TD2 : ESPACES EUCLIDIENS, NOTIONS DE BASE

Questions métriques

Exercice 1 (Perpendiculaire commune)

On se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

a) Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites distinctes de l'espace. Justifier l'existence d'une perpendiculaire commune à ces deux droites. Sous quelles conditions est-elle unique ?

b) Donner des équations de la perpendiculaire commune aux droites $\mathcal{D}_1$ d'équations $\{x + y - z - 1 = 0,\ 2x + y + z = 0\}$ et $\mathcal{D}_2$ déterminée par le point A de coordonnées $(1, 0, 1)$ et le vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de composantes $(1, -1, 0)$.

c) Quelle est la distance entre $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$?

Exercice 2 (Distance pondérée à un ensemble de points)

Soit $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ un système pondéré de n points d'un espace affine euclidien de poids total $\sum_{i=1}^n \lambda_i$ non nul. Pour tout point M on définit la fonction

$$\phi(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\overrightarrow{MA_i}|^2.$$

a) Soit G le barycentre du système pondéré $(A_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, montrer que :

$$\phi(M) = (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)|\overrightarrow{MG}|^2 + \phi(G).$$

b) Discuter des lignes de niveau de la fonction ϕ dans le plan et dans l'espace.

Exercice 3 (L'espace euclidien des matrices)

On se place dans l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices 3×3.

a) Rappeler comment munir $M_3(\mathbb{R})$ d'une structure d'espace euclidien. En donner une base orthonormée.

b) Donner une base orthonormée de l'espace des matrices antisymétriques.

c) Calculer l'orthogonal des matrices antisymétriques.

d) Calculer la distance de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ au sous-espace des matrices diagonales.

Exercice 4 (Théorème de Sylvester-Gallai)

a) Étant donné un nombre fini de points dans un plan affine (euclidien), montrer qu'on a l'alternative suivante :

— soit tous les points sont alignés,

— soit il existe une droite qui contient exactement deux points de l'ensemble.

Indication : Considérer un couple $(P, \mathcal{D})$, où $\mathcal{D}$ est une droite contenant au moins deux points de l'ensemble et $P \notin \mathcal{D}$ est un point de l'ensemble, tel que la distance $\mathrm{d}(P, \mathcal{D})$ est minimale.

b) Est-ce que la question précédente reste vraie si les points sont dans un espace de dimension quelconque ?

c) Est-ce que la première question reste vraie pour un nombre infini de points ?

Convexes

Exercice 5 (Convexes euclidiens)

Soient $\mathcal{C}$ un convexe fermé non vide d'un espace euclidien et $P \notin \mathcal{C}$ un point de cet espace.

a) Montrer qu'il existe un unique point $Q \in \mathcal{C}$ tel que $d(P, Q) = d(P, \mathcal{C})$.
On dit que Q est la projection de P sur $\mathcal{C}$.

b) Montrer que l'hyperplan $\mathcal{H}$ passant par Q et orthogonal à $\overrightarrow{QP}$ est un *plan de support*, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ rencontre $\mathcal{C}$, mais pas son intérieur.

c) Montrer que tout convexe fermé peut s'écrire comme l'intersection de demi-espaces affines.

d) Est-ce que la question précédente reste vraie si on se place dans un espace affine de dimension finie, plutôt que dans un espace euclidien ?

Exercice 6 (Séparation de convexes)

Étant donnés deux convexes compacts non vides disjoints dans un espace affine de dimension finie, montrer qu'il existe un hyperplan qui les sépare strictement (c'est-à-dire qu'il ne les rencontre pas et que les deux convexes ne sont pas dans le même demi-espace délimité par cet hyperplan).

Isométries

Exercice 7 (Isométries du triangle)

a) Déterminer le groupe des isométries d'un triangle dans le plan [1], la discussion sera menée en fonction des propriétés métriques du triangle.

b) Même question avec un quadrilatère.

Exercice 8 (Isométries du tétraèdre)

Montrer que le groupe des isométries affines qui préserve un tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$, le groupe de permutations de 4 points.

Exercice 9 (Étude d'isométries du plan)

On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne standard. Soient les applications linéaires suivantes :

$$f_1(x,y) = (x+3y+1, -3x+y) \qquad f_2(x,y) = \frac{1}{\sqrt{5}}(x-2y+1, 2x+y-1)$$

$$f_3(x,y) = \frac{1}{5}(3x+4y-1, 4x-3y+2) \qquad f_4(x,y) = (x+3, y)$$

$$f_5(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y+\sqrt{2}, -x-y-2+\sqrt{2}) \qquad f_6(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, x+y)$$

a) Lesquelles de ces applications sont des isométries ?

b) Lesquelles des isométries sont directes ?

c) Pour chacune des isométries déterminer sa nature et ses paramètres ?

d) Décomposer ces isométries en produit de réflexions ?

Exercice 10 (Étude d'isométries de l'espace)

a) Soient R et T une rotation et une translation de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nature de $T \circ R$?

b) Soit l'isométrie $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.

c) On considère la même matrice R. Décrire la nature et les paramètres de l'application $X \mapsto RX + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) Soit l'isométrie $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Décrire la nature et les paramètres de cette isométrie.

e) Quelle est la composée de trois symétries de plans parallèles de $\mathbb{R}^3$?

1. Il s'agit des isométries qui préservent l'ensemble des sommets du triangle.

Exercice 11 (Capes 2007, 2^{e} épreuve)

Partie V. GROUPES DIÉDRAUX

1. Soit E un plan affine euclidien orienté. Soit $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle groupe diédral d'ordre $2p$, noté D_{2p}, le groupe des isométries laissant invariant un polygone régulier

$$\mathcal{P}_p = \{M_0, \ldots, M_{p-1}\}$$

à p sommets, parcourus dans le sens direct. On pose $M_p = M_0$.

a) Montrer que le sous-groupe C_p de D_p constitué des isométries directes est un groupe cyclique d'ordre p engendré par la rotation ρ de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{p}$, où O est le centre du polygone $\mathcal{P}_p$.

b) Préciser une symétrie orthogonale σ laissant le polygone $\mathcal{P}_p$ invariant.

c) Montrer que

$$D_{2p} = \left\{\rho^i \circ \sigma^j \,;\, i \in \{1, \ldots, p-1\} \text{ et } j \in \{0, 1\}\right\}$$

et en déduire que D_{2p} est un groupe d'ordre $2p$.

d) Soit $k \in \{1, \ldots, p-1\}$. Montrer que $\sigma \circ \rho^k \circ \sigma = \rho^{p-k}$.

Géométrie projective sans le dire

Exercice 12 (points cocycliques et le théorème de Ptolémée)

On se donne 4 points distincts A, B, C et D du plan complexe d'affixes a, b, c et d respectivement.

a) Montrer que l'on a toujours

$$|AC|.|BD| \leq |AB|.|CD| + |AD|.|BC|$$

avec égalité si et seulement s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $(b-a)(d-c) = \lambda(d-a)(c-b)$.

b) Déduire de la question précédente que le cas d'égalité est équivalent à

$$\arg(\frac{b-a}{d-a}) - \arg(\frac{b-c}{d-c}) = \pm\pi.$$

c) Montrer le théorème de Ptolémée :

Un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle si et seulement si le produit des longueurs de ses diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.

Exercice 13 (Birapports)

Soient 4 points du plan complexe avec affixes a, b, c, d distincts deux à deux. On définit leur birapport comme étant la quantité :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{b-c} \cdot \frac{b-d}{a-d} \in \mathbb{C}.$$

a) Montrer que si 4 points sont alignés alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?

b) Montrer que si 4 points sont cocycliques alors leur birapport est un nombre réel. Dans quel cas ce birapport est positif ?

c) Montrer que le birapport de 4 points est réel si et seulement si les 4 points sont alignés ou cocycliques.

d) Prouver que si 4 points d'affixes non nulles sont alignés alors leurs images par $1/\overline{z}$ sont alignées ou cocycliques.

e) Montrer que les homothéties de rapport non nul, les rotations et les translations préservent les birapports, et que les symétries les transforment en leurs conjugués.

f) Montrer que les points d'affixes $-2+6i$, $1+7i$, $4+6i$, $6+2i$ sont cocycliques.

Exercice 14 (Inversions)

Une inversion $i(\Omega, r)$ de centre Ω et de rapport $r \in \mathbb{R}_+^*$ est une application du plan P privé de Ω dans P qui à tout point M associe le point M' tel que

— M' soit sur la droite ΩM,
— $\overline{\Omega M}.\overline{\Omega M'} = r^2$.

a) Déterminer l'image de $i(\Omega, r)$.

b) Montrer que l'inversion est une involution.

c) En identifiant le plan P avec $\mathbb{C}$, donner l'expression analytique de l'inversion $i(0, 1)$, puis, plus généralement, de $i(\omega, r)$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que chaque point du cercle de centre Ω et de rayon r est invariant par l'inversion.

e) Montrer qu'une inversion transforme un birapport en son conjugué.

f) Montrer que l'inversion préserve les droites qui passent par Ω.

g) Montrer qu'elle envoie une droite qui ne passe par Ω sur un cercle qui passe par Ω.

h) Montrer aussi qu'elle envoie tout cercle qui ne passe pas par Ω sur un cercle qui ne passe pas par Ω.

Exercice 15 (Homographies)

Une homographie est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec a, b, c, d complexes, tels que $ad - bc \neq 0$.

a) Montrer que toute homographie est la composée de translations, d'homothéties et au plus d'une inversion et d'une réflexion.

b) Montrer que toute homographie envoie droites ou cercles sur droites ou cercles.

c) Montrer que les homographies forment un groupe.

Exercice 16

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents intérieurement en O. On considère une famille de cercles deux à deux tangents entre eux et tangents à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Montrer que les points de contact de ces cercles entre eux sont situés sur un même cercle tangent en O aux deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.