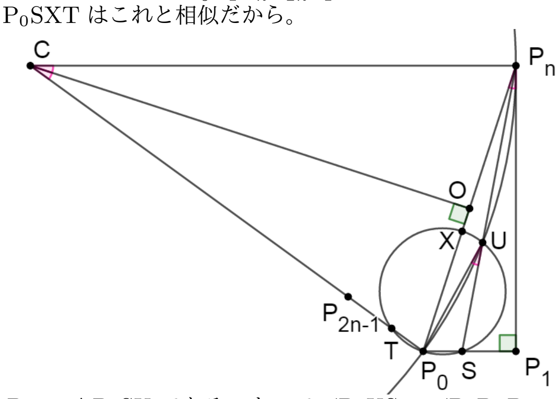
Q.040 ★8 学コン 2018-6-6

一辺の長さが $\dfrac{1}{n}$ の正 $2n$ 角形 $\mathrm{P_0P_1\ldots P_{2n-1}}$ がある。辺 $\mathrm{P_0P_1}$ 上に点 S、辺 $\mathrm{P_0P_{2n-1}}$ 上に点 T を、$\mathrm{P_0S = P_0T}$ となるようにとり、線分 SP_n 上に点 U を $\angle\mathrm{SUT} = \angle\mathrm{P_1P}_n\mathrm{P}_{2n-1}$ となるようにとる。ただし、$\mathrm{S = P_0}$ のときは $\mathrm{U = P_0}$ とする。S を $\mathrm{P_0}$ から $\mathrm{P_1}$ まで動かすとき、U の軌跡の長さを $U(n)$ とする。
(1) $U(3)$ を求めよ。
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U(n)$ を求めよ。

線分 $\mathrm{P_0P}_n$ 上に点 X を、$\dfrac{\mathrm{P_0S}}{\mathrm{P_0P_1}} = \dfrac{\mathrm{P_0X}}{\mathrm{P_0P}_n}$ となるようにとる。すると 3 辺の比がそれぞれ等しいから、$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{P_1P}_{2n-1} \sim \triangle\mathrm{XST}$ が成り立ち、$\angle\mathrm{P_1P}_n\mathrm{P}_{2n-1} = \angle\mathrm{SXT}$ である。するとこのとき $\angle\mathrm{SXT} = \angle\mathrm{SUT}$ となるから、4 点 $\mathrm{S, T, U, X}$ は同一円周上にある。この円はさらに点 $\mathrm{P_0}$ も通る。なぜなら、四角形 $\mathrm{P_0P_1P}_n\mathrm{P}_{2n-1}$ は明らかに同一円周上にあり、四角形 $\mathrm{P_0SXT}$ はこれと相似だから。



$\triangle\mathrm{P_0P_1P}_n \sim \triangle\mathrm{P_0SX}$ である。よって $\angle\mathrm{P_0XS} = \angle\mathrm{P_0P}_n\mathrm{P_1}$。一方で円周角の定理より $\mathrm{P_0XS = P_0US}$。さて、この正 $2n$ 角形の外接円の中心を O とおく。すると $\mathrm{OP_0 = OP_1 = OP}_n$ であり、$\angle\mathrm{P_0OP_1} = \dfrac{\pi}{n}$ なので、$\angle\mathrm{P_0P}_n\mathrm{P_1} = \dfrac{\pi}{2n}$。したがって、点 $\mathrm{S, U}$ の位置によらず、常に $\angle\mathrm{P_0US} = \dfrac{\pi}{2n}$ が成り立つ。このことは、点 U が線分 $\mathrm{P_0P}_n$ を弦とする同一の円周上に存在することを示している。
$\angle\mathrm{P}_n\mathrm{P_1P_0} = \dfrac{\pi}{2}$ であるから、

$$\frac{\mathrm{P_0P_1}}{\mathrm{P_0P}_n} = \sin\frac{\pi}{2n} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{P_0P}_n = \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{2n}}$$

$\triangle\mathrm{P_0P}_n\mathrm{U}$ の外接円の中心を C とおく。$\angle\mathrm{P_0UP}_n = \pi - \dfrac{\pi}{2n}$ が鈍角であることに注意して、

$$\angle\mathrm{P_0CP}_n = 2\pi - 2\angle\mathrm{P_0UP}_n = \frac{\pi}{n}$$

点 O は線分 $\mathrm{P_0P}_n$ の中点だから、$\angle\mathrm{COP_0} = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{OCP_0} = \dfrac{\pi}{2n}$。よって、

$$\frac{\mathrm{CP_0}}{\mathrm{OP_0}} = \sin\frac{\pi}{2n} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{CP_0} = \frac{1}{2n\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

これらのことから、S を $\mathrm{P_0}$ から $\mathrm{P_1}$ まで動かすとき、U は $\mathrm{P_0}$ から P_n まで、半径 $\dfrac{1}{2n\sin^2\frac{\pi}{2n}}$ の円周に沿って動くことがわかる。またこの扇形の中心角は $\angle\mathrm{P_0CP}_n = \dfrac{\pi}{n}$。よってこの軌跡の長さは、

$$U(n) = \frac{1}{2n\sin^2\frac{\pi}{2n}}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2n^2\sin^2\frac{\pi}{2n}}$$

によって求まる。これによって、

$$U(3) = \frac{\pi}{2\cdot 3^2\sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{9} \quad\cdots(1)$$

$$\lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^2\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad\cdots(2)$$