TD0 : Géomètrie plane et nombres complexes

Exercice 1 (Droites)

a) On considère l'espace affine $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{D}$ la droite $\{(x,y) \mid x+2y=1\}$.

(i) Déterminer toutes les équations cartésiennes qui définissent la même droite $\mathcal{D}$.

(ii) Déterminer toutes les équations cartésiennes qui définissent une droite parallèle à $\mathcal{D}$.

(iii) Déterminer la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ parallelle à $\mathcal{D}$.

(iv) Déterminer les équations cartésiennes qui définissent la droite parallèle à $\mathcal{D}$ qui passe par $A=(2,1)$.

(v) Déterminer une équation de la droite qui passe par les points $C=(2,3)$ et $D=(4,-3)$. Est-elle parallèle à $\mathcal{D}$?

b) On considère le plan complexe $\mathbb{C}$.

(i) Montrer que toute droite réelle de $\mathbb{C}$ est définie par une équation complexe de la forme

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + \gamma = 0\}$$

où $\beta \in \mathbb{C}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

(ii) Déterminer une équation complexe de la droite $\mathcal{D}$ de la question (a).

(iii) Donner une condition sur les coefficients des équations complexes pour que deux droites soient parallèles.

Exercice 2 (Conditions géométriques)

a) Étant donnés deux points distincts A et B du plan complexe d'affixes a et b, donner une condition sur $a\overline{b}$ pour que la droite AB passe par O d'affixe 0. Préciser quand O est entre A et B, et quand il ne l'est pas.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les affixes a, b, c de trois points A, B, C du plan complexe pour que le triangle ABC soit équilatéral.

Exercice 3 (Équation d'un cercle)

Montrer que tout cercle du plan complexe est défini par une équation de la forme

$$z\overline{z} - a\overline{z} - \overline{a}z + c = 0,$$

où a est un nombre complexe et c un réel vérifiant $c \leq |a|^2$. Montrer que réciproquement toute équation de ce type est celle d'un cercle.

Exercice 4 (Encore des équations)

a) Discuter selon les valeurs de $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{C}$ quel est le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par l'équation

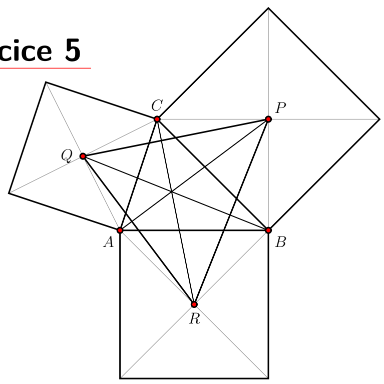
$$\alpha.z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \gamma = 0.$$

b) Soit λ un nombre réel positif, décrire géométriquement l'ensemble

$$E_\lambda = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = \lambda|z - b|\}.$$

c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes tels que $|z - 1| = |z - iz| = |z - i|$.

Exercice 5



À l'extérieur d'un triangle ABC, on construit trois carrés de bases les côtés et de centres P, Q et R. Montrer que les segments AP et QR (resp. BQ et RP, CR et PQ) sont orthogonaux et de même longueur. En déduire que les droites AP, BQ et CR sont concourantes.

Exercice 6

On construit à l'extérieur d'un parallélogramme $ABCD$ quatre carrés de bases les côtés et de centres M, N, P et Q. Montrer que $MNPQ$ est un carré.