Q.103 ★? suiso_728660 様

2016 桁の自然数 n がある。n の上 1008 桁を A、下 1008 桁を B としたとき、n は、A, B, $A+B$, AB の公倍数であるという。このような n を全て求めよ。

A と B の最大公約数を g とおき、互いに素な自然数 a, b を用いて、

$$A = ga\,,\ B = gb$$

とかく。このとき A と B の最小公倍数は gab である。$AB = g^2ab$ は明らかに gab の倍数であるから、gab と AB の最小公倍数は g^2ab である。
g^2ab と $A+B = g(A+B)$ の最大公約数を考える。a, b は互いに素だったから、ab と $a+b$ は互いに素である。g と $a+b$ の最大公約数を h とおき、互いに素な自然数 s, t を用いて、

$$g = hs\ \ a+b = ht$$

とかく。このとき、t と a および b は互いに素である。なぜなら、t と a あるいは b が共通の素因数 x をもつと仮定すると、

$$b = ht - a\,,\ a = ht - b$$

において、右辺が x で割り切れるのに対し、左辺は割り切れず矛盾するから。したがって、$g^2ab = ghsab$ と $g(a+b) = ght$ の最大公約数は gh である。またこれらの最小公倍数は $ghstab$ となる。
ここまでのことから、A, B, $A+B$, AB の公倍数は、自然数 k を用いて、$ghstabk$ によって得られる。$n = A \times 10^{1008} + B$ がこれに等しいから

$$ga \times 10^{1008} + gb = ghstabk \quad \Leftrightarrow \quad a \times 10^{1008} = b(hstak - 1)$$

を得る。a, b は互いに素だから、b は 10^{1008} を割り切る。よって b は 2 と 5 しか素因数に持たない。また a は $hstak - 1$ を割り切る。したがって $a = 1$。
n が 2016 桁の数であるためには、A は 1008 桁でなくてはならず、$10^{1007} \leq A < 10^{1008}$ である。一方で、$a = 1$ だから、$A = ga = g$ となり、結局 $10^{1007} \leq g < 10^{1008}$ である。B は高々 1008 桁の数であるから、$0 < B = gb < 10^{1008}$ である。したがって、b は 1,2,5 のいずれかでなければならない。
$a \times 10^{1008} = b(hstak - 1)$ において $a = 1$ だから、$b(hstk-1) = 10^{1008}$ を得る。$ht = a + b = 1 + b$ なので、

$$b(hstk-1) = b(sk(1+b)-1) = (b+1)(skb-1) + 1$$

とできるから、

$$(b+1)(skb-1) = 10^{1008} - 1 = 9 \times \underbrace{11\cdots1}_{1008\text{ 個}}$$

を考えればよい。右辺は明らかに奇数だから、左辺が偶数となる $b = 1, 5$ は不適。$b = 2$ のとき、

$$2sk - 1 = 3 \times \underbrace{11\cdots1}_{1008\text{ 個}} \quad \Leftrightarrow \quad sk = \underbrace{166\cdots67}_{1008\text{ 桁}}$$

を得る。この $166\cdots67$ を u とおく。このとき u は $10^{1007} \leq u < 10^{1008}$ を満たしており、また s は u の約数である。
$ht = a + b = 1 + 2 = 3$ だから、$h = 1, 3$。

$$10^{1007} \leq g = hs < 10^{1008}$$

なので、

$$\frac{10^{1007}}{3} \leq s < 10^{1008}$$

を満たす。u は明らかに 2 でも 3 でも 5 でも割り切れないから、次に大きい u の約数は高々 $\dfrac{u}{7}$。しかし明らかに $\dfrac{u}{7} < \dfrac{10^{1007}}{3}$ なので、s は u 以外になり得ない。したがって、$s = u$, $k = 1$。このとき $h = 3$ は不適である。なぜなら、

$$B = gb = 3 \cdot u \cdot 2 = \underbrace{1000\cdots02}_{1009\text{ 桁}} > 10^{1008}$$

となるから。したがって、$h = 1$ で $g = u$。$A = ga$, $B = gb$ から求める n もわかって、

$$n = 166\cdots67333\cdots34 \qquad (6\text{ は }1006\text{ 個、}3\text{ は }1007\text{ 個})$$

逆にこの n は題意を満たせる。