Licence 3e année
parcours Mathématiques

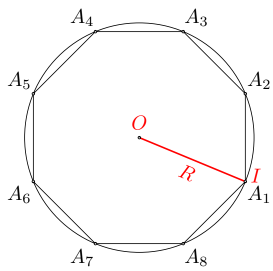
2018-2019
M67, Géométrie élémentaire

Solutions du devoir surveillé

21 mai 2019

[durée : 3 heures]

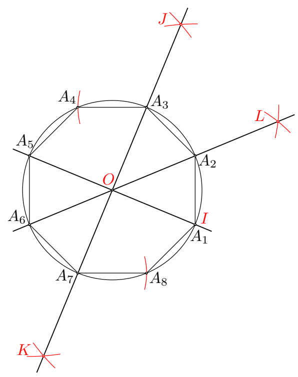
Exercice 1 (Construction à la règle et au compas)



a) Soient O et I deux points distincts du plan. Construire à la règle et au compas à partir de ces deux points les sommets $A_1 = I, A_2, \dots, A_8$ d'un octogone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon OI (c.-à-d. des points $A_1 = I, A_2, \dots, A_8$ deux à deux distincts situés sur le cercle de centre O passant par I tels que $A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots = A_7A_8 = A_8A_1$).

b) Déterminer l'aire de cet octogone régulier en fonction du rayon $R = OI$.

Solution :



a) On pose $A_1 = I$. Soit A_5 le second point d'intersection de (OI) et du cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par I. Les cercles de centre A_1 passant par A_5 et de centre A_5 passant par A_1 se coupent en deux points J et K. La droite (JK), médiatrice de $[A_1A_5]$, coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, A_3 et A_5. Le cercle de centre A_1 passant par O et celui de centre A_3 passant par O se recoupent en un point L. La droite (OL), bissectrice de l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ coupe le cercle en deux points, A_2, sur la demi-droite $[OL)$, et A_6. Le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe $\mathcal{C}$ en A_4, et le cercle de centre A_7 passant par A_6 recoupe $\mathcal{C}$ en A_8.

b) Les huit triangles $\triangle A_1OA_2$, $\triangle A_2OA_3$, ..., $\triangle A_7OA_8$ et $\triangle A_8OA_1$ étant égaux, ils ont même aire, et l'aire $\mathcal{A}$ de l'octogone est donc égale à $8 \cdot \mathcal{A}_{\triangle A_1OA_2}$. D'autre part, l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ vaut $\dfrac{1}{8} \cdot 2\pi = \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, l'aire du triangle $\triangle A_1OA_2$ vaut $OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin\dfrac{\pi}{4} = R^2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. L'aire de l'octogone est donc égale à :

$$\mathcal{A} = 4\sqrt{2}R^2.$$

Exercice 2 (Quadrilatère « des milieux »)

Étant donné un quadrilatère convexe (dit *« de départ »*) on appelle *« quadrilatère des milieux »* le quadrilatère convexe dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère de départ.

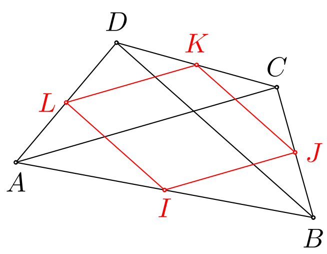
a) Montrer que quel que soit le quadrilatère de départ, le quadrilatère des milieux est un parallélogramme.

b) Quel est le rapport entre l'aire du quadrilatère de départ et l'aire du quadrilatère des milieux ?

c) Si le quadrilatère de départ est lui-même un parallélogramme, sous quelle condition le quadrilatère des milieux est-il un rectangle ? et un carré ?

Solution :

a) Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe (ou non : la convexité n'est pas nécessaire pour cette première question), et I le milieu de $[AB]$, J celui de $[BC]$, K celui de $[CD]$ et L celui de $[DA]$. La droite (IJ) passe par les milieux des côtés $[AB]$ et $[BC]$ du triangle $\triangle ABC$, et est donc parallèle à (AC). La droite (KL) passe par les milieux des côtés $[CD]$ et $[DA]$ du triangle $\triangle ACD$, et est donc parallèle à (AC). Les droites (IJ) et (KL) étant toutes deux parallèles à (AC) sont parallèles entre elles. On montre de même que (IL) et (JK) sont parallèles entre elles, car toutes deux parallèles à (BD). Le quadrilatère $IJKL$ est donc un parallélogramme.



b) On conserve les notations de la première question. Comme le triangle $\triangle AIL$ est homothétique de rapport $\frac{1}{2}$ à $\triangle ABD$ nous avons la relation des aires $\mathcal{A}_{\triangle AIL} = \frac{1}{4}\mathcal{A}_{\triangle ABD}$. Et de même pour les trois autres triangles complémentaires au parallélogramme $IJKL$. Donc on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABCD} - \mathcal{A}_{IJKL} &= \mathcal{A}_{\triangle AIL} + \mathcal{A}_{\triangle BJI} + \mathcal{A}_{\triangle CJK} + \mathcal{A}_{\triangle DKL} \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathcal{A}_{\triangle ABD} + \mathcal{A}_{\triangle BCA} + \mathcal{A}_{\triangle CDB} + \mathcal{A}_{\triangle DAC}\right) \\ &= \frac{1}{4}.2.\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD}.\end{aligned}$$

Ainsi au final le rapport des aires est $\mathcal{A}_{IJKL} : \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}$.

c) Nous avons les équivalences « le parallélogramme $IJKL$ est un rectangle » $\Leftrightarrow (IJ) \perp (JK) \Leftrightarrow (AC) \perp (BD) \Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un losange ».
De plus, en utilisant que $IJ = \frac{1}{2}AC$ et $KL = \frac{1}{2}BD$, nous avons $IJ = KL \Leftrightarrow AC = BD$. Ainsi « le parallélogramme $IJKL$ est un carré » $\Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un losange à diagonales égales » $\Leftrightarrow$ « le parallélogramme $ABCD$ est un carré ».

Exercice 3 (Triangle rectangle et cercles)

a) Soit ABC un triangle rectangle en C. Soient $a = BC$ et $b = AC$ les longueurs des côtés de l'angle droit. Montrer que la longueur h de la hauteur issue de C vérifie

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

b) Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de diamètre $[OM]$. Soit A un point de $\mathcal{C}_1$ différent de O et M. Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O passant par M. On note B et C les points d'intersection de (OA) et $\mathcal{C}_2$. Montrer que

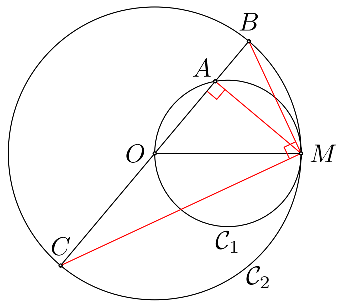
$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{MC^2} = \frac{1}{MA^2}.$$

c) Exprimer les longueurs des arcs $\widehat{MB}$ et $\widehat{MC}$ de $\mathcal{C}_2$ en fonction des longueurs des arcs $\widehat{AO}$ et $\widehat{AM}$ de $\mathcal{C}_1$.[1]

Solution :

a) L'aire du triangle rectangle $\triangle ABC$ s'exprime comme $\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC = \frac{ab}{2}$ ou comme $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h$, d'où, en notant $c = AB$, $ab = ch$. D'après Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, et donc $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

b) Considérons le triangle $\triangle BCM$. Comme $[BC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_2$ et $M \in \mathcal{C}_2$, ce triangle est rectangle en M. D'autre part, A,M et O sont sur $\mathcal{C}_1$ dont $[OM]$ est un diamètre. Le triangle $\triangle MAO$ est donc rectangle en A, ce qui signifie que $[AH]$ est la hauteur de BCM issue de A. L'égalité résulte alors de la question précédente.

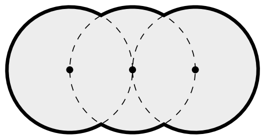


1. On considère toujours l'arc le plus court : par exemple dans le cas de $\widehat{MB}$ on parle de l'arc ne contenant pas C, dans le cas de $\widehat{AM}$ on parle de l'arc ne contenant pas O.

c) Supposons pour fixer les notations que B soit le point d'intersection de $[OA)$ et de $\mathcal{C}_2$. Notons $R_1 = \frac{OM}{2}$ et $R_2 = OM$ les rayons de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. La longueur de l'arc $\widehat{BM}$ est égale à $R_2 \cdot \widehat{BOM}$ (où $\widehat{BOM}$ est exprimée en radians). Mais $\widehat{BOM} = \widehat{AOM}$ est dans $\mathcal{C}_1$ un angle inscrit qui intercepte l'arc $\widehat{AM}$. L'arc $\widehat{AM}$ mesure donc $R_1 \cdot \frac{1}{2}\widehat{AOM}$. Autrement dit, les arcs $\widehat{AM}$ et $\widehat{BM}$ ont la même longueur.
Les points B et C sont diamétralement opposés. Ainsi la somme des arcs $\widehat{MB}$ et $\widehat{MC}$ est égale au demi-périmètre du cercle $\mathcal{C}_2$, soit le double de la longueur de l'arc $\widehat{OM}$ de $\mathcal{C}_1$. La longueur $l(\widehat{CM})$ de l'arc $\widehat{CM}$ vaut donc $l(\widehat{CM}) = l(\widehat{BC}) - l(\widehat{BM}) = 2(l(\widehat{OA}) + l(\widehat{AM})) - l(\widehat{AM}) = 2l(\widehat{OA}) + l(\widehat{AM})$.

Exercice 4 (Kangourou 2019)

La figure ci-contre est faite de trois cercles de même rayon R dont les centres sont alignés. Le cercle du milieu passe par les centres des deux autres. Quel est le périmètre de cette figure ?



Solution :

Les triangles rouges sur la figure ci-contre sont équilatéraux, donc le périmètre est constitué de deux arcs de 240° et de deux arcs de 60°. Ainsi le périmètre est de $2\frac{4\pi}{3}R + 2\frac{\pi}{3}R = \frac{10}{3}\pi R$.