Fiche 5 : Suites et séries de fonctions

Exercice 1 (Inversion des limites)

Montrer et discuter l'inversion des limites :

a) $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{m\to+\infty} \frac{m}{n} = +\infty$, mais $\forall m \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to+\infty} \frac{m}{n} = 0$.

b) $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{x\to+\infty} ae^{-x} = 0$, mais $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \lim_{a\to+\infty} ae^{-x} = +\infty$.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to1^-} x^n = 1$, mais $\forall x \in [0,1[,\ \lim_{n\to+\infty} x^n = 0$.

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to1^+} x^n = 1$, mais $\forall x \in]1,+\infty[,\ \lim_{n\to+\infty} x^n = +\infty$.

e) $\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to1^-} \sum_{k=0}^{2n}(-x)^k = 0$, mais $\forall x \in [0,1[,\ \sum_{k=0}^{\infty}(-x)^k = \frac{1}{1+x}$.

Exercice 2 (L'exponentiel)

a) Étudier la convergence de la suite $\dfrac{x^n}{n!}$ (où $\dfrac{x^0}{0!} = 1, \forall x \in \mathbb{R}$).

b) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant0} \dfrac{x^n}{n!}$.

c) Montrer que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ vérifie $f'(x) = f(x)$ sur tout intervalle borné.

d) Conclusion ?

Exercice 3 (Non interversion limite-dérivée)

a) Étudier la convergence de la suite $f_n(x) = nxe^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Comparer $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ et $(\lim_{n\to\infty} f_n(x))'$.

c) Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.

Exercice 4 (Suite dépendant d'un paramètre)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$ pour $x \in [0,1]$.

a) Trouver la limite simple des fonctions f_n.

b) Y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 5 (Non interversion limite-intégrale)

Soit $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

a) Chercher la limite simple, f, des fonctions f_n.

b) Vérifier que $\int_{t=0}^{\pi/2} f(t)\,dt \neq \lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{\pi/2} f_n(t)\,dt$.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$.

a) Donner un exemple de fonction f.

b) Montrer que f_n et g_n convergent simplement vers la fonction nulle, et que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

c) Si $\int_{t=0}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, chercher $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt$ et $\lim_{n\to\infty} \int_{t=0}^{+\infty} g_n(t)\,dt$.

Exercice 7

a) Étudier la convergence simple, uniforme, de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} ne^{-nx}$.

b) Déterminer le domaine maximal de définition de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx}$.

c) Calculer $f(x)$ lorsque la série converge (intégrer terme à terme).

Exercice 8

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

a) Établir l'existence et la continuité de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Calculer $f(x+1)$ en fonction de $f(x)$.

c) Tracer la courbe de f.