Q.037

(1) 任意の実数 x に対して $\cos(2x) + cx^2 \geq 1$ が成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。 ★3 (北海道大 2001)

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。$\pi > 3.1$, $\sqrt{3} > 1.7$ は用いてよい。 ★3 (京大理系 2013)

(1)

関数 $f(x)$ を、$f(x) = \cos(2x) + cx^2$ とする。これは偶関数であるから、$x \geq 0$ を考えればよい。これを微分すると、$f'(x) = -2\sin(2x) + 2cx$, $f''(x) = -4\cos(2x) + 2c$ である。

$c < 0$ の場合、$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = c\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 < 0$ となり題意を満たさない。

$0 \leq c < 2$ のとき、$f''(0) = -4 + 2c < 0$ となる。$\cos(2\alpha) = \dfrac{c}{2}$ を満たす α を用いて、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f''(x) < 0$ であり、$f'(x)$ は単調減少する。$f'(0) = 0$ であるから、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f'(x) < 0$ となり、$f(x)$ は単調減少する。$f(0) = 1$ であるから、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f(x) < 1$ となる。よって題意を満たさない。

$c \geq 2$ のとき、常に $f''(x) \geq 0$ であるから、$f'(x)$ は常に単調増加する。$f'(0) = 0$ であるから、常に $f'(x) \geq 0$ となって、$f(x)$ は常に単調増加することがわかる。$f(0) = 1$ であったから、この場合には題意が満たされる。

以上によって、求める c の範囲は、$c \geq 2$。

(2)

関数 g を、$g(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ で定める。関数 g は偶関数であるから、$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えれば十分。ここで、$g'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $g''(x) = -\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

$g''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ であることを踏まえて増減表を書くと、

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
g''	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
g'	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$	$\nearrow$	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$

となる。ここで、$\sqrt{3}\pi > 1.7 \times 3.1 = 5.27$ だから、$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12} < 0$ [*1], $-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4} > 0$ がわかる。中間値の定理より、開区間 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内の α であって、$g(\alpha) = 0$ を満たすものが存在する。これを用いて改めて増減表を書くと、

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
g'	0	$-$	0	$+$	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$
g	1	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$

となる。$\sqrt{3}\pi^2 > 1.7 \times 3.1^2 = 16.337$ だから、$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16} > 1$ がわかる。

したがって、求める最大値は $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$ ($x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき)。

*1 増減表から明らかではある。