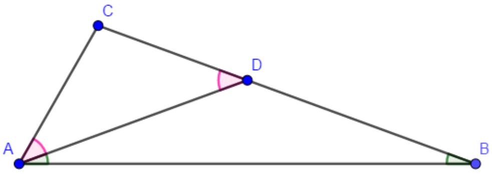
Q.101 ★? 駿台理系添削指導

$\triangle$ABC において、$\angle A = 3\angle B$, $AB = \sqrt{3}$ で、BC, AC の長さはともに整数である。BC, AC の長さを求めよ。

$\angle B = \theta$ とおく。$\triangle$ABC の内角はすべて正かつ和が π を超えないことから、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ である。辺 BC 上に点 D を、$\angle BAD = \theta$ となるようにとる。このとき、$\triangle$DAB は $\angle DAB = \angle DBA = \theta$ なる二等辺三角形で、$\triangle$CAD は $\angle CAD = \angle CDA = 2\theta$ なる二等辺三角形である。



$AC = CD$ が整数、BC も整数であることから、$BD = AD$ も整数である。$AD = BD = n$, $AC = DC = m$ とおく。$\sin\angle ACD = \sin(\pi - 4\theta) = \sin 4\theta$ となることを踏まえて、正弦定理によって、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta} = \frac{n}{\sin\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2n}$$
$$\frac{m}{\sin 2\theta} = \frac{n}{\sin 4\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\theta = \frac{n}{2m}$$

倍角公式を用いてさらに整理すると、

$$\frac{3}{2n^2} - 1 = \frac{n}{2m} \quad \Leftrightarrow \quad m(3 - 2n^2) = n^3$$

を得る。m, n はともに正の整数だから、$3 - 2n^2 > 0$ でなければならない。これを満たす正の整数は $n = 1$ のみ。このとき $m = 1$ とわかる。
以上より、$BC = m + n = 2$, $AC = m = 1$。