

## TD1 : GÉOMÉTRIE PLANE

## Le plan euclidien

Le plan cartésien  $\mathbb{R}^2$  est noté  $\mathcal{P}$ . Il est muni de la distance euclidienne

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

pour tous  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  dans  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 1** (Projeté orthogonal)

Soient  $A$  un point et  $\mathcal{D}$  une droite du plan.

- Montrer qu'il existe une unique droite perpendiculaire<sup>1</sup> à  $\mathcal{D}$  passant par  $A$ . On appelle *projeté orthogonal* de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  le point d'intersection de  $\mathcal{D}$  et sa perpendiculaire passant par  $A$ .
- Exprimer les coordonnées du projeté  $H$  en fonction de celles de  $A$  et d'une équation de  $\mathcal{D}$ .
- Montrer que  $AH \leq AM$  pour tout  $M \in \mathcal{D}$ , avec égalité si et seulement si  $M = H$ .
- Étudier l'intersection d'une droite  $\mathcal{D}$  et d'un cercle  $\mathcal{C}(A, r)$ .
- Montrer que quand  $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}(A, r) = \{H\}$  (resp.  $\{M, N\}$ ), alors le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{D}$  est  $H$  (resp. le milieu de  $[M, N]$ ).

**Exercice 2** (Inégalité triangulaire)

Soient  $A, B, C$  trois points du plan.

- Donner une paramétrisation de droite  $(AC)$ .
- Montrer que si  $A \in (BC)$ , alors  $AB + BC \geq AC$  avec égalité si et seulement si  $A \in [BC]$ .
- Pour  $A \neq C$ , en considérant le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(AC)$ , montrer que

$$AC \leq AB + BC,$$

avec égalité si et seulement si  $B \in [AC]$ . Et si  $A = C$ ?

- Retrouver cette inégalité (et le cas d'égalité) en rappelant que  $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ .
- Étudier l'intersection des deux cercles  $\mathcal{C}(A_1, r_1)$  et  $\mathcal{C}(A_2, r_2)$ .
- Sous quelle condition sur les réels  $a, b, c$  existe-t-il un triangle dont les côtés ont pour longueurs  $a, b$  et  $c$ ? Comment se simplifie cette condition si  $a \leq b$ ? et si  $a \leq b \leq c$ ?

1. Deux droites sont perpendiculaires si elles se coupent en formant un angle droit, ou encore si tout vecteur directeur de l'une est orthogonal à tout vecteur directeur de l'autre.

### Exercice 3 (Triangle rectangle)

Soit  $\triangle ABC$  un triangle rectangle en  $A$ , et soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$  (autrement dit, le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ ). Montrer que

$$BA^2 = BH \cdot BC, \quad CA^2 = CH \cdot CB, \quad AH^2 = BH \cdot CH.$$

*Indication : On pourra utiliser la trigonométrie vue au collège, ou les triangles semblables.*

### Exercice 4 (Triangle isocèle)

Soit  $\triangle ABC$  un triangle isocèle avec  $AB = AC > BC$ . On porte des points  $D$  sur  $(AB)$ , avec  $B$  entre  $A$  et  $D$ , et  $E$  sur  $(BC)$ , avec  $C$  entre  $B$  et  $E$ , et tels que  $BD = CE = AB - BC$ .

Montrer que  $\triangle ADE$  est un triangle isocèle.

## Nombres constructibles à la règle et au compas

Un point  $M$  du plan est constructible en un pas (sous-entendu à la règle et au compas) à partir d'un ensemble de points  $S = \{A_1, \dots, A_k\}$  si c'est un point d'intersection

- de deux droites distinctes passant chacune par deux points de  $S$ ,
- ou d'une droite passant par deux points distincts de  $S$  et d'un cercle centré en un point de  $S$  et passant par un autre point de  $S$ ,
- ou de deux cercles distincts centrés en des points de  $S$  et passant par des points de  $S$ .

Un point  $M$  est dit constructible à partir de  $S$  s'il est constructible en un nombre fini de pas, c'est à dire s'il existe  $M_1, M_2, \dots, M_{r-1}, M_r = M$  tels que  $M_{i+1}$  est constructible en un pas à partir de  $S \cup \{M_1, \dots, M_i\}$  pour tout  $i = 1, \dots, r-1$ .

Un point constructible est un point constructible à partir de  $O = (0, 0)$  et  $I = (1, 0)$ .

Enfin, un nombre réel  $x$  est un nombre constructible si le point  $(x, 0)$  est constructible.

### Exercice 5 (Premières constructions)

Tracer à la règle et au compas les figures suivantes.

- a) Le symétrique d'un point  $A$  par rapport à un point  $O$ .
- b) La médiatrice d'un segment  $[AB]$  avec  $A \neq B$ .
- c) Le milieu d'un segment  $[AB]$ .
- d) La perpendiculaire à une droite  $(AB)$  passant par un point donné (*attention aux cas particuliers*).
- e) La parallèle à une droite  $(AB)$  passant par un point donné.
- f) Le cercle de centre  $A$  et de rayon  $BC$ . Ainsi on peut ajouter dans la définition de point constructible les cercles centrés en un point déjà construit et de rayon égal à la distance entre deux points déjà construits, ce qui revient à reporter l'écartement du compas.
- g) La bissectrice d'un angle  $\widehat{BAC}$ .
- h) Le partage d'un segment en  $n$  segments de même longueur.

- i) Le centre d'un cercle passant par trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  donnés.

**Exercice 6** (Comment dépasser les bords de la feuille)

Soient  $\Delta$  et  $\Delta'$  deux droites qui se coupent en un point  $O$  situé en dehors de la feuille.

- a) Soit  $A$  un point situé sur la feuille. Tracer la droite  $(OA)$ .
- b) Tracer la bissectrice de l'angle formé par les deux droites (plus précisément de l'angle saillant formé par les demi-droites de la feuille).

**Exercice 7** (Polygones réguliers)

- a) Construire à la règle et au compas un triangle équilatéral, un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier : à partir de deux sommets voisins donnés, ou à partir du centre du cercle circonscrit et d'un sommet donnés.
- b) Construire un pentagone régulier.

*Indication : On peut calculer la valeur de  $\cos \frac{2\pi}{5}$  en commençant par remarquer que  $0 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{\frac{4i\pi}{5}} + e^{\frac{6i\pi}{5}} + e^{\frac{8i\pi}{5}} = 1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5}$ .*

**Exercice 8** (Nombres constructibles)

- a) Montrer qu'un point  $(x, y)$  est constructible si et seulement si ses deux coordonnées  $x$  et  $y$  le sont.
- b) Montrer que tout point de  $\mathbb{Z}^2$  est constructible.
- c) Montrer que si  $A$  et  $B$  sont constructibles, alors la distance  $AB$  est constructible.
- d) Montrer que  $\sqrt{2}$  et  $\sqrt{3}$  sont constructibles. Puis montrer que  $\sqrt{n}$  pour  $n \in \mathbb{N}$  est constructible.
- e) Montrer que tout rationnel est constructible.

**Exercice 9** (Structure de l'ensemble des nombres constructibles)

Soit  $\mathcal{K}$  l'ensemble des nombres réels constructibles.

- a) Montrer que  $\mathcal{K}$  est un sous-corps non trivial de  $\mathbb{R}$ .
- b) Montrer que la racine carrée  $\sqrt{x}$  d'un réel  $> 0$  constructible est encore constructible.

**Exercice 10** (Une caractérisation des nombres constructibles)

- a) Soit  $K$  un sous-corps de  $\mathbb{R}$  et  $d \in K$  un nombre strictement positif. Montrer que l'ensemble  $K(\sqrt{d})$ , défini par  $K(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d}, a, b \in K\}$ , est un sous-corps de  $\mathbb{R}$  qui contient  $K$  et  $\sqrt{d}$ . C'est le plus petit sous-corps de  $\mathbb{R}$  contenant  $K$  et  $\sqrt{d}$ .
- b) Soit  $M = (x, y)$  un point constructible en un pas à partir d'un ensemble  $S = \{M_1, \dots, M_n\}$ . Soit  $K$  un corps contenant les coordonnées des points  $M_1, \dots, M_n$ . Alors il existe  $d \in K$ ,  $d > 0$  tel que  $x, y \in K(\sqrt{d})$ .

- c) Montrer qu'un nombre réel  $x$  est constructible si et seulement s'il existe une suite  $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$  de sous-corps de  $\mathbb{R}$  tels que pour tout  $i = 1, 2, \dots, n$  il existe  $d_i \in K_{i-1}$  tel que  $K_i = K_{i-1}(\sqrt{d_i})$  et  $x \in K_n$ .

**Exercice 11** (Une condition nécessaire de constructibilité)

- a) Soient  $K \subset L$  deux corps (on dit que  $L$  est une *extension* de  $K$ , et on note  $L/K$ ). Constater que  $L$  est un espace vectoriel sur  $K$ . On note souvent  $[L : K]$  la dimension de  $L$  comme espace vectoriel sur  $K$ , appelée *degré de l'extension*  $L/K$ . Montrer que si  $K \subset L \subset M$  est une tour d'extensions de degrés finis, alors  $[M : K] = [M : L][L : K]$ .
- b) Soient  $L/K$  une extension de degré  $[L : K]$  fini et  $x \in L$ . Montrer que  $x$  est racine d'un polynôme  $X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d$  à coefficients dans  $K$  (on dit que  $x$  est *algébrique* sur  $K$ ), puis qu'il existe un unique polynôme à coefficients dans  $K$  unitaire de degré minimal annulant  $x$  (appelé *polynôme minimal*). Montrer que le degré de ce polynôme minimal (appelé *degré de  $x$  sur  $K$* ) divise  $[L : K]$ .
- c) En déduire, en utilisant l'exercice 10, que si  $x$  est un réel constructible, alors le degré de  $x$  sur  $\mathbb{Q}$  est une puissance de 2.

**Exercice 12** (Résolution de quatre problèmes grecs)

Les Grecs avaient laissé quatre problèmes de construction à la règle et au compas non résolus : *quadrature du cercle*, *duplication du cube*, *trisection de l'angle* et *construction des polygones réguliers*.

La condition nécessaire précédente permet de montrer l'impossibilité de ces constructions.

- a) (*Quadrature du cercle*) Construire un carré de même aire qu'un disque donné.
- Montrer que cela revient à construire le nombre  $\sqrt{\pi}$ .
  - Le théorème de Lindemann assure que  $\pi$  est *transcendant*, c.-à-d. non algébrique. En déduire que la quadrature du cercle est impossible.
- b) (*Duplication du cube*) Partant d'un cube de volume donné, construire un cube de volume double.
- Montrer que cela revient à construire le nombre  $\sqrt[3]{2}$ .
  - Montrer que  $\sqrt[3]{2}$  est un nombre algébrique et calculer son degré. Conclure.
- c) (*Trisection de l'angle*) Partager un angle en trois angles égaux.
- Montrer que « trisecter » l'angle  $\frac{\pi}{3}$  revient à construire  $\cos(\frac{\pi}{9})$ .
  - Montrer que  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ . En déduire que  $2\cos \frac{\pi}{9}$  est racine du polynôme  $P(X) = X^3 - 3X - 1$ .
  - Montrer que  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$ . Conclure.
- d) (*Construction des polygones réguliers*) Construire le polygone régulier à  $n$  côtés.
- Montrer que construire l'heptagone régulier revient à construire  $\cos \frac{2i\pi}{7}$ .
  - Montrer que  $1 + 2\cos \frac{2\pi}{7} + 2\cos \frac{4\pi}{7} + 2\cos \frac{6\pi}{7} = 0$  (considérer  $\sum_{k=0}^6 e^{\frac{2ik\pi}{7}}$ ). En déduire que  $\cos \frac{2i\pi}{7}$  est racine du polynôme  $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$ .

- (iii) Montrer que  $P$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$ . En déduire que l'heptagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.