# SOLUTIONS DE L'EXAMEN FINAL

13 janvier 2017

[ durée : 3 heures ]

**Exercice 1** (Géométrie du plan complexe)

On se place dans le plan complexe. Soit l'application $\phi : \mathbb{C} \setminus \{3i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(z) = \frac{z-2}{iz+3} \qquad \text{pour } z \neq 3i.$$

**a)** Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(\mathbb{R})$.

**b)** Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(i\mathbb{R})$.

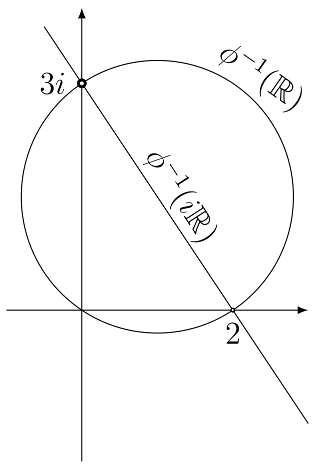
*Indication : Dans les deux questions, vous pouvez déterminer les couples de réels $(x, y)$ tels que $z = x + iy$ soit dans l'ensemble recherché.*

**Solution :** Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ (comme suggéré dans l'indication), alors

$$\phi(z) = \frac{x+iy-2}{i(x+iy)+3} = \frac{(x-2+iy)(3-y-ix)}{x^2+(3-y)^2} = \frac{(3x+2y-6)+i\big(x(2-x)+y(3-y)\big)}{x^2+(3-y)^2}.$$

**a)** Comme le $x^2 + (3-y)^2$ est réel, nous avons $\phi(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\big(x(2-x)+y(3-y)\big) = 0 \iff (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 1^2 + \frac{3}{2}^2 = \frac{13}{4}$ et $(x, y) \neq (0, 3)$. Ainsi on trouve que $\phi^{-1}(\mathbb{R})$ est le cercle de centre $(1, \frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ($\approx 1,8$) privé du point d'affixe $3i$.

**b)** Comme le $x^2 + (3-y)^2$ est réel, nous avons $\phi(z) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $(3x + 2y - 6) = 0$ et $(x, y) \neq (0, 3)$. Ainsi on trouve que $\phi^{-1}(i\mathbb{R})$ est la droite d'équation $3x + 2y = 6$ privée du point d'affixe $3i$.



**Exercice 2** (Espaces affines et transformations affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $H_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda \neq 1$. Et pour $\vec{v} \in \vec{E}$, on désigne par $T_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\vec{v}$.

**a)** Déterminer la nature et les paramètres de $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}$.

**b)** Déterminer la nature et les paramètres de $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}$.

**c)** Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine des polynômes de degré 2. Déterminer l'image de $P(X) = X^2 + 2X$ par l'homothétie de centre $\Omega(X) = (X-1)(X+1)$ et de rapport $-2$.

**Solution :**

Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$.

**a)** Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda(M + \vec{v})$. Ainsi $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}(M) = (1-\lambda)(\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v}) + \lambda M = H_{\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v},\lambda}(M)$ est l'homothétie du même rapport $\lambda$ et de centre $\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v}$.

**b)** Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M + \vec{v}$. Ainsi $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)(\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v}) + \lambda M = H_{\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v},\lambda}(M)$ est l'homothétie du même rapport $\lambda$ et de centre $\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v}$.

**c)** $H_{\Omega,-2}(P) = (1+2)\Omega - 2P$, ainsi l'image de $P(X)$ par cette homothétie est le polynôme $3(X-1)(X+1) - 2(X^2+2X) = X^2 - 7X$.

**Exercice 3** (Espaces euclidiens et isométries)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont l'expression dans la base canonique est

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 3, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z).$$

**a)** Montrer que $\phi$ est une application affine.

**b)** Donner la matrice $M_{\vec{\phi}}$ de la partie linéaire de $\phi$.

**c)** Montrer que $\phi$ est une isométrie.

**d)** Déterminer la nature et les paramètres de la partie linéaire $\vec{\phi}$.

**e)** Déterminer la nature et les paramètres de $\phi$.

**Solution :**

**a)** $\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc $\phi$ est une application de $\mathbb{R}^3$ de la forme $X \mapsto AX + B$, et donc d'après le cours c'est une application affine.

**b)** D'après la question précédente $M_{\overrightarrow{\phi}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

**c)** Comme les trois vecteurs colonnes forment une base orthonormée (à vérifier), la matrice $M_{\overrightarrow{\phi}}$ est orthogonale et donc $\phi$ est une isométrie.

**d)** Comme $\det M_{\overrightarrow{\phi}} = 1$, la partie linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une rotation. On trouve facilement que l'ensemble des vecteurs fixes (l'axe de rotation) est $\langle(1,1,1)\rangle$ et que l'angle de rotation $\theta$ vérifie $2\cos(\theta) + 1 = \operatorname{tr} M_{\overrightarrow{\phi}} = -1 \implies \theta = \pi (\operatorname{mod} 2\pi)$. Donc $\overrightarrow{\phi}$ est une symétrie[*] axiale d'axe $\langle(1,1,1)\rangle$.

**e)** On décompose le vecteur $(1,0,0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \langle(1,1,1)\rangle$ et $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \in \langle(1,1,1)\rangle^{\perp}$. D'après le cours

$$T_{\overrightarrow{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}} \circ M_{\overrightarrow{\phi}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

est une symétrie axiale d'axe de direction $\langle(1,1,1)\rangle$. En cherchant ses points fixes qui vérifient $\frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2, 2x - y + 2z - 1, 2x + 2y - z - 1) = (x, y, z)$ on trouve que son axe de symétrie est $(\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle(1,1,1)\rangle$. Pour finir on peut dire, d'après le cours, que comme $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est dans la direction de l'axe de rotation de $T_{\overrightarrow{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}} \circ M_{\overrightarrow{\phi}}$ alors $\phi$ est une symétrie axiale glissée d'axe $(\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle(1,1,1)\rangle$ et de vecteur de translation $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

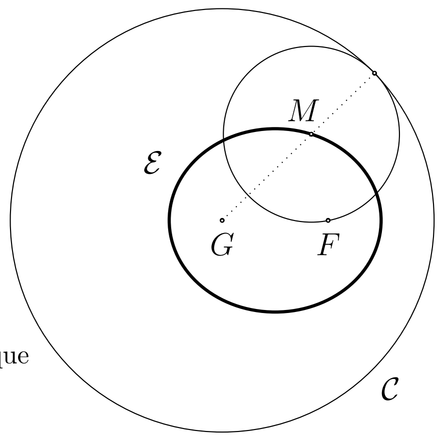
## Exercice 4 (Coniques)

**a)** Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs $O_1$ et $O_2$ et de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ avec $R_1 > R_2$. Donner et justifier la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}_2$ soit tangent intérieurement à $\mathcal{C}_1$.

Soient $F$ et $G$ deux points du plan euclidien, et $\mathcal{C}$ un cercle de centre $G$ et de rayon $R > d(F, G)$.

**b)** On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des centres $\Omega$ des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par $G$. Déterminer et dessiner l'ensemble $\mathcal{S}$.

**c)** On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des centres $M$ des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par $F$. Montrer que cet ensemble est une ellipse, appelée ellipse de cercle directeur $\mathcal{C}$ et de foyer $F$, dont on précisera les paramètres.



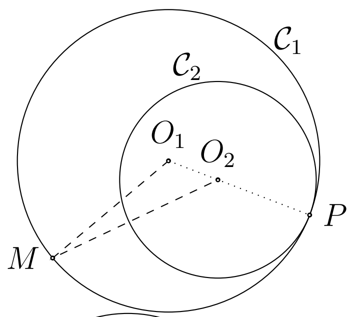

*. Pour dire que $\overrightarrow{\phi}$ est une symétrie, on aurait pu également utiliser le fait que $M_{\overrightarrow{\phi}}$ est symétrique.

**d)** Décrire et indiquer sur une figure les points de l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{E}$.

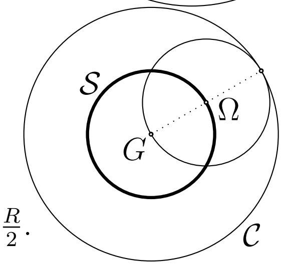
**e)** Est-ce que toute ellipse est l'ellipse d'un certain cercle directeur $\mathcal{C}$ et d'un certain foyer $F$ ?

**Solution :**

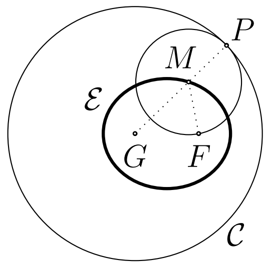
On note $C(M, r)$ le cercle de centre $M$ et de rayon $r$.



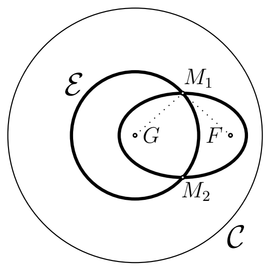

**a)** Pour un point $M \in \mathcal{C}_1$, par l'inégalité triangulaire, on a $d(O_2, M) \geq d(O_1, M) - d(O_1, O_2)$, avec égalité seulement pour $M \equiv P$ tel que $O_2 \in [O_1, P]$ †. Ainsi $\mathcal{C}_1$ est extérieur à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{C}_1, d(O_2, M) \geq R_2 \iff R_1 - d(O_1, O_2) \geq R_2 \iff d(O_1, O_2) \leq R_1 - R_2$. Et les deux cercles se touchent (en $P$) si et seulement si cette inégalité est une égalité.




**b)** Le cercle $C(\Omega, r)$ touche intérieurement $\mathcal{C}$, d'après la question précédente, si et seulement si $d(G, \Omega) = R - r$. Et $C(\Omega, r)$ passe par $G$ si et seulement si $d(G, \Omega) = r$. Ainsi on trouve $\Omega \in \mathcal{S} \iff d(G, \Omega) = \frac{R}{2}$, autrement dit $\mathcal{S}$ est le cercle de centre $G$ et de rayon $\frac{R}{2}$.




**c)** Soit $P \in \mathcal{C}$ le point de tangence entre un cercle $C(M, r)$ qui passe par $F$ et qui touche $\mathcal{C}$. Nous avons $d(M, P) = d(M, F) = r$ et $d(G, M) = R - r$, donc $d(G, M) + d(M, F) = R$. Ainsi $M \in \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyers $F$ et $G$ et «longueur de la corde» $2a = R$.
Réciproquement si $M \in \mathcal{E}$ alors le cercle $C(M, r)$ avec $r = d(M, F)$ touche intérieurement $\mathcal{C}$ car $d(G, M) = R - r$.
On trouve les autres paramètres de l'ellipse $c = d(F, G)/2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - d(F, G)^2}$, et finalement $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{d(F,G)}{R}$.
*Note : la question précédente correspond au cas particulier $F \equiv G$, où $a = b = \frac{R}{2}$ et $\varepsilon = 0$.*




**d)** Soit $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{E}$, alors $d(F, M) = R - d(G, M) = R - R/2 = R/2 = d(G, M)$. Donc $M$ est à l'un des deux points équidistants à $R/2$ de $F$ et $G$.

**e)** La réponse est «oui» car étant donnée une ellipse de foyers $F$ et $G$ et de grand rayon $a$, d'après la question (c), elle coïncide avec l'ellipse de foyer $F$ et de cercle directeur $C(G, 2a)$.

---

†. Pour $O_1 \equiv O_2$ les deux cercles ne se touchent pas, et pour $O_1 \not\equiv O_2$ le point $P$ est unique.