M66, Modélisation et analyse numérique

TD1 : Interpolation et splines

Interpolation

Exercice 1 (Différences divisées)

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des points distincts d'un intervalle I, et f,g et h des applications réelles définies sur cette intervalle. On note par $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ la différence divisée de f en $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

a) (1) Démontrer l'identité

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq j}}^{n} \frac{1}{x_k - x_j}\,.$$

(2) En déduire que la différence divisée $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ est une fonction symétrique, c'est-à-dire, que pour toute permutation σ de l'ensemble $\{0, \ldots, n\}$ dans lui même,

$$f[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

b) Si $f = \alpha g + \beta h$ pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \alpha g[x_0, \ldots, x_n] + \beta h[x_0, \ldots, x_n]\,.$$

c) Si $f = gh$, alors on a la formule suivante (appelée formule de Leibniz) :

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} g[x_0, \ldots, x_j]h[x_j, \ldots, x_n]\,.$$

Exercice 2 (Interpolation quadratique)

a) Soit I un intervalle et $f \in C^3(I)$. On note $p_2(x)$ le polynôme de degré ≤ 2 qui interpole la fonction f aux points $x_i = x_0 + ih \in I$ pour $i = 0, 1, 2$. Montrer que

$$\forall x \in [x_0, x_2] \quad |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{h^3}{9\sqrt{3}}M,$$

où M est une constante ne dépendant que de la restriction de f à I.

b) On veut construire une table de valeurs de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ dans l'intervalle $[0,1]$ pour des points équidistants $x_{i+1} = x_i + h$.
Quelle valeur doit prendre h pour garantir 7 chiffres décimaux corrects en faisant une interpolation quadratique ?

Exercice 3 (Interpolation d'Hermite)

On se donne $n+1$ abscisses distinctes $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On considère les polynômes $U_i(x)$ et $V_i(x)$, $0 \le i \le n$, de degré $2n+1$ qui vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{array}{lll} U_i(x_k) = \delta_{ik} & ; \quad U_i'(x_k) = 0 & i,k = 0,\ldots,n \\ V_i(x_k) = 0 & ; \quad V_i'(x_k) = \delta_{ik} & i,k = 0,\ldots,n \end{array} \tag{1}$$

a) Quelles conditions d'interpolation vérifie le polynôme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} U_i(x) y_i + \sum_{i=0}^{n} V_i(x) y_i' ?$$

b) En sachant que les polynômes de la base de Lagrange associée aux nœuds x_i vérifient $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, montrer que

$$\begin{aligned} U_i(x) &= [1 - 2L_i'(x_i)(x - x_i)]\,(L_i(x))^2 \\ V_i(x) &= (x - x_i)(L_i(x))^2 \end{aligned}$$

vérifient les conditions (1).

c) On considère le cas particulier de $n = 1$, l'intervalle $I = [0,1]$ et soient $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$.Soit $f(x)$ une fonction dans $C^4(I)$ et telle que

$$f(x_i) = y_i, \qquad f'(x_i) = y_i', \qquad i = 0,1.$$

On définit la fonction $S(x)$ par la relation

$$f(x) = p(x) + x^2(x-1)^2 S(x).$$

(1) Soit x fixé dans I. On introduit la fonction F définie par

$$F(t) = f(t) - H(t) - t^2(t-1)^2 S(x)$$

(i) Montrer que $F(t)$ s'annule en (au moins) 3 points distincts que l'on explicitera.

(ii) Montrer qu'il existe 2 réels distincts t_1^1 et t_2^1 tels que

$$F'(t_1^1) = F'(t_2^1) = 0.$$

(2) Calculer $F'(t)$, $F'(0)$, $F'(1)$.
En déduire qu'il existe (au moins) 4 réels distincts t_i^2, $i = 1,2,3,4$ tels que

$$F'(t_i^2) = 0, \forall\ i = 1, \cdots, 4.$$

(3) En déduire alors qu'il existe un réel $\xi_x \in I$ tel que

$$S(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}.$$

(4) Donner alors une majoration de l'erreur d'interpolation $|f(x) - H(x)|$.
(Indication : On pourra utiliser l'inégalité suivante :

$$\mathrm{Max}_{x\in[0,1]} \left| x\left(x-\tfrac{1}{n}\right)\left(x-\tfrac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\tfrac{n-1}{n}\right)(x-1)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \forall n \geq 1.)$$

d) *Application :* une déviation entre deux voies de chemin de fer parallèles doit être un polynôme de degré 3 qui unit les positions $(0,0)$ et $(4,2)$ et est tangent dans ces points, aux droites $y = 0$ et $y = 2$ respectivement. Obtenir ce polynôme. Utiliser la question précédente pour majorer l'erreur $|f(x) - p(x)|$ dans l'intervalle $[1,2]$.

Méthode des moindres carrés

Exercice 4 (Droite de régression)

Considérons les données $\{(x_i, y_i) \,|\, i = 0, \ldots, n\}$ où y_i peut être vue comme la valeur $f(x_i)$ prise par une fonction f au nœud x_i .

Soit

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=0}^{n} \Big[y_i - (b_0 + b_1 x_i)\Big]^2.$$

a) Déterminer b_0 et b_1 qui minimise Φ.

La droite ainsi déterminée $x \mapsto b_0 + b_1 x$, est dite *droite des moindres carrés*, ou *de régression linéaire*. Elle est la solution de degré 1 du problème des moindres carrées pour les données $\{(x_i, y_i)\}$.

b) Exprimer les coefficients b_0 et b_1 en fonction de la moyenne $M = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^{n} x_i$ et de la variance $V = \frac{1}{(n+1)} \sum_{i=0}^{n} (x_i - M)^2$.

c) Vérifier que la droite de régression linéaire passe par le point dont l'abscisse est la moyenne des $\{x_i\}$ et l'ordonnée est la moyenne des $\{y_i\}$.

Exercice 5 (Le cas général)

Étant donnée $\{(x_i, y_i) \,|\, i = 0, \ldots, n\}$, une solution du problème des moindres carrées de degré m est la donnée d'un polynôme $P \in \mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$ qui minimise la quantité :

$$\sum_{i=0}^{n} \Big[y_i - P(x_i)\Big]^2.$$

a) Montrer que pour $m = n$ il y a une solution unique et déterminer la.

b) Que peut on dire de l'ensemble des solutions dans le cas $m > n$?

c) On munit $\mathbb{P}_m[\mathbb{R}]$ de la base canonique $1, X, \dots, X^m$. Soit $(a_0, \dots, a_n)$ les coordonnées de P dans cette base et $\overline{P} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ ça représentation dans $\mathbb{R}^n$. Soit la matrice $V_m = \left[x_i^k\right]_{\substack{i=0,\dots,n \\ k=0,\dots,m}}$ et le vecteur $Y = (y_0, \dots, y_n)$. En considérant $\overline{P}$ et Y comme des vecteurs colonnes, montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} \left[y_i - P(x^i)\right]^2 = \left\|V_m \overline{P} - Y\right\|_2^2.$$

d) Montrer que pour $m \leq n$ la solution du problème des moindres carrées existe et est unique.

e) Justifié que V_n est inversible, puis montrer que les coefficients du polynôme de Lagrange sont les coefficients du vecteur $V_n^{-1}Y$.

f) Redémontrer la question b) en utilisant la question c).

Splines

Exercice 6 (Base de splines)

Soient $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ des points de l'intervalle $[a, b]$ et $\mathcal{S}_k[a, b]$ l'ensemble des splines de degré k relativement à ces $(n+1)$ points. Vérifier que tout $s_k \in \mathcal{S}_k[a, b]$ admet une écriture de la forme

$$s_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x - x_i)_+^k\,,$$

où $(t)_+ = \frac{t+|t|}{2}$ et $(t)_+^k = \left[(t)_+\right]^k$. Puis conclure que

$$\{1, x, x^2, \dots, x^k, (x - x_1)_+^k, \dots, (x - x_{n-1})_+^k\}$$

est une base de $\mathcal{S}_k[a, b]$.

Exercice 7 (Splines normalisées)

Soit $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ les $n + 1$ nœuds des splines cubiques $\mathcal{S}_3(Y)$ qui interpolent les valeurs $Y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$.

a) Montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *naturelle*, telle que $s''(a) = s''(b) = 0$.

b) Étant donnés deux nombre d_a et d_b, montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *serrée* ou *tendue*, telle que $s'(a) = d_a$ et $s'(b) = d_b$.

c) Si $y_0 = y_n$, montrer qu'il existe une unique spline $s \in \mathcal{S}_3(Y)$, dit *cyclique* ou *périodique*, telle que $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ pour $k = 0, 1, 2$.

Exercice 8 (Propriété de la norme minimale)

a) Soit $f \in C^2([a,b])$, et soit s_3 une spline cubique *naturelle* qui interpole f aux noeuds $\Delta = \{a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$. Montrer que

$$\int_a^b [s_3''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [f''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si $f = s_3$.

Indication : Commencer par la formule

$$\int_a^b [f''(x) - s_3''(x)]s_3''(x)dx = \sum_1^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f''(x) - s_3''(x)]s_3''(x)dx$$

b) Montrer que la propriété précédente est vrai également pour les splines *serrées* qui satisfont $s_3'(a) = f'(a)$ et $s_3'(b) = f'(b)$.

c) Soit Δ^* un sous-ensemble de l'ensemble Δ des nœuds, et s_3^* la spline naturelle (resp. serrée) qui interpole f en Δ^*. Montrer que

$$\int_a^b [(s_3^*)''(x)]^2 dx \leq \int_a^b [s_3''(x)]^2 dx$$

avec égalité si et seulement si s_3 est un polynôme au voisinage des nœuds manquant à Δ^*.

Exercice 9 (Splines quartique)

Soit $f \in C^4([a,b])$, et soit s_4 une spline de degré 4 qui interpole f aux nœuds $\{a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$. Montrer que

$$||f'' - s_4''||^2_{L^2[a,b]} \leq \int_a^b [f(x) - s_4(x)]f^4(x)dx$$

si l'une des conditions suivante est vérifiée :

a) $f'(a) = s_4'(a)$ et $f'(b) = s_4'(b)$;

b) $f''(a) = s_4''(a)$ et $f''(b) = s_4''(b)$;

c) $f^{(i)}$ et $s_4^{(i)}$ sont périodiques pour $i \leq 2$.

Exercice 10 (Splines cubiques à peu de nœuds)

Soit $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ les $n+1$ nœuds des splines cubiques $\mathcal{S}_3$. Soit $s \in \mathcal{S}_3$ qui satisfait les conditions aux bords $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$ pour $k = 0, 1, 2$.

a) Montrer que si $n < 4$ alors $s = 0$.

b) Montrer que si $n = 4$ alors s est uniquement déterminée par sa valeur en x_2.

c) Calculer explicitement s dans le cas des nœuds $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ en fonction de sa valeur c en 0.

Exercice 11 (Base cardinale des splines cubiques)

Soit $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ les $n+1$ nœuds des splines cubiques $\mathcal{S}_3$.

Pour $i = 0, \ldots, n$ on note par φ_i la spline naturelle telle que $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Ainsi que les deux splines tendues φ_k pour $k \in \{n+1, n+2\}$ définies par $\varphi_k(x_i) = 0$ pour $\forall i = 0, \ldots, n$, $\varphi'_{n+1}(x_0) = 1$, $\varphi'_{n+1}(x_n) = 0$, $\varphi'_{n+2}(x_0) = 0$ et $\varphi'_{n+2}(x_n) = 1$.

a) Montrer que les $\{\varphi_k\}_{k=0,\ldots,n+2}$ forment une base de $\mathcal{S}_3$.
Cette base est appeler *base cardinale.*

b) Soit $x_i = i$ pour $i = 0, 1, 2$. Calculer la base cardinale dans ce cas.

Exercice 12 (B-splines)

Soit $a = x_0 < x_2 < \cdots < x_n = b$ les $n+1$ nœuds des splines $\mathcal{S}_k$ de degré k. Soit les fonctions $B_{i,j}$ définies par récurrence comme suit

$$\begin{cases} B_{i,0}(x) & = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \text{pour } i = 0, \ldots, n-1 \\ \\ B_{i,k}(x) & = \frac{x - x_i}{x_{i+k} - x_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k+1} - x}{x_{i+k+1} - x_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x) & \text{pour } \begin{cases} \forall\ k \geq 1, i \geq 0 \\ i + k + 1 \leq n \end{cases} \end{cases}$$

a) Calculer et tracer les $B_{i,1}$ pour $i = 0, \ldots, n-2$.

b) Montrer que la restriction des $B_{i,1}$ à $I_1 = [x_1, x_{n-1}]$ est une base de 1-splines respectivement aux nœuds $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$.

c) Montrer que le support de $B_{i,k}$ est contenu dans $[x_i, x_{i+k+1}]$.

d) Montrer que

$$B_{i,k}(x) = (x_{i+k+1} - x_i) \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(x_{i+j} - x)_+^k}{\prod\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{m=k+1} (x_{i+j} - x_{i+m})}$$

e) En déduire que les $B_{i,k}$ sont des splines de degré k linéairement indépendant.
On appelle les $B_{i,k}$ les *B-splines* de degré k.

f) Soit $I_k = [x_k, x_{n-k}]$ et $\mathcal{S}_k[I_k]$ les splines de degré k sur I_k ayant pour nœuds $\{x_k, \ldots, x_{n-k}\}$.
Montrer $\{\, B_{i,k}|_{I_k} \mid i = -k+1, \ldots, n-1\}$ forme une base de $\mathcal{S}_k[I_k]$.

g) Comment peut on construire une base de $\mathcal{S}_k$ avec des B-splines ?