Q.052 ★? 相反方程式

(1) $x+\dfrac{1}{x}=t$ とする。$x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ を t で表せ。
(2) 5 次方程式 $x^5-1=0$ の解を全て求めよ。なお、解答に円周率や三角関数を一切用いてはならない。

(1)

$t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ であることから、

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)+1$$
$$=(t^2-2)+t+1=t^2+t-1$$

(2)

$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ より、$x^5-1=0$ の解の 1 つは $x=1$ で、残りの解は $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ を解けばよい。明らかに $x=0$ は解でないので、x^2 で割って、$x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ を得る。ここで $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと、(1) の結果から、

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+t-1=0$$

を得て、$t=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ と解ける。一方で、

$$t=x+\frac{1}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^2-tx+1=0$$

であるから、

$$x=\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}=\frac{t\pm\sqrt{-3-t}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\pm i\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$$

と求まった。$x=1$ とあわせ、また t に由来する箇所の複合は同順であることに注意して、求める解は、

$$x=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{ただし 1,3 番目の複合のみ同順}$$