Q.049 ★7◎ 京都大 理系 (2012)

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする。さらに、

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

$1 < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < 2,\ 2 < 1+\sqrt{3} < 3$ より、$X_1 = 2$ のときのみ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_1 \leq 1+\sqrt{3}$ が満たされる。よって $p_1 = \dfrac{1}{6}$。
任意の n について明らかに $Y_n > 0$ であるから、$X_{n+1} \geq 3$ のとき、

$$Y_{n+1} = X_{n+1} + \frac{1}{Y_n} > X_{n+1} \geq 3 > 1+\sqrt{3}$$

となって不適である。よって $X_{n+1} = 1, 2$ の場合のみ考えればよい。
$X_{n+1} = 2$ のとき、Y_n によらず $Y_{n+1} > 2 > \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ は満たされる。
$Y_{n+1} \leq 1+\sqrt{3}$ を満たす Y_n の範囲は、

$$Y_{n+1} = 2 + \frac{1}{Y_n} \leq 1+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad Y_n \geq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$X_{n+1} = 1$ のとき、$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_{n+1} \leq 1+\sqrt{3}$ を満たす Y_n の範囲は、

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_{n+1} = 1 + \frac{1}{Y_n} \leq 1+\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$$

これらのことから、$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_{n+1} \leq 1+\sqrt{3}$ となるのは、(1): $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$ かつ $X_{n+1} = 1, 2$、(2): $Y_n > 1+\sqrt{3}$ かつ $X_{n+1} = 2$、(3): $\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq Y_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ かつ $X_{n+1} = 1$、の場合となる。
ここで、$\dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$ より、$Y_n \geq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ は常に満たされることに注意して、$Y_n > 1+\sqrt{3},\ Y_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる確率をそれぞれ $q_n,\ r_n$ とおくと、p_n についての漸化式を次のように得る。

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n\,, \quad p_1 = \frac{1}{6}$$

ここで、$p_n + q_n + r_n = 1$ となるから、漸化式は $p_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n + \dfrac{1}{6}$ となって、これを解けばよい。

$$p_n = \frac{1}{5 \cdot 6^n} + \frac{1}{5}$$