NOM VINCENT

Prénom Esteban

Promo 2025

Date 20/11/2021

20210218: VINCENT Esteban
L2: TD G / Com G12
SM301-DE (20/11/2021)
A303

20/20

**MATIÈRE** Probabilités

Question de cours: 1

Formule des probabilités totales:
Si on a un arbre présentant 1 succès et 1 échec pour chaque épreuve:
$P(A) = P(A/A_{-1}) \times P(A_{-1}) + P(A/\overline{A_{-1}}) \times P(\overline{A_{-1}})$.

Exercice 1: 5

1. $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6} = P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$.

Dans ce cas, nous avons $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ donc les événements A et B sont indépendants.

$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A) = \frac{1}{2}$.

$P(B \backslash A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(A)} = P(B) = \frac{1}{3}$.

2. $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{4}{13}$, $P(A \cap B) = \frac{2}{13}$. $P(A) \times P(B) = \frac{6}{13} \times \frac{4}{13} = \frac{24}{169} \neq P(A \cap B)$.

Ainsi, comme $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$, les événements ne sont pas indépendants.

$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{4}{13}} = \frac{2 \times \cancel{13}}{\cancel{13} \times 4} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{13}}{\frac{6}{13}} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{13}}{3 \times \cancel{2} \times \cancel{13}} = \frac{1}{3}$.

Exercice 2 : 5

1. Selon la loi de normalisation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1 = \int_{1}^{+\infty} \frac{k}{t^2}\,dt$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{k}{t^2}\,dt = k\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = k\left[-\frac{1}{t}\right]_{1}^{+\infty} = k(0+1) = k = 1.$$

2. Nous sommes dans une variable aléatoire continue donc $P(X=2)=0$.

3. La fonction de répartition $F(x)$ de $X$ est $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\,dx \text{ lorsque } x > 1 \\ 0 \text{ lorsque } x < 1 \end{cases}$$

$$\int_{1}^{t} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{t} = -\frac{1}{t} + 1 = \frac{t-1}{t}.$$

D'où $F(x) = \begin{cases} \frac{t-1}{t} \text{ lorsque } t > 1 \\ 0 \text{ lorsque } t < 1 \end{cases}$

4. $P(X<2) = F(2) = \frac{1}{2}$.

5. $P(2<X<3) = F(3) - F(2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$.

6. $P(2<X^2<3)$. $2<X^2<3 \iff X \in \,]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}[\, \cup \,]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$.

D'où $P(2<X^2<3) = \underbrace{F(-\sqrt{2})}_{0} - \underbrace{F(-\sqrt{3})}_{0} + F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2})$

$$= F(\sqrt{3}) - F(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{6} - \sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}}.$$

Exercice 3. 4,5/

1. Selon la condition de normalisation : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\,dt = \int_0^{+\infty} k_1 e^{-t}\,dt = k_1\int_0^{+\infty} e^{-t} = k_1\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty}} = \frac{1}{0+1} = 1 = k_1$.

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)\,dt = \int_0^{+\infty} k_2 e^{-2t}\,dt = k_2\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,dt = k_2\left[\frac{-e^{-2t}}{2}\right]_0^{+\infty} = k_2\left(0+\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow k_2 = 2$.

D'où $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$.

2. $F_1(x) = \begin{cases} \int_0^x f_1(t)\,dt & \text{lorsque } x \geq 0 \\ 0 & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$

$\int_0^x f_1(t)\,dt = \int_0^x k_1 e^{-t}\,dt = \int_0^x e^{-t}\,dt = \left[-e^{-t}\right]_0^x = -e^{-x} + 1 = 1 - e^{-x}$

D'où $F_1(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{lorsque } x \geq 0 \\ 0 & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$

$F_2(x) = \begin{cases} \int_0^x f_2(t)\,dt & \text{lorsque } t \geq 0 \\ 0 \text{ ailleurs} & \text{lorsque } t < 0 \end{cases}$

$\int_0^x f_2(t)\,dt = \int_0^x 2e^{-2t} = \left[-e^{-2t}\right]_0^x = -e^{-2x} + 1 = 1 - e^{-2x}$. D'où $F_2(x) = \begin{cases} 1-e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3. $P(T_1 > 5t) = 1 - P(T_1 < 5T) = 1 - F_1(5t) = 1 - 1 + e^{-5t} = e^{-5t}$

4. $P(2t < T_2 < 3t) = F_2(3t) - F_2(2t) = 1 - e^{-6t} - 1 + e^{-4t} = e^{-4t} - e^{-6t}$.

5. $\{T < t\} = \{T_1 < t\} \times \{T_2 < t\}$.

D'où $F(x) = F_1(x) \times F_2(x) = \begin{cases} (1-e^{-x})(1-e^{-2x}) & \text{lorsque } x < 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

$(1-e^{-x})(1-e^{-2x}) = 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x}$.

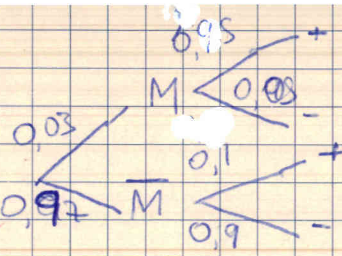
D'où $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

6. $f(t) = F'(t) = \begin{cases} (1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x})' & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$.

Or, $(1 - e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x})' = e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

D'où $f(t) = \begin{cases} e^{-x} + 2e^{-2x} - 3e^{-3x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$

Exercice 4. 5




1: $P(M) = 0,03$ (donné).

$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 0,97$.

$P(+/M) = \frac{P(+\cap M)}{P(M)} = \frac{0,03 \times 0,95}{0,03} = 0,95$ (également donné)

$P(+/\overline{M}) = 0,10$ (donnée)

$P(-/M) = \frac{P(-\cap M)}{P(M)} = \frac{0,03 \times 0,05}{0,03} = 0,05 = 1 - P(+/M)$.

$P(-/\overline{M}) = \frac{P(-\cap \overline{M})}{P(\overline{M})} = \frac{0,9 \times 0,97}{0,97} = 0,9$.

2: La probabilité qu'une personne soit malade si son test est positif est $P_+(M)$.

$P_+(M) = \frac{P(M\cap +)}{P(+)} = \frac{0,03 \times 0,95}{0,03 \times 0,95 + 0,97 \times 0,1} = \frac{57}{251}$

3. La probabilité qu'une personne ne soit pas malade si son test est positif est $P_+(\overline{M})$

$P_+(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\cap +)}{P(+)} = \frac{0,97 \times 0,1}{0,97 \times 0,1 + 0,03 \times 0,95} = \frac{194}{251}$.

4: La probabilité qu'une personne soit malade si son test est négatif est : $P_-(M)$

$P_-(M) = \frac{P(M\cap -)}{P(-)} = \frac{0,03 \times 0,05}{0,03 \times 0,05 + 0,97 \times 0,9} = \frac{1}{541}$

5: La probabilité qu'une personne ne soit pas maladie si son test est négatif est $P_-(\overline{M})$

$P_-(\overline{M}) = \frac{P(\overline{M}\cap -)}{P(-)} = \frac{0,97 \times 0,9}{0,97 \times 0,9 + 0,03 \times 0,05} = \frac{582}{583}$

Ne rien inscrire dans ce cadre

Prénom ..Esteban....................

Nom ...VINCENT..................

Promotion ...2025....................

Groupe ....G...........................

**L2/L2-BN**

**Probabilités**

**SM 301**

**20 novembre 2021 15:00h-16:50h**

Sujet proposé par : Equipe Proba

Calculatrice autorisée : **OUI**

Documents autorisés : **NON**

Ordinateur portable autorisé : **NON**

Internet : **NON**

Traducteur électronique,dictionnaire : **NON**

À Rendre : SUJET + COPIE

**Rappel :**

- Tous les appareils électroniques (téléphones portables, ordinateurs, tablettes, montres connectées ...) doivent être éteints et rangés.
- Il est interdit de communiquer.
- Toute fraude ou tentative de fraude fera l'objet d'un rapport de la part du surveillant et sera sanctionnée par la note zéro, assortie d'une convocation devant le conseil de discipline. Aucune contestation ne sera possible. Tous les documents et supports utilisés frauduleusement devront être remis au surveillant.
- Aucune sortie de la salle d'examen ne sera autorisée avant la moitié de la durée de l'épreuve.

DE de PROBABILITES-SM301 1er semestre 2021-2022

**Il sera tenu le plus grand compte du soin et de la rigueur apportée à la rédaction et on justifiera toutes les réponses**

20 NOVEMBRE 2021-DURÉE : 1H50MN

(2 pages)

**Question de cours :**

Enoncer la formule des probabilités totales [on précisera bien toutes les hypothèses].

**Exercice 1**

1. Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les évènements :

A : "tirage d'un nombre pair"
B : "tirage d'un nombre multiple de 3"

Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Calculer P(A/B) et P(B/A).
2. Reprendre la question 1 avec 13 boules.

**Exercice 2**

Soit $X$ une v.a continue de densité $f(t) = \begin{cases} \dfrac{k}{t^2}, \forall t \geqslant 1 \\ 0, \forall t < 1 \end{cases}$

où $k$ est une constante réelle.

1. Calculer $k$.
2. Que vaut $P(X = 1)$?
3. Donner la fonction de répartition $F(x)$ de $X$.
4. Calculer $P(X < 2)$.
5. Calculer $P(2 < X < 3)$.
6. Calculer $P(2 < X^2 < 3)$.

**Exercice 3**

Un circuit électronique contient 2 composants $A$ et $B$, indépendants l'un de l'autre, et fonctionne tant que l'un des 2 composants (au moins) est en état de marche.
Le composant $A$ a une durée de vie donnée par une v.a continue $T_1$ de densité définie par :

$$f_1(t) = k_1 e^{-t} \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } f_1(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

Le composant $B$ a une durée de vie donnée par une v.a continue $T_2$ de densité définie par :

$$f_2(t) = k_2 e^{-2t} \text{ pour } t \geq 0 \text{ et } f_2(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

où $k_1$ et $k_2$ sont des constantes réelles..

1. Calculer $k_1$ et $k_2$.
2. Donner les fonctions de répartition $F_1(x)$ de $T_1$, et $F_2(x)$ de $T_2$.
3. Calculer $P(T_1 > 5t)$ pour $t \geq 0$.
4. Calculer $P(2t < T_2 < 3t)$ pour $t \geq 0$.

5. Soit $T$ la v.a "durée de vie du circuit électronique".

Exprimer l'évènement $\{T < t\}$ à l'aide des évènements $\{T_1 < t\}$ et $\{T_2 < t\}$ et en déduire la fonction de répartition $F(x)$ de $T$.

6. En déduire la densité $f(t)$ de $T$.

7. Donner les espérances $E(T_1)$, $E(T_2)$, et $E(T)$.

## Exercice 4

3% d'une population est malade.
Un test de dépistage de cette maladie donne un résultat positif à 95% si la personne est effectivement malade, et un résultat positif à 10% si la personne n'est pas malade.
On note $M$ l'évènement "être malade", $+$ l'évènement "être testé positif", et $-$ l'évènement "être testé négatif".

1. Calculer $P(M), P(\overline{M}), P(+/M), P(+/\overline{M}), P(-/M)$, et $P(-/\overline{M})$ [où $\overline{M}$ représente l'évènement "ne pas être malade"].
2. Quelle est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est positif ?
3. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être malade si son test est positif ?
4. Quel est la probabilité pour une personne d'être malade si son test est négatif ?
5. Quelle est la probabilité pour une personne de ne pas être malade si son test est négatif ?