, 81, ... ←こちらを活用!

■ 等比数列の数式表現

□ $x_0=1 \cdot 3^0, x_1=1 \cdot 3^1, x_2=1 \cdot 3^2, x_3=1 \cdot 3^3, \dots$

□ 法則 $\Rightarrow x_n=1 \cdot 3^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$

一般形 $x_n = x_0 C^n$
初項 公比

初項 $x_0 = 1$
公比 $C = 3$

教員免許講習 機械工学 19

離散時間モデルの解

$$X_{n+1} = C X_n$$

解法: 初期値 X_0 を与えて, 代入を繰り返す

$X_0, X_1 = C X_0, X_2 = C X_1 = C^2 X_0, X_3 = C X_2 = C^3 X_0, \dots$

解 $\Rightarrow X_n = C^n X_0$

解は, 初項 X_0 , 公比 C の「等比数列」!

教員免許講習 機械工学 20

練習問題

等比数列 $x_n = x_0 C^n$
初項 公比

■ 次の C で数列を求め5種類に分類せよ ($x_0 = 1$ とせよ)

- $C = 0.2$
- $C = -0.2$
- $C = -1$
- $C = -2$
- $C = 2$

単調減衰 減衰振動 単振動 発散振動 単調発散

教員免許講習 機械工学 21

$X_{n+1} = C X_n$ のダイナミクス

C	ダイナミクス	数値例 (初項 $x_0 = 1$)
$C < -1$	発散振動	($C = -2$) 1, -2, 4, -8, 16, -32, ...
$C = -1$	単振動	($C = -1$) 1, -1, 1, -1, 1, -1, ...
$-1 < C < 0$	減衰振動	($C = -0.2$) 1, -0.2, 0.04, -0.008, ...
$C = 0$	未定義 (不良定義)	考えない
$0 < C < 1$	単調減衰	($C = 0.2$) 1, 0.2, 0.04, 0.008, ...
$C = 1$	一定値	($C = 1$) 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...
$1 < C$	単調発散	($C = 2$) 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

パラメータ C を見れば, 一発で分かる!

教員免許講習 機械工学 22

まとめ — 離散時間モデル

■ 離散時間のダイナミクスは公比で決まる.

□ 絶対値 ... 減衰 (< 1), 発散 (> 1)

□ 正負 ... 振動 ($-$), 単調 ($+$)

■ 「等比数列」はダイナミクスの模倣に役立つ!

教員免許講習 機械工学 23

連続時間モデル

→ダイナミクスを「関数」で表す方法

教員免許講習 機械工学 24

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》微分法

■ 微分法の例(高校数学)

1. $x(t) = t^n \Rightarrow x'(t) = nt^{n-1}$ ※整関数
2. $x(t) = e^{at} \Rightarrow x'(t) = ae^{at}$ ※指数関数
3. $x(t) = \sin(bt) \Rightarrow x'(t) = b \cos(bt)$ ※三角関数
4. $x(t) = \cos(bt) \Rightarrow x'(t) = -b \sin(bt)$ ※三角関数

教員免許講習 機械工学 25

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル(1次系)

■ 離散時間モデル(差分方程式)

$$\square x_{n+1} = a x_n \Rightarrow \text{解 } x_n = a^n \underline{x_0} \quad \text{初項}$$

■ 連続時間モデル(微分方程式)

$$\square x'(t) = a x(t) \Rightarrow \text{解 } x(t) = e^{at} \underline{x(0)} \quad \text{初期値}$$

証明) 解を t で微分すると、
 $x'(t) = (e^{at})' x(0) = (a e^{at}) x(0)$ ※微分法の例 2
 $= a (e^{at} x(0)) = a x(t) //$

微分方程式 = 変数とその微分からなる方程式のこと

教員免許講習 機械工学 26

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

練習問題

■ $x(t) = e^{at} x(0)$ のグラフの増減を描け。

1. $a = 1$
2. $a = 0$
3. $a = -1$

教員免許講習 機械工学 27

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル(1次系)の安定性

■ 連続時間モデル(微分方程式)

$$x'(t) = a x(t) \Rightarrow \text{解 } x(t) = e^{at} x(0)$$

■ 安定性

係数 a の条件	解 $x(t)$ の動き	安定性の名称
$a < 0$	0に収束	漸近安定
$a = 0$	一定値	中立安定
$0 < a$	∞ に発散	不安定

5種類のダイナミクスの2種類しか出てこない!

振動が起らない

教員免許講習 機械工学 28

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

振動が起こる連続時間モデル

■ 最低でも, 2次系!

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

■ 2次系の例

□ 機械振動系 (x は変位)

$$m x''(t) + c x'(t) + k x(t) = 0$$

□ 共振回路 (q は電荷)

$$L q''(t) + R q'(t) + q(t)/C = 0$$

教員免許講習 機械工学 29

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル(2次系)

■ 1次系

$$x'(t) = a x(t)$$

同じ係数が入る
 $x(t) = \text{定数} \times e^{at}$

■ 2次系

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

違う係数が入る
 $x(t) = \text{定数} \times e^{s_1 t} + \text{定数} \times e^{s_2 t}$

新たな係数 s_1, s_2 を「固有値」という。

教員免許講習 機械工学 30

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

固有値の求め方

- 連続時間モデル(2次系)

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$
- 固有方程式

$$s^2 + a s + b = 0$$

↓ 同じ係数の2次方程式
- 固有値

$$s_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad s_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

↓ 解く 解の公式

教員免許講習 機械工学 31

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

《復習》2次方程式と複素数

- 虚数 $\dots i \equiv \sqrt{-1}$ ゆえに $i^2 = -1$ ← 空想

$$\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot -1} = \sqrt{3} \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$$
- 2次方程式 $s^2 + s + 1 = 0$ の解

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3} i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
- 解は一般に、複素数 $z = (\text{数}) \pm (\text{数})i$

教員免許講習 機械工学 32

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

練習問題 (固有値のパターン)

- 次の連続時間モデルの固有値を求めよ.
 - $x''(t) + 3 x'(t) + 2 x(t) = 0$ ※2個の実数
 - $x''(t) + 0 x'(t) + 9 x(t) = 0$ ※純虚数
 - $x''(t) + 2 x'(t) + 10 x(t) = 0$ ※複素数







教員免許講習 機械工学 33

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

連続時間モデル(2次系)の安定性

■ 固有値の実部, 虚部から, すぐ分かる!

複素数 $\alpha + \beta i$
実部 虚部

分類表	虚部=0	虚部≠0
実部が全て(-)	単調減衰 	減衰振動 
実部が0	一定値 	単振動 
実部が1つでも(+)	単調発散 	発散振動 

教員免許講習 機械工学 34

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

練習問題

- 解 $x(t)$ の概形をスケッチせよ.
 - $x''(t) + 3 x'(t) + 2 x(t) = 0$
 - 固有値: $s_1 = -2, s_2 = -1$
 - $x''(t) + 0 x'(t) + 9 x(t) = 0$
 - 固有値: $s_1 = -3i, s_2 = 3i$
 - $x''(t) + 2 x'(t) + 10 x(t) = 0$
 - 固有値: $s_1 = -1 - 3i, s_2 = -1 + 3i$

教員免許講習 機械工学 35

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

まとめ — 連続時間モデル

- 連続時間モデルのダイナミクスは, 固有値の実部と虚部から, すぐ分かる.
 - 実部 \dots 減衰するか(-), 発散するか(+)
 - 虚部 \dots 振動するか($\neq 0$), しないか($= 0$)
- を表す!
- 「複素数」はダイナミクスの分類に役立つ!

教員免許講習 機械工学 36

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

制御工学への展開


→ 立位ロボットを立てる！

教員免許講習 機械工学 37


UTSUNOMIYA UNIVERSITY

立位ロボットの原理モデル

倒立振り子モデル



応用例



2足歩行ロボット

教員免許講習 機械工学 38

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

倒立振り子モデル(台車付の振り子)

振り子は直接支えない
倒れ角 q

制御力 F

簡略化した運動方程式 **2次系**
 $q''(t) - g q(t) = -F$
 $\ast g \doteq 9.8 \cdots$ 重力加速度

【制御工学の問題】
振り子が安定に立つ F をどう作り出すか？

ヒント: 安定に立つ $\Rightarrow q(t)$ が 0 に減衰する \Rightarrow 分類表

教員免許講習 機械工学 39

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

(復習) $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$ の安定性

■ 固有値の実部, 虚部から, すぐ分かる!

複素数 $\alpha + \beta i$
 実部 虚部

分類表	虚部=0	虚部 $\neq 0$
実部が全て(-)	立つ! 単調減衰	立つ! 減衰振動
実部が0	一定値	単振動
実部が1つでも(+)	単調発散	発散振動

教員免許講習 機械工学 40

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

制御しないとき ($F=0$) のダイナミクス

簡略化した運動方程式
 $q'' - g q = -F = 0$

↓ 同じ係数の2次方程式

$s^2 - g = 0$ → 固有値 $s_1 = -\sqrt{g}, s_2 = +\sqrt{g}$

単調発散 ← 実部が正 虚部なし

■ スイッチを切ったロボットは倒れる!
 □ 倒れ角 $q(t)$ が単調に増加する.
 □ 逆さにした単振り子の性質.

不安定

教員免許講習 機械工学 41

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

均衡を実現する制御 (比例制御)

■ 倒れ角 q に比例した力で, 台車を押す. **比例制御という**

$F = F_1 = K q$ とすると **K をゲインという**

$q'' - g q = -F_1 = -K q$
 $q'' - (g - K) q = 0$ 移項して整理

固有値 $s_{1,2} = \pm \sqrt{g - K}$

■ ゲイン K を十分大きくすると, $g - K < 0$.
 $\Rightarrow s_{1,2} = \pm \sqrt{K - g} i$ (純虚数) \Rightarrow **単振動**

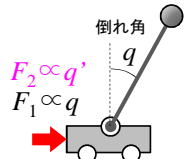
■ 比例制御で転倒はなくなるが, 静止はできない.

教員免許講習 機械工学 42

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

安定を実現する制御（微分制御）

- 角速度 q' に比例した力も加える. 微分制御という



倒れ角 q

$$F = F_1 + F_2 = Kq + Lq'$$

$$q'' - gq = -F = -Kq - Lq'$$

$$q'' + Lq' - (g - K)q = 0$$

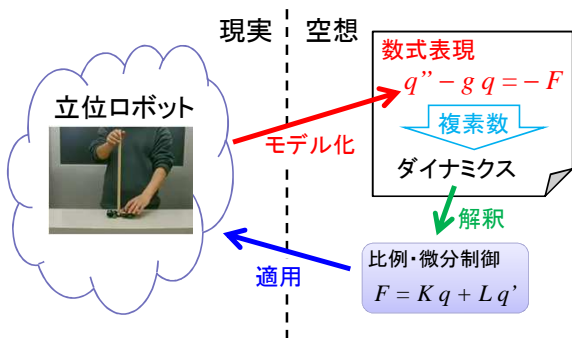
固有値 $s_1, s_2 = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 + 4(g - K)}}{2}$

- s_1, s_2 の実部が全て(－)になる, K, L を選ぶ
⇒ 単調減衰 or 減衰振動 が実現する.
- 比例＋微分制御で, ロボットは立つ!

教員免許講習 機械工学 43

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

立位ロボットの設計



現実 空想

立位ロボット

モデル化

数式表現 $q'' - gq = -F$

複素数

ダイナミクス

解釈

適用

比例・微分制御 $F = Kq + Lq'$

教員免許講習 機械工学 44

UTSUNOMIYA UNIVERSITY

授業のまとめ

- 様々な動き方(時間変動)を, ダイナミクスと総称する.
- ダイナミクスを5種類に類別し, これらを模倣できるモデルを構成した.
- 離散時間のダイナミクスを, 等比数列の公比で分類した.
- 連続時間のダイナミクス(2次系)を, 複素数(固有値)で分類した.
- 立位ロボットの制御力を, 複素数(固有値)で設計した.

教員免許講習 機械工学 45