M66, Modélisation et analyse numérique

TD5 : Consistance, Stabilité, Convergence

Exercice 1

Soit le problème :

$$(P)\begin{cases} y' = f(t,y),\ t \in I_0, \\ y(t_0) = \eta, \end{cases}$$

où $I_0 = [t_0, t_0+T]$ et f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(I_0 \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et globalement lipschitzienne. Considérons la méthode de Runge-Kutta implicite, de matrice $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq q}$:

$$\begin{cases} y_{n,i} = y_n + h_n \displaystyle\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t_{n,j}, y_{n,j}),\ 1 \leq i \leq q, \\ y_{n+1} = y_n + h_n \displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{n,j}, y_{n,j}), \end{cases}$$

où $h_n = t_{n+1} - t_n$, $t_{n,j} = t_n + \tau_j h_n$, et où l'on suppose que, pour tout $1 \leq j \leq q$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_{jk} = \tau_j$.

a) On admet que, pour h_n suffisamment petit, le système en $(y_{n,i})_{i=1,\ldots,q}$ admet une unique solution $y_{n,i} = \Phi_i(t_n, y_n, h_n) \in \mathcal{C}^1(I_0 \times \mathbb{R} \times [0, \varepsilon[, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, q$.
Déterminer Φ, en fonction de Φ_j, b_j et τ_j, tel que le schéma ci-dessus soit sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n).$$

b) Montrer que $\Phi(t,y,0) = f(t,y)\displaystyle\sum_{j=1}^{q} b_j$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que le schéma soit d'ordre au moins 1.

c) Montrer que $\partial_h \Phi_i(t,y,0) = \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t,y)$ pour $i = 1, \ldots, q$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode soit d'ordre au moins 2.

d) **Un exemple concret.** On considère la méthode définie par

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{3}} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(f(t_n, y_n) + f(t_{n+\frac{1}{3}}, y_{n+\frac{1}{3}})\right), \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{4}\left(3f(t_{n+\frac{1}{3}}, y_{n+\frac{1}{3}}) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\right), \end{cases}$$

où $t_{n+\frac{1}{3}} = t_n + \frac{h}{3}$ et $f : [t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et globalement L-lipschitzienne par rapport à y. On admettra que, pour h suffisamment petit, ce système admet une unique solution $\mathcal{C}^1$ par rapport aux données. Montrer que cette méthode est consistante d'ordre au moins égal à 2, puis qu'elle est convergente.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f\Big(t, x(t)\Big),\ t \in I_0 = [0, T],$$

munie de la donnée de Cauchy $x(0) = x_0$, et où la fonction f est continue de $I_0 \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et L-lipschitzienne par rapport à la variable x.

On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation sur une discrétisation $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ de pas maximal $h = \max h_n$ à l'aide de l'un des deux schémas :

$$\begin{cases} X_{n+1/2} = X_n + \dfrac{h_n}{2} f(t_n, X_n) \\ X_{n+1} = X_n + h_n f(t_{n+1/2}, X_{n+1/2}) \end{cases}, \qquad \begin{cases} Y_{n+1/2} = \dfrac{Y_n + Y_{n+1}}{2} \\ Y_{n+1} = Y_n + h_n f(t_{n+1/2}, Y_{n+1/2}) \end{cases},$$

où on a noté $t_{n+1/2} = \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2} = t_n + \dfrac{h_n}{2}$.

a) Écrire chacun de ces schémas sous la forme d'une méthode de Runge-Kutta.

b) Pour une même discrétisation, lequel des deux schémas est plus coûteux numériquement ? Sous quelle condition sur h ces schémas définissent-ils X_n et Y_n de façon unique ?

c) Montrer qu'ils sont tous les deux d'ordre au moins 2. Sont-ils stables ? Convergents ?

d) On considère le cas $f(t, x) = -\lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{C}_+^*$ est un nombre complexe de partie réelle strictement positive. On suppose que la discrétisation est uniforme de pas h et on s'intéresse à la résolution numérique de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que, pour chacun des deux schémas, on peut écrire

$$X_{n+1} = r_X(\lambda h) X_n, \qquad Y_{n+1} = r_Y(\lambda h) Y_n,$$

où $r_W(z)$, $W \in \{X, Y\}$, est une fraction rationnelle que l'on calculera pour chacun des schémas. On appelle domaine de A-stabilité l'ensemble

$$D_W = \{z \in \mathbb{C} \mid |r_W(z)| \leq 1\},$$

et on dit que la méthode est A-stable si $\mathbb{C}_+^* \subset D_W$.

Montrer que D_X est un compact de $\mathbb{C}$. Déterminer D_Y. Les méthodes sont-elles A-stables ? Quel schéma choisiriez-vous pour intégrer l'équation différentielle sur un intervalle de temps très grand ?

e) On suppose que l'équation différentielle est posée sur $\mathbb{C}^m$ et que $f(t, x) = -Ax$ où A est une matrice carrée de taille m qu'on supposera diagonalisable. Sous quelle condition sur A la solution $t \mapsto x(t)$ reste-t-elle bornée sur $\mathbb{R}_+$? Calculer X_n, Y_n en fonction de X_0, Y_0. Sous quelle condition sur le pas h les suites (X_n) et (Y_n) restent-elles bornées ?

Exercice 3

On considère le schéma de Runge-Kutta implicite suivant :

$$\begin{cases} X_{n+\frac{1}{3}} = X_n + \dfrac{h}{6}\Big(f(t_n, X_n) + f(t_{n+\frac{1}{3}}, X_{n+\frac{1}{3}})\Big), \\ X_{n+1} = X_n + \dfrac{h}{4}\Big(3f(t_{n+\frac{1}{3}}, X_{n+\frac{1}{3}}) + f(t_{n+1}, X_{n+1})\Big), \end{cases} \tag{$*$}$$

où $t_{n+1/3} = (n+1/3)h$. On rappelle (voir Exercice 1) que ce schéma est d'ordre au moins 2.

a) Soit Y une solution de l'équation différentielle $Y' = -\lambda Y$ où λ est un complexe quelconque. Soit (Y_n) une solution du schéma $(*)$ associé à cette équation différentielle. Montrer que

$$Y_{n+1} = r(\lambda h) Y_n,$$

où r est donnée par

$$r(z) = \frac{24 - 14z + 3z^2}{24 + 10z + z^2}.$$

b) Le schéma $(*)$ est-il A-stable ?