TD1 : Géométrie plane

Le plan euclidien

Le plan cartésien $\mathbb{R}^2$ est noté $\mathcal{P}$. Il est muni de la distance euclidienne

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

pour tous $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ dans $\mathcal{P}$.

Exercice 1 (Projeté orthogonal)

Soient A un point et $\mathcal{D}$ une droite du plan.

a) Montrer qu'il existe une unique droite perpendiculaire[1] à $\mathcal{D}$ passant par A. On appelle *projeté orthogonal* de A sur $\mathcal{D}$ le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et sa perpendiculaire passant par A.

b) Exprimer les coordonnées du projeté H en fonction de celles de A et d'une équation de $\mathcal{D}$.

c) Montrer que $d(A,H) \leqslant d(A,M)$ pour tout $M \in \mathcal{D}$, avec égalité si et seulement si $M = H$.

d) Étudier l'intersection d'une droite $\mathcal{D}$ et d'un cercle $\mathcal{C}(A,r)$.

Exercice 2 (Inégalité triangulaire)

Soient A, B, C trois points du plan deux à deux distincts.

a) Montrer que si A, B et C sont alignés dans cet ordre (c.-à-d. si $B \in [AC]$) alors $d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$.

b) En considérant le projeté orthogonal de B sur (AC), montrer que

$$d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C),$$

avec égalité si et seulement si $B \in [AC]$.

c) Retrouver cette inégalité (et le cas d'égalité) en rappelant que $d(A,B)^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

d) Étudier l'intersection des deux cercles $\mathcal{C}(A_1, r_1)$ et $\mathcal{C}(A_2, r_2)$.

e) Sous quelle condition sur les réels a, b, c existe-t-il un triangle dont les côtés ont pour longueurs a, b et c ? Comment se simplifie cette condition si $a \leqslant b$? et si $a \leqslant b \leqslant c$?

1. Deux droites sont perpendiculaires si elles se coupent en formant un angle droit, ou encore si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

Exercice 3 (Triangle rectangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle rectangle en A, et soit H le pied de la hauteur issue de A (autrement dit, le projeté orthogonal de A sur (BC)). Montrer que

$$BA^2 = BH \cdot BC, \quad CA^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH.$$

Indication : On pourra utiliser la trigonométrie vue au collège, ou les triangles semblables.

Exercice 4 (Triangle isocèle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D sur (AB), avec B entre A et D, et E sur (BC), avec C entre B et E, et tels que $BD = CE = AB - BC$.

Montrer que $\triangle ADE$ est un triangle isocèle.

Nombres constructibles à la règle et au compas

Un point M du plan est constructible en un pas (sous-entendu à la règle et au compas) à partir d'un ensemble de points $S = \{A_1, \ldots, A_k\}$ si c'est un point d'intersection

— *de deux droites distinctes passant chacune par deux points de S,*
— *ou d'une droite passant par deux points distincts de S et d'un cercle centré en un point de S et passant par un autre point de S,*
— *ou de deux cercles distincts centrés en des points de S et passant par des points de S.*

Un point M est dit constructible à partir de S *s'il est constructible en un nombre fini de pas, c'est à dire s'il existe $M_1, M_2, \ldots, M_{r-1}, M_r = M$ tels que M_{i+1} est constructible en un pas à partir de $S \cup \{M_1, \ldots, M_i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, r-1$.*

Un point constructible *est un point constructible à partir de $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$.*

Enfin, un nombre réel x est un nombre constructible *si le point $(x, 0)$ est constructible.*

Exercice 5 (Premières constructions)

Tracer à la règle et au compas les figures suivantes :

a) le symétrique d'un point A par rapport à un point O,

b) le milieu d'un segment $[AB]$,

c) la médiatrice d'un segment $[AB]$,

d) la parallèle à une droite (AB) passant par un point donné,

e) la perpendiculaire à une droite (AB) passant par un point donné (attention aux cas particuliers),

f) le partage d'un segment en n segments de même longueur,

g) la bissectrice d'un angle $\widehat{BAC}$,

h) le centre d'un cercle donné,

i) le cercle de centre A et de rayon BC. *Ainsi on peut ajouter dans la définition de point constructible les cercles centrés en un point déjà construit et de rayon égal à la distance entre deux points déjà construit, ce qui revient à reporter l'écartement du compas.*

Exercice 6 (Comment dépasser les bords de la feuille)

Soient Δ et Δ' deux droites qui se coupent en un point O situé en dehors de la feuille.

a) Soit A un point situé sur la feuille. Tracer la droite (OA).

b) Tracer la bissectrice de l'angle formé par les deux droites (plus précisement de l'angle saillant formé par les demi-droites de la feuille).

Exercice 7 (Polygones réguliers)

a) Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier.

b) Construire un pentagone régulier.
Indication : On peut calculer la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$ *en commençant par remarquer que* $0 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 8 (Nombres constructibles)

a) Montrer qu'un point (x, y) est constructible si et seulement si ses deux coordonnées x et y le sont.

b) Montrer que tout point de $\mathbb{Z}^2$ est constructible.

c) Montrer que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ sont constructibles. Puis montrer que $\sqrt{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ est constructible.

d) Montrer que tout rationnel est constructible.

Exercice 9 (Structure de l'ensemble des nombres constructibles)

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des nombres réels constructibles.

a) Montrer que $\mathcal{K}$ est un sous-corps non trivial de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la racine carrée $\sqrt{x}$ d'un réel > 0 constructible est encore constructible.

Exercice 10 (Une caractérisation des nombres constructibles)

a) Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et $d \in K$ un nombre strictement positif. Montrer que l'ensemble $K(\sqrt{d})$, défini par $K(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in K\}$, est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient K et $\sqrt{d}$. C'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ contenant K et $\sqrt{d}$.

b) Soit $M = (x, y)$ un point constructible en un pas à partir d'un ensemble $S = \{M_1, \ldots, M_n\}$. Soit K un corps contenant les coordonnées des points $M_1, \ldots, M_n$. Alors il existe $d \in K$, $d > 0$ tel que $x, y \in K(\sqrt{d})$.

c) Montrer qu'un nombre réel x est constructible si et seulement s'il existe une suite $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ de sous-corps de $\mathbb{R}$ tels que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ il existe $d_i \in K_{i-1}$ tel que $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$ et $x \in K_n$.

Exercice 11 (Une condition nécessaire de constructibilité)

a) Soient $K \subset L$ deux corps (on dit que L est une *extension* de K). Constater que L est un espace vectoriel sur K. On note souvent $[L : K]$ la dimension de L comme espace vectoriel sur K, appelée *degré de l'extension* L/K. Montrer que si $K \subset L \subset M$ est une tour d'extensions de degrés finis, alors $[M : K] = [M : L][L : K]$.

b) Soient L/K une extension de degré $[L : K]$ fini et $x \in L$. Montrer que x est racine d'un polynôme $X^d + a_1X^{d-1} + \cdots + a_d$ à coefficients dans K (on dit que x est *algébrique* sur K), puis qu'il existe un unique polynôme à coefficients dans K unitaire de degré minimal annulant x (appelé *polynôme minimal*). Montrer que le degré de ce polynôme minimal (appelé *degré* de x sur K) divise $[L : K]$.

c) En déduire, en utilisant l'exercice 10, que si x est un réel constructible, alors le degré de x sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.

Exercice 12 (Résolution de quatre problèmes grecs)

Les Grecs avaient laissé quatre problèmes de construction à la règle et au compas non résolus : *quadrature du cercle*, *duplication du cube*, *trisection de l'angle* et *construction des polygones réguliers*.

La condition nécessaire précédente permet de montrer l'impossibilité de ces constructions.

a) (*Quadrature du cercle*) Construire un carré de même aire qu'un disque donné.

(i) Montrer que cela revient à construire le nombre $\sqrt{\pi}$.

(ii) Le théorème de Lindemann assure que π est *transcendant*, c.-à-d. non algébrique. En déduire que la quadrature du cercle est impossible.

b) (*Duplication du cube*) Partant d'un cube de volume donné, construire un cube de volume double.

(i) Montrer que cela revient à construire le nombre $\sqrt[3]{2}$.

(ii) Montrer que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique et calculer son degré. Conclure.

c) (*Trisection de l'angle*) Partager un angle en trois angles égaux.

(i) Montrer que trisecter l'angle $\frac{\pi}{3}$ revient à construire $\cos(\frac{\pi}{9})$.

(ii) Montrer que $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$. En déduire que $2\cos\frac{\pi}{9}$ est racine du polynôme $P(X) = X^3 - 3X - 1$.

(iii) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. Conclure.

d) (*Construction des polygones réguliers*) Construire le polygone régulier à n côtés.

(i) Montrer que construire l'heptagone régulier revient à construire $\cos\frac{2i\pi}{7}$.

(ii) Montrer que $1 + 2\cos 2\pi 7 + 2\cos 4\pi 7 + 2\cos 6\pi 7 = 0$ (considérer $\sum_{k=0}^{6} e^{\frac{2ik\pi}{7}}$). En déduire que $\cos\frac{2i\pi}{7}$ est racine du polynôme $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

(iii) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$. En déduire que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.