

M53 - Partie 2

octobre 2017

Rappels : définition espace vectoriel euclidien

Un espace vectoriel réel $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension finie est dit **euclidien** s'il est muni d'une forme bilinéaire

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{E}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}, \vec{w}) &\mapsto \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

- symétrique : $\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{w} | \vec{v} \rangle$,
- définie : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = 0$,
- positive : $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle \geq 0$.

La structure euclidienne standard sur \mathbb{R}^n est définie par

$$\langle (x_1, \dots, x_n) | (y_1, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Tout espace euclidien est isomorphe à \mathbb{R}^n (avec sa structure standard), via le choix (non canonique) d'une b.o.n.

Rappels : norme euclidienne

1. La **norme euclidienne** de cet espace est :
 $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle}.$
2. Et une formule inverse (*de polarisation*) est :

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \frac{1}{2} (\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{w}\|^2).$$

3. De plus la norme et la produit scalaire sont reliés par
l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

4. On dit que l'**angle** entre \vec{v} et \vec{w} est $\alpha \in [0, \pi]$ si

$$\langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = \cos(\alpha) \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|.$$

Rappels : notations

1. $\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle = 0$.
2. Soit $\vec{\mathcal{F}} \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}^\perp = \{ \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}} \mid \forall \vec{w} \in \vec{\mathcal{F}}, \vec{v} \perp \vec{w} \}.$
3. Soit $\vec{\mathcal{F}}_1, \vec{\mathcal{F}}_2 \subset \vec{\mathcal{E}}$, alors $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1 \subset \vec{\mathcal{F}}_2^\perp$.
4. $\vec{\mathcal{E}}$ est la somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels $\vec{\mathcal{F}}_1$ et $\vec{\mathcal{F}}_2$, noté $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2$, si $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \oplus \vec{\mathcal{F}}_2$ et $\vec{\mathcal{F}}_1 \perp \vec{\mathcal{F}}_2$.
 Nous avons : $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}}_1 \overset{\perp}{\oplus} \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_1^\perp = \vec{\mathcal{F}}_2 \Leftrightarrow \vec{\mathcal{F}}_2^\perp = \vec{\mathcal{F}}_1$.

Définition d'un espace affine euclidien

Définition

Un ensemble \mathcal{E} est **métrique** s'il est muni d'une application **distance**

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \times \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M, N) &\mapsto d(M, N)\end{aligned}$$

- symétrique : $d(M, N) = d(N, M)$,
- séparée : $d(M, N) = 0 \Leftrightarrow M = N$,
- inégalité triangulaire : $d(M, N) + d(N, P) \geq d(M, P)$.

Définition

Un espace affine \mathcal{E} est dit **euclidien** si son espace vectoriel de directions $\vec{\mathcal{E}}$ est muni d'une structure euclidienne.

Et dans ce cas on pose la distance entre deux points

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\|.$$



Distance entre parties

Définition

Soit \mathcal{A} et \mathcal{B} deux parties d'un espace affine euclidien \mathcal{E} . On pose

$$d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf_{(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}} d(M, N).$$

1. Si \mathcal{A} est compact et \mathcal{B} est fermée, les deux non vides, alors il existe un couple de points $(M, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ tel que $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = d(M, N)$.
Et pour \mathcal{A} seulement fermée ?
2. La propriété précédente reste vraie pour \mathcal{A} et \mathcal{B} des sous-espaces affines. De plus $\overline{MN} \perp (\vec{A} + \vec{B})$.
3. Deux hyperplans distincts \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) > 0$. Et pour s.e.a. quelconques ?
4. Deux sous-espaces affines \mathcal{F} et \mathcal{G} de \mathcal{E} sont parallèles ssi $\forall (M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{G}, d(M, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = d(\mathcal{F}, N)$.

Rappels : isométrie vectorielle

Définition-Proposition

L'application linéaire $\vec{\phi}$ est une **isométrie** (dit également **orthogonale**) de $\vec{\mathcal{E}}$ si elle satisfait une des conditions équivalentes

1. $\forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}},$

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|.$$

2. $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathcal{E}},$

$$\langle \vec{\phi}(\vec{v}) | \vec{\phi}(\vec{w}) \rangle = \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle.$$

- 3.

$$\vec{\phi} \circ \vec{\phi}^t = \text{Id} \Leftrightarrow \vec{\phi}^t \circ \vec{\phi} = \text{Id} \Leftrightarrow \vec{\phi}^{-1} = \vec{\phi}^t$$



Rappels : décomposition et spectre des isométries

1. Si une isométrie $\vec{\phi}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ préserve un s.e.v. $\vec{\mathcal{F}}$ (c.-à-d. $\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) \subset \vec{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}) = \vec{\mathcal{F}}$), alors elle préserve aussi son orthogonal,

$$\vec{\phi}(\vec{\mathcal{F}}^\perp) = \vec{\mathcal{F}}^\perp.$$

2. En particulier, si $\vec{\mathcal{F}}$ n'est pas trivial, $\vec{\mathcal{E}}$ se décompose en somme directe orthogonale de deux sous-espaces stables par $\vec{\phi}$: $\vec{\mathcal{E}} = \vec{\mathcal{F}} \oplus \vec{\mathcal{F}}^\perp$.
Si on note $\vec{\phi}_1 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}}$ et $\vec{\phi}_2 = \vec{\phi}|_{\vec{\mathcal{F}}^\perp}$, alors $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ sont orthogonales et

$$\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 \oplus \vec{\phi}_2.$$

3. Si λ est valeur propre (réelle) de $\vec{\phi}$ alors $\lambda = \pm 1$.

Rappels : Groupe des isométries vectorielles

- Le **groupe des isométries** de $\vec{\mathcal{E}}$ est noté $O(\vec{\mathcal{E}})$.
Et on note $O_n = O(\mathbb{R}^n)$.
($O_n = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^t M = I_n\}$.)
 - Soit $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$, alors $\det(\vec{\phi}) = \pm 1$.
 - On note $O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ou $SO(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^+ ou SO_n) l'ensemble des isométries à déterminant 1, dites **directes**, de $\vec{\mathcal{E}}$ (resp. \mathbb{R}^n).
 - De même l'ensemble des isométries à déterminant -1 , dites **indirectes**, est noté $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ (resp. O_n^-).
- ($O^+(\vec{\mathcal{E}})$ est un sous-groupe du groupe compact $O(\vec{\mathcal{E}})$, mais $O^-(\vec{\mathcal{E}})$ n'en est pas un.)



Dimensions 1 et 2

- $O_1 = \{1, -1\}$.
 - $O_2 = O_2^+ \sqcup O_2^-$, où
 - $O_2^+ = \{ \vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$ est le sous-groupe des rotations,
 - $O_2^- = \{ \vec{S}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}$ est l'ensemble des réflexions.
(\vec{S}_α est la symétrie par rapport à la droite d'angle $\alpha/2$.)
- Les règles de composition sont :
- $\vec{R}_\alpha \circ \vec{R}_\beta = \vec{R}_{\alpha+\beta}$ ($\Rightarrow SO_2 \cong \mathbb{S}^1$),
 - $\vec{S}_\alpha \circ \vec{S}_\beta = \vec{R}_{\alpha-\beta}$,
 - $\vec{S}_\alpha \circ \vec{R}_\gamma = \vec{S}_{\alpha-\gamma}$ et $\vec{R}_\gamma \circ \vec{S}_\beta = \vec{S}_{\gamma+\beta}$.
- Remarque : Toute isométrie de \mathbb{R}^2 est le produit d'au plus 2 réflexions.

Les isométries de \mathbb{C} (dimension 2)

En identifiant l'espace euclidien \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} , le produit scalaire s'écrit :

$$\langle z | w \rangle = \frac{\bar{z}w + z\bar{w}}{2}$$

Toute élément de $O(\mathbb{C})$ est de la forme

- $\rho_a : z \mapsto az$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une rotation d'angle $\arg(a)$, ou
- $\sigma_a : z \mapsto a\bar{z}$ avec $|a| = 1$, et dans ce cas c'est une réflexion par rapport à l'axe engendré par \sqrt{a} .

L'identification entre O_2 et $O(\mathbb{C})$ est donnée par :

- $\rho_{e^{i\theta}} = \vec{R}_\theta$,
- $\sigma_{e^{i\theta}} = \vec{S}_\theta$.



Dimension 3

Soit $\vec{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel de dimension 3 et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

- $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme

$$\vec{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\vec{\phi} = \vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$ est la rotation de α autour de l'axe orienté engendré par \vec{w} .

- $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$ ssi il existe une b.o.n $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\vec{\phi}$ est la composée de la rotation $\vec{\rho}_{\vec{w}, \alpha}$ avec la symétrie $\vec{\sigma}_{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$ par rapport au plan engendré par \vec{u} et \vec{v} , et on dit que $\vec{\phi}$ est une **anti-rotation**.

Forme standard des isométries

Proposition

Soit $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, alors il existe une b.o.n. dans laquelle la matrice de $\vec{\phi}$ est sous la forme ($\dim \vec{\mathcal{E}} = 2k + p$)

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos(\alpha_1) & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) \end{matrix}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) \\ \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{matrix}} & & \\ 0 & & & \boxed{1} & \ddots & \\ & & & & \ddots & \boxed{1} \end{bmatrix}$$

Et pour $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$, à la place du dernier 1 il y a un -1 (donc $p > 0$).



Décomposition des isométries en réflexions

Toute symétrie orthogonale par rapport à un sous espace vectoriel est une isométrie, directe si la codimension de cet espace est paire, ou indirecte si la codimension est impaire.

Définition

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan est appelée une **réflexion**.

(Une réflexion est une isométrie indirecte.)

Proposition

Soient $\vec{\mathcal{E}}$ de dimension $\dim \vec{\mathcal{E}} = n$, et $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

Alors $\vec{\phi}$ est le produit de $k(\leq n)$ réflexions : $\vec{\phi} = \rho_1 \circ \dots \circ \rho_k$.

Si k est pair $\vec{\phi} \in O^+(\vec{\mathcal{E}})$, si k est impair $\vec{\phi} \in O^-(\vec{\mathcal{E}})$.



Définition d'une isométrie affine

Définition-Proposition

On dit qu'une application affine $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ est une **isométrie** si une des conditions équivalentes est satisfaite :

- $\forall A, B \in \mathcal{E}, d(\phi(A), \phi(B)) = d(A, B)$;
- $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$.

On note $\text{Iso}(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries de \mathcal{E} .

Ainsi que $\text{Iso}^\pm(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries dont la partie linéaire est dans $O^\pm(\vec{\mathcal{E}})$.



Premières propriétés des isométries

- $\text{Iso}(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(\mathcal{E})$.
- $\text{Iso}^+(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\text{Iso}(\mathcal{E})$.
- Les translations sont des isométries (directes).
- Une homothétie de rapport λ multiplie les distances par $|\lambda|$, et donc n'est isométrie que si c'est l'identité ou une symétrie centrale.
- $\phi \in \text{Aff}(\mathcal{E})$ est dite **symétrie (affine) orthogonale** (resp. **réflexion**) s'il existe $\Omega \in \mathcal{E}$ telle que ϕ est une symétrie (vectorielle) orthogonale (resp. réflexion) dans \mathcal{E}_Ω . Les symétries orthogonales sont des isométries.
- Toute translation est le produit de deux réflexions.

Structure des isométries affines

Lemme

Soit $\vec{\phi} \in O(\vec{\mathcal{E}})$, alors $\vec{\mathcal{E}} = \text{Ker}(\vec{\phi} - \text{Id}) \oplus \text{Im}(\vec{\phi} - \text{Id})$.

Proposition

Soit $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$, alors

- ▶ soit ϕ possède un point fixe Ω , et dans ce cas $\phi \in O(\mathcal{E}_\Omega)$,
- ▶ soit il existe un unique $\vec{v} (\neq 0)$, vecteur fixe de $\vec{\phi}$, tel que $T_{\vec{v}} \circ \phi = \phi \circ T_{\vec{v}}$ possède (au moins) un point fixe.



Dimensions 1 et 2

- ▶ $\phi \in \text{Iso}(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi(x) = \pm x + b$.
(ϕ est la composée d'au plus 2 réflexions.)
- ▶ $\text{Iso}(\mathbb{R}^2) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$.
 - ▶ $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - ▶ $\phi = R_{\Omega, \alpha}$ est la rotation de centre Ω d'angle α , ou
 - ▶ $\phi = T_{\vec{v}}$ est une translation.
 - ▶ $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^2)$ ssi
 - ▶ $\phi = S_{\mathcal{D}}$ est la symétrie par rapport à une droite affine \mathcal{D} , ou
 - ▶ $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{D}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ un vecteur fixe par la symétrie ϕ (c.-à-d. $\vec{\phi} \in \vec{\mathcal{D}}$), et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

(ϕ est la composée d'au plus 3 réflexions.)

Les isométries affines de \mathbb{C}

Rappel : Les applications affines de l'espace euclidien \mathbb{C} sont de la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z} + \gamma$.

$$\text{Iso}(\mathbb{C}) = \text{Iso}^+(\mathbb{C}) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{C})$$

- ▶ $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = az + b$ avec $|a| = 1$.
 - ▶ Si $a \neq 1$, alors ϕ est la rotation de centre $\frac{b}{1-a}$.
 - ▶ Si $a = 1$, alors ϕ est la translation de b .
- ▶ $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{C})$ ssi $\phi(z) = a\bar{z} + b$ avec $|a| = 1$.
 - ▶ Si $a\bar{b}^2 \in \mathbb{R}_-$, alors ϕ est une symétrie d'axe $\sqrt{a}\mathbb{R} + b/2$.
 - ▶ Sinon ϕ est une symétrie glissée.



Dimension 3

$$\text{Iso}(\mathbb{R}^3) = \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3) \sqcup \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3).$$

- ▶ $\phi \in \text{Iso}^+(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - ▶ $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha}$ est la rotation d'angle α autour de l'axe \mathcal{D} , ou bien
 - ▶ $\phi = T_{\vec{v}} \circ R_{\mathcal{D}, \alpha}$, avec $\vec{\mathcal{D}} = \langle \vec{v} \rangle$
 - ▶ si $\alpha = 0$, c.-à-d. $\phi = T_{\vec{v}}$, c'est une translation,
 - ▶ si $\alpha \neq 0$, on dit que ϕ est un vissage d'axe \mathcal{D} et d'angle α .
- ▶ $\phi \in \text{Iso}^-(\mathbb{R}^3)$ ssi
 - ▶ $\phi = R_{\mathcal{D}, \alpha} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\mathcal{D} \perp \mathcal{H}$
 - ▶ si $\alpha = 0$, c.-à-d. $\phi = S_{\mathcal{H}}$, est la symétrie par rapport au plan affine \mathcal{H}
 - ▶ si $\alpha \neq 0$, on dit que ϕ est une anti-rotation.
 - ▶ $\phi = T_{\vec{v}} \circ S_{\mathcal{H}}$ avec $\vec{v} \neq 0$ est un vecteur fixe par la symétrie $\vec{\phi}$, et dans ce cas on dit que ϕ est une symétrie glissée.

(ϕ est la composée d'au plus 4 réflexions.)

Décomposition des isométries en réflexions

Rappel : Une réflexion est une isométrie indirecte.

Proposition

Soient \mathcal{E} un espace affine de dimension n , et $\phi \in \text{Iso}(\mathcal{E})$.
Alors ϕ est le produit de $k(\leq n+1)$ réflexions :

$$\phi = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_k.$$

Si k est pair $\phi \in \text{Iso}^+(\mathcal{E})$, et si k est impair $\phi \in \text{Iso}^-(\mathcal{E})$.



Définition d'une similitude

Définition

- Une application linéaire $\vec{\phi} \in \mathcal{L}(\vec{\mathcal{E}})$ est dite **similitude vectorielle** si elle multiplie les normes par une constante $k > 0$:

$$\|\vec{\phi}(\vec{v})\| = k \|\vec{v}\|, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathcal{E}}.$$

- Une application affine $\phi \in \text{Aff}(E)$ est dite **similitude affine** si elle multiplie les distances par une constante $k > 0$:

$$d(\phi(A), \phi(B)) = k \cdot d(A, B), \quad \forall A, B \in E.$$

Le nombre strictement positif k est dit **rapport de la similitude**.



Propriétés des similitudes

- Une application affine est une similitude ssi sa partie linéaire est une similitude vectorielle.
- Les isométries sont des similitudes ($k = 1$).
- Toute similitude vectorielle se décompose de façon unique en $\vec{\phi} = \vec{h}_k \circ \vec{\psi}$, où \vec{h}_k est une homothétie de rapport $k > 0$ et $\vec{\psi}$ est une isométrie.
- Une similitude est dite **directe** (resp. **indirecte**) si son déterminant est positif (resp. négatif).
- Les similitudes sont des automorphismes (vectoriels, affines). L'inverse d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$.
- Les similitudes vectorielles (resp. affines, resp. directes) forment un groupe.



Propriétés des similitudes (bis)

- Toute similitude affine, qui n'est pas une isométrie, possède un unique point fixe, dit **le centre de la similitude**.
- Les similitudes préservent les angles.
- En particulier :
 - Les similitudes préservent les sous-espaces parallèles.
 - Les similitudes préservent les sous-espaces orthogonaux (perpendiculaires).
- L'image d'une sphère par une similitude est une sphère.