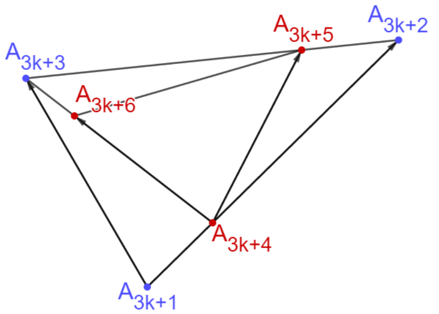
Q.091 ★10 学コン 2017-11-6

$0<t<1$ を満たす定数 t と、$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$ に対して、線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ を $t:(1-t)$ に内分する点を A_{n+3} とする $(n=1,2,3,\cdots)$。$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{KA}_n=0$ となるような、n によらない点 K は存在するか。存在するならば、$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}=\overrightarrow{q}$ として、$\overrightarrow{\mathrm{A_1K}}$ を $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, t で表せ。



k を 0 以上の整数として、$\overrightarrow{p_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_{3k+1}\mathrm{A}_{3k+2}}$, $\overrightarrow{q_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_{3k+1}\mathrm{A}_{3k+3}}$ とおく。なお、$\overrightarrow{p_0}=\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q_0}=\overrightarrow{q}$ である。点の取り方から、

$$\overrightarrow{p_{k+1}}=(1-2t)\overrightarrow{p_k}+t\overrightarrow{q_k}$$

$$\overrightarrow{q_{k+1}}=-t(1-t)\overrightarrow{p_k}+(1-t)\overrightarrow{q_k}$$

が成り立つ。これから $\overrightarrow{p_k}$ の 3 項間漸化式が次のように得られる。

$$\overrightarrow{p_{k+2}}-(2-3t)\overrightarrow{p_{k+1}}+(1-t)^3\overrightarrow{p_k}=\overrightarrow{0}$$

特性方程式 $x^2-(2-3t)x+(1-t)^3=0$ の解は、

$$x=\frac{(2-3t)\pm t\sqrt{4t-3}}{2}$$

である。符号が負のものを α、正のものを β とおく。これらを用いて、$\overrightarrow{p_k}$ について次のように書ける。

$$\begin{cases}\overrightarrow{p_{k+2}}-\alpha\overrightarrow{p_{k+1}}=\beta\left(\overrightarrow{p_{k+1}}-\alpha\overrightarrow{p_k}\right)\\ \overrightarrow{p_{k+2}}-\beta\overrightarrow{p_{k+1}}=\alpha\left(\overrightarrow{p_{k+1}}-\beta\overrightarrow{p_k}\right)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}\overrightarrow{p_{k+1}}-\alpha\overrightarrow{p_k}=\beta^k\left(\overrightarrow{p_1}-\alpha\overrightarrow{p_0}\right)\\ \overrightarrow{p_{k+1}}-\beta\overrightarrow{p_k}=\alpha^k\left(\overrightarrow{p_1}-\beta\overrightarrow{p_0}\right)\end{cases}$$

$\dfrac{3}{4}<t<1$ の場合、α, β は相異なる実数で、

$$\overrightarrow{p_k}=\frac{\beta^k-\alpha^k}{\beta-\alpha}\overrightarrow{p_1}-\frac{\alpha\beta^k-\beta\alpha^k}{\beta-\alpha}\overrightarrow{p_0}$$

と解ける。α は明らかに t について単調減少だから、$-1<\alpha<-\dfrac{1}{8}$ が成り立つ。続いて β については、$-3<\sqrt{4t-3}-3<-1$ に注意すれば、$-1<\beta<1$ であることはわかる。よって、

$$\alpha^k,\beta^k\to 0\quad(k\to\infty)$$

となるから、$\overrightarrow{p_k}\to\overrightarrow{0}$ $(k\to\infty)$ を得る。

$t=\dfrac{3}{4}$ の場合、$\alpha=\beta=-\dfrac{1}{8}$ となり、漸化式は

$$\overrightarrow{p_{k+1}}+\frac{1}{8}\overrightarrow{p_k}=\left(-\frac{1}{8}\right)^k\left(\overrightarrow{p_1}+\frac{1}{8}\overrightarrow{p_0}\right)$$

である。$\overrightarrow{p_1}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{p_0}$ は $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$ のみで表され k によらないことに注意すると、これは次のように解ける。

$$\overrightarrow{p_k}=\left(-\frac{1}{8}\right)^k\left(\overrightarrow{p_0}-k(8\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_0})\right)$$

ここで $k\to\infty$ の極限を考える。$\left|k\left(-\dfrac{1}{8}\right)^k\right|=\dfrac{k}{8^k}\to 0$ より、

$$\lim_{k\to\infty}=\left(-\frac{1}{8}\right)^k=\lim_{k\to\infty}k\left(-\frac{1}{8}\right)^k=0$$

とわかる。したがって、$\overrightarrow{p_k}\to\overrightarrow{0}$ $(k\to\infty)$。

$0<t<\dfrac{3}{4}$ の場合、α, β は共役な虚数となる。これらは絶対値が等しく、それを r とする。また、β の偏角を θ とするとき、α の偏角は $-\theta$ となる。なお、明らかに $\sin\theta\neq 0$ である。

$$r^2=\left(\frac{2-3t}{2}\right)^2+\left(\frac{t\sqrt{3-4t}}{2}\right)^2=(1-t)^3$$

$$\beta=r\cos\theta+ir\sin\theta,\ \alpha=r\cos\theta-ir\sin\theta$$

この場合も、漸化式は同様に解ける。

$$\overrightarrow{p_k}=\frac{\beta^k-\alpha^k}{\beta-\alpha}\overrightarrow{p_1}-\alpha\beta\frac{\beta^{k-1}-\alpha^{k-1}}{\beta-\alpha}\overrightarrow{p_0}$$

この $k\to\infty$ の極限を考えたい。

$$\frac{\beta^k-\alpha^k}{\beta-\alpha}=\frac{2ir^k\sin k\theta}{2ir\sin\theta}=r^{k-1}\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}$$

$$\alpha\beta\frac{\beta^{k-1}-\alpha^{k-1}}{\beta-\alpha}=(1-t)^3r^{k-2}\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

であるから、$\lim\limits_{k\to\infty}r^{k-1}\sin k\theta$ が分かればよい。$\sin k\theta$ は-1 から 1 までを振動し、$r^2=(1-t)^3$ より $0<t<\dfrac{3}{4}$ の範囲では $r<1$ である。したがって、$\lim\limits_{k\to\infty}r^{k-1}\sin k\theta=0$。これによって $\overrightarrow{p_k}\to\overrightarrow{0}$ $(k\to\infty)$ 。

以上より、任意の $0<t<1$ について $\overrightarrow{p_k}\to\overrightarrow{0}$ が成り立つ。漸化式、

$$\overrightarrow{p_{k+1}}=(1-2t)\overrightarrow{p_k}+t\overrightarrow{q_k}$$

について両辺の $k\to\infty$ の極限を考えれば、$\overrightarrow{q_k}\to\overrightarrow{0}$ $(k\to\infty)$ もわかる。このことは、$k\to\infty$ の極限において、3 点 A_{3k+1}, A_{3k+2}, A_{3k+3} は同じ点に収束することを意味する。続いて、初めの漸化式について、

$$\overrightarrow{p_{k+1}}+\overrightarrow{q_{k+1}}=\overrightarrow{p_k}+\overrightarrow{q_k}+(t^2-3t)\overrightarrow{p_k}$$

$$\Leftrightarrow\quad\frac{1}{3-t}\left(\overrightarrow{p_{k+1}}+\overrightarrow{q_{k+1}}\right)+t\overrightarrow{p_k}=\frac{1}{3-t}\left(\overrightarrow{p_k}+\overrightarrow{q_k}\right)$$

と整理できる。$t\overrightarrow{p_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_{3k+1}\mathrm{A}_{3k+4}}$ であることに注意すると、これは任意の k について、点 A_{3k+1} を始点とするベクトル $\dfrac{1}{3-t}\left(\overrightarrow{p_k}+\overrightarrow{q_k}\right)$ が指す点は常に等しいことを意味する。この点を X とし、$\overrightarrow{\mathrm{A}_{3k+1}\mathrm{X}}$ を $\overrightarrow{d_k}$ とおく。すると

$$\overrightarrow{d_k}=\frac{1}{3-t}\left(\overrightarrow{p_k}+\overrightarrow{q_k}\right)\ \to\ \overrightarrow{0}\quad(k\to\infty)$$

が成り立っている。このことは、$k\to\infty$ の極限において、2 点 A_{3k+1}, X は同じ点に収束することを意味する。したがって、この点 X を点 K とすれば、$\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{KA}_n=0$ とできる。$\overrightarrow{\mathrm{A_1K}}$ は $\overrightarrow{d_0}$ にあたるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{A_1K}}=\frac{1}{3-t}(\overrightarrow{p}+\overrightarrow{q})$$