Q.210 ★7◎ 京大理系 (2017)

w を 0 でない複素数, x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする.[*1]

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする. w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x, y) の軌跡を求めよ。

(1)

w の絶対値を r、偏角を θ とすれば、$w=r\cos\theta+ir\sin\theta$ であり、$\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{r}\cos\theta-i\dfrac{1}{r}\sin\theta$ となるから、

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta,\ y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

となる。このとき x, y について

$$1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\left(\frac{r}{r^2+1}x\right)^2+\left(\frac{r}{r^2-1}y\right)^2$$

が成り立っている。w が絶対値 R の複素数全体を動くことは、$r=R$ に固定し、θ を $0\leq\theta<2\pi$ の範囲で動かすことに相当する。θ をこの範囲で動かすと、前式を満たす (x, y) を全て取り尽せる。$R>1$ より $\dfrac{R}{R^2+1}, \dfrac{R}{R^2-1}$ はともに正であることに注意すれば、求める軌跡は、

$$\text{楕円：}\ \left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1$$

(2)

x, y は (1) と同様に r, θ で表される。w が偏角 α の複素数全体を動くことは、$\theta=\alpha$ に固定し、r を正の実数全体で動かすことに相当する。r を媒介変数と見て消去する。

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}\right)^2=r^2+2+\frac{1}{r^2}$$

$$\left(\frac{y}{\sin\alpha}\right)^2=r^2-2+\frac{1}{r^2}$$

であるから辺々引いて、

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}x^2-\frac{1}{\sin^2\alpha}y^2=4$$

を得る。さて、r が正の実数全体を動くとき、$r+\dfrac{1}{r}$ は 2 以上の実数全体を動く。よって $x\geq 2\cos\alpha$ の範囲のみを動く。一方で、$r-\dfrac{1}{r}$ は実数全体をとる。$0<\alpha<\dfrac{pi}{2}$ より、$\cos^2\alpha, \sin^2\alpha$ はともに 0 より大きくなることに注意すれば、求める軌跡は、

放物線： $\dfrac{1}{4\cos^2\alpha}x^2-\dfrac{1}{4\sin^2\alpha}y^2=1$ （ただし $x\geq 2\cos\alpha$ の部分）