M53 - Partie 1

septembre 2016

Le plan réel

- Un ensemble $\mathcal{P}$ est un *plan* s'il est isomorphe à $\mathbb{R}^2$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont appelés des *points* ou des *vecteurs* en fonction du contexte.
- Si on fixe un isomorphisme entre un plan $\mathcal{P}$ et $\mathbb{R}^2$, à tout point (vecteur) $a \in \mathcal{P}$ on fait correspondre un couple de nombres (x, y) appelé *coordonnées (cartésiennes)* de a.
- Ainsi toute notion de $\mathbb{R}^2$ peut être « transportée » à $\mathcal{P}$: droites, cercles, distances, produit scalaire, angles, ...
- L'application $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ est une surjection de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi la donnée d'un couple (ρ, θ), appelé *coordonnées polaires*, détermine un unique point de $\mathbb{R}^2$ (et ainsi éventuellement de $\mathcal{P}$).

Les droites de $\mathbb{R}^2$

- Une droite (affine) de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble défini par une équation de la forme $ax + by = d$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$.
- Une telle droite est vectorielle ssi $d = 0$.
- Une droite n'a pas une équation unique : toutes les équations qui définissent la même droite que $ax + by = d$ sont de la forme $\lambda ax + \lambda by = \lambda d$ avec $\lambda \neq 0$.
- Le vecteur (a, b) est normal à la droite définie par $ax + by = d$.
- On dit que l'équation $ax + by = d$ est *normalisée* si $\|(a, b)\| = 1$. La droite définie par une telle équation normalisée est à distance $|d|$ de 0.
- Deux droites définies par $a_1 x + b_1 y = d_1$ et $a_2 x + b_2 y = d_2$ sont parallèles ssi les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont colinéaires.
- Toutes les droites parallèles à une droite $ax + by = d$ admettent une équation de la forme $ax + by = \delta$ $(\delta \in \mathbb{R})$.

Le plan complexe

- Comme $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^2$ on peut le considérer comme un plan (appelé *le plan complexe*).
- Ainsi à tout point (vecteur) de $\mathbb{R}^2$ on peut faire correspondre un nombre complexe appelé son *affixe*.
- La formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ nous permet d'identifier les coordonnées polaires (ρ, θ) d'un point avec le module et l'argument de son affixe.
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ d'affixes respectives z_1 et z_2 s'écrit

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = \frac{z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2}{2}.$$

- Une grande partie des opérations algébriques sur $\mathbb{C}$ ont une interprétation géométrique.

La définition d'un espace affine

Définition (heuristique)

« Un espace affine est un espace vectoriel dont on a oublié l'origine. »

La définition d'un espace affine

Définition

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel *(si non précisé, sur* $\mathbb{R}$*)*.
Un ensemble (non vide) $\mathcal{E}$ est muni de la structure d'espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$ par la donnée d'une application

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (A, B) &\mapsto \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

qui satisfait les deux conditions :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ *(relation de Chasles)*
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}, \exists! B \in \mathcal{E}$ t.q. $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ $(B = A + \vec{v})$

La dimension d'un espace affine

Définition

L'espace affine $\mathcal{E}$ est de dimension n si sa direction, l'espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$, est de dimension n.

Les espaces vectoriels

Tout espace vectoriel $\vec{\mathcal{E}}$ peut être muni naturellement d'une structure d'espace affine, avec direction lui-même, via l'application :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \vec{\mathcal{E}} \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\mapsto \overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} \end{aligned}$$

Convention

Dans la suite, tous les espaces vectoriels vont être considérés munis de cette structure naturelle d'espace affine.

Les droites (sous-espaces) affines

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ est un espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$, via l'application

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$
$$(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB} = B - A$$

Question

Comment peut-on généraliser cet exemple ?

Les solutions des équations différentiels linéaires

L'ensemble des solutions S de l'équation différentielle $y' + y = sin(x)$ est un espace affine avec direction S^*, l'ensemble des solutions de l'équation homogène $(y' + y = 0)$ via :

$$S \times S \longrightarrow S^*$$
$$(f_1, f_2) \mapsto f_2 - f_1$$

Question

Comment peut-on généraliser cet exemple ?

Vectorialisé d'un espace affine

En fixant un point Ω d'un espace affine $\mathcal{E}$, on peut définir sur celui-ci une structure d'espace vectoriel via la bijection :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \vec{\mathcal{E}}$$
$$B \mapsto \overrightarrow{\Omega B}$$

Cet espace vectoriel est noté $\mathcal{E}_\Omega$ et est isomorphe (par définition) à $\vec{\mathcal{E}}$.

1. L'origine de $\mathcal{E}_\Omega$ est le point Ω.
2. Avec l'écriture $\Omega + \vec{v}$, les opérations sont :
   - $(\Omega + \vec{v}) + (\Omega + \vec{w}) = (\Omega + \vec{v} + \vec{w})$.
   - $\lambda(\Omega + \vec{v}) = \Omega + \lambda \vec{v}$.

Produit d'espaces affines

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines, sur le même corps, de directions respectives $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.
On définit la structure d'espace affine *produit* sur $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{F}}$ par :

$$\overrightarrow{(A, B)(C, D)} := (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}).$$

Propriétés calculatoires

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathbb{K}$-espace affine de direction $\vec{\mathcal{E}}$.

1. $A \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ et $A + \vec{0} = A$.
2. $A, B \in \mathcal{E} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
3. $A + \vec{v} = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall(\exists) C \in \mathcal{E}, \overrightarrow{CA} + \vec{v} = \overrightarrow{CB}$.
4. $(A + \vec{v}) + \vec{w} = A + (\vec{v} + \vec{w})$ *($\vec{\mathcal{E}}$ agit sur $\mathcal{E}$).*
5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ *(ABCD est un parallélogramme).*
6. $\overrightarrow{(A + \vec{v})(B + \vec{w})} = \overrightarrow{AB} - \vec{v} + \vec{w}$.
7. Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$
   - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \vec{\mathcal{E}}$ est bien définie *($\overrightarrow{AB} = B - A$).*
   - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i \in \mathcal{E}$ est bien définie.
   - Si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \notin \{0, 1\}$ alors $\sum_{i=1}^k \lambda_i A_i$ « n'est pas bien définie ».

Définition du barycentre

Définition-Proposition

Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$ et $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^k \mu_i \neq 0$, alors il existe un unique point G qui satisfait une des conditions équivalentes :

1. $G = \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^k \mu_i} A_i$.
2. $\forall(\exists) M \in \mathcal{E}, \ (\sum_{i=1}^k \mu_i)\overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{MA_i}$.
3. $\sum_{i=1}^k \mu_i \overrightarrow{GA_i} = 0$.

Le point G est le barycentre des des points pondérées $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$, et les $\{\mu_i\}$ sont appelés les poids.

Définition

Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}$, leur isobarycentre est le barycentre de ces points pondérés du même poids non nul *(qui peut être pris égal à $\frac{1}{k}$, ou à 1).*

Propriétés des barycentres

1. Si on remplace les poids μ_i par $\lambda \mu_i$ pour $\lambda \neq 0$, le barycentre ne change pas.
2. Si on rajoute un point pondéré par un poids nul, le barycentre ne change pas.
3. Soit $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ un espace affine produit.
   Le barycentre des points pondérés $\{\big((A_1, B_1), \mu_1\big), \dots, \big((A_k, B_k), \mu_k\big)\}$ est $G = (G_A, G_B)$,
   où G_A est le barycentre de $\{(A_1, \mu_1), \dots, (A_k, \mu_k)\}$ dans $\mathcal{E}$,
   et G_B est le barycentre de $\{(B_1, \mu_1), \dots, (B_k, \mu_k)\}$ dans $\mathcal{F}$.

Associativité du barycentre

Soient $\{A_i\}_{i \in I}$ des points de $\mathcal{E}$ et $\{\mu_i\}_{i \in I}$ des scalaires de somme non nulle, indexés par un ensemble I.
Soit une partition $I = J_1 \sqcup \cdots \sqcup J_r$, telle que $\nu_k := \sum_{i \in J_k} \mu_i \neq 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, r\}$.
On note G_k le barycentre de $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in J_k}$.

Proposition

Le barycentre G des points pondérés $\{(A_i, \mu_i)\}_{i \in I}$ est aussi le barycentre des $\{(G_k, \nu_k)\}_{k \in \{1, \dots, r\}}$.

Repère cartésien

Définition

Un repère cartésien d'un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension n est la donnée $\mathcal{C} = (\Omega, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ d'un point Ω de $\mathcal{E}$, *l'origine du repère*, et d'une base $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ de la direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Définition

Soit $\mathcal{C} = (\Omega, \vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$ et M un point de $\mathcal{E}$. On dit que $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{C}}$ sont les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathcal{C}$ si ce sont les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M}$ dans la base $(\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n})$ de la direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Autrement dit $M = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{C}}$ si et seulement si $M = \Omega + \sum_{i=1}^n x_i \vec{v_i}$.

Repère affine

Définition

On dit que le $(n+1)$-uplet $(A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si pour tout point M de $\mathcal{E}$ il existe un unique $(n+1)$-uplet de poids $(\mu_0, \dots, \mu_n)$, avec $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ et $M = \sum_{i=1}^n \mu_i A_i$.

Définition

Soit $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$. On dit que $[\mu_0, \dots, \mu_n]_{\mathcal{A}}$ sont les coordonnées barycentriques dans le repère $\mathcal{A}$ d'un point M de $\mathcal{E}$ si $\sum_{i=0}^n \mu_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \mu_i A_i$.

Remarque

Si $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$, alors toute permutation $\mathcal{A} = (A_{\sigma(0)}, \dots, A_{\sigma(n)})$ l'est aussi.

Relations entre repères cartésiens et affines

Proposition

Le $(n+1)$-uplet $\mathcal{A} = (A_0, \dots, A_n)$ est un repère affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{C} = (A_0, \overrightarrow{A_0A_1} \dots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.
De plus si $M = (x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{C}}$ et $M = [\mu_0, \dots, \mu_n]_{\mathcal{A}}$ alors la relation entre ces deux systèmes de coordonnées est :
$\mu_i = x_i, \forall i = 1, \dots, n$ *et* $\mu_0 = 1 - \sum_{i=1}^n x_i$.

Définition d'un sous-espace affine

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

Définition-Proposition

Un sous-ensemble non vide $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est dit sous-espace affine s'il satisfait une des conditions équivalentes :

1. *Il existe un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\Omega \in \mathcal{E}$ tels que $\mathcal{F} = \Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$.*
2. *$\exists(\forall)\Omega \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}_\Omega$.*
3. *$\mathcal{F}$ est stable par barycentres.*

Un sous-espace affine $\mathcal{F} = \Omega + \overrightarrow{\mathcal{F}}$ est un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$, via la restriction de l'application $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$.

Sous-espaces affines et dimensions

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n.

1. Les sous-espaces affines de dimension 0 sont les points $\{M\}$ de $\mathcal{E}$.
2. Les sous-espaces affines de dimension 1 sont appelés des droites affines.
3. Les sous-espaces affines de dimension 2 sont appelés des plans affines.
4. Les sous-espaces affines de dimension $n-1$ sont appelés des hyperplans affines.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{E}$. On note AB ou $\langle A, B\rangle$ la droite affine qui passe par A et B.

Les sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{G}}$ deux espaces vectoriels, et $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{G}})$ une application linéaire.

Proposition

Pour tout $\vec{v} \in \operatorname{Im} \vec{\phi} \subset \vec{\mathcal{G}}$, l'image réciproque $\vec{\phi}^{-1}(\vec{v})$ est un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$ de direction $\operatorname{Ker} \vec{\phi}$.

1. En particulier, en prenant $\vec{\phi}(x, y) = x + y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $\vec{v} = 1$, on retrouve le sous-espace affine $\mathcal{E} = \{(x, y) \mid x + y = 1\}$ de direction $\vec{\mathcal{E}} = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions d'un système linéaire $AX = B$ est vide ou est un sous-espace affine de direction l'ensemble $\mathcal{S}^*$ des solutions homogènes $AX = 0$. Et $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}'$, où X_0 est une solution particulière.

Les sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel et $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\vec{\mathcal{E}}$.

1. $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel ssi $0 \in \mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est un hyperplan affine ssi il existe une forme linéaire non nulle $\vec{\phi} \in \vec{\mathcal{E}}^*$ et $a \in \mathbb{R}$, tels que $\mathcal{F} = \vec{\phi}^{-1}(a)$.
3. Tous les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles de solutions de systèmes linéaires.

Parallélisme

Définition

On dit que deux (plusieurs) sous-espaces affines d'un même espace affine sont parallèles s'ils ont la même direction.*(C'est une relation d'équivalence.)*

Attention : « disjoints » $\not\Rightarrow$ « parallèles ».

Proposition

1. *Deux sous-espaces parallèles sont disjoints ou confondus.*
2. *Par tout point d'un espace affine, il passe une unique droite (sous-espace) parallèle à une droite (sous-espace) donnée.*

Intersection de sous-espaces affines

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est :

- *vide, ou*
- *un sous-espace affine de direction $\vec{\mathcal{F}} \cap \vec{\mathcal{G}}$.*

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est vide si et seulement si $\exists(\forall) A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$,

$$\overrightarrow{AB} \notin \vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}.$$

Sous-espace engendré

Définition-Proposition

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble non vide d'un espace affine $\mathcal{E}$. Le sous-espace affine $\langle\mathcal{A}\rangle$ engendré par $\mathcal{A}$ est défini par une des conditions équivalentes :

1. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{A}$.*
2. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est l'intersection de tous les sous-espaces affines contenant $\mathcal{A}$.*
3. *$\langle\mathcal{A}\rangle$ est l'ensemble des barycentres de points de $\mathcal{A}$.*
4. *$\forall(\exists)\Omega \in \mathcal{A}$, $\langle\mathcal{A}\rangle$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{E}_\Omega$.*

Somme de sous-espaces affines

Proposition

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines du même espace affine, et $\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle$ le sous-espace affine engendré par $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$.

1. *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$, alors $\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}$, et*
$$\dim\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle = \dim\left(\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}\right).$$
2. *Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \emptyset$, alors $\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle$ est de direction $\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}} + \vec{D}$, où $\vec{D}$ est une droite engendrée par $\overrightarrow{AB}$ avec $A \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{G}$, et*
$$\dim\langle\mathcal{F},\mathcal{G}\rangle = \dim\left(\vec{\mathcal{F}} + \vec{\mathcal{G}}\right) + 1.$$

Familles affinement libres et génératrices

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.

Définition

Soient $\{A_0, \ldots, A_k\}$ des points de $\mathcal{F}$. On dit que cette famille est affinement génératrice pour $\mathcal{F}$ si $\langle A_0, \ldots, A_k\rangle = \mathcal{F}$.

Définition

Soient $(k+1)$ points $\{A_0, \ldots, A_k\}$ de $\mathcal{E}$. On dit que cette famille est affinement libre si $\dim\langle A_0, \ldots, A_k\rangle = k$.

Caractérisation d'un repère

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine $\mathcal{E}$.

Proposition

Le $(k+1)$-uplet $(A_0, \dots, A_k)$ est un repère affine pour $\mathcal{F}$ s'il satisfait une des trois conditions équivalentes :

1. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est affinement libre et génératrice pour* $\mathcal{F}$.
2. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est une famille génératrice minimale pour* $\mathcal{F}$.
3. $\{A_0, \dots, A_k\}$ *est une famille libre maximale de* $\mathcal{F}$.

Définition d'une application affine

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines de directions $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$.

Définition-Proposition

Une application $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est dite affine si elle satisfait une des trois conditions équivalentes :

1. $\exists(\forall)\Omega \in \mathcal{E}$, $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{E}_\Omega, \mathcal{F}_{\phi(\Omega)})$.
2. $\exists \vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ *telle que* $\forall A, B \in \mathcal{E}$,
   $$\vec{\phi}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\phi(A)\phi(B)} \Leftrightarrow \phi(A + \vec{v}) = \phi(A) + \vec{\phi}(\vec{v}).$$
   ($\vec{\phi}$ est unique et est appelée partie linéaire de ϕ.)
3. ϕ *préserve les barycentres, c.-à.-d. pour* $\sum_{i=0}^k \mu_i = 1$
   $$\phi(\sum_{i=0}^k \mu_i A_i) = \sum_{i=0}^k \mu_i \phi(A_i).$$

L'ensemble des applications affines est noté $\mathrm{Aff}\,(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Exemples d'applications affines

1. Les applications constantes sont affines, de partie vectorielle 0.
2. Les applications affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont de la forme $x \mapsto ax + b$.
3. Les applications affines de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ sont de la forme $X \mapsto AX + B$, où $M \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B \in \mathbb{R}^m$.
4. Les applications affines de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, sont de la forme $z \mapsto az + b\bar{z} + c$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$.
5. Les translations $T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$ (où $\vec{v} \in \vec{E}$) sont des automorphismes affines de E.
6. Soient $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{F}}$ deux espaces vectoriels. Les applications affines de $\mathrm{Aff}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ sont toutes de la forme $\vec{x} \mapsto \vec{\phi}(\vec{x}) + \vec{v} = T_{\vec{v}} \circ \vec{\phi}(\vec{x})$, où $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{F}})$ est linéaire.

Premières propriétés

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $\psi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, alors $\psi \circ \phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ et a pour partie linéaire $\vec{\psi} \circ \vec{\phi}$.

Proposition

Soit $\phi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ et $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

1. $\phi(\mathcal{A})$ *est un s.e.a. de $\mathcal{F}$ de direction* $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{A}})$.
2. $\phi^{-1}(\mathcal{B})$ *est vide ou un s.e.a. de $\mathcal{E}$ de direction* $\vec{\phi}^{-1}(\vec{\mathcal{B}})$.

Ainsi les images de trois points alignés sont alignées.

Proposition

Pour donner une application affine il suffit de donner :

1. *la partie linéaire et l'image d'un point,*
2. *ou l'image d'un repère.*

Les translations (définition)

Définition-Proposition

Une *translation* *est une application affine* $T \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ *qui satisfait une des conditions équivalentes :*

1. *elle est de la forme* $T = T_{\vec{v}} : M \mapsto M + \vec{v}$, *où* $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$,
2. *sa partie linéaire est* $\vec{\phi} = \mathrm{Id} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}})$.

Les translations (propriétés)

1. Une translation qui fixe un point est l'identité.
2. $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$: les translations forment un groupe abélien isomorphe à $\vec{\mathcal{E}}$.
3. Les translations de $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto z + c$, pour $c \in \mathbb{C}$.
4. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de $\mathcal{E}$ et $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}$, alors $\phi \circ T_{\vec{v}} \circ \phi^{-1} = T_{\vec{\phi}(\vec{v})}$.

Homothéties affines (définition)

Définition-Proposition

Une *homothétie affine de rapport* λ *et de centre* Ω *est une application affine de* $H \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ *qui satisfait une des conditions équivalentes :*

- *H est une homothétie vectorielle de* $\mathcal{E}_\Omega$ *de rapport* λ ;
- *H fixe* Ω *et* $\vec{H} = \lambda \mathrm{Id} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}})$;
- *elle est de la forme* $H = H_{\Omega,\lambda} : M \mapsto \lambda M + (1-\lambda)\Omega$.

Homothéties affines (propriétés)

1. Une homothétie qui fixe deux points est l'identité.
2. Si $\vec{H} = \lambda \mathrm{Id}$ avec $\lambda \neq 1$, alors H est une homothétie affine.
3. La composée de deux homothéties, l'une de rapport λ et l'autre de rapport μ, est :
   - Une homothétie de rapport $\lambda\mu$, si $\lambda\mu \neq 1$.
   - Une translation, si $\lambda\mu = 1$.
4. Les homothéties $h_{\omega,\lambda}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ sont de la forme $z \mapsto \lambda z + (1-\lambda)w$, pour $\lambda \in \mathbb{R}, \omega \in \mathbb{C}$.
5. Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ un automorphisme affine de $\mathcal{E}$ et $h_{\Omega,\lambda}$ une homothétie de centre Ω et de rapport λ, alors $\phi \circ h_{\Omega,\lambda} \circ \phi^{-1} = h_{\phi(\Omega),\lambda}$.

Les points fixes

Proposition

Soit $\dim \mathcal{E} < \infty$, *alors* $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$ *possède un unique point fixe ssi* $\vec{\phi}$ *possède un unique point fixe (forcément* $0 \in \vec{\mathcal{E}}$*), autrement dit, ssi* $1 \notin Sp(\vec{\phi})$.

Proposition

Soit $\vec{\mathcal{E}}_1 \neq 0$ *l'ensemble de points fixes de* $\vec{\phi}$, *alors*

1. *si* ϕ *possède un point fixe* Ω, *l'ensemble de points fixes de* ϕ *est* $\Omega + \vec{\mathcal{E}}_1$ *;*
2. *si* ϕ *n'a pas de points fixes, et*
$$\mathsf{Ker}(\vec{\phi} - \mathrm{Id}) \oplus \mathsf{Im}(\vec{\phi} - \mathrm{Id}) = \vec{\mathcal{E}}$$
alors il existe un unique $\vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}_1$ *tel que* $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ *et* $T_{\vec{v}} \circ \phi$ *possède (au moins) un point fixe.*

Le groupe affine

Proposition

Soit $\phi \in \mathsf{Aff}(\mathcal{E})$, *alors* ϕ *est une bijection ssi* $\vec{\phi}$ *l'est, et dans ce cas* ϕ^{-1} *est une application affine avec partie linéaire* $\left(\vec{\phi}\right)^{-1}$.

Proposition

Les bijections affines de $\mathcal{E}$ *dans lui-même forment un groupe, le groupe affine* $GA(\mathcal{E})$. *Et l'application* $\phi \mapsto \vec{\phi}$ *est un morphisme surjectif de groupes* $GA(\mathcal{E}) \twoheadrightarrow GL(\vec{\mathcal{E}})$, *de noyau le sous-groupe abélien des translations de* $\mathcal{E}$.

Définition d'un convexe

Définition

Soient A et B deux points d'un espace affine. On note $[AB] = \{\lambda A + (1-\lambda)B \,|\, \lambda \in [0,1]\}$ l'ensemble des barycentres à poids positifs, appelé *le segment* $[AB]$.

Définition

On dit que $\mathcal{C}$ est un ensemble *convexe*, si pour tous deux points $A, B \in \mathcal{C}$ le segment $[AB]$ est entièrement contenu dans $\mathcal{C}$.

Proposition

Un ensemble $\mathcal{C}$ *est convexe ssi tout barycentre de points de* $\mathcal{C}$ *à poids* ***positifs*** *est dans* $\mathcal{C}$.

Propriétés

1. L'intersection d'ensembles convexes est convexe.
2. L'ensemble vide et les ensembles à un point sont convexes.
3. Un sous-espace affine est convexe.
4. Les demi-espaces (ouverts, fermés) sont convexes.
5. L'image d'un convexe par une application affine est convexe.
6. L'image réciproque d'un convexe par une application affine est convexe.
7. Une fonction réelle est convexe ssi la partie au-dessus du graphe est convexe.

Enveloppe convexe

Définition-Proposition

Soit $\mathcal{A}$ une partie d'un espace affine. L'enveloppe convexe, noté $[\mathcal{A}]$, est :

1. *Le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.*
2. *L'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$.*
3. *L'ensemble de barycentres de points de $\mathcal{A}$ de poids positifs.*

Ainsi par exemple le segment $[AB]$ est l'enveloppe convexe de $\{A, B\}$.