M66, Modélisation et analyse numérique

TD2 : COURBES DE BÉZIER

Exercice 1 (Propriétés de base)

Les polynômes de Bernstein d'ordre n sont les polynômes

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \text{ pour } i = 0, \dots, n$$

Lorsque n est fixé, on notera simplement B_i au lieu de B_i^n.

On considère $n+1$ points $A_0, \dots, A_n$, d'un espace affine V, $n \geq 1$ (le plus souvent $n = 3$ et $V = \mathbb{R}^2$). On définit la courbe paramétrée *de Bézier* $M : [0,1] \to V$, associée à ces points *de contrôle* :

$$M(t) = B_0(t)A_0 + B_1(t)A_1 + \cdots + B_n(t)A_n \quad \text{pour} \quad t \in [0,1].$$

a) Montrer que la courbe $M([0,1])$ est dans l'enveloppe convexe des points de contrôle $A_0, \dots, A_n$.

b) Montrer que $M(0) = A_0$ et $M(1) = A_1$.

c) Montrer qu'il existe une constante λ, à déterminer, telle que $M'(0) = \lambda\overrightarrow{A_0A_1}$ et $M'(1) = \lambda\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$.

d) Montrer que si les A_i sont tous alignés et équidistants, alors $M(t) = (1-t)A_0 + tA_n$.

e) Soit $B : V^n \longrightarrow V^{[0,1]}$, l'application qui associe aux $n+1$ points de V la courbe de Bézier d'ordre n, ayant ces points comme points de contrôle. Montrer que B est une application affine, et que si V est un espace vectoriel, alors B est linéaire.

f) On note $B_{[A_0,\dots,A_n]}$ la courbe de Bézier dont les points de contrôle sont $A_0, \dots, A_n$. Soit $T : V \to W$ une application affine. Montrer que $T(B_{[A_0,\dots,A_n]}(t)) = B_{[T(A_0),\dots,T(A_n)]}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (Élévation de degré)

Soient $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$, $A_2 = (1,0)$.

a) Calculer la courbe de Bézier ayant A_0,A_1 et A_2 pour points de contrôle. La dessiner.

b) Montrer qu'il existe des points B_0, B_1, B_2 et B_3 tels que la courbe de Bézier associée soit la même que pour les points A_0, A_1 et A_2.

c) Comment peut-on généraliser la question précédente pour $n+1$ points $A_0, \dots, A_n$ quelconques ? *Indication :* $B_i = \frac{i}{n+1} A_{i-1} + \frac{n+1-i}{n+1} A_i$ pour $i = 1, ..., n$.

Exercice 3 (Construction itérative)

On note par $B_{[A_0,\dots,A_n]}$ la courbe de Bézier dont les points de contrôle sont $A_0, \dots, A_n$.

a) Montrer que

$$B_{[A_0,\dots,A_n]}(t) = (1-t)B_{[A_0,\dots,A_{n-1}]}(t) + tB_{[A_1,\dots,A_n]}(t).$$

b) Déduire, de la question précédente, la question (d) de l'exercice 1.

c) Soit $B'_{[A_0,\dots,A_n]}$ la courbe dérivée de $B_{[A_0,\dots,A_n]}$. Montrer (par récurrence) que

$$B'_{[A_0,\dots,A_n]} = n\left(B_{[A_1,\dots,A_n]} - B_{[A_0,\dots,A_{n-1}]}\right)$$

d) On note $\Delta_i := \overrightarrow{A_i A_{i+1}}$ pour $i = 0, \dots, n-1$. En déduire que

$$B'_{[A_0,\dots,A_n]} = nB_{[\Delta_0,\dots,\Delta_{n-1}]}.$$

e) Déduire, de la question précédente, la question (c) de l'exercice 1.

Exercice 4 (Courbes polynomiales)

Soit V un espace affine de dimension n (on peut dans un premier temps prendre $n = 2$ et $V = \mathbb{R}^2$). On dit que $M : \mathbb{R} \to V$ est une courbe polynomiale de degré k si dans un repère on a $M(t) = (P_1(t), \dots, P_n(t))$ avec $P_i \in \mathbb{R}_k[X]$ pour $i = 1, \dots, n$.

a) Montrer que la définition de courbe polynomiale de degré k ne dépend pas du repère choisi.

b) Montrer que toute courbe polynomiale $M(t)$ de degré k peut s'écrire de façon unique comme courbe de Bézier d'ordre k.

c) En déduire que toute spline de degré k avec $n+1$ nœuds distincts peut être réalisée comme la jonction de n courbes de Bézier d'ordre k.

d) Redémontrer la question (c) de l'exercice 2.

Exercice 5 (Jonction de courbes de Bézier)

Soient A_0, A_1,..., A_n et B_0, B_1,..., B_n deux ensembles de points de contrôle pour deux courbes de Bézier $M(t)$ et $N(t)$, $t \in [0,1]$. On considère la courbe paramétrée

$$S(t) = \begin{cases} M(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ N(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

a) Sous quelle condition sur les points de contrôle la courbe S est-elle continue ?

b) Sous quelle condition sur les points de contrôle la courbe S est-elle C^1 ?

c) Sous quelle condition sur les points de contrôle la courbe S est-elle C^k ?