

TD3 : GÉOMÉTRIE PLANE

On se place dans le plan $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$.

Propriétés basiques – Cours

Exercice 1

Montrer que deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles.

Exercice 2 (Médiatrice)

Soient A et B deux points distincts. Montrer que l'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Exercice 3 (Bissectrice et longueurs)

Soit M le pied de la bissectrice issue de A dans un triangle $\triangle ABC$ (c.-à-d. le point d'intersection de cette bissectrice et du côté opposé $[BC]$).

- Montrer l'égalité des rapports $AB : AC = MB : MC$.
- Montrer que la bissectrice AM coupe le cercle circonscrit en un point P qui est sur la médiatrice de $[BC]$.
- Montrer que $AM^2 = AB \times AC - MB \times MC$

Exercice 4 (Parallélogrammes)

- On dit que quadrilatère $ABCD$ est *convexe* s'il est *non dégénéré* (sans trois sommets alignés), *non croisé* (les intérieurs des côtés (opposés) ne se rencontrent pas) et sans sommet à l'intérieur du triangle formé par les trois autres. Montrer qu'un quadrilatère $ABCD$ est convexe si et seulement si les *diagonales* $[AC]$ et $[BD]$ se rencontrent.
- Montrer que pour un quadrilatère convexe $ABCD$ les conditions suivantes sont équivalentes :
 - c'est un parallélogramme ;
 - les angles opposés sont égaux ;
 - les côtés opposés sont égaux ;
 - deux côtés opposés sont parallèles et égaux ;
 - ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en leur milieu.
- Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle (resp. un losange) si et seulement si ses diagonales sont égales (resp. perpendiculaires).

- d) Montrer que les bissectrices d'un parallélogramme forment un rectangle. À quelle condition forment-elles un carré ?
- e) Montrer que les milieux des côtés d'un quadrilatère (convexe) sont les sommets d'un parallélogramme.

Exercice 5 (Quadrilatère inscrit)

Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé.

- a) Montrer que si $ABCD$ est inscrit dans un cercle, alors $ABCD$ est convexe (et ses diagonales se coupent en un point).
- b) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :
 - (i) $ABCD$ est inscrit dans un cercle.
 - (ii) $ABCD$ est convexe et $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \pi$ (ou $\widehat{DAB} + \widehat{BCD} = \pi$).
 - (iii) $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en S et $AS \times SC = BS \times SD$.
 - (iv) $AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$ (c'est le *théorème de Ptolémée*).

Exercice 6 (Cas de similitude)

Soient $\triangle ABC$ et $A'B'C'$ deux triangles non dégénérés et non confondus, tels que $(A'B') \parallel (AB)$, $(A'C') \parallel (AC)$ et $(B'C') \parallel (BC)$.

- a) Montrer que les triangles $\triangle ABC$ et $A'B'C'$ sont semblables.
- b) Montrer que de plus les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Exercice 7 (Points remarquables dans le triangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle non dégénéré.

- a) Montrer que les trois bissectrices sont concourantes. Montrer que leur point commun est centre d'un *cercle inscrit* dans le triangle $\triangle ABC$, et qu'il n'y a qu'un seul tel centre (et un seul tel cercle).
- b) Montrer que la bissectrice d'un angle et les bissectrices extérieures des deux autres angles sont également concourantes.
- c) Montrer que les trois médiatrices du triangle sont concourantes. Montrer que leur point commun est *centre du cercle circonscrit* au triangle $\triangle ABC$.
- d) Montrer que les trois médianes sont concourantes en un point situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base correspondante. On appelle *centre de gravité* ou *barycentre*¹ leur point d'intersection.
- e) Montrer que le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre de gravité sont alignés (on appelle *droite d'Euler* la droite passant par ces trois points).
- f) Montrer que les trois hauteurs sont concourantes. On appelle *orthocentre* leur point d'intersection.

1. ou *isobarycentre*, ou *centroïde*.

Exercice 8 (Rayons des cercles circonscrit et inscrit)

Soit $\triangle ABC$ un triangle de longueurs de côtés a , b et c et de mesures des angles respectifs α , β et γ .

- Exprimer le rayon R du cercle circonscrit en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.
- Exprimer le rayon r du cercle inscrit en fonction du périmètre et de l'aire du triangle.
- Exprimer le rayon r du cercle inscrit en fonction des longueurs des côtés et des angles du triangle.
- Exprimer le rapport $\frac{R}{r}$ en fonction des angles du triangle.

Dans le triangle

Exercice 9

Soient $\triangle ABC$ un triangle et H son orthocentre. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC) .
Montrer que H' est sur le cercle circonscrit à $\triangle ABC$.

Exercice 10

Soient $\triangle ABC$ un triangle et P , Q , R trois points situés respectivement sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.
Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR , BRP et CPQ ont un point commun.

Indication : Attention au cas où deux des cercles se touchent.

Exercice 11 (Carré dans un triangle)

Soit $\triangle ABC$ un triangle *acutangle*².

- Montrer qu'il existe un carré $IJKL$ avec $I, J \in [AB]$, $K \in [BC]$ et $L \in [CA]$. En donner une construction.
- Un tel carré est-il unique?
- Que se passe-t-il si le triangle a un angle obtus?

Exercice 12 (Inégalité triangulaire)

Soit $\triangle ABC$ un triangle.

- Montrer que si $AB > AC$, alors $\widehat{C} > \widehat{B}$ (on pourra considérer $B' \in [AB]$ tel que $AB' = AC$).
- Montrer qu'on a en fait équivalence : $AB > AC$ si et seulement si $\widehat{C} > \widehat{B}$.
- En déduire l'inégalité triangulaire : dans un triangle, chacun des côtés est plus petit que la somme des deux autres.
- Déduire de la question a) qu'un disque est convexe.

2. À angles aigus.

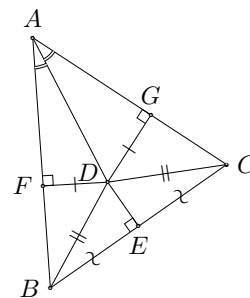
Exercice 13 (Triangle orthique)

Soit $\triangle ABC$ un triangle non rectangle. On note respectivement H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A , B et C . Montrer que les bissectrices du triangle $\triangle H_A H_B H_C$ sont les hauteurs du triangle $\triangle ABC$.

Exercice 14 (Tout triangle est isocèle)

On donne ici un argument pour établir que tout triangle est isocèle (dû à W.W. Rouse Ball). Soit $\triangle ABC$ un triangle quelconque. Soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} avec la médiatrice du côté opposé $[BC]$. Soient E , F et G les projetés orthogonaux de D sur $[BC]$, $[AB]$ et $[AC]$.

- Montrer que $DF = DG$ et $AF = AG$.
- Montrer que $DB = DC$, puis que $FB = GC$.
- En déduire que $\triangle ABC$ est isocèle, puis qu'il est équilatéral.
- Comment expliquer cela ?



Cercles, angles et longueurs

Exercice 15

Soient A et B deux points et $\gamma \in]0, \pi[$ donnés. Soit Γ l'ensemble des points C tels que $\widehat{ACB} = \gamma$.

- Décrire l'ensemble Γ . Sous quelle condition Γ est un cercle ?
- Montrer que quand C parcourt Γ , l'isobarycentre G de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition G parcourt un cercle ?
- Montrer que quand C parcourt Γ , le centre du cercle inscrit I de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition I parcourt un cercle ?
- Quand C parcourt Γ , quelle est l'ensemble parcouru par le centre du cercle circonscrit de $\triangle ABC$?
- Montrer que quand C parcourt Γ , l'orthocentre H de $\triangle ABC$ parcourt deux arcs de cercles. Sous quelle condition H parcourt un cercle ?

Exercice 16 (Puissance d'un point)

Soient M un point et \mathcal{C} un cercle. On considère une droite \mathcal{D} passant par P et qui rencontre \mathcal{C} en deux points (pas forcément distincts) S et T .

- Montrer que la quantité $\overline{MS} \times \overline{MT}$ ne dépend pas du choix de la droite \mathcal{D} .

Pour la suite on note cette quantité $P_{\mathcal{C}}(M)$ et on l'appelle puissance de M par rapport à \mathcal{C} .

- Étant donné un cercle \mathcal{C} , déterminer le signe de $P_{\mathcal{C}}(M)$ en fonction de la position de M .
- Montrer que l'ensemble des points à égale puissance par rapport à deux cercles non concentriques donnés est une droite (appelée *axe radical* de ces deux cercles).

- d) Déterminer l'axe radical dans le cas de deux cercles distincts qui s'intersectent.
- e) Quelle droite « connue » généralise l'axe radical.
- f) Étant donnés deux cercles non concentriques, construire à la règle et compas l'axe radical.

Exercice 17 (Angle entre deux cercles)

Soient deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de centre respectifs O_1 et O_2 qui se rencontrent en un point S . On définit (la mesure de) l'angle entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 comme étant égale à $\widehat{O_1MO_2}$.

- a) Quelle est l'angle entre deux cercles tangents extérieurement ?
- b) Quelle est l'angle entre deux cercles tangents intérieurement ?
- c) Soient un cercle \mathcal{C} et un point M extérieur à \mathcal{C} . Montrer qu'il existe un cercle de centre M qui est orthogonal³ à \mathcal{C} .
- d) Étant donnés deux cercles, déterminer l'ensemble des centres des cercles orthogonaux à ces deux cercles.
- e) Étant donnés trois cercles en position générale, montrer qu'il existe un unique cercle qui est orthogonal aux trois.

Utilisation des aires

On note $\text{aire}(P)$ l'aire d'une figure P .

Exercice 18

Soit T un triangle inclus dans un rectangle R . Montrer que $\text{aire}(T) \leq \frac{1}{2} \text{aire } R$.

Exercice 19 Soit $\triangle ABC$ un triangle inscrit dans le cercle fixé \mathcal{C} .

- a) Sous quelle condition l'aire de $\triangle ABC$ est maximale ?
- b) Sous quelle condition $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximal ?
- c) Et pour un quadrilatère $ABCD$?

Exercice 20 (Théorèmes de Gergonne et de Céva)

Soient $\triangle ABC$ un triangle et A' , B' , C' trois points de (BC) , (AC) et (AB) .

- a) Si (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point M intérieur au triangle $\triangle ABC$, alors on a la relation de Gergonne

$$\frac{MA'}{AA'} + \frac{MB'}{BB'} + \frac{MC'}{CC'} = 1.$$

Indication : Interpréter les rapports comme des rapports d'aires.

3. Qui fait un angle de $\pi/2$ avec \mathcal{C} .

b) Les trois droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si la relation de Ceva

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Exercice 21 (Formule de Héron)

a) Montrer que l'aire d'un triangle $\triangle ABC$ de côtés de longueurs a , b et c et de demi-périmètre $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ est

$$\text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Indication : Exprimer $\sin^2(\hat{A})$.

b) En déduire une expression du rayon du cercle inscrit en fonction des longueurs des côtés.

Exercice 22 (Longueurs des hauteurs)

Donnez une condition nécessaire et suffisante sur trois nombres réels h_A , h_B et h_C pour qu'ils soient les longueurs des hauteurs d'un triangle.

Et pour qu'ils soient les longueurs des hauteurs d'un triangle acutangle ?

Exercice 23 (Partage de trapèze)

Soit $ABCD$ un trapèze de grande base CD et de petite base AB . Construire un point M de $[CD]$ tel que (AM) partage le trapèze en deux parties de même aire.

Exercice 24 (Rosace)

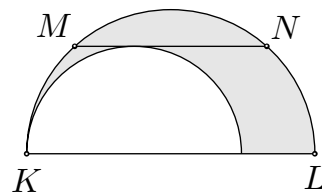
Calculer l'aire de la rosace à 6 feuilles construite au compas.

Exercice 25

Deux disques D_1 et D_2 de même rayon R sont tangents extérieurement et tangents, en deux autres points, à une même droite Δ . Calculer l'aire du disque D tangent à la fois à D_1 , D_2 et Δ .

Exercice 26 (Kangourou 2007)

Soient deux demi-cercles tangents intérieurement (en K sur la figure ci-contre). La corde $[MN]$ est parallèle à la droite (KL) , contenant les deux centres, et tangente au petit demi-cercle ; elle mesure 4. Combien vaut l'aire (grisée sur la figure) entre les deux demi-cercles ?



Exercice 27 (Kangourou 2006 et DS2 de 2018)

On considère la figure ci-contre ; le quotient du rayon du secteur circulaire par le rayon du cercle inscrit dans ce secteur est 3. Quel est le quotient des aires de ce secteur circulaire et du cercle inscrit ?

