Q.085 ★8 京大 理系 (2017) 誘導抜

△ABC は鋭角三角形であり、∠A $= \dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また、△ABC の外接円の半径は 1 であるとする。△ABC の内接円の半径の取り得る値の範囲を求めよ。

3 辺の長さをそれぞれ BC $= a$, CA $= b$, AB $= c$ とおく。内接円の半径を r とおく。正弦定理により、

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2 \quad\Leftrightarrow\quad a = \sqrt{3}$$

と求まる。一方で余弦定理により、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{3} \quad\Leftrightarrow\quad a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

であるから、b, c は次を満たす。

$$\sqrt{b^2 + c^2 - bc} = \sqrt{3} \quad\Leftrightarrow\quad (b+c)^2 - 3bc = 3 \quad \cdots (*)$$

$b + c = p$, $bc = q$ とおくと、式 $(*)$ は $p^2 - 3q = 3$ と書け、b, c は 2 次方程式 $x^2 - px + q = 0$ の解となる。この 2 次方程式が 2 つ (重解を含む) の正の実数解を持つための条件は、$y = x^2 - px + q$ のグラフを併せて考えれば、

$$p > 0,\ q = \frac{1}{3}p^2 - 1 > 0,\ D = 4 - \frac{1}{3}p^2 \geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \sqrt{3} < p \leq 2\sqrt{3}$$

である。2 解の大きい方を b (重解の場合は $b = c$) とする。ここで $y = x^2 - px + \frac{1}{3}p^2 - 1$ のグラフにおいて $x = \sqrt{3}$ のときの値は、

$$\frac{1}{3}p^2 - \sqrt{3}p + 2 = \frac{1}{3}(p - \sqrt{3})(p - 2\sqrt{3})$$

より $\sqrt{3} < p \leq 2\sqrt{3}$ の範囲では常に 0 以下である。したがって、$b \geq \sqrt{3}$ である。このことは △ABC の最大辺は常に b であることを意味する。これによって、△ABC が鋭角三角形である条件は、$b^2 < c^2 + 3$、すなわち $b^2 - c^2 < 3$ である。b, c の取り方から $b^2 - c^2 > 0$ なので、両辺 2 乗して $(b^2 - c^2)^2 < 9$ と同値である。これは、

$$\begin{aligned}(b^2 - c^2)^2 = (b+c)^2(b-c)^2 &= (b+c)^2\left[(b+c)^2 - 4bc\right] \\ &= p^2(p^2 - 4q) = p^2\left(4 - \frac{1}{3}p^2\right) < 9\end{aligned}$$

となるから、p について解けば $p < -3$, $-\sqrt{3} < p < \sqrt{3}$, $3 < p$ となって、これが $b^2 < c^2 + 3$ を満たすための p の条件となる。b, c が正の実数解となるための条件とあわせて、b, c が鋭角三角形をなすための p の条件は $3 < p \leq 2\sqrt{3}$ と求まった。

△ABC の面積を S とする。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(b + c + d) = \frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow\quad r &= \frac{\sqrt{3}bc}{2(b + c + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}q}{2(p + \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\frac{1}{3}p^2 - 1)}{2(p + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(p - \sqrt{3})\end{aligned}$$

となる。これが $3 < p \leq 2\sqrt{3}$ のもとで取りうる範囲を求めればよく、

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$$