# TD1 : Géométrie plane

## Le plan euclidien

*Le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathcal{P}$. Il est muni de la distance euclidienne*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

*pour tous $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dans $\mathcal{P}$.*

**Exercice 1** (Projeté orthogonal)

Soient $A$ un point et $\mathcal{D}$ une droite du plan.

**a)** Montrer qu'il existe une unique droite perpendiculaire[1] à $\mathcal{D}$ passant par $A$. On appelle *projeté orthogonal* de $A$ sur $\mathcal{D}$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et sa perpendiculaire passant par $A$.

**b)** Exprimer les coordonnées du projeté $H$ en fonction de celles de $A$ et d'une équation de $\mathcal{D}$.

**c)** Montrer que $d(A, H) \leqslant d(A, M)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$, avec égalité si et seulement si $M = H$.

**d)** Étudier l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}(A, r)$.

**Exercice 2** (Inégalité triangulaire)

Soient $A, B, C$ trois points du plan.

**a)** Montrer que si $A$, $B$ et $C$ sont alignés dans cet ordre (c.-à-d. si $B \in [AC]$) alors $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

**b)** Pour $A \neq C$, en considérant le projeté orthogonal de $B$ sur $(AC)$, montrer que

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C),$$

avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$. Et si $A = C$ ?

**c)** Retrouver cette inégalité (et le cas d'égalité) en rappelant que $d(A, B)^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

**d)** Étudier l'intersection des deux cercles $\mathcal{C}(A_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(A_2, r_2)$.

**e)** Sous quelle condition sur les réels $a$, $b$, $c$ existe-t-il un triangle dont les côtés ont pour longueurs $a$, $b$ et $c$ ? Comment se simplifie cette condition si $a \leqslant b$ ? et si $a \leqslant b \leqslant c$ ?

---

1. Deux droites sont perpendiculaires si elles se coupent en formant un angle droit, ou encore si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

**Exercice 3** (Triangle rectangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle en $A$, et soit $H$ le pied de la hauteur issue de $A$ (autrement dit, le projeté orthogonal de $A$ sur $(BC)$). Montrer que

$$BA^2 = BH \cdot BC, \quad CA^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH.$$

*Indication : On pourra utiliser la trigonométrie vue au collège, ou les triangles semblables.*

**Exercice 4** (Triangle isocèle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points $D$ sur $(AB)$, avec $B$ entre $A$ et $D$, et $E$ sur $(BC)$, avec $C$ entre $B$ et $E$, et tels que $BD = CE = AB - BC$.

Montrer que $\triangle ADE$ est un triangle isocèle.

## Nombres constructibles à la règle et au compas

*Un point $M$ du plan est constructible en un pas (sous-entendu à la règle et au compas) à partir d'un ensemble de points $S = \{A_1, \dots, A_k\}$ si c'est un point d'intersection*

- *de deux droites distinctes passant chacune par deux points de $S$,*
- *ou d'une droite passant par deux points distincts de $S$ et d'un cercle centré en un point de $S$ et passant par un autre point de $S$,*
- *ou de deux cercles distincts centrés en des points de $S$ et passant par des points de $S$.*

*Un point $M$ est dit* constructible à partir de $S$ *s'il est constructible en un nombre fini de pas, c'est à dire s'il existe $M_1, M_2, \dots, M_{r-1}, M_r = M$ tels que $M_{i+1}$ est constructible en un pas à partir de $S \cup \{M_1, \dots, M_i\}$ pour tout $i = 1, \dots, r-1$.*

*Un point* constructible *est un point constructible à partir de $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$.*

*Enfin, un nombre réel $x$ est un* nombre constructible *si le point $(x, 0)$ est constructible.*

**Exercice 5** (Premières constructions)

Tracer à la règle et au compas les figures suivantes :

**a)** le symétrique d'un point $A$ par rapport à un point $O$,

**b)** la médiatrice d'un segment $[AB]$ avec $A \neq B$,

**c)** le milieu d'un segment $[AB]$,

**d)** la parallèle à une droite $(AB)$ passant par un point donné,

**e)** la perpendiculaire à une droite $(AB)$ passant par un point donné (attention aux cas particuliers),

**f)** le partage d'un segment en $n$ segments de même longueur,

**g)** la bissectrice d'un angle $\widehat{BAC}$,

**h)** le centre d'un cercle donné,

**i)** le cercle de centre $A$ et de rayon $BC$. *Ainsi on peut ajouter dans la définition de point constructible les cercles centrés en un point déjà construit et de rayon égal à la distance entre deux points déjà construit, ce qui revient à reporter l'écartement du compas.*

**Exercice 6** (Comment dépasser les bords de la feuille)

Soient $\Delta$ et $\Delta'$ deux droites qui se coupent en un point $O$ situé en dehors de la feuille.

**a)** Soit $A$ un point situé sur la feuille. Tracer la droite $(OA)$.

**b)** Tracer la bissectrice de l'angle formé par les deux droites (plus précisement de l'angle saillant formé par les demi-droites de la feuille).

**Exercice 7** (Polygones réguliers)

**a)** Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier.

**b)** Construire un pentagone régulier.
*Indication : On peut calculer la valeur de* $\cos\frac{2\pi}{5}$ *en commençant par remarquer que* $0 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5}$.

**Exercice 8** (Nombres constructibles)

**a)** Montrer qu'un point $(x, y)$ est constructible si et seulement si ses deux coordonnées $x$ et $y$ le sont.

**b)** Montrer que tout point de $\mathbb{Z}^2$ est constructible.

**c)** Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont constructibles. Puis montrer que $\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est constructible.

**d)** Montrer que tout rationnel est constructible.

**Exercice 9** (Structure de l'ensemble des nombres constructibles)

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des nombres réels constructibles.

**a)** Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-corps non trivial de $\mathbb{R}$.

**b)** Montrer que la racine carrée $\sqrt{x}$ d'un réel $> 0$ constructible est encore constructible.

**Exercice 10** (Une caractérisation des nombres constructibles)

**a)** Soit $K$ un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $d \in K$ un nombre strictement positif. Montrer que l'ensemble $K(\sqrt{d})$, défini par $K(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in K\}$, est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient $K$ et $\sqrt{d}$. C'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant $K$ et $\sqrt{d}$.

**b)** Soit $M = (x, y)$ un point constructible en un pas à partir d'un ensemble $S = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Soit $K$ un corps contenant les coordonnées des points $M_1, \ldots, M_n$. Alors il existe $d \in K$, $d > 0$ tel que $x, y \in K(\sqrt{d})$.

**c)** Montrer qu'un nombre réel $x$ est constructible si et seulement s'il existe une suite $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ il existe $d_i \in K_{i-1}$ tel que $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$ et $x \in K_n$.

**Exercice 11** (Une condition nécessaire de constructibilité)

**a)** Soient $K \subset L$ deux corps (on dit que $L$ est une *extension* de $K$). Constater que $L$ est un espace vectoriel sur $K$. On note souvent $[L : K]$ la dimension de $L$ comme espace vectoriel sur $K$, appelée *degré de l'extension* $L/K$. Montrer que si $K \subset L \subset M$ est une tour d'extensions de degrés finis, alors $[M : K] = [M : L][L : K]$.

**b)** Soient $L/K$ une extension de degré $[L : K]$ fini et $x \in L$. Montrer que $x$ est racine d'un polynôme $X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d$ à coefficients dans $K$ (on dit que $x$ est *algébrique* sur $K$), puis qu'il existe un unique polynôme à coefficients dans $K$ unitaire de degré minimal annulant $x$ (appelé *polynôme minimal*). Montrer que le degré de ce polynôme minimal (appelé *degré* de $x$ sur $K$) divise $[L : K]$.

**c)** En déduire, en utilisant l'exercice 10, que si $x$ est un réel constructible, alors le degré de $x$ sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.

**Exercice 12** (Résolution de quatre problèmes grecs)

Les Grecs avaient laissé quatre problèmes de construction à la règle et au compas non résolus : *quadrature du cercle*, *duplication du cube*, *trisection de l'angle* et *construction des polygones réguliers*.

La condition nécessaire précédente permet de montrer l'impossibilité de ces constructions.

**a)** (*Quadrature du cercle*) Construire un carré de même aire qu'un disque donné.

(i) Montrer que cela revient à construire le nombre $\sqrt{\pi}$.

(ii) Le théorème de Lindemann assure que $\pi$ est *transcendant*, c.-à-d. non algébrique. En déduire que la quadrature du cercle est impossible.

**b)** (*Duplication du cube*) Partant d'un cube de volume donné, construire un cube de volume double.

(i) Montrer que cela revient à construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

(ii) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique et calculer son degré. Conclure.

**c)** (*Trisection de l'angle*) Partager un angle en trois angles égaux.

(i) Montrer que trisecter l'angle $\frac{\pi}{3}$ revient à construire $\cos(\frac{\pi}{9})$.

(ii) Montrer que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. En déduire que $2\cos\frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 3X - 1$.

(iii) Montrer que $P$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. Conclure.

**d)** (*Construction des polygones réguliers*) Construire le polygone régulier à $n$ côtés.

(i) Montrer que construire l'heptagone régulier revient à construire $\cos\frac{2i\pi}{7}$.

(ii) Montrer que $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{6\pi}{7} = 0$ (considérer $\sum_{k=0}^{6} e^{\frac{2ik\pi}{7}}$). En déduire que $\cos\frac{2i\pi}{7}$ est racine du polynôme $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

(iii) Montrer que $P$ n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. En déduire que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.