

## SOLUTIONS DE L'INTERROGATION

15 mars 2019

[ durée : 2 heures ]

### Exercice 1 (Construction à la règle et compas)

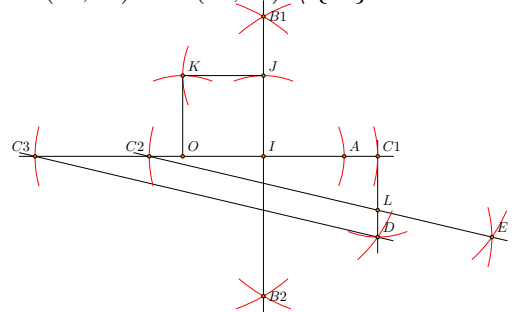
Soient les deux points  $O(0, 0)$  et  $I(1, 0)$  du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Illustrer par un dessin et donner un programme de construction à la règle et au compas à partir de  $O$  et  $I$  :

- des points  $J(1, 1)$  et  $K(1, 0)$  du carré  $OIKJ$  ;
- du point  $L(1 + \sqrt{2}, -\frac{2}{3})$ .

### Solution :

On note  $\mathcal{C}(X, Y)$  le cercle de centre  $X$  passant par  $Y$ ,  $\mathcal{C}(X, YZ)$  le cercle de centre  $X$  et de rayon  $YZ$  (qui est constructible si  $X, Y$  et  $Z$  le sont) et  $\mathcal{C}^*(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y) \setminus \{Y\}$ .

- $A(0, 2) = \mathcal{C}^*(I, O) \cap (IO)$  ;
  - $\{B_1, B_2\} = \mathcal{C}(O, A) \cap \mathcal{C}(A, O)$ ,  
ainsi  $(B_1B_2)$  est la médiatrice de  $[OA]$  ;
  - $\{J(1, 1), J'(1, -1)\} = \mathcal{C}(I, O) \cap (B_1B_2)$  ;
  - $K(0, 1) = \mathcal{C}(O, I) \cap \mathcal{C}(J, I)$  ;
- $\{C_1(1 + \sqrt{2}, 0), C_2(1 - \sqrt{2}, 0)\} = \mathcal{C}(I, K) \cap (OI)$ , car  $IK = \sqrt{2}$  ;
  - $C_3(1 - 2\sqrt{2}, 0) = \mathcal{C}^*(C_2, I) \cap (OI)$  ;
  - $D(1 + \sqrt{2}, -1) = \mathcal{C}(C_1, JI) \cap \mathcal{C}(I, JC_1)$  ;
  - $E = \mathcal{C}(D, C_3C_2) \cap \mathcal{C}(C_2, C_3D)$ , de sorte que  $(C_2E) \parallel (C_3D)$  ;
  - $L(1 + \sqrt{2}, -\frac{2}{3}) = (C_1D) \cap (C_2E)$ , car d'après Thalès  $C_1L = C_1D \frac{C_1C_2}{C_1C_3} = 1 \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$ .



### Exercice 2 (Inégalité triangulaire, isométries)

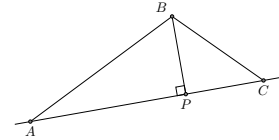
Soient  $A, B, C$  trois points du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ .

- Soient  $A, B$  et  $C$  alignés, montrer que  $AC \leq AB + BC$ , avec égalité si et seulement si  $B \in [AC]$ .
- Soient  $A, B$  et  $C$  non alignés, montrer que  $AC < AB + BC$ .

c) En déduire que les isométries du plan euclidien préservent les alignements des points.

### Solution :

- a) Comme  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $B = (1 - \lambda)A + \lambda C$ . Donc  $\overrightarrow{AB} = B - A = \lambda(C - A) = \lambda\overrightarrow{AC}$ , ainsi  $AB = |\lambda| AC$ . De même  $\overrightarrow{CB} = B - C = (1 - \lambda)(A - C) = (1 - \lambda)\overrightarrow{CA}$ , et donc  $BC = |1 - \lambda| AC$ . Ainsi  $AB + BC = (|\lambda| + |1 - \lambda|)AC$ , et comme  $|\lambda| + |1 - \lambda| \geq 1$  avec égalité si et seulement si  $\lambda \in [0, 1]$ , on trouve que  $AB + BC \geq AC$ , avec égalité si et seulement si  $B \in [AC]$ .
- b) Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  non alignés et  $P$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $(AC)$ . Comme  $BP > 0$ , nous avons d'après Pythagore  $AB > AP$  et  $BC > PC$ . Ainsi  $AB + BC > AP + PC \geq AC$ .
- c) Soient  $f$  une isométrie et  $A$ ,  $B$ ,  $C$  trois points alignés dans cet ordre, avec  $B \in [AC]$ . Nous avons  $f(A)f(B) + f(B)f(C) = AB + BC$  et  $AC = f(A)f(C)$ , car  $f$  est une isométrie, et  $AB + BC = AC$  d'après a). Ainsi  $f(A)f(B) + f(B)f(C) = f(A)f(C)$  et donc, d'après b), les points  $f(A)$ ,  $f(B)$ ,  $f(C)$  sont alignés<sup>1</sup>, en particulier  $f$  préserve l'alignement des points.



### Exercice 3 (Axiomatique)

On rappelle les propriétés d'incidence et d'ordre :

- |   |   |
|---|---|
| (I1) par deux points distincts passe une unique droite,   | (O3) parmi trois points alignés deux à deux distincts, un et un seul d'entre eux est entre les deux autres,   |
| (I2) toute droite contient au moins deux points distincts,  | (O4) soient $A$ , $B$ , et $C$ trois points non alignés et $\mathcal{D}$ une droite ne passant par aucun d'eux. Si $\mathcal{D}$ passe par un point $D$ entre $A$ et $B$ , alors $\mathcal{D}$ passe ou bien par un point entre $A$ et $C$ , ou bien par un point entre $B$ et $C$ , mais pas les deux à la fois. |
| (I3) il existe trois points non alignés,  |   |
| (O1) si $C$ est entre $A$ et $B$ , $B$ et $C$ sont alignés, deux à deux distincts et $C$ est aussi entre $B$ et $A$ , |   |
| (O2) pour tous points distincts $A$ et $B$ il existe un point $C$ tel que $B$ soit entre $A$ et $C$ ,                 |   |

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points non alignés,  $I$  un point entre  $B$  et  $C$ ,  $J$  un point entre  $A$  et  $C$ .

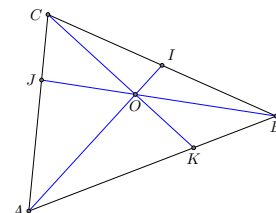
- Montrer que la droite  $(AI)$  est distincte des droites  $(AB)$  et  $(AC)$ .
- Montrer que  $(AI)$  passe par un point  $O$  entre  $B$  et  $J$ .
- Montrer que  $O$  est entre  $A$  et  $I$ .
- Montrer que  $(CO)$  passe par un point  $K$  entre  $A$  et  $B$ , puis que  $O$  est entre  $C$  et  $K$ .

1. dans cet ordre, d'après a)

### Solution :

Comme  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés, les droites  $(AB)$ ,  $(BC)$  et  $(CA)$  sont bien définies. De plus comme  $I$  est aligné avec  $B$  et  $C$ , d'après **(O1)**, alors  $I \neq A$  et donc la droite  $(AI)$  est bien définie. De même, les droites  $(BJ)$  et  $(CK)$  sont bien définies.

- a) Supposons que  $(AI) = (AB)$ , alors  $(AB) \stackrel{(\text{I1})+(\text{O1})}{=} (BI) \stackrel{(\text{O1})}{=} (BC)$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont non alignés, donc  $(AI) \neq (AB)$ . De même  $(AI) \neq (AC)$ .



- b) Remarquons d'abord que la droite  $(AI)$  ne passe par aucun des trois points  $J, C$  et  $B$  car sinon on aurait  $(AI) = (AC)$  ou  $(AI) = (AB)$  en contradiction avec la question précédente. Donc on peut appliquer **(O4)** à la droite  $(AI)$  et les points  $B, J$  et  $C$ . La droite  $(AI)$  ne passe pas entre  $J$  et  $C$ , car sinon  $(AC) = (AI)$  vu qu'on aurait en plus de  $A$  un autre<sup>2</sup> point qui serait sur ces deux droites. Ainsi on trouve que  $(AI)$  passe par un point  $O$  entre  $B$  et  $J$ .
- c) D'après la question précédente, appliquée à  $J$  à la place de  $I$ , on trouve que  $(BJ)$  passe par un point  $O'$  entre  $A$  et  $I$ . Si on suppose que  $O \neq O'$ , on aurait ces deux points sur les droites  $(AI)$  et  $(BJ)$ , qui doivent ainsi coïncider, et donc  $(AI) = (AJ) \stackrel{(\text{O1})}{=} (AC)$  serait en contradiction avec a). Ainsi  $O = O'$  est entre  $A$  et  $I$ .
- d) D'après a) appliqué aux points  $C, A, I$  et  $O$  nous avons  $(CO) \neq (CI) \stackrel{(\text{O1})}{=} (CB)$  et  $(CO) \neq (CA)$ , ainsi  $(CO)$  ne passe par aucun des points  $A, B$  et  $I$ , ni par un point entre  $B$  et  $I$ . Donc on peut appliquer **(O4)** à la droite  $(CO)$  et les points  $A, B$  et  $I$  pour conclure que  $(CO)$  passe par un point  $K$  entre  $A$  et  $B$ . Pour conclure que  $O$  est entre  $C$  et  $K$  il suffit d'appliquer la question c) avec  $C$  et  $K$  à la place de  $A$  et  $I$ .

2. car  $A$  n'est pas entre  $J$  et  $C$  d'après **(O3)**.