
TD1 : ESPACES AFFINES, NOTIONS DE BASE

Espaces et sous-espaces affines

Exercice 1 (Droites)

On considère l'espace affine réel \mathbb{R}^3 .

- a) Déterminer des équations qui définissent la droite \mathcal{T} qui passe par les deux points $M = (1, 0, 1)$ et $N = (-1, 1, 1)$.
- b) Déterminer la direction de \mathcal{T}
- c) Déterminer des équations de la droite parallèle à \mathcal{T} qui passe par le point $P = (-1, 2, 1)$.
- d) Trouver une droite qui n'est ni parallèle à \mathcal{T} , ni sécante avec \mathcal{T} .

Exercice 2 (Barycentres)

On se place dans \mathbb{R}^2 .

- a) Calculer l'isobarycentre des points $A = (1, -2)$, $B = (0, -2)$, $C = (2, -4)$. Puis le barycentre des mêmes points affectés des poids suivants : $(A, 2)$, $(B, 4)$, $(C, -1)$.
- b) Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes.
- c) Discuter la position d'un point M par rapport au triangle non dégénéré ABC , en fonction des signes de ses coordonnées barycentriques $[\alpha, \beta, \gamma]$.

Exercice 3 (Exemples d'espaces affines)

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'ensemble \mathcal{E}_n des polynômes unitaires de degré n à coefficients réels est un espace affine. Quelle est sa dimension ? En donner un repère affine.
- b) Soient d un entier non nul, et a_1, \dots, a_d et b des réels. Soit \mathcal{E} l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_{n+d} = a_1 u_{n+d-1} + \dots + a_{d-1} u_{n+1} + a_d u_n + b \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (i) Montrer que \mathcal{E} est un espace affine.

- (ii) Quelle est sa dimension ?
- (iii)^{*} Décrire les éléments de \mathcal{E} lorsque $d = 1$ (distinguer les cas $a_1 \neq 1$ et $a_1 = 1$).
- (iv)^{*} On suppose maintenant $d = 2$. Donner une base de la direction $\vec{\mathcal{E}}$ de \mathcal{E} . Donner un repère affine de \mathcal{E} dans le cas où $a_1 + a_2 \neq 1$.

Exercice 4 (EDO et espaces affines)

Dans ce qui suit on s'intéresse aux structures portées par les espaces de solutions des équations différentielles dans $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$y' - y = 4 \quad (G)$$

$$y' - y = 0 \quad (H)$$

- a) Montrer que l'espace des solutions \mathcal{S}_G de (G) est un sous-espace affine de l'espace des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$. Est-il un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R})$?
- b) Montrer que l'espace des solutions \mathcal{S}_H de (H) est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont on déterminera la dimension et une base.
- c) Déterminer une solution particulière de (G) que l'on notera C .
- d) Montrer que toute solution de (G) s'écrit de manière unique sous la forme $f + C$ où f est une solution de (H) . Que peut-on conclure ?
- e) La bijection entre l'ensemble des solutions \mathcal{S}_G de (G) et l'ensemble des solutions \mathcal{S}_H de (H) est-elle canonique ?

Exercice 5 (Changement de repères)

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de son repère cartésien canonique $\mathcal{R} = (O, I, J, K)$. On considère le nouveau repère $\mathcal{R}' = (O' = (0, 0, 1), I' = (0, 0, 0), J' = (1, 0, 2), K' = (0, 1, 1))$.

- a) Soit un point de coordonnées $X = (x, y, z)$ dans le repère \mathcal{R} . Donner ses coordonnées cartésiennes $X' = (x', y', z')$ dans le repère \mathcal{R}' en fonction de $X = (x, y, z)$.
- b) Donner la formule de changement de repère de \mathcal{R} à \mathcal{R}' sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

où M est une matrice 3×3 . Puis écrire sous la même forme la formule de changement de repère inverse, de \mathcal{R}' à \mathcal{R} .

- c) On se donne $A = (0, 0, 3)$, $B = (1, 0, 4)$, $C = (1, 1, 1)$, trois points dont les coordonnées cartésiennes sont exprimées dans \mathcal{R} . Donner une équation du plan $\langle A, B, C \rangle$ dans le repère \mathcal{R} , puis dans le repère \mathcal{R}' .

- d) De la question b) on déduit qu'un changement de repères $P_{\mathcal{R}}^{\mathcal{R}'}$ s'écrit sous la forme $X' = P_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}(X) = M_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}X + V_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}$. Soit un troisième repère \mathcal{R}'' , quelle formule relie les couples $(M_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}}, V_{\mathcal{R}'}^{\mathcal{R}})$, $(M_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'}, V_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}'})$ et $(M_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}}, V_{\mathcal{R}''}^{\mathcal{R}})$?
- e)* On note $GA_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des couples (M, V) où $M \in GL_3(\mathbb{R})$ et $V \in \mathbb{R}^3$. On munit $GA_3(\mathbb{R})$ d'une opération binaire :
- $$(M', V') \circ (M, V) = (M'M, M'V + V')$$
- Montrer que cette opération munit $GA_3(\mathbb{R})$ d'une loi de groupe.
- f)* Montrer que $GA_3(\mathbb{R})$ est en bijection avec l'ensemble des repères de \mathbb{R}^3 . Cette bijection est-elle canonique ?

Exercice 6 (Exemples de sous-espaces affines)

- a) Soit X un espace topologique, on considère l'espace $C(X, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur X . Soit $a \in X$ montrer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_{a,1} = \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f(a) = 1\}$$

est un sous-espace affine de $C(X, \mathbb{R})$.

- b) Montrer que l'ensemble des matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1-a & b-2a \\ a+b & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace affine de $M_2(\mathbb{R})$. En donner un repère affine.

- c) Montrer que le cercle $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ n'est pas un sous-espace affine de \mathbb{R}^2 .
- d) Montrer que $\mathcal{H} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(x+1) = f(x) + 1\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Déterminer un point de \mathcal{H} et sa direction.

Exercice 7* (Des triangles sur un corps fini)

On se place dans l'espace affine $\mathcal{E} = (\mathbb{F}_3)^2$ sur $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- a) Combien contient-il de points et de droites ? Faire des dessins !
- b) Etant donnés deux points M et N de \mathcal{E} , le milieu de (M, N) est le point $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N$. On considère les points $A = (\bar{0}, \bar{0})$, $B = (\bar{2}, \bar{0})$, $C = (\bar{0}, \bar{2})$. Déterminer les médianes du triangle ABC . Sont-elles concourantes ?

Applications affines

Exercice 8 (Projections et symétries)

On se place dans l'espace affine (euclidien) \mathbb{R}^3 . Le but de cet exercice est de donner des expressions analytiques pour des projections et des symétries. On considère le plan \mathcal{P} d'équation $\{x + y + z = 1\}$ et la droite \mathcal{D} d'équations $\{z = 4, y = 0\}$.

- a) Donner l'expression analytique de la projection p sur le plan \mathcal{P} suivant la direction \mathcal{D} .
- b) Donner l'expression analytique de la symétrie s par rapport à \mathcal{P} suivant la direction \mathcal{D} .
- c) Donner l'expression analytique de la projection orthogonale π sur le plan \mathcal{P} .
- d) Calculer la distance de $A = (1, 0, 1)$ au plan \mathcal{P} .
- e) Donner l'expression analytique de la symétrie orthogonale σ par rapport à \mathcal{P} .

Exercice 9 (Composition d'applications affines)

On se place dans un plan affine réel.

- a) Soient ABC un triangle, A' , B' , C' les milieux respectifs de BC , CA et AB , $s_{A'}$, $s_{B'}$, $s_{C'}$ les symétries centrales par rapport à ces points. Déterminer la nature géométrique des transformations $f = s_{B'} \circ s_{A'}$ et $g = s_{C'} \circ s_{B'} \circ s_{C'}$.
- b) Soient f et f' deux homothéties de même rapport non nul. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f'^{-1}$?

Exercice 10 (Polygone des milieux)

Dans cet exercice on se place dans \mathbb{R}^2 :

- a) Soit $A'B'C'$ un triangle. Montrer qu'il existe un triangle ABC , et un seul, tel que A' soit le milieu de BC , B' le milieu de CA et C' le milieu de AB . Indiquer une construction géométrique de ce triangle.
- b) Soit $A'B'C'D'$ un quadrilatère. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère $ABCD$ tel que A' soit le milieu de AB , B' le milieu de BC , C' le milieu de CD et D' le milieu de DA . Ce quadrilatère, s'il existe, est-il unique ?
- c)* Etant donnés n points B_1, \dots, B_n , peut-on toujours trouver n points A_1, \dots, A_n tels que B_i soit, pour tout $i = 1, \dots, n$, le milieu de $A_i A_{i+1}$ (avec la convention $A_{n+1} = A_1$) ? Donner une construction géométrique des points A_i à partir des points B_i lorsque la solution existe.

Indication : Comme le montrent les deux premières questions, la solution dépend de la parité de n . On pourra considérer la composée des symétries centrales de centres B_1, \dots, B_n .

- d)* Reprendre la question précédente en traduisant le problème en un système de n équations linéaires à n inconnues dans \mathbb{C} . Discuter le rang de ce système selon la parité de n , puis le résoudre.

Exercice 11 (Homothéties)

On se place dans un plan affine réel. On rappelle que l'homothétie de centre A et de rapport λ est l'application h qui à un point M associe le point $h(M)$ vérifiant :

$$\overrightarrow{Ah(M)} = \lambda \overrightarrow{AM}$$

- a) Que dire des cas particuliers $\lambda = 0, 1, -1$? A quelle condition h est-elle une bijection ? Si elle est bijective quelle est son inverse ?
- b) On se place dans un repère affine $\mathcal{R} = (O, I, J)$. Donner l'expression analytique de l'homothétie h de centre $A = (u, v)_{\mathcal{R}}$ et de rapport λ .
- c) Calculer le conjugué d'une homothétie par une transformation affine.
- d) Calculer la composée de deux homothéties.
- e) Les homothéties de rapport non nul forment-elles un groupe ?
- f) Montrer que les homothéties de même centre A et de rapport non nul forment un groupe.
- g) Montrer que les homothéties et les translations forment un sous-groupe $HT_2(\mathbb{R})$ du groupe affine, puis que ce sous-groupe est engendré par les homothéties. Le groupe $HT_2(\mathbb{R})$ agit-il transitivement sur le plan affine ?
- h) On rappelle que le centre d'un groupe G est l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $gh = hg, \forall h \in G$. Montrer que le centre de G est un sous-groupe de G .
- i) Quel est le centre du groupe linéaire $GL_2(\mathbb{R})$?
- j) Quel est le centre du groupe affine $GA_2(\mathbb{R})$?
- k) A quelles conditions une homothétie et une translation commutent-elles ?

Exercice 12 (Quelques théorèmes classiques)

On se place dans un plan affine réel.

- a) Montrer le **théorème de Pappus** (d'après Pappus d'Alexandrie, IV^e siècle après J.-C.) :

« Soient \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites distinctes et des points $A, B, C \in \mathcal{D}$ et $A', B', C' \in \mathcal{D}'$ tels que $\langle AB' \rangle \parallel \langle A'B \rangle$ et $\langle BC' \rangle \parallel \langle B'C \rangle$, alors $\langle AC' \rangle \parallel \langle A'C \rangle$. »

- b) Montrer le **théorème de Ceva** (d'après Giovanni Ceva, 1678, même si ce théorème était connu à la fin du XI^e siècle de Yusuf Al-Mu'taman ibn Hūd, géomètre et roi de Saragosse.)

« Soit ABC un triangle non dégénéré, soient D, E et F trois points distincts des sommets et appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les droites $\langle AD \rangle$, $\langle BE \rangle$ et $\langle CF \rangle$ sont concourantes si et seulement si $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = -1$. »

- c) Montrer le **théorème de Ménélaüs** (d'après Ménélaüs d'Alexandrie, I^{er} et II^e siècle après J.-C.)

« Si D, E et F sont trois points des côtés $\langle BC \rangle$, $\langle AC \rangle$ et $\langle AB \rangle$ d'un triangle non dégénéré ABC (et distincts des sommets), alors D, E et F sont alignés si et seulement si $\frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{FA}{FB} = 1$. »

- d) Montrer le **théorème de Desargues** (d'après Girard Desargues, alias S.G.D.L., XVII^e siècle à Lyon) :

« Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non dégénérés sans sommets communs et tels que $\langle AB \rangle \parallel \langle A'B' \rangle$; $\langle AC \rangle \parallel \langle A'C' \rangle$; $\langle BC \rangle \parallel \langle B'C' \rangle$, alors les droites $\langle AA' \rangle$, $\langle BB' \rangle$ et $\langle CC' \rangle$ sont parallèles ou concourantes. »

Exercice 13 (Ensembles convexes)

- a) Soient C et C' deux convexes non vides d'un espace réel affine E . Montrer que l'ensemble Γ des milieux des segments MM' , où M parcourt C et M' parcourt C' est un convexe.
- b) Montrer que les images directes et inverses des convexes par les applications affines sont également convexes.

Exercice 14 (Demi-espaces)

Soit E un espace affine réel de dimension n et H un hyperplan affine de E .

a) Montrer que la relation \sim définie sur $E \setminus H$ par :

$$M \sim N \iff [MN] \cap H = \emptyset$$

est une relation d'équivalence qui sépare $E \setminus H$ en exactement deux classes, appelés *demi-espaces (ouverts)*.

b) Montrer que les demi-espaces sont convexes.

Exercice 15 (Caractérisation des homothéties-translations)

Soient \mathcal{E} un espace affine réel et $\varphi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ une application affine qui envoie toute droite de \mathcal{E} sur une droite parallèle. Montrer que φ est une translation ou une homothétie de rapport non nul.

Exercice 16 (Théorème fondamental de la géométrie affine)

On fixe un espace affine réel \mathcal{E} de dimension au moins 2, on se donne une bijection ϕ de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . Le but de cet exercice est de montrer que ϕ est affine si et seulement si ϕ préserve les triplets de points alignés.

Dans tout ce qui suit on suppose que ϕ envoie 3 points alignés sur 3 points alignés. On note par $'$ les images par ϕ : $O' = \phi(O)$, $A' = \phi(A)$, $B' = \phi(B)$, ...

a) Soit \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} , montrer que $\phi^{-1}(\mathcal{F})$ est affine.

b) Montrer que ϕ envoie un repère affine sur un repère affine.

c) En déduire que ϕ envoie k points affinement indépendants sur k points affinement indépendants.

d) En déduire que ϕ préserve droites et plans.

e) En déduire que ϕ envoie les droites parallèles sur des droites parallèles.

f) On fixe O un point de \mathcal{E} . Soient A et B deux points de \mathcal{E} et soit C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, de plus on suppose que A, B et C ne sont pas alignés. En utilisant la question e) montrer que :

$$\overrightarrow{O'C'} = \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$$

g) Soient \mathcal{D} une droite passant par O et \mathcal{D}' son image par ϕ . On fixe $A \neq O$ un point de \mathcal{D} . Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA}$.

Vérifier que son image $M' = \phi(M)$ satisfait $\overrightarrow{O'M'} = \mu \overrightarrow{O'A'}$ pour un unique scalaire μ , indépendant du choix de A .

$$\text{On a ainsi défini une fonction } \sigma_{\mathcal{D}} : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto \mu \end{cases}.$$

- h) Soient M et N tels que $\overrightarrow{OM} = \lambda_1 \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{ON} = \lambda_2 \overrightarrow{OA}$. En utilisant un point B hors de \mathcal{D} et des droites parallèles, construire les points P et Q de \mathcal{D} tels que

$$\overrightarrow{OP} = (\lambda_1 + \lambda_2) \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OQ} = (\lambda_1 \lambda_2) \overrightarrow{OA}.$$

- i) Montrer que $\sigma_{\mathcal{D}}$ vérifie $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1 + \lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1) + \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$ et que $\sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_1) \cdot \sigma_{\mathcal{D}}(\lambda_2)$.
En déduire que $\sigma_{\mathcal{D}}$ est un automorphisme du corps \mathbb{R} .
- j) Soit σ un automorphisme du corps \mathbb{R} . Vérifier que $\sigma(1) = 1$, que $\sigma(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}$, que σ est une application croissante, puis en déduire que $\sigma = Id$.
- k) Montrer que ϕ est affine.