2014-2015, Licence 3ème année
parcours Mathématiques

M66, Modélisation et analyse numérique

TP4 : Equations Différentielles Ordinaires

Rappel méthodes à un pas

L'objectif des méthodes numériques pour les EDO est de calculer une valeur approchée de la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \ t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, d \geq 1$. Dans la suite, on se limitera au cas autonome : f ne dépendra pas de t.

Afin de calculer une solution approchée de (1) sur un intervalle $[0, T]$, on se donne une subdivision de $[0, T]$, régulière pour simplifier : $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ avec $t_n = nh$ où $h = T/N$ est le pas de la subdivision. On veut calculer une suite $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que u_n soit une "bonne" approximation de $u(t_n)$ (u solution exacte).

Méthode d'Euler explicite : $u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n)$, avec u_0 pour condition initiale.

Méthode d'Euler implicite : $u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1})$, avec u_0 pour condition initiale.

Méthode de Crank-Nicolson : $u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}(f(t_n, u_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}))$, avec u_0 pour condi

Méthodes de Runge-Kutta (RK2) : Euler amélioré (avec $\alpha = \frac{1}{2}$) et Heun (avec $\alpha = 1$) :

$$\begin{cases} k_{n,1} = f(t_n, u_n) \\ k_{n,2} = f(t_n + \alpha h, u_n + \alpha h k_{n,1}) \\ u_{n+1} = u_n + h\Big(\Big(1 - \frac{1}{2\alpha}\Big)k_{n,1} + \frac{1}{2\alpha}k_{n,2}\Big), \end{cases}$$

avec u_0 pour condition initiale.

Méthode de Runge-Kutta (RK4) :

$$\begin{cases} k_{n,1} = f(t_n, u_n) \\ k_{n,2} = f(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}k_{n,1}) \\ k_{n,3} = f(t_{n+1/2}, u_n + \frac{h}{2}k_{n,2}) \\ k_{n,4} = f(t_{n+1}, u_n + hk_{n,3}) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\Big(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}\Big), \end{cases}$$

avec u_0 pour condition initiale.

Pour les méthodes implicites, il faut aussi programmer la méthode de Newton pour résoudre l'équation $\Phi(Y) = 0$ (équation non linéaire scalaire ou vectorielle).

La méthode d'Euler explicite

Exercice 1 La méthode d'Euler explicite : le cas scalaire

a) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = -10y(t), \quad t \in [0,1], \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

En programmant la méthode d'Euler explicite pour la résolution de ce problème, mettre en évidence l'ordre de convergence de la méthode, en prenant le pas de discrétisation uniforme $h = 1/2^k$, $k = 4, \ldots, 10$. En supposant $y \in \mathcal{C}^2$, on rappelle que la méthode d'Euler explicite vérifie :

$$\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \le Ch \sup_{0 \le t \le T} |y^{(2)}(t)|.$$

Tracer dans une figure la solution exacte avec pas $h = 2^{-10}$ et la solution approchée avec différents pas h. Dans une autre figure, tracer la norme infinie de l'erreur commise en échelle "log-log" ainsi qu'une droite de pente 1. Que constatez-vous ?

b) On considère les deux problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 3t, \quad t \in [0,20], \\ y(0) = 1/3. \end{cases} , \qquad \begin{cases} y'(t) = -3y(t) + 3t, \quad t \in [0,20], \\ y(0) = 1/3. \end{cases}$$

Comparer les solutions exactes de ces deux problèmes, puis mettre en évidence pour chacun d'entre eux la sensibilité de la solution numérique par rapport à une petite perturbation dans la condition initiale en effectuant une résolution par la méthode d'Euler explicite (considérer $y(0) = 1/3 + \epsilon$, avec $\epsilon \approx 10^{-15}$ et le pas de discrétisation uniforme $h = 0.01$).

Comparaison de quelques schémas numériques

Exercice 2 Ordres de convergence

On considère l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} y'(t) &= -y(t),\ t \in [0,5], \\ y(0) &= 2. \end{cases}$$

On désire mettre en oeuvre quelques méthodes numériques pour l'approximation de la solution de cette équation différentielle. On se donne h le pas de la subdivision uniforme $(t_n)_{n=0,..N}$ de l'intervalle $[0,5]$, on note $t_n = n\,h$ et y_n une approximation de $y(t_n)$. On rappelle, en supposant $y \in \mathcal{C}^{p+1}$, qu'une méthode numérique est d'ordre de convergence p si :

$$\max_{0\le n\le N} |y_n - y(t_n)| \le Ch^p \sup_{0\le t\le T} |y^{(p+1)}(t)|.$$

a) En plus de la méthode d'Euler explicite déjà implémentée, programmer les méthodes d'Euler amélioré et de Heun.

b) Considérer les méthodes d'Euler implicite, de Crank-Nicolson et de Runge-Kutta 4, fournies dans le fichier `tp_EDO_functions.sci` pour la résolution de cette EDO en prenant le pas de temps $h = 1/2^k$, $k = 4, \ldots, 10$. Mettre en évidence les ordres de convergence de chacune de ces méthodes en traçant la norme infinie de l'erreur commise en échelle "log-log" pour chacune de ces méthodes ainsi que 3 droites respectivement de pente 1, 2 et 4. Que constatez-vous ?

Exercice 3 Et si on explose en temps fini ?

On considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} u'(t) &= u^2(t), \\ u(0) &= 1. \end{cases}$$

a) Donner la solution maximale de cette équation différentielle.

b) Donner explicitement la valeur de u_{n+1} en fonction de u_n lorsque cette équation différentielle est résolue avec le schéma d'Euler implicite. Quelle restriction doit-on observer sur le pas de temps h ? Proposer alors une stratégie mettant en oeuvre un pas de temps variable, qui détecte l'explosion de la solution et s'arrête à temps avant l'obtention d'une erreur d'execution.

c) Donner explicitement la valeur de u_{n+1} en fonction de u_n lorsque cette équation différentielle est résolue avec le schéma de Crank-Nicolson. Quelle restriction doit-on observer sur le pas de temps h ? Proposer alors une stratégie mettant en oeuvre un pas de temps variable, qui détecte l'explosion de la solution et s'arrête à temps avant l'obtention d'une erreur d'execution.

d) Programmer le schéma d'Euler explicite avec un pas de temps variable. Soit $h_0 = 0.01$ et $\mu = 10^{-4}$. On fixe un encadrement $[h_{min}, h_{max}] = [0.1h_0, 5h_0]$ et on choisit $h_n \in [h_{min}, h_{max}]$ selon le critère :
(1) si $\frac{\mu}{3} \leq \frac{|e_n^*|}{h_n} \leq \mu$, alors $h_{n+1} = h_n$;
(2) si $\frac{|e_n^*|}{h_n} < \frac{\mu}{3}$, alors $h_{n+1} = \min(1.1h_n, h_{max})$;
(3) si $\frac{|e_n^*|}{h_n} > \mu$, alors $h_{n+1} = \max(0.9h_n, h_{min})$.
Pour calculer e_n^*, approximation de l'erreur à l'étape n, il faut :
(1) évaluer $p_n = f(t_n, y_n)$ et $p_{n+1} = f(t_n + h_n, y_n + h_n p_n)$;
(2) calculer l'approximation de l'erreur $\frac{e_n^*}{h_n} = \frac{(p_{n+1} - p_n)}{2}$.
On remarque que ceci ne nécessite aucun calcul supplémentaire car p_{n+1} est de toute façon nécessaire pour l'étape suivante.

e) Comparer les différents schémas. Quels sont les avantages et inconvénients de chacun d'entre eux ? D'après les erreurs numériques observées, quel vous semble le schéma le plus adapté pour la résolution de cette équation différentielle ?

Systèmes différentiels à coefficients constants

Exercice 4 Les problèmes raides

On considère le système :

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_2(t), \\ y_2'(t) &= -\lambda_1 \lambda_2 y_1(t) + (\lambda_1 + \lambda_2) y_2(t), \end{cases}$$

avec $y_1(0) = y_{1,0}$, $y_2(0) = y_{2,0}$, λ_1 et λ_2 deux réels négatifs distincts tels que $|\lambda_1| >> |\lambda_2|$. On cherche à calculer la solution sur $]0, 20[$.

a) Donner la solution analytique du problème.

b) En prenant $\lambda_1 = -100$, $\lambda_2 = -1$, $y_{1,0} = y_{2,0} = 1$, résoudre le problème par la méthode d'Euler explicite en prenant d'abord $h = 0.0207$ puis $h = 0.0194$ et $h = 0.01$. Que constatez-vous ? Résoudre le même problème par la méthode d'Euler implicite en prenant $h = 0.1$. Que constatez-vous ?

Exercice 5 Modèle de Lotka-Volterra

On veut appliquer les méthodes d'Euler explicite, d'Euler implicite, d'Euler amélioré, de Heun, de Crank-Nicolson et de Runge-Kutta 4 à la résolution du modèle de Lotka-Volterra :

$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = x_0,\ y(0) = y_0.$$

Pour la simulation numérique, on pourra prendre :

$$a = 3,\ b = 1,\ c = 2,\ d = 1,\ x_0 = 1,\ y_0 = 2.$$

a) Calculer la solution sur l'intervalle $[0, T], T = 10$ avec un pas de discrétisation constant $h = 0.05$. Représenter la solution numérique de chaque méthode dans le plan de phase (x, y) (repérer par un $\oplus$ la condition initiale). Commenter les résultats.

b) On veut comparer les méthodes d'Euler amélioré, de Heun, de Crank-Nicolson et de Runge-Kutta 4 sur l'intervalle $[0, T], T = 100$. Pour faire cela, traçer l'évolution en temps de l'intégrale première $H(x, y) = dx - c \ln x + by - a \ln y$, avec un pas de discrétisation constant $h = 0.05$. Discuter de la stabilité de ces méthodes quand le temps T devient grand.