Q.056

(1) $3 < \pi < 4$ を示せ。★1
(2) $2 < e < 3$ を示せ。 ★3
(3) 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。 ★3 (東大)

(1)

半径 1 の円の円周は 2π。この円に内接する正六角形の 1 辺の長さは 1 であるから、周の長さは 3 である。円周はこの周より長いから $3 < \pi$ が示された。同じ円に外接する正六角形の 1 辺の長さは $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ であるから、周の長さは $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ である。円周はこの周より短いから、

$$2\pi < \frac{12}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \pi < \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} = \sqrt{12} < 4$$

となって $\pi < 4$ が示された。以上より、$3 < \pi < 4$ が成り立つ。

(2)

$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ である。ここで $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ とおく。すると $e = \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ である。

$$\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 1^{n-k}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \\
&< \lim_{n\to\infty}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots \\
&< 1+1+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots \\
&= 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}$$

となって $e < 3$ が示された。続いて、n 個の $\dfrac{n+1}{n}$ と、1 個の 1 について相加相乗平均の不等式を適用すると、明らかに $\dfrac{n+1}{n} \neq 1$ だから等号は成立せず、

$$\frac{n\cdot\frac{n+1}{n}+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が得られるから、$a_{n+1} > a_n$ が成り立つ。これが任意の n について成り立つことから、$e > a_1 = 2$ が従う。
以上より、$2 < e < 3$ が成り立つ。

(3)

半径 1 の円に内接する正 12 角形を考える。これは頂角が 30° の二等辺三角形に分割できる。3 頂点 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ を $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ であるようにとる。A から OB に垂線を下ろし、その足を H とする。$\angle\mathrm{AOH} = 30^\circ$ だから、$\mathrm{OH} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}$、$\mathrm{BH} = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$。直角三角形 ABH について三平方の定理により、

$$\mathrm{AB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

これの 12 倍が正 12 角形の周であり、円周はこれより長いから、

$$12\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} < 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad 6\sqrt{2-\sqrt{3}} < \pi$$

が成り立つ。これより、$6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ が 3.05 より大きいことを示せればよい。双方とも正であるから、これらの大小は 2 乗した値、$36(2-\sqrt{3})$ と $3.05^2 = 9.3025$ との大小と一致する。$1.74^2 = 3.0276$ より、$\sqrt{3} < 1.74$ であるから、

$$36(2-\sqrt{3}) > 36(2-1.74) = 9.36 > 9.3025 = 3.05^2$$

が成り立つ。よって、$6\sqrt{2-\sqrt{3}} > 3.05$ が従う。
以上より、$\pi > 3.05$ が示された。