L'evercice

Thème: conjecture et démonstration

Pour tout nombre réel m, on considère la fonction f_m définie sur \mathbf{R} par $f_m(x) = 2x^2 + mx + 1$.

Conjecturer la nature de l'ensemble des points formé par les sommets des paraboles représentant les fonctions f_m lorsque m parcourt \mathbf{R} , puis vérifier ou infirmer cette conjecture par une démonstration.

Les solutions proposées par deux élèves de première

Élève 1

J'ai tracé la courbe avec un logiciel de géométrie dynamique, activé la trace du sommet S de la parabole (\mathcal{P}) et je constate que le sommet S décrit une parabole orientée vers le bas, de sommet (0;1) et qui passe par les points de coordonnées (1;-1) et (-1;-1).

J'en déduis que je cherche une parabole y = ax^2 + bx + c avec

$$\begin{cases} 1 & = c \\ -1 & = a+b+c \\ -1 & = a-b+c \end{cases}$$

Après calculs, je trouve que la parabole que décrit S est celle d'équation $y = -2x^2 + 1$.

Élève 2

Je sais que le sommet S de la parabole (\mathscr{P}) est en $-\frac{m}{4}$

Dans le tableur, j'ai mis en colonne A les valeurs de m entre -10 et 10; en colonne B, j'ai mis les valeurs de x_S et en colonne C, j'ai mis les valeurs de y_S . Puis, j'ai tracé la courbe de y_S en fonction de x_S . J'obtiens une parabole comme le montre le graphique.

			4						
af	A	В	C	D	E	F	G	H	-1
1	m	x_S	y_S						
2	-10	2,5	-11,5			2			
2	-9,9	2,475	-11,25125			ئنس	1		
4	-9,8	2,45	-11,005			-	1		
5	-9,7	2,425	-10,76125	-3	-2	-1	•	2	3
6	-9,6	2,4	-10,52		/	-2 -3			
7	-9,5	2,375	-10,28125			-3			
8	-9,4	2,35	-10,045			-5		1	
9	-9,3	2,325	-9,81125		/	-6		/	
10	-9,2	2,3	-9,58		/	-7		/	
11	-9,1	2,275	-9,35125		/	-8		1	\—
12	-9	2,25	-9,125		/	-9	У	= -2x ² + 5E-14x +	1
13	-8,9	2,225	-8,90125	/	/	-10 -11			
14	-8,8	2,2	-8,68	/		-12			'
15	-8,7	2,175	-8,46125			-13			
16	-8,6	2,15	-8,245						
17	-8,5	2,125	-8,03125						
18	-8,4	2,1	-7,82						
19	-8,3	2,075	-7,61125						
20	-8,2	2,05	-7,405						
21	-8,1	2,025	-7,20125						
22	-8	2	-7						
23	-7,9	1,975	-6,80125						
24	-7,8	1,95	-6,605						
25	-7,7	1,925	-6,41125						
26	-7,6	1,9	-6,22						

En demandant au tableur l'équation, il me donne : $y = -2x^2 + 5E - 14x + 1$.

Le travail à exposer devant le jury

- 1 Analysez les compétences mobilisées par chacun des élèves et indiquez les aides qui pourraient leur être apportées.
- 2 En vous appuyant sur l'une ou l'autre des productions d'élèves, présentez une correction de l'exercice comme vous l'exposeriez devant une classe de première.
- 3 En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *conjecture et démonstration* dont l'un au moins peut illustrer l'apport d'un logiciel dans sa résolution.