Q.083 ★4 センター IIB 2017 (誘導抜き)

実数 α, β が、

$$0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{4}{15}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{15}}$$

$$|\cos\alpha| \geq |\cos\beta|$$

を満たす。$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよ。

$a = \cos^2\alpha,\ b = \cos^2\beta$ とおく。すると、$\cos 2\alpha = 2a - 1,\ \cos 2\beta = 2b - 1$ となるから、与第 2 式は $a + b = \dfrac{17}{15}$ となる。与第 3 式について両辺 2 乗すれば、$ab = \dfrac{4}{15}$ を得る。よって、a, b は 2 次方程式 $x^2 - \dfrac{17}{15}x + \dfrac{4}{15} = 0$ の 2 解である。これを解くと $x = \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{5}$ を得る。さて与第 4 式から、$\cos^2\alpha \geq \cos^2\beta$ が従うから、$a = \dfrac{4}{5},\ b = \dfrac{1}{3}$ とわかる。$\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のいずれかである。ここで与第 1 式より、$\cos\alpha > \cos\beta$ である。また与第 3 式より $\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の正負は異なる。これを満たす複合の組み合わせを考えると、

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

と求まった。