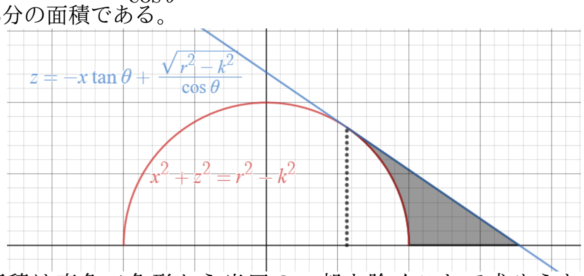
Q.088 ★3 工学院大 (1989)

半径 r の半球が地平面上にある。太陽が仰角 θ のとき、この半球により日陰になる部分の体積を求めよ。ただし、半球の内部は含まない。

xyz 空間内で、xy 平面を地平面と考えて、原点を中心とする次のような半球 $x^2+y^2+z^2=r^2, z\geq 0$ をとる。太陽光線を x 軸に平行で、xy 平面となす角が θ であるような直線と考える。平面 $y=k$ (ただし $-r\leq k\leq r$) での断面を考える。この zx 面内において、半球は $x^2+z^2=r^2-k^2, z\geq 0$ と表され、太陽光線は $z=-x\tan\theta+t$ (ただし $t>0$) と書ける。
日陰になる部分を考えるにあたっては、太陽光線のうち、半球と接するもののみを考えればよい。すなわち、直線 $z=-x\tan\theta+t$ と原点との距離が $\sqrt{r^2-k^2}$ となるような t を求める。

$$\frac{t}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{r^2-k^2} \quad\Leftrightarrow\quad t=\frac{\sqrt{r^2-k^2}}{\cos\theta}$$

ここで、仰角 θ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲をとることから $\cos\theta>0$ であることに注意する。この結果を用いれば、日陰になる部分の面積は、直線 $z=-x\tan\theta+\dfrac{\sqrt{r^2-k^2}}{\cos\theta}$、円 $x^2+z^2=r^2-k^2$、および x 軸で囲まれた部分の面積である。



この面積は直角三角形から半円の一部を除くことで求められる。直線と円の接点、および直線と x 軸との交点の x 座標はそれぞれ、$\sqrt{r^2-k^2}\sin\theta$, $\dfrac{\sqrt{r^2-k^2}}{\sin\theta}$ となる。斜辺が x 軸となす角が θ であったことに注意すれば、直角三角形の面積は

$$\frac{r^2-k^2}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)^2\tan\theta$$

と求められる。一方で、除くべき円の一部は、$x=\sqrt{r^2-k^2}\sin\phi$ と置換することを考えて、

$$\begin{aligned}&\int_{\sqrt{r^2-k^2}\sin\theta}^{\sqrt{r^2-k^2}}\sqrt{r^2-k^2-x^2}\,dx\\
=&\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-k^2}\cos\phi\cdot\sqrt{r^2-k^2}\cos\phi\,d\phi\\
=&(r^2-k^2)\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\phi\,d\phi\\
=&(r^2-k^2)\left[\frac{1}{2}\phi+\frac{1}{4}\sin 2\phi\right]_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}=(r^2-k^2)\frac{\pi-2\theta-\sin 2\theta}{4}\end{aligned}$$

と計算される。したがって、日陰の部分の面積は、

$$\begin{aligned}&\frac{r^2-k^2}{4}\left[2\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)^2\tan\theta-(\pi-2\theta-\sin 2\theta)\right]\\
=&\frac{r^2-k^2}{4}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2\theta-\pi\right)\end{aligned}$$

これが $y=k$ での断面積だから、日陰部分の体積はこれを $-r\leq k\leq r$ で積分すればよい。θ は k によらないことに注意すれば、求める体積は、

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2\theta-\pi\right)\int_{-r}^{r}(r^2-k^2)\,dk=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{\tan\theta}+2\theta-\pi\right)r^3$$