TD3 : Géométrie plane

On se place dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$.

Propriétés basiques – Cours

Exercice 1

Montrer que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Exercice 2 (Médiatrice)

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Exercice 3 (Bissectrice et longueurs)

Soit M le pied de la bissectrice issue de A dans un triangle ABC (c.-à-d. le point d'intersection de cette bissectrice et du côté opposé $[BC]$).

a) Montrer l'égalité des rapports $AB : AC = MB : MC$.

b) Montrer que le bissectrice AM coupe le cercle circonscrit en un point P qui est sur la médiatrice.

c) Montrer que $AM^2 = AB \times AC - MB \times MC$

Exercice 4 (Parallélogrammes)

a) Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les segments $[AC]$ et $[BD]$ se rencontrent.

b) Montrer que pour un quadrilatère convexe $ABCD$ les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) c'est un parallélogramme ;

(ii) les angles opposés sont égaux ;

(iii) les côtés opposés sont égaux ;

(iv) deux côtés opposés sont parallèles et égaux ;

(v) ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.

c) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle (resp. un losange) si et seulement si ses diagonales sont égales (resp. perpendiculaires).

d) Montrer que les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. À quelle condition forment-elles un carré ?

e) Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 5 (Quadrilatère inscrit)

Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

a) Montrer que si $ABCD$ est inscrit dans un cercle, alors $ABCD$ est convexe et ces diagonales se coupent en un point.

b) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

— $ABCD$ est inscrit dans un cercle.
— $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ (ou $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$).
— $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et $AS \times SC = BS \times SD$.
— $AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$ (c'est le *théorème de Ptolémée*).

Exercice 6 (Cas de similitude)

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$.

a) Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

b) Montrer que de plus les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Exercice 7 (Points remarquables dans le triangle)

Soit ABC un triangle.

a) Montrer que les trois bissectrices sont concourantes. Montrer que leur point commun est centre d'un *cercle inscrit* dans le triangle ABC, et qu'il n'y a qu'un seul tel centre (et un seul tel cercle).

b) Montrer que la bissectrice d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont également concourantes.

c) Montrer que les trois médiatrices du triangle sont concourantes. Montrer que leur point commun est *centre du cercle circonscrit* au triangle ABC.

d) Montrer que les trois hauteurs sont concourantes. On appelle *orthocentre* leur point d'intersection.

e) Montrer que les trois médianes sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle *centre de gravité* ou *barycentre* leur point d'intersection.

f) Montrer que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés (on appelle *droite d'Euler* la droite passant par ces trois points).

Exercice 8 (Rayons des cercles circonscrit et inscrit)

Soit ABC un triangle.

a) Exprimer le rayon du cercle circonscrit en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.

b) Exprimer le rayon du cercle inscrit en fonction du périmètre et de l'aire du triangle.

Dans le triangle

Exercice 9

Soient ABC un triangle et H son orthocentre. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC) Montrer que H' est sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 10

Soient ABC un triangle et P, Q, R trois points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, BRP et CPQ ont un point commun.

Exercice 11 (Carré dans un triangle)

Soit ABC un triangle *aigu* (c.-à-d. dont tous les angles sont aigus).

a) Montrer qu'il existe un carré $IJKL$ avec $I \in [AB]$, $J \in [AC]$ et $K, L \in [BC]$. En donner une construction.

b) Un tel carré est-il unique ?

c) Que se passe-t-il si le triangle a un angle obtus ?

Exercice 12 (Inégalité triangulaire)

Soit ABC un triangle.

a) Montrer que si $AB > AC$, alors $\widehat{C} > \widehat{B}$ (on pourra considérer $B' \in [AB]$ tel que $AB' = AC$).

b) Montrer qu'on a en fait équivalence : $AB > AC$ si et seulement si $\widehat{C} > \widehat{B}$.

c) En déduire l'inégalité triangulaire : dans un triangle, chacun des côtés est plus petit que la somme des deux autres.

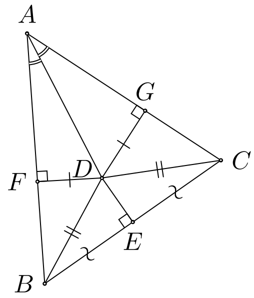
d) Déduire de la question a qu'un disque est convexe.

Exercice 13 (Triangle orthique)

Soit ABC un triangle. On note respectivement H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C. Montrer que les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$ sont les hauteurs du triangle ABC.

Exercice 14 (Tout triangle est isocèle)

On donne ici un argument pour établir que tout triangle est isocèle (dû à W.W. Rouse Ball). Soit $\triangle ABC$ un triangle quelconque. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice du côté opposé $[BC]$. Soient E, F et G les projetés orthogonaux de D sur $[BC]$,$[AB]$ et $[AC]$.



a) Montrer que $DF = DG$ et $AF = AG$.

b) Montrer que $DB = DC$, puis que $FB = GC$.

c) En déduire que ABC est isocèle, puis qu'il est équilatéral.

d) Comment expliquer cela ?

Cercles, angles et longueurs

Exercice 15 (Puissance d'un point)

Soient M un point et $\mathcal{C}$ un cercle. On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par P et qui rencontre $\mathcal{C}$ en deux points (pas forcement distincts) S et T.

a) Montrer que la quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dépend pas du choix de la droite $\mathcal{D}$.

Pour la suite on note cette quantité $P_{\mathcal{C}}(M)$ *et on l'appelle* puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$.

b) Étant donnée un cercle $\mathcal{C}$, déterminer le signe de $P_{\mathcal{C}}(M)$ en fonction de la position de M.

c) Montrer que l'ensemble des points à égale puissance par rapport à deux cercles données est une droite (appeler *axe radical* de ces deux cercles).

d) Déterminer l'axe radicale dans le cas de deux cercles qui s'intersectent.

e) Quelle droite «connue» généralise l'axe radicale.

f) Étant données deux cercles, construire à la règle et compas l'axe radicale.

Exercice 16 (Angle entre deux cercles)

Soient deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centre respectifs O_1 et O_2 qui se rencontre en un point S. On définit (la mesure de) l'angle entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ comme étant égale à $\widehat{O_1MO_2}$.

a) Quelle est l'angle entre deux cercles tangent extérieurement ?

b) Quelle est l'angle entre deux cercles tangent intérieurement ?

c) Soit un cercle $\mathcal{C}$ et un point M extérieur à $\mathcal{C}$. Montrer qu'il existe un cercle de centre M qui est orthogonal[1] à $\mathcal{C}$.

d) Étant donnés deux cercles, déterminer l'ensemble des centres des cercles orthogonaux à ces deux cercles.

1. Qui fait un angle de $\pi/2$ avec $\mathcal{C}$

e) Étant donnés trois cercles en position générale, montrer qu'il existe un unique cercle qui est orthogonal aux trois.

Utilisation des aires

On note $\mathrm{aire}(P)$ *l'aire d'une figure* P.

Exercice 17

Soit T un triangle inclus dans un rectangle R. Montrer que $\mathrm{aire}(T) \leqslant \frac{1}{2} \,\mathrm{aire}\, R$.

Exercice 18 (Théorèmes de Gergonne et de Céva)

Soient ABC un triangle et A', B', C' trois points de (BC), (AC) et (AB).

a) Si (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en un point M intérieur au triangle ABC, alors on a la relation de Gergonne

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1.$$

Indication : Interpréter les rapports comme des rapports d'aires.

b) Les trois droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si la relation de Céva

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 19 (Formule de Héron)

a) Montrer que l'aire d'un triangle ABC de côtés de longueurs a, b et c et de demi-périmètre $p = \frac{1}{2}a + b + c$ est

$$\mathrm{aire}\,(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Indication : Exprimer $\sin^2(\widehat{A})$.

b) En déduire une expression du rayon du cercle inscrit en fonction des longueurs des côtés.

Exercice 20 (Partage de trapèze)

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base CD et de petite base AB. Construire un point M de $[CD]$ tel que (AP) partage le trapèze en deux parties de même aire.

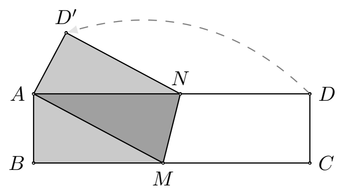
Exercice 21 (Rosace)

Calculer l'aire de la rosace à 6 feuilles construite au compas.

Exercice 22

Deux disques Δ_1 et Δ_2 de même rayon sont tangents extérieurement et tangents à une même droite $\mathcal{D}$. Calculer l'aire du disque Δ tangent à la fois à Δ_1, Δ_2 et $\mathcal{D}$.

Exercice 23 (Kangourou 2012)



Un morceau de papier rectangulaire $ABCD$, de taille 4 sur 16, est plié le long de la droite (MN) de sorte que le sommet C coïncide avec le sommet A (voir la figure).

Quelle est l'aire du pentagone $ABMND'$?