Q.011 ★8

有理数 a, b, c について、$a^2 \pm (a+b+c), b^2 \pm (a+b+c), c^2 \pm (a+b+c)$ の全てが平方数であるとする。このとき、a, b, c はいずれも整数であり、かつ $a+b+c=0$ を満たすことを証明せよ。

$a^2 \pm (a+b+c) = s_\pm^2$ とおく。ここで $s_\pm$ は整数である。辺々引くと

$$2(a+b+c) = s_+^2 - s_-^2$$

を得る。右辺は明らかに整数であるから、$2(a+b+c)$ は整数である。

$$2a^2 \pm 2(a+b+c) = 2s_\pm^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 = 2s_\pm^2 \mp 2(a+b+c)$$

から、$2a^2$ が整数であることがわかる。これを n とおく。有理数 a を、正整数 j と、これと互いに素な整数 i を用いて $a = \dfrac{i}{j}$ と表すと、

$$2a^2 = n \quad \Leftrightarrow \quad 2i^2 = nj^2$$

である。n が奇数であることを仮定する。このとき j が偶数で無ければならず、$j = 2j'$ とおく。すると $i^2 = 2nj'^2$ となって i も偶数で無ければならない。これは i, j が互いに素であるとしたことに矛盾する。したがって n は偶数でなければならない。このとき $n = 2n'$ とおけば、$i^2 = n'j^2$ である。これは i^2 が j^2 の倍数であることを示しているが、i, j は互いに素であるから、$j = 1$ のみが適する。すなわち、$a = \dfrac{i}{j}$ は整数である。同様の議論によって b, c も整数であることが示される。
$a+b+c \neq 0$ を仮定する。ここで、対称性から $a^2 \leq b^2 \leq c^2$ を考えれば十分である。このとき少なくとも $c^2 > 0$ である。加えて、$a+b+c > 0$ として一般性を失わない。なぜなら、$a+b+c < 0$ の場合には、a, b, c を $-a, -b, -c$ と取り換えればよいから。

$$c^2 < c^2 + (a+b+c) \leq c^2 + 3|c| < c^2 + 4|c| + 4 = (|c|+2)^2$$

であるから、$c^2 + (a+b+c) = (|c|+1)^2$ である。よって、$a+b+c = 2|c|+1$。このとき、

$$c^2 - (a+b+c) = c^2 - 2|c| - 1 = (|c|-1)^2 - 2 = k^2$$

について、$(|c|+k-1)(|c|-k-1) = 2$ を得るが、これを満たす整数 $|c|, k$ は存在しない。したがって $c^2 - (a+b+c)$ は平方数になり得ず、$a+b+c > 0$ は不適であるから $a+b+c = 0$ であることが示された。