

## M66, Modélisation et analyse numérique

### TD1 : INTERPOLATION ET SPLINES

#### Interpolation

#### Exercice 1 (Différences divisées)

Soient  $x_0, x_1, \dots, x_n$  des points distincts d'un intervalle  $I$ , et  $f, g$  et  $h$  des applications réelles définies sur cette intervalle. On note par  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  la différence divisée de  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

a) (1) Démontrer l'identité

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k}.$$

(2) En déduire que la différence divisée  $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$  est une fonction symétrique, c'est-à-dire, que pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{0, \dots, n\}$  dans lui même,

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

b) Si  $f = \alpha g + \beta h$  pour certains  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , alors

$$f[x_0, \dots, x_n] = \alpha g[x_0, \dots, x_n] + \beta h[x_0, \dots, x_n].$$

c) Si  $f = gh$ , alors on a la formule suivante (appelée formule de Leibniz) :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] h[x_j, \dots, x_n].$$

#### Exercice 2 (Interpolation quadratique)

a) Soit  $I$  un intervalle et  $f \in C^3(I)$ . Soit  $h > 0$ , on note  $p_2(x)$  le polynôme de degré  $\leq 2$  qui interpole la fonction  $f$  aux points  $x_i = x_0 + ih \in I$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Montrer que

$$\forall x \in [x_0, x_2] \quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M,$$

où  $M$  est une constante ne dépendant que de la restriction de  $f$  à  $I$ .

- b) On veut construire une table de valeurs de la fonction  $f(x) = \sqrt{x+1}$  dans l'intervalle  $[0, 1]$  pour des points équidistants  $x_{i+1} = x_i + h$ .  
Quelle valeur doit prendre  $h$  pour garantir 7 chiffres décimaux corrects en faisant une interpolation quadratique ?

### Exercice 3 (Interpolation d'Hermite)

On se donne  $n + 1$  abscisses distinctes  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . On considère les polynômes  $U_i(x)$  et  $V_i(x)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , de degré  $2n + 1$  qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} U_i(x_k) &= \delta_{ik} & ; & & U'_i(x_k) &= 0 & \quad i, k = 0, \dots, n \\ V_i(x_k) &= 0 & ; & & V'_i(x_k) &= \delta_{ik} & \quad i, k = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Quelles conditions d'interpolation vérifie le polynôme

$$H(x) = \sum_{i=0}^n U_i(x)y_i + \sum_{i=0}^n V_i(x)y'_i \quad ?$$

- b) En sachant que les polynômes de la base de Lagrange associée aux nœuds  $x_i$  vérifient  $L_i(x_k) = \delta_{ik}$ , montrer que

$$\begin{aligned} U_i(x) &= [1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)] (L_i(x))^2 \\ V_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2 \end{aligned}$$

vérifient les conditions (1).

- c) On considère le cas particulier de  $n = 1$ , l'intervalle  $I = [0, 1]$  et soient  $x_0 = 0$  et  $x_1 = 1$ . Soit  $f(x)$  une fonction dans  $C^4(I)$  et telle que

$$f(x_i) = y_i, \quad f'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1.$$

On définit la fonction  $S(x)$ , pour  $x \in \overset{\circ}{I}$ , par la relation

$$f(x) = H(x) + x^2(x - 1)^2 S(x).$$

- (1) Soit  $x$  fixé dans  $\overset{\circ}{I}$ . On introduit la fonction  $F$  définie par

$$F(t) = f(t) - H(t) - t^2(t - 1)^2 S(x)$$

- (i) Montrer que  $F(t)$  s'annule en (au moins) 3 points distincts que l'on explicitera.  
(ii) Montrer qu'il existe 2 réels distincts  $t_1^1$  et  $t_2^1$  tels que

$$F'(t_1^1) = F'(t_2^1) = 0.$$

- (2) Calculer  $F'(t)$ ,  $F'(0)$ ,  $F'(1)$ .

En déduire qu'il existe (au moins) 4 réels distincts  $t_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  tels que

$$F'(t_i^2) = 0, \forall i = 1, \dots, 4.$$

(3) En déduire alors qu'il existe un réel  $\xi_x \in \mathring{I}$  tel que

$$S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}.$$

(4) Donner alors une majoration de l'erreur d'interpolation  $|f(x) - H(x)|$ .

- d) *Application* : Une déviation entre deux voies de chemin de fer parallèles doit être une fonction  $f \in C^4([0, 4])$  qui unit les positions  $(0, 0)$  et  $(4, 2)$  et est tangent dans ces points, aux droites  $y = 0$  et  $y = 2$  respectivement. Déterminer le polynôme  $H$  de degré  $\leq 3$  qui satisfait les mêmes conditions. Utiliser la question précédente pour majorer l'erreur  $|f(x) - H(x)|$  dans l'intervalle  $[1, 2]$ .

### Méthode des moindres carrés

#### Exercice 4 (Droite de régression)

Considérons les données  $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, \dots, n\}$  où  $y_i$  peut être vue comme la valeur  $f(x_i)$  prise par une fonction  $f$  au nœud  $x_i$ .

Soit

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2.$$

- a) Déterminer  $b_0$  et  $b_1$  qui minimise  $\Phi$ .

La droite ainsi déterminée  $x \mapsto b_0 + b_1 x$ , est dite *droite des moindres carrés*, ou de *régression linéaire*. Elle est la solution de degré 1 du problème des moindres carrés pour les données  $\{(x_i, y_i)\}$ .

- b) Exprimer les coefficients  $b_0$  et  $b_1$  en fonction des moyennes  $M = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n x_i$  et  $N = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n y_i$ , de la variance  $V = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n (x_i - M)^2$  et de la covariance  $C = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n (x_i - M)(y_i - N)$ .

- c) Vérifier que la droite de régression linéaire passe par le point dont l'abscisse est la moyenne des  $\{x_i\}$  et l'ordonnée est la moyenne des  $\{y_i\}$ .

#### Exercice 5 (Le cas général)

Étant donnée  $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, \dots, n\}$ , une solution du problème des moindres carrés de degré  $m$  est la donnée d'un polynôme  $P \in \mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$  qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^n [y_i - P(x_i)]^2.$$

- a) Montrer que pour  $m = n$  il y a une solution unique et déterminer la.  
b) Que peut on dire de l'ensemble des solutions dans le cas  $m > n$  ?

- c) On munit  $\mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$  de la base canonique  $1, X, \dots, X^m$ . Soit  $(a_0, \dots, a_n)$  les coordonnées de  $P$  dans cette base et  $\overline{P} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  sa représentation dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit la matrice  $V_m = \left[ x_i^k \right]_{\substack{i=0, \dots, n \\ k=0, \dots, m}}$  et le vecteur  $Y = (y_0, \dots, y_n)$ . En considérant  $\overline{P}$  et  $Y$  comme des vecteurs colonnes, montrer que

$$\sum_{i=0}^n [y_i - P(x_i)]^2 = \|V_m \overline{P} - Y\|_2^2.$$

- d) Montrer que pour  $m \leq n$  la solution du problème des moindres carrées existe et est unique.
- e) Justifié que  $V_n$  est inversible, puis montrer que les coefficients du polynôme de Lagrange sont les coefficients du vecteur  $V_n^{-1}Y$ .
- f) Redémontrer la question b) en utilisant la question c).

## Splines

### Exercice 6 (Base de splines)

Soient  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  des points de l'intervalle  $[a, b]$  et  $\mathcal{S}_k[a, b]$  l'ensemble des splines de degré  $k$  relativement à ces  $(n+1)$  points. Vérifier que tout  $s_k \in \mathcal{S}_k[a, b]$  admet une écriture de la forme

$$s_k(x) = \sum_{i=0}^k b_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^k,$$

où  $(t)_+ = \frac{t+|t|}{2}$  et  $(t)_+^k = [(t)_+]^k$ . Puis conclure que

$$\{1, x, x^2, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, \dots, (x - x_{n-1})_+^k\}$$

est une base de  $\mathcal{S}_k[a, b]$ .

### Exercice 7 (Splines normalisées)

Soit  $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$  les  $n+1$  nœuds des splines cubiques  $\mathcal{S}_3(Y)$  qui interpolent les valeurs  $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ .

- a) Montrer qu'il existe une unique spline  $s \in \mathcal{S}_3(Y)$ , dit *naturelle*, telle que  $s''(a) = s''(b) = 0$ .
- b) Étant donnés deux nombre  $d_a$  et  $d_b$ , montrer qu'il existe une unique spline  $s \in \mathcal{S}_3(Y)$ , dit *serrée* ou *tendue*, telle que  $s'(a) = d_a$  et  $s'(b) = d_b$ .
- c) Si  $y_0 = y_n$ , montrer qu'il existe une unique spline  $s \in \mathcal{S}_3(Y)$ , dit *cyclique* ou *périodique*, telle que  $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

**Exercice 8** (Propriété de la norme minimale)

- a) Soit  $f \in C^2([a, b])$ , et soit  $s_3$  une spline cubique *naturelle* qui interpole  $f$  aux noeuds  $\Delta = \{a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ . Montrer que

$$\int_a^b [s_3''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si  $f = s_3$ .

*Indication* : Commencer par la formule

$$\int_a^b [f''(x) - s_3''(x)] s_3''(x) dx = \sum_1^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x) - s_3''(x)] s_3''(x) dx$$

- b) Montrer que la propriété précédente est vrai également pour les splines *serrées* qui satisfont  $s_3'(a) = f'(a)$  et  $s_3'(b) = f'(b)$ .
- c) Soit  $\Delta^*$  un sous-ensemble de l'ensemble  $\Delta$  des noeuds, et  $s_3^*$  la spline naturelle (resp. serrée) qui interpole  $f$  en  $\Delta^*$ . Montrer que

$$\int_a^b [(s_3^*)''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [s_3''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si  $s_3$  est un polynôme au voisinage des noeuds manquant à  $\Delta^*$ .

**Exercice 9** (Splines quartiques)

Soit  $f \in C^4([a, b])$ , et soit  $s_4$  une spline de degré 4 qui interpole  $f$  aux noeuds  $\{a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ . Montrer que

$$\|f'' - s_4''\|_{L^2[a,b]}^2 \leq \int_a^b [f(x) - s_4(x)] f^{(4)}(x) dx$$

si l'une des conditions suivante est vérifiée :

- a)  $f'(a) = s_4'(a)$  et  $f'(b) = s_4'(b)$  ;
- b)  $f''(a) = s_4''(a)$  et  $f''(b) = s_4''(b)$  ;
- c)  $f^{(i)}$  et  $s_4^{(i)}$  sont périodiques pour  $i \leq 2$ .

**Exercice 10** (Splines cubiques à peu de noeuds)

Soit  $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$  les  $n + 1$  noeuds des splines cubiques  $\mathcal{S}_3$ . Soit  $s \in \mathcal{S}_3$  qui satisfait les conditions aux bords  $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$  pour  $k = 0, 1, 2$ .

- a) Montrer que si  $n < 4$  alors  $s = 0$ .
- b) Montrer que si  $n = 4$  alors  $s$  est uniquement déterminée par sa valeur en  $x_2$ .
- c) Calculer explicitement  $s$  dans le cas des noeuds  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$  en fonction de sa valeur  $c$  en 0.

**Exercice 11** (Base cardinale des splines cubiques)

Soit  $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$  les  $n + 1$  nœuds des splines cubiques  $\mathcal{S}_3$ .

Pour  $i = 0, \dots, n$  on note par  $\varphi_i$  la spline tendue telle que  $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$  et  $\varphi'_i(x_0) = \varphi'_i(x_n) = 0$ .

Ainsi que les deux splines tendues  $\varphi_k$  pour  $k \in \{n+1, n+2\}$  définies par  $\varphi_k(x_i) = 0$  pour  $\forall i = 0, \dots, n$ ,  $\varphi'_{n+1}(x_0) = 1$ ,  $\varphi'_{n+1}(x_n) = 0$ ,  $\varphi'_{n+2}(x_0) = 0$  et  $\varphi'_{n+2}(x_n) = 1$ .

a) Montrer que les  $\{\varphi_k\}_{k=0, \dots, n+2}$  forment une base de  $\mathcal{S}_3$ .

Cette base est appelée *base cardinale*.

b) Soit  $x_i = i$  pour  $i = 0, 1, 2$ . Calculer la base cardinale dans ce cas.

**Exercice 12** (B-splines)

Soit  $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$  les  $n + 1$  nœuds des splines  $\mathcal{S}_k$  de degré  $k$ . Soit les fonctions  $B_{i,j}$  définies par récurrence comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{pour } i = 0, \dots, n-1 \\ B_{i,k}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1}-x}{x_{i+k+1}-x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) & \text{pour } \begin{cases} \forall k \geq 1, i \geq 0 \\ i+k+1 \leq n \end{cases} \end{array} \right.$$

a) Calculer et tracer les  $B_{i,1}$  pour  $i = 0, \dots, n-2$ .

b) Montrer que la restriction des  $B_{i,1}$  à  $I_1 = [x_1, x_{n-1}]$  est une base de 1-splines respectivement aux nœuds  $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ .

c) Montrer que le support de  $B_{i,k}$  est contenu dans  $[x_i, x_{i+k+1}]$ .

d) Montrer que

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k+1} - x_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x_{i+j} - x)_+^k}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k+1} (x_{i+j} - x_{i+m})}$$

e) En déduire que les  $B_{i,k}$  sont des splines de degré  $k$  linéairement indépendant.

On appelle les  $B_{i,k}$  les *B-splines* de degré  $k$ .

f) Soit  $I_k = [x_k, x_{n-k}]$  et  $\mathcal{S}_k[I_k]$  les splines de degré  $k$  sur  $I_k$  ayant pour nœuds  $\{x_k, \dots, x_{n-k}\}$ .

Montrer  $\{B_{i,k}|_{I_k} \mid i = -k+1, \dots, n-1\}$  forme une base de  $\mathcal{S}_k[I_k]$ .

g) Comment peut-on construire une base de  $\mathcal{S}_k$  avec des B-splines?