Q.132 ★9 京大

a は $0 < a < \pi$ を満たす定数とする。非負整数 n に対し、$n\pi < x < (n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a) = x\sin x$ を満たす x がただ 1 つ存在するので、この x の値を x_n とする。$\lim_{n\to\infty}(x_n - n\pi)$ と、$\lim_{n\to\infty} n(x_n - n\pi)$ を求めよ。

求める x_n は、2 つのグラフ $y = \sin(x+a)$ と $y = x\sin x$ との $n\pi < x < (n+1)\pi$ における交点である。これらのグラフを $-n\pi$ 平行移動することを考えると、

$$\sin(x + n\pi + a) = (-1)^n \sin(x+a)$$

$$(x+n\pi)\sin(x+n\pi) = (-1)^n (x+n\pi)\sin x$$

したがって、2 つのグラフ $y = \sin(x+a)$ と $y = (x+n\pi)\sin x$ との $0 < x < \pi$ における交点は、$x_n - n\pi$ と等しい。さらに、

$$\sin(0+a) > (0+n\pi)\sin 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \leq 1 < \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\sin\frac{\pi}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

となるから、$0 < x_n - n\pi < \dfrac{\pi}{2}$ が成り立つ。ここで、

$$\Big[(x+n\pi)\sin x\Big]' = \sin x + (x+n\pi)\cos x$$

より、$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $y = (x+n\pi)\sin x$ は常に単調増加する。また、$(x+n\pi)\sin x = 1$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲での解を t_n とおくと、$\sin(x+a) \leq 1$ より、$0 < x_n - n\pi \leq t_n$ が成り立つ。ここで、

$$(x+n\pi)\sin x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{1}{\sin x} = -n\pi$$

$$\left[x - \frac{1}{\sin x}\right]' = 1 + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

なので、$y = x - \dfrac{1}{\sin x}$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で常に単調増加、また $\lim_{x\to+0} x - \dfrac{1}{\sin x} = -\infty$。したがって、

$$t_n - \frac{1}{\sin t_n} = -n\pi \to -\infty \quad (n \to \infty)$$

によって、$\lim_{n\to\infty} t_n = 0$ である。よってはさみうちの原理によって、$\lim_{n\to\infty}(x_n - n\pi) = 0$。

続いて、2 つのグラフ $y = \sin(x+a)$ と $y = (x+n\pi)\sin x$ を、ともに x 軸方向に n 倍に拡大することを考える。なお、$n\to\infty$ の極限を考えるにあたって、$n > 0$ として影響ないからそのようにする。このようなグラフの式は、

$$y = \sin\frac{x+a}{n}$$

$$y = \frac{x+n\pi}{n}\sin\frac{x}{n}$$

であり、これらの $\left(0, \dfrac{n\pi}{2}\right)$ における交点が $n(x_n - n\pi)$ に等しい。

$$\sin\frac{x+a}{n} = \frac{x+n\pi}{n}\sin\frac{x}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\frac{x}{n}\cos\frac{a}{n} + \cos\frac{x}{n}\sin\frac{a}{n} = \left(\frac{x}{n} + \pi\right)\sin\frac{x}{n}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{x}{n} + \frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\cos\frac{x}{n} = \pi - \cos\frac{a}{n} \quad \cdots(*)$$

これについて、$n\to\infty$ の極限を考える。$0 < \dfrac{x}{n} < \dfrac{\pi}{2}$ には注意して、

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{x}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\sin\frac{x}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\cdot\frac{\frac{x}{n}}{\sin\frac{x}{n}}\cdot\frac{a}{x} = \frac{a}{x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\pi - \cos\frac{a}{n}\right) = \pi - 1$$

である。このことから、$\lim_{n\to\infty} n(x_n - n\pi)$ は、$(*)$ の極限として

$$\frac{a}{x} = \pi - 1$$

の解に等しい。すなわち、$\lim_{n\to\infty} n(x_n - n\pi) = \dfrac{a}{\pi - 1}$