Q.287 ★7-大 math_akumon 様 作

$a > 1$ を実数定数とする．連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が関数方程式 $x = f(f(ax))$ を満たし, かつ $f'(0)$ が存在するとき, $f(x) = \pm\frac{x}{\sqrt{a}}$ であることを示せ.

$ax = t$ とおくことで, $f(f(t)) = a^{-1}t$ となる．続けて f に 2 回入れると

$$f(f(f(f(t)))) = f(f(a^{-1}t)) = a^{-2}t$$

となる．帰納的に, 非負整数 n に対し

$$f^{2n}(t) = a^{-n}t$$

が従う．さらに,

$$f^{2n}(t) = f(f^{2n-2}(f(t))) = f(a^{-(n-1)}f(t)) = a^{-n}t$$

であるから, $n \to \infty$ とすることで

$$\lim_{n\to\infty} f(a^{-(n-1)}f(t)) = f(0) = \lim_{n\to\infty} a^{-n}t = 0$$

が従う．ただし, 最初の等号は f の連続性と $a > 1$ を用いた.
よって $f'(0)$ は

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$

として与えられる.
ここで, 関数方程式より f の全単射性 ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を 1 対 1 に移す関数であること) が従うので, $x \neq 0$ に対して $f(x) \neq 0$ であることに注意すると, 任意の $x \neq 0$ にたいして

$$\frac{x}{f(ax)} = \frac{f(f(ax))}{f(ax)}$$

が成り立つ．この式から $x \to 0$ とすれば, 連続性より $f(ax) \to f(0) = 0$ であるので,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(ax)} = \frac{1}{a}f'(0)^{-1} = \lim_{x\to 0}\frac{f(f(ax))}{f(ax)} = f'(0)$$

が従い, $f'(0) = \pm a^{-1/2}$ でなければならないことが分かる.
ここで, 零でない実数 x_0 を任意に一つ取る．いま,

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(a^{-n}x_0)}{a^{-n}x_0}$$

であるが, $f(a^{-n}x_0) = f^{2n+1}(x_0) = a^{-n}f(x_0)$ であるので,

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{-n}f(x_0)}{a^{-n}x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0}$$

となるので, すべての零でない実数 x_0 に対して $f(x_0) = f'(0)x_0$ であることが示された． よって $x_0 = 0$ の場合と合わせることで, $f(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{a}}x$ であることが必要となる．また, 明らかにこの関数は条件を満たしている.
以上より題意は示された.