
TD3 : GÉOMÉTRIE PLANE

On se place dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$.

Propriétés basiques – Cours

Exercice 1

Montrer que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Exercice 2 (Médiatrice)

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Exercice 3 (Bissectrice et longueurs)

Soit M le pied de la bissectrice issue de A dans un triangle ABC (c.-à-d. le point d'intersection de cette bissectrice et du côté opposé $[BC]$). Montrer que $\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC}$.

Exercice 4 (Parallélogrammes)

- a) Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ se rencontrent.
- b) Montrer que pour un quadrilatère convexe $ABCD$ les conditions suivantes sont équivalentes :
 - (i) c'est un parallélogramme ;
 - (ii) les angles opposés sont égaux ;
 - (iii) les côtés opposés sont égaux ;
 - (iv) deux côtés opposés sont parallèles et égaux ;
 - (v) ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
- c) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle (resp. un losange) si et seulement si ses diagonales sont égales (resp. perpendiculaires).
- d) Montrer que les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. À quelle condition forment-elles un carré ?
- e) Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 5 (Cas de similitude)

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$.

- a) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.
- b) Montrer que de plus les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Exercice 6 (Points remarquables dans le triangle)

Soit ABC un triangle.

- a) Montrer que les trois bissectrices sont concourantes. Montrer que leur point commun est centre d'un *cercle inscrit* dans le triangle ABC , et qu'il n'y a qu'un seul tel centre (et un seul tel cercle).
- b) Montrer que la bissectrice d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont également concourantes.
- c) Montrer que les trois médiatrices du triangle sont concourantes. Montrer que leur point commun est *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC .
- d) Montrer que les trois hauteurs sont concourantes. On appelle *orthocentre* leur point d'intersection.
- e) Montrer que les trois médianes sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle *centre de gravité* ou *barycentre* leur point d'intersection.
- f) Montrer que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés (on appelle *droite d'Euler* la droite passant par ces trois points).

Exercice 7 (Rayons des cercles circonscrit et inscrit)

Soit ABC un triangle.

- a) Exprimer le rayon du cercle circonscrit en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.
- b) Exprimer le rayon du cercle inscrit en fonction du périmètre et de l'aire du triangle.

Dans le triangle

Exercice 8

Soient ABC un triangle et H son orthocentre. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC) . Montrer que H' est sur le cercle circonscrit à ABC .

Exercice 9

Soient ABC un triangle et P , Q , R trois points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR , BRP et CPQ ont un point commun.

Exercice 10 (Carré dans un triangle)

Soit ABC un triangle *aigu* (c.-à-d. dont tous les angles sont aigus).

- Montrer qu'il existe un carré $IJKL$ avec $I \in [AB]$, $J \in [AC]$ et $K, L \in [BC]$. En donner une construction.
- Un tel carré est-il unique ?
- Que se passe-t-il si le triangle a un angle obtus ?

Exercice 11 (Inégalité triangulaire)

Soit ABC un triangle.

- Montrer que si $AB > AC$, alors $\widehat{C} > \widehat{B}$ (on pourra considérer $B' \in [AB]$ tel que $AB' = AC$).
- Montrer qu'on a en fait équivalence : $AB > AC$ si et seulement si $\widehat{C} > \widehat{B}$.
- En déduire l'inégalité triangulaire : dans un triangle, chacun des côtés est plus petit que la somme des deux autres.
- Déduire de la question a qu'un disque est convexe.

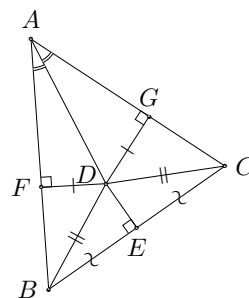
Exercice 12 (Triangle orthique)

Soit ABC un triangle. On note respectivement H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A , B et C . Montrer que les bissectrices du triangle $H_A H_B H_C$ sont les hauteurs du triangle ABC .

Exercice 13 (Tout triangle est isocèle)

On donne ici un argument pour établir que tout triangle est isocèle (dû à W.W. Rouse Ball). Soit $\triangle ABC$ un triangle quelconque. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} avec la médiatrice du côté opposé $[BC]$. Soient E , F et G les projetés orthogonaux de D sur $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.

- Montrer que $DF = DG$ et $AF = AG$.
- Montrer que $DB = DC$, puis que $FB = GC$.
- En déduire que ABC est isocèle, puis qu'il est équilatéral.
- Comment expliquer cela ?



On note $\text{aire}(P)$ l'aire d'une figure P .

Exercice 14

Soit T un triangle inclus dans un rectangle R . Montrer que $\text{aire}(T) \leq \frac{1}{2} \text{aire } R$.

Exercice 15 (Théorèmes de Gergonne et de Céva)

Soient ABC un triangle et A' , B' , C' trois points de (BC) , (AC) et (AB) .

- a) Si (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point M intérieur au triangle ABC , alors on a la relation de Gergonne

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1.$$

Indication : Interpréter les rapports comme des rapports d'aires.

- b) Les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si la relation de Céva

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 16 (Formule de Héron)

- a) Montrer que l'aire d'un triangle ABC de côtés de longueurs a , b et c et de demi-périmètre $p = \frac{1}{2}a + b + c$ est

$$\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Indication : Exprimer $\sin^2(\widehat{A})$.

- b) En déduire une expression du rayon du cercle inscrit en fonction des longueurs des côtés.

Exercice 17 (Partage de trapèze)

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base CD et de petite base AB . Construire un point M de $[CD]$ tel que (AP) partage le trapèze en deux parties de même aire.

Exercice 18 (Rosace)

Calculer l'aire de la rosace à 6 feuilles construite au compas.

Exercice 19

Deux disques Δ_1 et Δ_2 de même rayon sont tangents extérieurement et tangents à une même droite \mathcal{D} . Calculer l'aire du disque Δ tangent à la fois à Δ_1 , Δ_2 et \mathcal{D} .

Exercice 20 (Kangourou 2012)

Un morceau de papier rectangulaire $ABCD$, de taille 4 sur 16, est plié le long de la droite (MN) de sorte que le sommet C coïncide avec le sommet A (voir la figure).

Quelle est l'aire du pentagone $ABMND'$?

