M66, Modélisation et analyse numérique

TD3 : Valeurs singulières, moindres carrés

Exercice 1 (Propriétés de base)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r \leq p = \min(m,n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^t AV = \mathrm{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_p)$$

où les ν_i sont les valeurs singulières de A. On note $(U_i)_{1\leq i\leq m}$ les vecteurs colonnes de U et $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ ceux de V.

a) Quel sens donne-t-on ici à la notation $\mathrm{diag}(\nu_1, \cdots, \nu_p)$? Quelle conséquence a l'hypothèse $\mathrm{rang} A = r$ sur les valeurs singulières ? (On pourra ordonner les valeurs singulières de telle façon que les premières soient non nulles).

b) Montrer que : $A = \sum_{i=1}^{r} \nu_i U_i V_i^t$ et que : $A^t A = \sum_{i=1}^{r} \nu_i^2 V_i V_i^t$.

c) Montrer que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\{U_1, U_2, \cdots, U_r\}$ et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\{V_{r+1}, \cdots, V_n\}$.

d) Montrer que $\mathrm{Im}(A^t) = \mathrm{Vect}\{V_1, V_2, \cdots, V_r\}$ et $\mathrm{Ker}(A^t) = \mathrm{Vect}\{U_{r+1}, \cdots, U_m\}$.

e) Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A^t)$, $\mathrm{Ker}(A^t)$ à l'aide des $(U_i)_{1\leq i\leq m}$ et des $(V_i)_{1\leq i\leq n}$.

Exercice 2 (Un cas concret)

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer les valeurs singulières de A.

b) Quel est le rang de A ?

c) Déterminer la décomposition en valeurs singulières de A.

d) Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Ker}(A)$.

e) Déterminer une solution au sens des moindres carrés du système $Ax = b$.

f) Cette solution est-elle unique ?

Exercice 3 (Approximations de rang inférieur)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_p\}$ les valeurs singulière de A.

a) Montrer que les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrés des valeurs propres non nulles de A^tA et AA^t.

b) Dans le cas $m = n$, montrer que $|\det(A)| = \prod_{i=1}^{p} \nu_i$.

c) Soit A symétrique. Montrer que les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A.

d) Soit $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|U^tAV\|_2 = \|A\|_2$ et que $\|U^tAV\|_F = \|A\|_F$, où $\|A\|_2$ et $\|A\|_F$ sont respectivement la 2-norme d'opérateur de A et la norme de Frobenius de A.

e) En déduire que $\|A\|_2 = \nu_1$ et que $\|A\|_F = \sqrt{\nu_1^2 + \cdots + \nu_p^2}$.

f) Soit $\operatorname{rang} A = r$ et $k < r$. On note $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ les matrices de rang au plus k. Déterminer un majorant de $\inf_{M \in \mathcal{M}^k} \|A - M\|_2$, et un majorant de $\inf_{M \in \mathcal{M}^k} \|A - M\|_F$. D'après quel résultat du cours, on peut affirmer que ces inf sont des min et déterminer leur valeur.

g) Si on identifie une image $m \times n$ pixels en niveaux de gris avec une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}([0,1])$, comment peut on construire « la meilleure » approximation par une image dont la matrice est dans $\mathcal{M}^k$.

h) Soit $A \in \mathcal{M}_{480,640}([0,1])$ une matrice qui encode une image de 480×640 pixels en niveaux de gris, dont les valeurs singulières sont majorées par $\nu_i \leq \frac{10^3}{i(i+1)}$. On considère une matrice $M_{100} \in \mathcal{M}^{100}$ qui représente « la meilleure » approximation de rang 100. Donner une estimation de l'erreur quadratique moyenne de cette approximation.

Exercice 4 (Solution au sens des moindres carrés)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire avec $p \leq n$. On considère le système linéaire $AX = b$, noté dans la suite $(\mathcal{S})$.

a) Déterminer dans quels espaces sont situés l'inconnue X et le second membre b.

b) Déterminer dans quel cas $(\mathcal{S})$ n'a pas de solution.

c) Déterminer dans quel cas $(\mathcal{S})$ admet au moins une solution et dans quel cas cette solution est unique.

d) On suppose que X est solution de $(\mathcal{S})$. Vérifier que X est alors solution de $A^tAX = A^tb$, système noté $(\mathcal{S}')$.

e) Démontrer que le système $(\mathcal{S}')$ admet toujours une solution et préciser dans quel cas elle est unique.

f) On suppose maintenant $\operatorname{rang}(A) = p$ et on note X_0 la solution de $(\mathcal{S}')$. Démontrer que $b - AX_0$ est orthogonal à l'espace vectoriel $\operatorname{Im}(A)$. En déduire que X_0 est la solution au sens des moindres carrés du système $(\mathcal{S})$.