Министерство образования и науки Российской Федерации

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Российская академия наук

Сибирское отделение

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

Курсовая работа

Тема: "Исследование движения заряженной частицы в азимутальном магнитном поле"

Факультет: ФТФ
Группа: ФТ-01
Студент: Тютрин К.М.
Преподаватель: Иванов А.В.
Дата: 24 апреля 2023 г.

Новосибирск
2023

Содержание

1 Постановка задачи

Дано: частица движется в магнитном поле, в котором отлична от нуля только азимутальная компонента $B_\theta = B_0 r_0 / r$ (поле в тороидальном соленоиде, поле прямого тока).

Задача: проинтегрировать ее движение, учитывая что r_0 это начальный радиус частицы, начальной радиальной скорости нет. Соотнести результат с дрейфовой теорией. Линеаризовать полученные уравнения.

2 Решение

2.1 Уравнения движения частицы

По условию задачи мы рассматриваем движение частицы в тороидальном соленоиде,для этой задачи наилучшим образом подходит цилиндрическая система координат:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{z}) = q\dot{r}B_\theta \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(\gamma m r^2\dot{\theta}) = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\dot{r}) = \gamma m r\dot{\theta}^2 - q\dot{z}B_\theta \tag{2.3}$$

По условию задачи электрическое поле отсутствует, магнитное поле направлено только азимутально.

Проинтегрируем по времени уравнения (2.1) и (2.2)

$$\gamma m r^2\dot{\theta} = L_\theta = const$$

$$\gamma m\dot{z} = \int q\frac{dr}{rdt}B_0 r_0 dt = qB_0 r_0 \ln r + C_2$$

Третье уравнение можно проинтегрировать только численно. Об этом следующий пункт.

2.2 Численное решение уравнений движения

Численно проинтегрируем оставшееся уравнение движения (2.3) для следующих параметров: $B = 40$ Гс, $r_0 = 1$ м, частица – e^-, в начале имеет только азимутальную скорость, начальная энергия $W = 100$ кэВ.

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \dot{z}\frac{qB_0 r_0}{m}\frac{1}{r}$$

С учетом того, что $\dot{\theta} = r_0^2\dot{\theta}_0/r^2$

$$\ddot{r} = \frac{2Wr_0^2}{mr^3} - \dot{z}\frac{qB_0 r_0}{m}\frac{1}{r}$$

Где $\dot{z}$:

$$\dot{z} = \frac{qB_0 r_0}{m}\ln\frac{r}{r_0} + \dot{z}_0 \tag{2.4}$$

Для удобства, переобозначим константы в η_1 и η_2.

$$\ddot{r} = \eta_1\frac{1}{r^3} - \left(\eta_2 \ln\frac{r}{r_0} + \dot{z}_0\right)\eta_2\frac{1}{r} \tag{2.5}$$

$$\eta_1 = \frac{2Wr_0^2}{m}$$

$$\eta_2 = \frac{qB_0 r_0}{m}$$

Дифференциальное уравнение решим численно с помощью метода Эйлера на языке программирования Python.

Из условия задачи следует, что $\dot{z}_0 = 0, r(t=0) = r_0, \dot{r}(t=0) = 0$. Решение уравнения предоставленно в виде графиков на (Рис. 1)

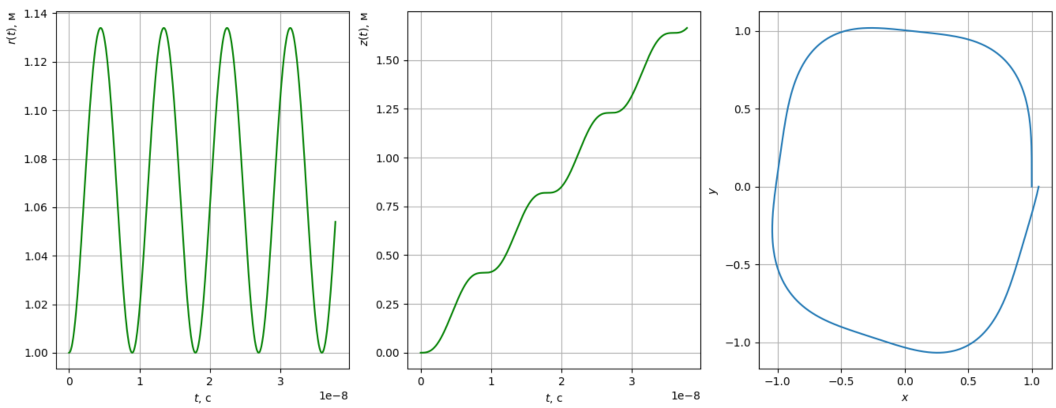

Рис. 1. Движение электрона вокруг окружности за 1 период по $r(t)$, $z(t)$, $y(x)$ соответсвенно.

Период найден численно и равен $T = 3.78 \cdot 10^{-8}c$

Чтобы численное решение связать с дрейфовой теорией, нужно найти $v_{||}$ – скорость движения ведущего центра вдоль силовой линии магнитного поля. Скорость центробежного дрейфа равна по определению:

$$\vec{v}_{cf} = \frac{\gamma m v_{||}^2}{q} \frac{1}{B^2} \left[\vec{B} \times \frac{\vec{n}}{r}\right] \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.6) видно, что вектор скорости центробежного дрейфа будет направлен вдоль оси z. Подставляя скорость $v_{||}$ в уравнение (2.6), получим следующее.

$$v_{cf}(r) = \frac{2W}{qB_0} \frac{r_0}{r^2}$$

Численно решая приведенное уравнение, найдем ее траекторию вдоль оси z (Рис 3)

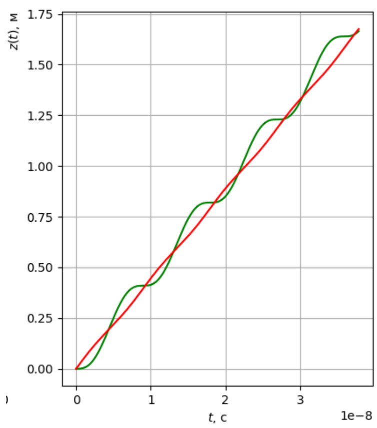

Рис. 2. Красной линией помечена траектория дрейфа.

2.3 Нахождение параметров для постоянного радиуса кривизны траектории электрона

Частица будет иметь постоянный радиус, при условии, что радиальная скорость $\dot{r} = 0$, следовательно $\ddot{r} = 0$. Тогда уравнение (2.5) принимает вид:

$$\frac{2Wr_0^2}{mr^3} - \left(\frac{qB_0r_0}{m}\ln\frac{r}{r_0} + \dot{z}_0\right)\frac{qB_0r_0}{m}\frac{1}{r} = 0$$

При этом, $r(t) = r = r_0$. Решая уравнение, найдем $\dot{z}_0$.

Получим, что $\dot{z}_0 = 5 \cdot 10^7$ м/с. Подставим в (2.5), получим следующие графики (см. 3)

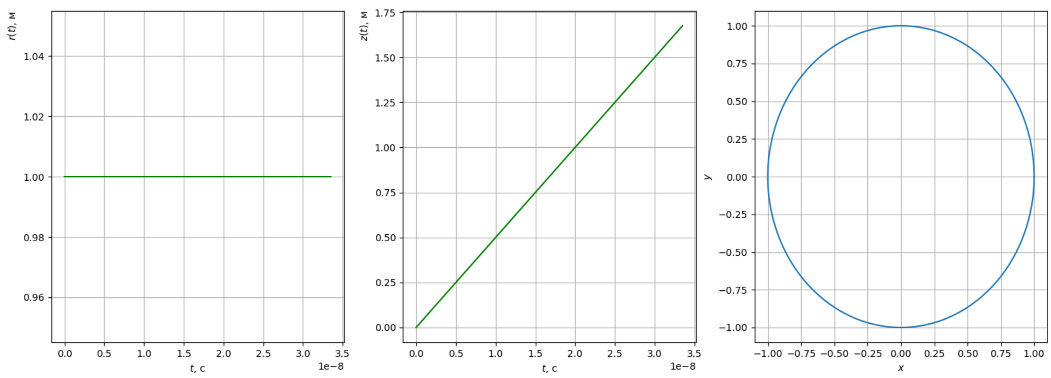

Рис. 3

Действительно, получилась идеальная окружность. При таких условиях, электрон движется вдоль оси z с постоянной скоростью $\dot{z}(t) = const$.

2.4 Линеаризация уравнений

Линеаризуем уравнение (2.1) с помощью ряда Тейлора с теми же условиями (параметрами), при которых искалось численное решение.

$$\ddot{r} = \eta_1 \frac{1}{r^3} - \eta_2^2 \frac{1}{r} \ln \frac{r}{r_0}$$

Преобразуем r в:

$$r = r_m + \delta(t)$$

Где r_m – середина синусоиды, ее середину возьмем из численного решения, $\delta(t)$ – колебания.

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{r_m^3} - \frac{3\delta(t)}{r_m^4};$$

$$\frac{1}{r} \ln \frac{r}{r_0} \approx \frac{\ln \frac{r_m}{r_0}}{r_m} + \frac{\delta(t)(1 - \ln \frac{r_m}{r_0})}{r_m^2}$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\ddot{\delta} = \eta_1 \left(\frac{1}{r_m^3} - \frac{3\delta(t)}{r_m^4} \right) - \eta_2^2 \left(\frac{\ln \frac{r_m}{r_0}}{r_m} + \frac{\delta(t)(1 - \ln \frac{r_m}{r_0})}{r_m^2} \right)$$

$$\ddot{\delta} + k^2 \delta = \eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0}$$

$$k^2 = \frac{3\eta_1}{r_m^4} + \frac{\eta_2^2 (1 - \ln \frac{r_m}{r_0})}{r_m^2}$$

$$\delta(t) = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \left(\eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) / k^2$$

$$r(t) = r_m + C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \left(\eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) / k^2$$

Из начальных условий получим значения констант: C_1, C_2

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = r_0 - r_m - \left(\eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) / k^2$$

$$r(t) = r_m + \left[r_0 - r_m - \left(\eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) / k^2 \right] \cos(kt) + \left(\eta_1 \frac{1}{r_m^3} - \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) / k^2$$

Линеаризуем $\dot{z}$ (ур. (2.4)) с помощью ряда Тейлора

$$\dot{z} = \eta_2 \ln \frac{r}{r_0} \approx \eta_2 \left(\ln \frac{r_m}{r_0} + \frac{\delta(t)}{r_m} \right)$$

$$z = \int \eta_2 \left(\ln \frac{r_m}{r_0} + \frac{\delta(t)}{r_m} \right) dt$$

$$\int \frac{\delta}{r_m} dt = \left(\frac{\eta_1}{r_m^3} + \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) \frac{t}{k^2 r_m} + \frac{C_2}{k r_m} \sin kt$$

$$z(t) = \eta_2 t \ln \frac{r_m}{r_0} + \left(\frac{\eta_1}{r_m^3} + \frac{\eta_2^2}{r_m} \ln \frac{r_m}{r_0} \right) \frac{t \eta_2}{k^2 r_m} + \frac{C_2 \eta_2}{k r_m} \sin kt$$

Нарисуем графики полученных $r(t)$, $z(t)$,$v_z(t)$ аналитических решение (см. 4) за период T.

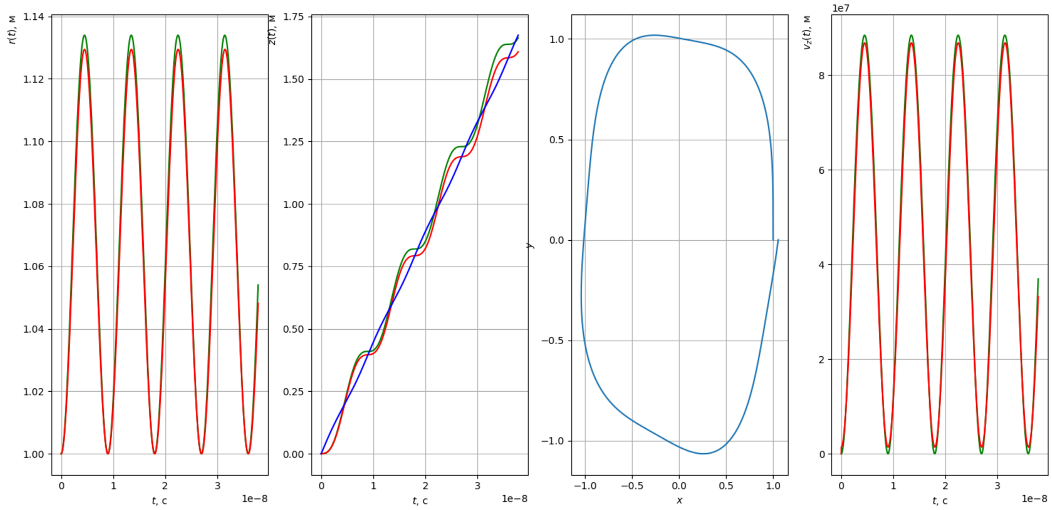

Рис. 4. Красной линией обозначено аналитическое решение, зелёным – численное.

Видно, что графики аналитического и численного решения разнятся с небольшой погрешностью.

3 Заключение

В курсовой работе было подробно описано движение электрона в тороидальном соленоиде с помощью численного и аналитического метода. Были найдены условия, при которых частица сможет двигаться с постоянным радиусом. Получили связь наших решений с дрейфовой теорией.