Solutions de l'examen final

13 janvier 2017

[durée : 3 heures]

Exercice 1 (Géométrie du plan complexe)

On se place dans le plan complexe. Soit l'application $\phi : \mathbb{C} \setminus \{3i\} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\phi(z) = \frac{z-2}{iz+3} \qquad \text{pour } z \neq 3i.$$

a) Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(\mathbb{R})$.

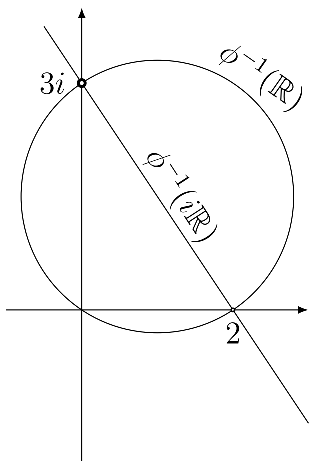
b) Déterminer et dessiner l'ensemble $\phi^{-1}(i\mathbb{R})$.

Indication : Dans les deux questions, vous pouvez déterminer les couples de réels (x, y) tels que $z = x + iy$ soit dans l'ensemble recherché.

Solution : Soit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ (comme suggéré dans l'indication), alors

$$\phi(z) = \frac{x+iy-2}{i(x+iy)+3} = \frac{(x-2+iy)(3-y-ix)}{x^2+(3-y)^2} = \frac{(3x+2y-6)+i\big(x(2-x)+y(3-y)\big)}{x^2+(3-y)^2}.$$

a) Comme le $x^2 + (3-y)^2$ est réel, nous avons $\phi(z) \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\big(x(2-x)+y(3-y)\big) = 0 \iff (x-1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = 1^2 + \frac{3}{2}^2 = \frac{13}{4}$ et $(x, y) \neq (0, 3)$. Ainsi on trouve que $\phi^{-1}(\mathbb{R})$ est le cercle de centre $(1, \frac{3}{2})$ et de rayon $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ($\approx 1,8$) privé du point d'affixe $3i$.



b) Comme le $x^2 + (3-y)^2$ est réel, nous avons $\phi(z) \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $(3x + 2y - 6) = 0$ et $(x, y) \neq (0, 3)$. Ainsi on trouve que $\phi^{-1}(i\mathbb{R})$ est la droite d'équation $3x + 2y = 6$ privée du point d'affixe $3i$.

Exercice 2 (Espaces affines et transformations affines)

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine. Pour $\Omega \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $H_{\Omega,\lambda}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \neq 1$. Et pour $\vec{v} \in \vec{E}$, on désigne par $T_{\vec{v}}$ la translation du vecteur $\vec{v}$.

a) Déterminer la nature et les paramètres de $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}$.

b) Déterminer la nature et les paramètres de $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}$.

c) Soit $\mathcal{E}$ l'espace affine des polynômes de degré 2. Déterminer l'image de $P(X) = X^2 + 2X$ par l'homothétie de centre $\Omega(X) = (X-1)(X+1)$ et de rapport -2.

Solution :

Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$.

a) Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda(M + \vec{v})$. Ainsi $H_{\Omega,\lambda} \circ T_{\vec{v}}(M) = (1-\lambda)(\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v}) + \lambda M = H_{\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v},\lambda}(M)$ est l'homothétie du même rapport λ et de centre $\Omega + \frac{\lambda}{1-\lambda}\vec{v}$.

b) Pour $M \in \mathcal{E}$ nous avons $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M + \vec{v}$. Ainsi $T_{\vec{v}} \circ H_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)(\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v}) + \lambda M = H_{\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v},\lambda}(M)$ est l'homothétie du même rapport λ et de centre $\Omega + \frac{1}{1-\lambda}\vec{v}$.

c) $H_{\Omega,-2}(P) = (1+2)\Omega - 2P$, ainsi l'image de $P(X)$ par cette homothétie est le polynôme $3(X-1)(X+1) - 2(X^2+2X) = X^2 - 4X - 3$.

Exercice 3 (Espaces euclidiens et isométries)

On considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit l'application $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dont l'expression dans la base canonique est

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 3, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z).$$

a) Montrer que ϕ est une application affine.

b) Donner la matrice $M_{\vec{\phi}}$ de la partie linéaire de ϕ.

c) Montrer que ϕ est une isométrie.

d) Déterminer la nature et les paramètres de la partie linéaire $\vec{\phi}$.

e) Déterminer la nature et les paramètres de ϕ.

Solution :

a) $\phi(x,y,z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et donc ϕ est une application de $\mathbb{R}^3$ de la forme $X \mapsto AX + B$, et donc d'après le cours c'est une application affine.

b) D'après la question précédente $M_{\overrightarrow{\phi}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Comme les trois vecteurs colonnes forment une base orthonormée (à vérifier), la matrice $M_{\overrightarrow{\phi}}$ est orthogonale et donc ϕ est une isométrie.

d) Comme $\det M_{\overrightarrow{\phi}} = 1$, la partie linéaire $\overrightarrow{\phi}$ est une rotation. On trouve facilement que l'ensemble des vecteurs fixes (l'axe de rotation) est $\langle(1,1,1)\rangle$ et que l'angle de rotation θ vérifie $2\cos(\theta) + 1 = \operatorname{tr} M_{\overrightarrow{\phi}} = -1 \implies \theta = \pi (\bmod 2\pi)$. Donc $\overrightarrow{\phi}$ est une symétrie* axiale d'axe $\langle(1,1,1)\rangle$.

e) On décompose le vecteur $(1,0,0) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ avec $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in \langle(1,1,1)\rangle$ et $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}) \in \langle(1,1,1)\rangle^\perp$. D'après le cours

$$T_{\overrightarrow{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}} \circ M_{\overrightarrow{\phi}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

est une symétrie axiale d'axe de direction $\langle(1,1,1)\rangle$. En cherchant ses points fixes qui vérifient $\frac{1}{3}(-x + 2y + 2z + 2, 2x - y + 2z - 1, 2x + 2y - z - 1) = (x, y, z)$ on trouve que son axe de symétrie est $(\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle(1,1,1)\rangle$. Pour finir on peut dire, d'après le cours, que comme $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est dans la direction de l'axe de rotation de $T_{\overrightarrow{(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})}} \circ M_{\overrightarrow{\phi}}$ alors ϕ est une symétrie axiale glissée d'axe $(\frac{1}{2}, 0, 0) + \langle(1,1,1)\rangle$ et de vecteur de translation $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

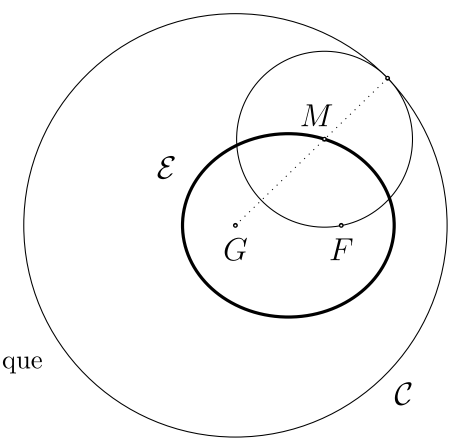
Exercice 4 (Coniques)

a) Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 > R_2$. Donner et justifier la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{C}_2$ soit tangent intérieurement à $\mathcal{C}_1$.

Soient F et G deux points du plan euclidien, et $\mathcal{C}$ un cercle de centre G et de rayon $R > d(F, G)$.

b) On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des centres Ω des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par G. Déterminer et dessiner l'ensemble $\mathcal{S}$.

c) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des centres M des cercles tangents intérieurement à $\mathcal{C}$ et passant par F. Montrer que cet ensemble est une ellipse, appelée ellipse de cercle directeur $\mathcal{C}$ et de foyer F, dont on précisera les paramètres.



*. Pour dire que $\overrightarrow{\phi}$ est une symétrie, on aurait pu également utiliser le fait que $M_{\overrightarrow{\phi}}$ est symétrique.

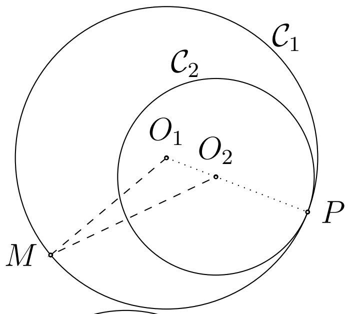
d) Décrire et indiquer sur une figure les points de l'intersection $\mathcal{S} \cap \mathcal{E}$.

e) Est-ce que toute ellipse est l'ellipse d'un certain cercle directeur $\mathcal{C}$ et d'un certain foyer F ?

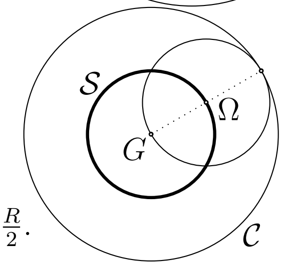
Solution :

On note $C(M, r)$ le cercle de centre M et de rayon r.

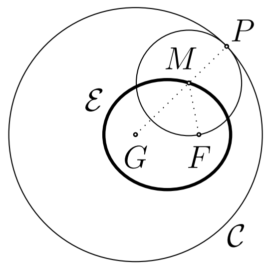
a) Pour un point $M \in \mathcal{C}_1$, par l'inégalité triangulaire, on a $d(O_2, M) \geq d(O_1, M) - d(O_1, O_2)$, avec égalité seulement pour $M \equiv P$ tel que $O_2 \in [O_1, P]$ †. Ainsi $\mathcal{C}_1$ est extérieur à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si $\forall M \in \mathcal{C}_1, d(O_2, M) \geq R_2 \iff R_1 - d(O_1, O_2) \geq R_2 \iff d(O_1, O_2) \leq R_1 - R_2$. Et les deux cercles se touchent (en P) si et seulement si cette inégalité est une égalité.



b) Le cercle $C(\Omega, r)$ touche intérieurement $\mathcal{C}$, d'après la question précédente, si et seulement si $d(G, \Omega) = R - r$. Et $C(\Omega, r)$ passe par G si et seulement si $d(G, \Omega) = r$. Ainsi on trouve $\Omega \in \mathcal{S} \iff d(G, \Omega) = \frac{R}{2}$, autrement dit $\mathcal{S}$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{R}{2}$.

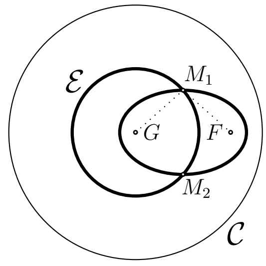


c) Soit $P \in \mathcal{C}$ le point de tangence entre un cercle $C(M, r)$ qui passe par F et qui touche $\mathcal{C}$. Nous avons $d(M, P) = d(M, F) = r$ et $d(G, M) = R - r$, donc $d(G, M) + d(M, F) = R$. Ainsi $M \in \mathcal{E}$, où $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyers F et G et «longueur de la corde» $2a = R$.
Réciproquement si $M \in \mathcal{E}$ alors le cercle $C(M, r)$ avec $r = d(M, F)$ touche intérieurement $\mathcal{C}$ car $d(G, M) = R - r$.



On trouve les autres paramètres de l'ellipse $c = d(F, G)/2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 - d(F, G)^2}$, et finalement $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{d(F,G)}{R}$.
Note : la question précédente correspond au cas particulier $F \equiv G$, où $a = b = \frac{R}{2}$ et $\varepsilon = 0$.

d) Soit $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{E}$, alors $d(F, M) = R - d(G, M) = R - R/2 = R/2 = d(G, M)$. Donc M est à l'un des deux points équidistants à $R/2$ de F et G.



e) La réponse est «oui» car étant donnée une ellipse de foyers F et G et de grand rayon a, d'après la question (c), elle coïncide avec l'ellipse de foyer F et de cercle directeur $C(G, 2a)$.

---

†. Pour $O_1 \equiv O_2$ les deux cercles ne se touchent pas, et pour $O_1 \not\equiv O_2$ le point P est unique.