M66, Modélisation et analyse numérique

TP3 : VALEURS SINGULIÈRES, MOINDRES CARRÉS

Vous êtes invité à télécharger le fichier `tp3_fonction.sci` qui contient la procédure `plotimage` nécessaire pour l'exercice 3, ainsi que les fichiers avec des données `temperatures.dat`, `lena.dat` et `george.dat`.

Pour chaque exercice, il va falloir créer un fichier, `tp3_exo1.sce`, ..., `tp3_exo3.sce`, comportant les lignes de code correspondant à la résolution de l'exercice. Ces fichiers doivent commencer avec les initialisations habituelles (`clear`,`clc`,...).

Présentation et indications

Décomposition en valeurs singulières. Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $p \leq \min(m,n)$, la décomposition en valeurs singulières de A est

$$U^t AV = S \quad \text{avec} \quad S = \operatorname{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_p)$$

où les $\{\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_p > 0\}$ sont les valeurs singulières non nulles de A.

La commande `Scilab` qui permet d'obtenir cette décomposition pour une matrice `A` est `[U,S,V] = svd(A)`. Et pour obtenir juste les valeurs singulières dans un vecteur `s`$= (\nu_1, \ldots, \nu_p)$ il suffit de faire `s = svd(A)`.

Approximation de rang inférieur. D'après le théorème de Eckart et Young, la meilleur approximation de rang $k \leq p$, aussi bien en norme 2 d'opérateur qu'en norme de Frobenius, est donnée par

$$A_k = US_kV^t \quad \text{où} \quad S = \operatorname{diag}(\nu_1, \ldots, \nu_k)$$

La commande `Scilab` qui permet d'obtenir cette approximation pour une matrice `A` est `[U,S,V] = sva(A,k)`.

Lecture de données à partir d'un fichier. Étant donné un fichier texte `nomfichier.dat` contenant mn valeurs, il peut être lu et stocké dans une matrice `M` de taille $m \times n$ avec la commande `M = read('nomfichier.dat',m,n);`.

Exercices

Exercice 1 (Vérification de résultats du cours)

a) Créer une matrice aléatoire A de taille 30×50 dont les coefficients suivent la loi uniforme $A_{i,j} \sim \mathcal{U}[-10, 10]$.

b) Représenter sur un graphique la relation entre les valeurs singulières de A et les spectres de A^tA, de AA^t et de $\left[\begin{smallmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

c) Créer la matrice B qui soit la meilleure approximation de rang 10 de A. Puis calculer, dans une variable `opt`, l'erreur de cette approximation en norme de Frobenius.

d) Pour un grand nombre (par exemple 1000) de matrices aléatoires de rang 10, si possible pas trop différentes de B, calculer et stocker dans un vecteur `err`, leurs erreurs d'approximation de A en norme de Frobenius.

e) Vérifier visuellement le théorème de Eckart et Young en représentant sur un même graphique les erreurs stockées dans `err` et la valeur optimale qui se trouve dans `opt`.

Exercice 2 (Visualisation des approximations de rang inférieur)

Les fichiers `lena.dat` et `george.dat` contiennent les valeurs matricielles qui représentent les images suivantes :


Dans cet exercice, on se propose de visualiser l'approximation de ces images par des matrices de rang inférieur.

a) Stocker les valeurs d'une de ces deux images dans une matrice `photo` de taille 256×256. L'affichage de cette photo peut se faire avec la commande `plotimage(photo)` qui se trouve dans le fichier `tp3_fonction.sci`.

b) Afficher sur 4 graphiques côte-à-côte l'image choisie ainsi que les approximations de rang 5, 25 et 75 de cette même image.

Exercice 3 (Approximation au sens des moindres carrés)

D'après l'exercice 4 de la feuille de TD3, la résolution au sens des moindres carrés du système $AX = B$ est équivalente à la résolution du système $A^tAX = A^tB$. Et si le rang de A est égal au nombre de variables (qui est égal au nombre de colonnes de A), alors cette solution est unique.

On se propose dans cet exercice de déterminer le polynôme de degré 2 qui approxime au mieux, au sens des moindres carrés, l'évolution de la température à Villeneuve d'Ascq pendant un mois.

a) Le fichier `temperatures.dat` contient les valeurs[1] de la température relevées à midi chaque jour à Villeneuve d'Ascq au mois de janvier 2015. Stocker ces données dans un vecteur colonne `temp`.

b) On cherche le polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de meilleure approximation au sens des moindres carrés de cette évolution, c'est-à-dire celui qui réalise le minimum de

$$\sum_{i=1}^{30} |T_i - P(i)|^2,$$

où les T_i sont les températures stockées dans `temp`. Soit `P` le vecteur colonne à trois coordonnées qui contient les coefficients de P. Écrire la matrice `A` du système linéaire `A*P=temp` qui correspond à $P(i) = T_i$ pour $i = 1, \ldots, 30$.

c) Résoudre ce système au sens des moindres carrés et stocker les 30 valeurs approchées de la température dans une variable `apptemp`.

Rappel : Comme vous l'avez appris au S5*, pour résoudre un système de la forme $SX = Y$ il ne faut surtout pas inverser S pour trouver X sous la forme $X = S^{-1}Y$.*

d) Afficher sur un même graphique les valeurs relevées et les valeurs approchées de la température pendant ce mois.

[1] source des données : www.accuweather.com