Q.012 ★4 中京大 (1997)

a を定数とし、$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす x に対して、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(e^x + a)\cos^{n+1} x + \sin^{n+1} x}{\cos^n x + \sin^n x}$$

とする。$f(x)$ が $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ で連続であるとき、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

まず、与式における極限をとるべき式について、

$$\frac{(e^x + a)\cos^{n+1} x + \sin^{n+1} x}{\cos^n x + \sin^n x} = \frac{(e^x + a)\cos x}{1 + \tan^n x} + \frac{\sin x}{\frac{1}{\tan^n x} + 1}$$

と整理できる。このとき、$0 \leq x < \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$0 \leq \tan x < 1$ であり、$\dfrac{\pi}{4} < x \leq \dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan x > 1$ であり、さらに $x = \frac{\pi}{4}$ のとき $\tan x = 1$ であることを踏まえて、

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(e^x + a)\cos x}{1 + \tan^n x} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{\frac{1}{\tan^n x} + 1}$$

$$= \begin{cases} (e^x + a)\cos x & \left(0 \leq x < \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}} + a + 1}{2\sqrt{2}} & \left(x = \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin x & \left(\dfrac{\pi}{4} < x \leq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

と求められる。したがって $x = \dfrac{\pi}{4}$ で連続となればよい。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0} (e^x + a)\cos x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0} \sin x = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

を考えて、$a = 1 - e^{\frac{\pi}{4}}$ である。これを用いて求める積分は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x + a)\cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + a\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}$$