本問は, 次の命題がカラクリとなっている。

補題 1.
$c(n)=\dfrac{d(n)+\phi(n)}{\sigma(n)}$ とおく。このとき, 次が成り立つ。

(1) n が素数ならば, $c(n)=1$

(2) $n \geqq 2$ が素数でないならば, $0<c(n)<1$

(*Proof of Lemma*)

(1)

n を素数とする。このとき,
n の正の約数は $1, n$ の 2 個 で, その和は $n+1$ であり, n 以下の n と互いに素な自然数の個数は 1 から $n-1$ までの全ての整数であり, $n-1$ 個である。したがって, $d(n)=2, \sigma(n)=n+1, \phi(n)=n-1$ なので,

$$c(n)=\frac{2+(n-1)}{n+1}=1$$

よりよい。 □

(2)

$n \geqq 2$ を素数でないとする。$0<c(n)$ であることは明らか。
n は 1 と n 以外にも約数を持ち, $1 \neq n$ であるから, $n+1<\sigma(n)$ が分かる。

1 から n までの任意の整数 k に関して, 次の条件 (i),(ii) を考える。

(i) k は n の約数である。

(ii) k は n と互いに素である。

(i) を満たす k の個数が $d(n)$ であり, (ii) を満たす k の個数が $\phi(n)$ である。したがって,

$$\begin{aligned} D &= \{k \in \mathbb{Z} \cap [1,n] \mid k \text{ は } (i) \text{ を満たす.}\} \\ \Phi &= \{k \in \mathbb{Z} \cap [1,n] \mid k \text{ は } (ii) \text{ を満たす.}\} \end{aligned}$$

という集合 D, Φ を定めると, $d(n), \phi(n)$ は D, Φ の元の個数である。

さて, $k=1$ とすると, 1 は n の約数であり, n と互いに素であるから, $1 \in D, 1 \in \Phi$ であることが分かる。
続いて, $k \geqq 2$ とする。このとき, $k \in D$ を満たすとすると, k と n の最大公約数は $k \neq 1$ であるから (ii) を満たさない。
以上から, $D \cap \Phi=\{1\}$ であると分かる。有限集合 X に対してその元の個数を $|X|$ で書くことにする。定義より明らかに $D \cup \Phi \subset \{1,2,\cdots,n\}$ であるから,

$$\begin{aligned} d(n)+\phi(n) &= |D|+|\Phi| \\ &= |D \cup \Phi|+|D \cap \Phi| \\ &= |D \cup \Phi|+|\{1\}| \\ &= |D \cup \Phi|+1 \\ &\leqq |\{1,2,\cdots,n\}|+1 \\ &= n+1 \\ &< \sigma(n) \end{aligned}$$

となる。ゆえに, $c(n)<1$ が得られた。 □

補題より, $k \geqq 2$ に対して

$$\lfloor c(k) \rfloor = \begin{cases} 1 & (k \text{ が素数}) \\ 0 & (k \text{ が素数でない}) \end{cases}$$

となるので, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor c(k) \rfloor$ は 2 から n までの素数の個数を計上する。
したがって $\pi(n)$ に一致する。 □