第 3 回 機械力学

トルクとその合成

宇都宮大学 工学研究科 吉田勝俊

講義の情報 http://edu.katzlab.jp/lec/mdyn/

学習目標

- 表記上の注意
- 2 次元のトルク
- 2 次元のトルクの算法 — 符号付き面積
- トルクの釣合い

学習方法

全ての例題を，何も見ないで解けるまで反復せよ！

表記上の注意

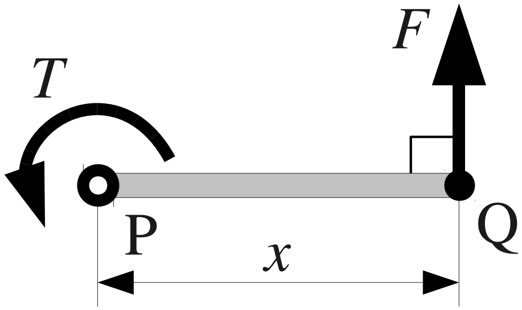
これ以降，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と成分 $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ を同一視する！

- 理工学の慣習にしたがい， $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ のような表記を認める．
- **暗黙の前提**

  ある正規直交基底 $\mathcal{E} = \langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \rangle$ を 1 つ選んで使い続ける．

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{x} \overset{\text{1対1}}{\Longleftrightarrow} \widetilde{\boldsymbol{x}}$$

トルクの定義



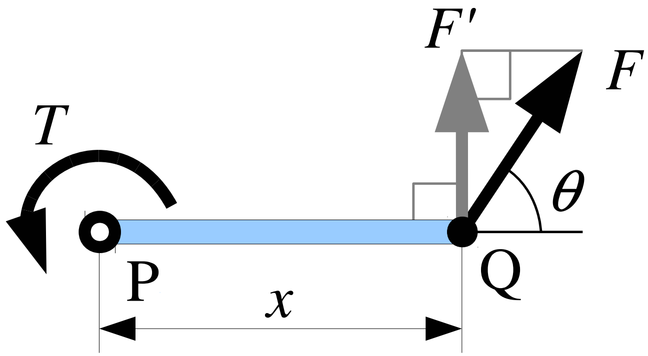
- 点 P にかかる回転性の力を，力 F と長さ x の積,

$$T = Fx \quad [\mathrm{Nm}] \qquad (3.1)\ \text{p.20}$$

で表す．これを **トルク** または **力のモーメント** という

- **トルクの正** $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ x 軸 (第 1 座標) から y 軸 (第 2 座標) に回す向き.

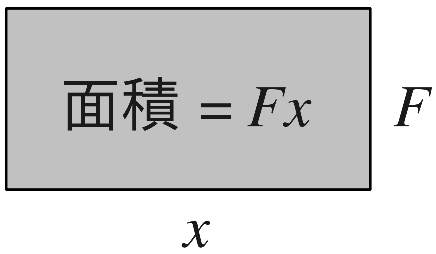
トルクの定義 (斜めの場合)

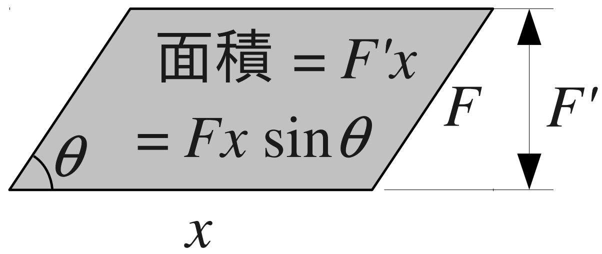


- 力 F が斜めのときは，直角方向の分力 F' でトルクを定める．

$$T = F'x = (F\sin\theta)x = Fx\sin\theta \quad [\mathrm{Nm}] \qquad (3.2)\ \text{p.21}$$

- トルク ＝ 平行四辺形の面積

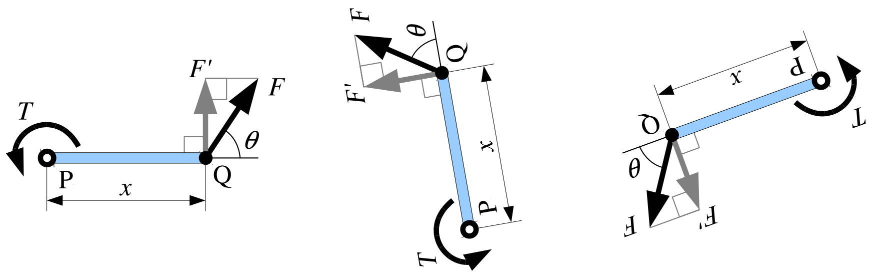




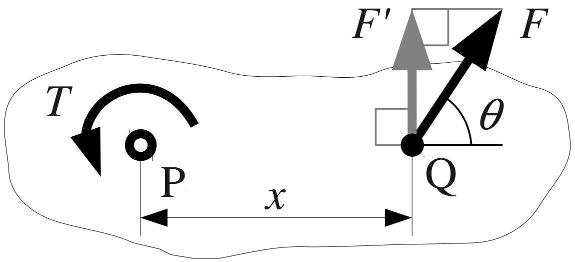
トルクの性質

トルク ＝ 平行四辺形の面積

- 回転しても面積は変らない ⇩ 以下のトルクは同じ値をとる．

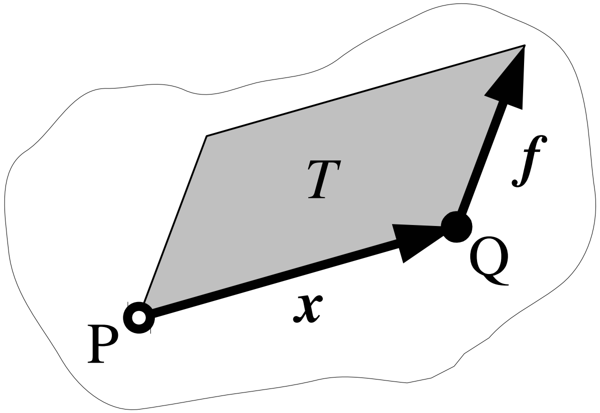


- P, Q, F の相対位置が同じなら同じトルク．物体形状は無関係！



物体形状を「あいまい」にするため
うねうねの作図が多い

2 次元トルクの数式表現



- $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積を，次のように表記する．

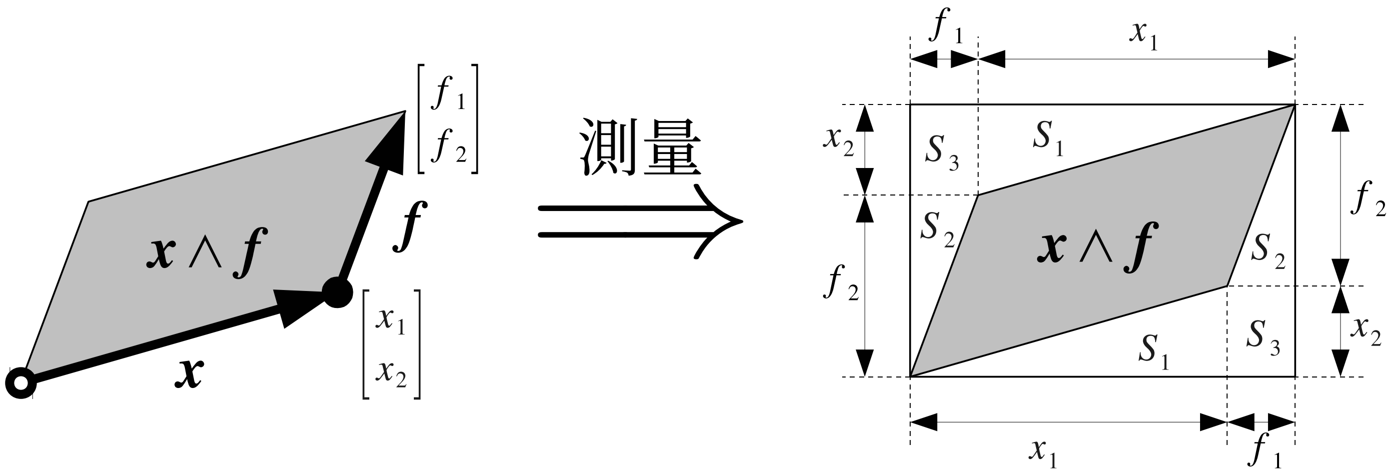
$$T = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f} \qquad (\text{“}\wedge\text{” はウェッジと読む}) \qquad (3.3)\ \text{p.22}$$

（“∧” は**ウェッジ**と読む）

- $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f}$ の値は「**行列式**」で計算できる．

$$T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \end{vmatrix} = x_1 f_2 - f_1 x_2 \qquad (3.5)\ \text{p.22}$$

「2 次元トルク ＝ 行列式」の証明



■ 外接する長方形から，余分な面積を除くと，平行四辺形の面積は，

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f} = \underbrace{(x_1 + f_1)(x_2 + f_2)}_{\text{長方形}} - \underbrace{x_1 x_2}_{2S_1} - \underbrace{f_1 f_2}_{2S_2} - 2\underbrace{x_2 f_1}_{S_3}$$

$$= x_1 f_2 - f_1 x_2 = \begin{vmatrix} x_1 & f_1 \\ x_2 & f_2 \end{vmatrix}$$

より「**行列式**」になる．証明終り．

2 次元トルクの算法

算法 3.2 (p.23)

- 平行四辺形の面積を表す行列式 $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ を，**符号付き面積**という．
- $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$ は次のルールで式変形できる

(1) $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x}.$ **(反対称性)**
ゆえに $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = 0.$ $(\because \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \Rightarrow \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} \Rightarrow 2\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} = 0)$

(2) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{y} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x} \wedge (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{b},$
$(\lambda \boldsymbol{x}) \wedge \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x} \wedge (\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}).$ **(分配則)**

(3) **正規直交基底** $\langle \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \rangle$ **に対して，** $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j} = 1.$ **(単位面積)**

☆ 行列式の式変形ルールそのもの

☆ トルク $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{f}$ は「**かけ算**」と同じ分配則で式変形できる！

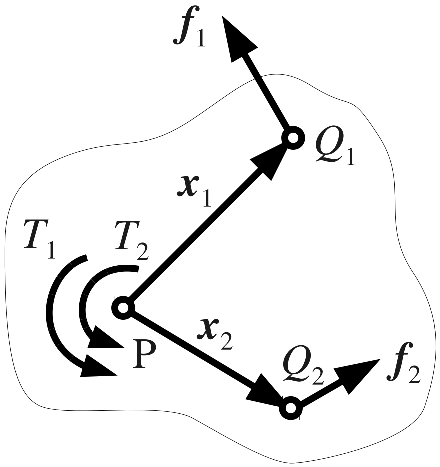
演習タイム

- **問題 3.1, p.23**
- **例題 3.1, p.23**

1 点に作用するトルクの合成

力学法則 3.1 (p.24)

剛体上の着力点 Q_1, Q_2 に，力 $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ が作用するとき，



点 P にかかるトルク T は，各 $\boldsymbol{f}_i$ が発生するトルク T_i の和，

$$T = T_1 + T_2 = \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{f}_1 + \boldsymbol{x}_2 \wedge \boldsymbol{f}_2 \tag{3.7}$$

となる．

演習タイム（材料力学に必要）

- **例題 3.2, p.24**
- **例題 3.3, p.24**

トルクの釣合い

トルクの釣合い条件

定義 $\Longleftrightarrow$ 物体に働くトルク $T_1, T_2, \cdots$ の総和が 0 となる条件：

$$T := T_1 + T_2 + \cdots = 0 \qquad (3.13)\ \text{p.28}$$

- 未知数を含む釣合い条件を，**釣合い方程式**という．
- 物体に働くトルクが釣合い条件を満すとき，トルクが「物体の運動」に及ぼす効果はゼロになる．

演習タイム（材料力学に必要）

- **例題 3.4, p.28**
- **例題 3.5, p.28**