Q.096 ★7 京大実戦

座標平面上の 2 つの曲線 (または直線) C_1: $y=ax^2+bx$、C_2: $y=e^{-x}$ が第一象限の点 P において共通の接線を持つという。C_1 と x 軸で囲まれた領域の面積が最大となるときの実数 a,b を求めよ。

まず、$a=0$ のときは、C_1 は直線 $y=bx$ となる。$b\leq 0$ のとき、明らかに C_1 と C_2 は第一象限に共有点を持たないので不適。$b>0$ のとき、C_1 において $y'=b>0$ だが、C_2 において $y'=-e^{-x}<0$ となって、明らかに共通の接線を持てないのでやはり不適。

$a\neq 0$ のとき、C_1 は点 $(0,0)$, $\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$ を通る放物線である。$a>0$ のとき、これは下に凸であり、グラフを考えれば、第一象限内では常に単調増加である。よって同様の議論から、これは C_2 と共通の接線を持ち得ない。したがって、$a<0$ のみが適する。

以降 $a<0$ で考える。$b\leq 0$ のとき、C_1 は第一象限を通らないので不適。よって $b>0$。これによって、C_1 と x 軸が囲む領域の面積は、

$$\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\,dx=\int_0^{-\frac{b}{a}}ax\left(x+\frac{b}{a}\right)\,dx=-\frac{a}{6}\left(-\frac{b}{a}-0\right)^3=\frac{b^3}{6a^2}$$

これの最大値を考える。

点 P の x 座標を p (ただし $p>0$) とおく。この点において、C_1, C_2 が共通の接線を持つことは、

$$ap^2+bp=e^{-p} \quad \text{かつ} \quad 2ap+b=-e^{-p}$$

である。第 2 式の両辺に p を乗じ、bp, ap^2 をそれぞれ消去すると、

$$a=-\frac{1+p}{p^2}e^{-p}\,,\ b=\frac{2+p}{p}e^{-p} \quad \cdots(*)$$

を得る。これを用いて、

$$\frac{b^3}{6a^2}=\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}e^{-p}$$

となった。右辺を p の関数とみて $f(p)$ とおく。ここで任意の正の実数 p について、$(*)$ によって得る a,b が C_2 と共通の接線を持つ C_1 を作るから、$f(p)$ の定義域は正の実数全体としてよい。$f(p)$ を微分して、

$$\begin{aligned}f'(p)&=\left\{\left[\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}\right]'-\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}\right\}e^{-p}\\&=-\frac{(p-1)(p+2)^2(p^2+2p+2)}{6(p+1)^3}e^{-p}\end{aligned}$$

より、$0<p<1$ で $f'(p)>0$、$f'(1)=0$、$p>1$ で $f'(p)<0$ だから、$f(p)$ は $p=1$ で最大となる。

したがって求める a,b の値は、$(*)$ に $p=1$ を代入して、

$$a=-\frac{2}{e}\,,\ b=\frac{3}{e}$$