

M66, Modélisation et analyse numérique

TD1 : INTERPOLATION ET SPLINES

Interpolation

Exercice 1 (Différences divisées)

Soient x_0, x_1, \dots, x_n des points distincts d'un intervalle I , et f, g et h des applications réelles définies sur cette intervalle. On note par $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ la différence divisée de f en x_0, x_1, \dots, x_n .

a) (1) Démontrer l'identité

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k}.$$

(2) En déduire que la différence divisée $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ est une fonction symétrique, c'est-à-dire, que pour toute permutation σ de l'ensemble $\{0, \dots, n\}$ dans lui même,

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

b) Si $f = \alpha g + \beta h$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$f[x_0, \dots, x_n] = \alpha g[x_0, \dots, x_n] + \beta h[x_0, \dots, x_n].$$

c) Si $f = gh$, alors on a la formule suivante (appelée formule de Leibniz) :

$$f[x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n g[x_0, \dots, x_j] h[x_j, \dots, x_n].$$

Exercice 2 (Interpolation quadratique)

a) Soit I un intervalle et $f \in C^3(I)$. Soit $h > 0$, on note $p_2(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 qui interpole la fonction f aux points $x_i = x_0 + ih \in I$ pour $i = 0, 1, 2$. Montrer que

$$\forall x \in [x_0, x_2] \quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}} M,$$

où M est une constante ne dépendant que de la restriction de f à I .

- b) On veut construire une table de valeurs de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ dans l'intervalle $[0, 1]$ pour des points équidistants $x_{i+1} = x_i + h$.
Quelle valeur doit prendre h pour garantir 7 chiffres décimaux corrects en faisant une interpolation quadratique ?

Exercice 3 (Interpolation d'Hermite)

On se donne $n + 1$ abscisses distinctes x_0, x_1, \dots, x_n . On considère les polynômes $U_i(x)$ et $V_i(x)$, $0 \leq i \leq n$, de degré $2n + 1$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} U_i(x_k) &= \delta_{ik} & ; & & U'_i(x_k) &= 0 & \quad i, k = 0, \dots, n \\ V_i(x_k) &= 0 & ; & & V'_i(x_k) &= \delta_{ik} & \quad i, k = 0, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

- a) Quelles conditions d'interpolation vérifie le polynôme

$$H(x) = \sum_{i=0}^n U_i(x)y_i + \sum_{i=0}^n V_i(x)y'_i \quad ?$$

- b) En sachant que les polynômes de la base de Lagrange associée aux nœuds x_i vérifient $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, montrer que

$$\begin{aligned} U_i(x) &= [1 - 2L'_i(x_i)(x - x_i)] (L_i(x))^2 \\ V_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2 \end{aligned}$$

vérifient les conditions (1).

- c) On considère le cas particulier de $n = 1$, l'intervalle $I = [0, 1]$ et soient $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Soit $f(x)$ une fonction dans $C^4(I)$ et telle que

$$f(x_i) = y_i, \quad f'(x_i) = y'_i, \quad i = 0, 1.$$

On définit la fonction $S(x)$, pour $x \in \mathring{I}$, par la relation

$$f(x) = H(x) + x^2(x - 1)^2 S(x).$$

- (1) Soit x fixé dans \mathring{I} . On introduit la fonction F définie par

$$F(t) = f(t) - H(t) - t^2(t - 1)^2 S(x)$$

- (i) Montrer que $F(t)$ s'annule en (au moins) 3 points distincts que l'on explicitera.
(ii) Montrer qu'il existe 2 réels distincts t_1^1 et t_2^1 tels que

$$F'(t_1^1) = F'(t_2^1) = 0.$$

- (2) Calculer $F'(t)$, $F'(0)$, $F'(1)$.

En déduire qu'il existe (au moins) 4 réels distincts t_i^2 , $i = 1, 2, 3, 4$ tels que

$$F'(t_i^2) = 0, \forall i = 1, \dots, 4.$$

(3) En déduire alors qu'il existe un réel $\xi_x \in \mathring{I}$ tel que

$$S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}.$$

(4) Donner alors une majoration de l'erreur d'interpolation $|f(x) - H(x)|$.

- d) *Application* : Une déviation entre deux voies de chemin de fer parallèles doit être une fonction $f \in C^4([0, 4])$ qui unit les positions $(0, 0)$ et $(4, 2)$ et est tangent dans ces points, aux droites $y = 0$ et $y = 2$ respectivement. Déterminer le polynôme H de degré ≤ 3 qui satisfait les mêmes conditions. Utiliser la question précédente pour majorer l'erreur $|f(x) - H(x)|$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

Méthode des moindres carrés

Exercice 4 (Droite de régression)

Considérons les données $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, \dots, n\}$ où y_i peut être vue comme la valeur $f(x_i)$ prise par une fonction f au nœud x_i .

Soit

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^n [y_i - (b_0 + b_1 x_i)]^2.$$

- a) Déterminer b_0 et b_1 qui minimise Φ .

La droite ainsi déterminée $x \mapsto b_0 + b_1 x$, est dite *droite des moindres carrés*, ou de *régression linéaire*. Elle est la solution de degré 1 du problème des moindres carrés pour les données $\{(x_i, y_i)\}$.

- b) Exprimer les coefficients b_0 et b_1 en fonction des moyennes $M = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n x_i$ et $N = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n y_i$, de la variance $V = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n (x_i - M)^2$ et de la covariance $C = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^n (x_i - M)(y_i - N)$.

- c) Vérifier que la droite de régression linéaire passe par le point dont l'abscisse est la moyenne des $\{x_i\}$ et l'ordonnée est la moyenne des $\{y_i\}$.

Exercice 5 (Le cas général)

Étant donnée $\{(x_i, y_i) \mid i = 0, \dots, n\}$, une solution du problème des moindres carrés de degré m est la donnée d'un polynôme $P \in \mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^n [y_i - P(x_i)]^2.$$

- a) Montrer que pour $m = n$ il y a une solution unique et déterminer la.
b) Que peut on dire de l'ensemble des solutions dans le cas $m > n$?

- c) On munit $\mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$ de la base canonique $1, X, \dots, X^m$. Soit (a_0, \dots, a_n) les coordonnées de P dans cette base et $\overline{P} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ sa représentation dans \mathbb{R}^n . Soit la matrice $V_m = \left[x_i^k \right]_{\substack{i=0, \dots, n \\ k=0, \dots, m}}$ et le vecteur $Y = (y_0, \dots, y_n)$. En considérant \overline{P} et Y comme des vecteurs colonnes, montrer que

$$\sum_{i=0}^n [y_i - P(x_i)]^2 = \|V_m \overline{P} - Y\|_2^2.$$

- d) Montrer que pour $m \leq n$ la solution du problème des moindres carrées existe et est unique.
- e) Justifié que V_n est inversible, puis montrer que les coefficients du polynôme de Lagrange sont les coefficients du vecteur $V_n^{-1}Y$.
- f) Redémontrer la question b) en utilisant la question c).

Splines

Exercice 6 (Base de splines)

Soient $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ des points de l'intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{S}_k[a, b]$ l'ensemble des splines de degré k relativement à ces $(n+1)$ points. Vérifier que tout $s_k \in \mathcal{S}_k[a, b]$ admet une écriture de la forme

$$s_k(x) = \sum_{i=0}^k b_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^k,$$

où $(t)_+ = \frac{t+|t|}{2}$ et $(t)_+^k = [(t)_+]^k$. Puis conclure que

$$\{1, x, x^2, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, \dots, (x - x_{n-1})_+^k\}$$

est une base de $\mathcal{S}_k[a, b]$.

Exercice 7 (Splines normalisées)

Soit $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$ les $n+1$ nœuds des splines cubiques $\mathcal{S}_3(Y)$ qui interpolent les valeurs $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.

- a) Montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *naturelle*, telle que $s''(a) = s''(b) = 0$.
- b) Étant donnés deux nombre d_a et d_b , montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *serrée* ou *tendue*, telle que $s'(a) = d_a$ et $s'(b) = d_b$.
- c) Si $y_0 = y_n$, montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *cyclique* ou *périodique*, telle que $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 8 (Propriété de la norme minimale)

- a) Soit $f \in C^2([a, b])$, et soit s_3 une spline cubique *naturelle* qui interpole f aux noeuds $\Delta = \{a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. Montrer que

$$\int_a^b [s_3''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si $f = s_3$.

Indication : Commencer par la formule

$$\int_a^b [f''(x) - s_3''(x)] s_3''(x) dx = \sum_1^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x) - s_3''(x)] s_3''(x) dx$$

- b) Montrer que la propriété précédente est vrai également pour les splines *serrées* qui satisfont $s_3'(a) = f'(a)$ et $s_3'(b) = f'(b)$.
- c) Soit Δ^* un sous-ensemble de l'ensemble Δ des noeuds, et s_3^* la spline naturelle (resp. serrée) qui interpole f en Δ^* . Montrer que

$$\int_a^b [(s_3^*)''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [s_3''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si s_3 est un polynôme au voisinage des noeuds manquant à Δ^* .

Exercice 9 (Splines quartiques)

Soit $f \in C^4([a, b])$, et soit s_4 une spline de degré 4 qui interpole f aux noeuds $\{a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b\}$. Montrer que

$$\|f'' - s_4''\|_{L^2[a,b]}^2 \leq \int_a^b [f(x) - s_4(x)] f^{(4)}(x) dx$$

si l'une des conditions suivante est vérifiée :

- a) $f'(a) = s_4'(a)$ et $f'(b) = s_4'(b)$;
- b) $f''(a) = s_4''(a)$ et $f''(b) = s_4''(b)$;
- c) $f^{(i)}$ et $s_4^{(i)}$ sont périodiques pour $i \leq 2$.

Exercice 10 (Splines cubiques à peu de noeuds)

Soit $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$ les $n + 1$ noeuds des splines cubiques \mathcal{S}_3 . Soit $s \in \mathcal{S}_3$ qui satisfait les conditions aux bords $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$ pour $k = 0, 1, 2$.

- a) Montrer que si $n < 4$ alors $s = 0$.
- b) Montrer que si $n = 4$ alors s est uniquement déterminée par sa valeur en x_2 .
- c) Calculer explicitement s dans le cas des noeuds $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ en fonction de sa valeur c en 0.

Exercice 11 (Base cardinale des splines cubiques)

Soit $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$ les $n + 1$ nœuds des splines cubiques \mathcal{S}_3 .

Pour $i = 0, \dots, n$ on note par φ_i la spline naturelle telle que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ainsi que les deux splines tendues φ_k pour $k \in \{n+1, n+2\}$ définies par $\varphi_k(x_i) = 0$ pour $\forall i = 0, \dots, n$, $\varphi'_{n+1}(x_0) = 1$, $\varphi'_{n+1}(x_n) = 0$, $\varphi'_{n+2}(x_0) = 0$ et $\varphi'_{n+2}(x_n) = 1$.

a) Montrer que les $\{\varphi_k\}_{k=0, \dots, n+2}$ forment une base de \mathcal{S}_3 .

Cette base est appelée *base cardinale*.

b) Soit $x_i = i$ pour $i = 0, 1, 2$. Calculer la base cardinale dans ce cas.

Exercice 12 (B-splines)

Soit $a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b$ les $n + 1$ nœuds des splines \mathcal{S}_k de degré k . Soit les fonctions $B_{i,j}$ définies par récurrence comme suit

$$\begin{cases} B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{pour } i = 0, \dots, n-1 \\ B_{i,k}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+k}-x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1}-x}{x_{i+k+1}-x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) & \text{pour } \begin{cases} \forall k \geq 1, i \geq 0 \\ i+k+1 \leq n \end{cases} \end{cases}$$

a) Calculer et tracer les $B_{i,1}$ pour $i = 0, \dots, n-2$.

b) Montrer que la restriction des $B_{i,1}$ à $I_1 = [x_1, x_{n-1}]$ est une base de 1-splines respectivement aux nœuds $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$.

c) Montrer que le support de $B_{i,k}$ est contenu dans $[x_i, x_{i+k+1}]$.

d) Montrer que

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k+1} - x_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x_{i+j} - x)_+^k}{\prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{k+1} (x_{i+j} - x_{i+m})}$$

e) En déduire que les $B_{i,k}$ sont des splines de degré k linéairement indépendant.

On appelle les $B_{i,k}$ les *B-splines* de degré k .

f) Soit $I_k = [x_k, x_{n-k}]$ et $\mathcal{S}_k[I_k]$ les splines de degré k sur I_k ayant pour nœuds $\{x_k, \dots, x_{n-k}\}$.

Montrer $\{B_{i,k}|_{I_k} \mid i = -k+1, \dots, n-1\}$ forme une base de $\mathcal{S}_k[I_k]$.

g) Comment peut-on construire une base de \mathcal{S}_k avec des B-splines?