Q.221 ★7 学コン 2018-5-4

xyz 座標空間に異なる 5 点 A, B, C, D, E があり、

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{DE} = \mathrm{EA} = 1$$

$$\angle\mathrm{EAB} = \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{BCD} = \angle\mathrm{CDE} = \angle\mathrm{DEA} = 90^\circ$$

を満たしている。

(1) CD の長さを求めよ。

(2) A, B, C, D, E を全て通る球は存在するか。存在するならば、その球の半径を求めよ。

(1)

点 A, B, C の座標をそれぞれ $\mathrm{A}(0,1,0)$, $\mathrm{B}(0,0,0)$, $\mathrm{C}(1,0,0)$ とおく。このとき $\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$ より、点 D は平面 $x = 1$ 上に存在することがわかるから、$\mathrm{D}(1,s,t)$ とおく。また $\angle\mathrm{EAB} = 90^\circ$ より、点 E は平面 $y = 1$ 上に存在し、かつ EA$= 1$ であるから、$\mathrm{E}(\cos\theta, 1, \sin\theta)$ とおく。ただし $0 \leq \theta < 2\pi$。

$\overrightarrow{\mathrm{DC}} = (0,-s,-t)$, $\overrightarrow{\mathrm{DE}} = (\cos\theta - 1, 1 - s, \sin\theta - t)$, $\overrightarrow{\mathrm{EA}} = (-\cos\theta, 0, -\sin\theta)$ となる。DE$= 1$ と $\angle\mathrm{CDE} = 90^\circ$ および $\angle\mathrm{DEA} = 90^\circ$ から、

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 = (\cos\theta - 1)^2 + (1-s)^2 + (\sin\theta - t)^2 = 1 \quad ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} = -s(1-s) + (-t)(\sin\theta - t) = 0 \quad ②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{ED}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EA}} = (1 - \cos\theta)(-\cos\theta) + (t - \sin\theta)(-\sin\theta) = 0 \quad ③$$

となる。①と②から $s^2 + t^2$ を消去すれば $s + t\sin\theta + 2(\cos\theta - 1) = 0$ を得て、③は $t\sin\theta = 1 - \cos\theta$ となるから、結局 $s = 1 - \cos\theta = t\sin\theta$ である。これによって②の左辺を整理すれば

$$s^2 - s + t^2 - t\sin\theta = s^2 - 2s + t^2 = 0 \Leftrightarrow (s-1)^2 + t^2 = 1$$

となる。両辺に $\sin^2\theta$ を乗じてさらに整理すると、

$$(s-1)^2\sin^2\theta + t^2\sin^2\theta = \sin^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad (-\cos\theta)^2(1 - \cos^2\theta) + (1 - \cos\theta)^2 = 1 - \cos^2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos^4\theta - 3\cos^2\theta - 2\cos\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\theta(\cos\theta - 1)^2(\cos\theta + 2) = 0$$

より $\cos\theta = 0, 1$、すなわち $\theta = 0, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ と求まった。これによって s, t も求まって、

$$(\theta, s, t) = (0,0,0), \left(\frac{1}{2}\pi, 1, 1\right), \left(\frac{3}{2}\pi, 1, -1\right)$$

となる。しかし、$\theta = 0$ の場合には、点 D が点 C と同一になるため不適。よって CD の長さは、($t = \pm 1$ のいずれでも同じ値になって) CD$= \sqrt{2}$

(2)

線分 AC の中点 $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ は、△ABC が直角三角形であることから、この三角形の外心となる。△ABC は平面 $z = 0$ 上にあることから、点 M を通り平面 $z = 0$ に直交する直線 $x = y = \frac{1}{2}$ 上にある任意の点 P はについて、PA = PB = PC が成り立つ。なぜなら、3 つの直角三角形 △PMA, △PMB, △PMC は、全て合同であるから。

線分 CE の中点 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ は、△CDE が直角三角形であることから、この三角形の外心となる。よって NC = ND = NE が成り立っている。一方で、この点 N は、直線 $x = y = \frac{1}{2}$ 上にあるから、NA = NB = NC も成り立っている。これによって、点 N から 5 点 A, B, C, D, E へのそれぞれの長さは全て等しい。すなわち、この 5 点を全て通る球が存在することが示された。

この球の半径は (例えば)NA から求まり、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$