

M66, Modélisation et analyse numérique

TD3 : VALEURS SINGULIÈRES, MOINDRES CARRÉS

Exercice 1 (Propriétés de base)

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r \leq p = \min(m, n)$. On considère la décomposition en valeurs singulières de A

$$U^t A V = \text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_p)$$

où les ν_i sont les valeurs singulières de A . On note $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ les vecteurs colonnes de U et $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ ceux de V .

- Quel sens donne-t-on ici à la notation $\text{diag}(\nu_1, \dots, \nu_p)$? Quelle conséquence a l'hypothèse $\text{rang} A = r$ sur les valeurs singulières? (On pourra ordonner les valeurs singulières de telle façon que les premières soient non nulles).
- Montrer que : $A = \sum_{i=1}^r \nu_i U_i V_i^t$ et que : $A^t A = \sum_{i=1}^r \nu_i^2 V_i V_i^t$.
- Montrer que $\text{Im}(A) = \text{Vect}\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$ et $\text{Ker}(A) = \text{Vect}\{V_{r+1}, \dots, V_n\}$.
- Montrer que $\text{Im}(A^t) = \text{Vect}\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ et $\text{Ker}(A^t) = \text{Vect}\{U_{r+1}, \dots, U_m\}$.
- Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\text{Im}(A)$, $\text{Ker}(A)$, $\text{Im}(A^t)$, $\text{Ker}(A^t)$ à l'aide des $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$ et des $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Exercice 2 (Un cas concret)

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les valeurs singulières de A .
- Quel est le rang de A ?
- Déterminer la décomposition en valeurs singulières de A .
- Déterminer les matrices des projections orthogonales sur $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$.
- Déterminer une solution au sens des moindres carrés du système $Ax = b$.
- Cette solution est-elle unique?

Exercice 3 (Approximations de rang inférieur)

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\{\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_p\}$ les valeurs singulières de A .

- a) Montrer que les valeurs singulières non nulles de A sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de $A^t A$ et $A A^t$.
- b) Dans le cas $m = n$, montrer que $|\det(A)| = \prod_{i=1}^p \nu_i$.
- c) Soit A symétrique. Montrer que les valeurs singulières de A sont les valeurs absolues des valeurs propres de A .
- d) Soient $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|U^t A V\|_2 = \|A\|_2$ et que $\|U^t A V\|_F = \|A\|_F$, où $\|A\|_2$ et $\|A\|_F$ sont respectivement la 2-norme d'opérateur de A et la norme de Frobenius de A .
- e) En déduire que $\|A\|_2 = \nu_1$ et que $\|A\|_F = \sqrt{\nu_1^2 + \dots + \nu_p^2}$.
- f) Soit $\text{rang } A = r$ et $k < r$. On note $\mathcal{M}^k \subset \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ les matrices de rang au plus k . Déterminer un majorant de $\inf_{M \in \mathcal{M}^k} \|A - M\|_2$, et un majorant de $\inf_{M \in \mathcal{M}^k} \|A - M\|_F$. D'après quel résultat du cours peut-on déterminer les valeurs de ces inf et affirmer qu'elles sont des min ?
- g) Si on identifie une image $m \times n$ pixels en niveaux de gris avec une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}([0, 1])$, comment peut-on construire « la meilleure » approximation par une image dont la matrice est dans \mathcal{M}^k ?
- h) Soit $A \in \mathcal{M}_{480,640}([0, 1])$ une matrice qui encode une image de 480×640 pixels en niveaux de gris, dont les valeurs singulières sont majorées par $\nu_i \leq \frac{10^3}{i(i+1)}$. On considère une matrice $M_{100} \in \mathcal{M}^{100}$ qui représente « la meilleure » approximation de rang 100. Donner une estimation de l'erreur quadratique moyenne de cette approximation.

Exercice 4 (Solution au sens des moindres carrés)

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ une matrice rectangulaire avec $p \leq n$. On considère le système linéaire $AX = B$, noté dans la suite (\mathcal{S}) .

- a) Déterminer dans quels espaces sont situés l'inconnue X et le second membre B .
- b) Déterminer dans quel cas (\mathcal{S}) n'a pas de solution.
- c) Déterminer dans quel cas (\mathcal{S}) admet au moins une solution et dans quel cas cette solution est unique.
- d) On suppose que X est solution de (\mathcal{S}) . Vérifier que X est alors solution de $A^t A X = A^t B$, système noté (\mathcal{S}') .
- e) Démontrer que le système (\mathcal{S}') admet toujours une solution et préciser dans quel cas elle est unique.
- f) Soit X_0 une solution de (\mathcal{S}') . Démontrer que $B - A X_0$ est orthogonal à l'espace vectoriel $\text{Im}(A)$. En déduire que X_0 est une solution au sens des moindres carrés du système (\mathcal{S}) .
- g) On suppose maintenant que $\text{rang } A = p$. Exprimer la solution X_0 au sens des moindres carrés du système (\mathcal{S}) en fonction de A et de B .