Date . .

Q.110

6 さいころを n 回ふって

$d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n \neq d_1$ となる事象を A_n，確率を P_n とし，
$d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n = d_1$ となる事象を B_n，確率を q_n とする。

n 回までサイコロをふった結果と $n+1$ 回目の結果から漸化式を導く。

$\underbrace{A_n \text{のとき,}}_{P_n}$ $\underbrace{d_{n+1} = d_1 \text{ なら}}_{\frac{1}{6}}$ $d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n \neq d_{n+1} = d_1$ で B_{n+1} となる。

$\underbrace{A_n \text{のとき,}}_{P_n}$ $\underbrace{d_{n+1} \neq d_n \text{ かつ } d_{n+1} \neq d_1}_{\frac{2}{3}}$ なら，$d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n \neq d_{n+1} \neq d_1$ で A_{n+1} となる。

$\underbrace{B_n \text{のとき}}_{q_n}$ $\underbrace{d_{n+1} \neq d_n (= d_1)}_{\frac{5}{6}}$ なら $d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n \neq d_{n+1} \neq d_1$ で A_{n+1} となる。

以上から，
$$\begin{cases} P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{5}{6}q_n \\ q_{n+1} = \frac{1}{6}P_n \end{cases}$$
$(n \geqq 2)$ を得るから，

$$P_{n+2} = \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{5}{6}q_{n+1} = \frac{2}{3}P_{n+1} + \frac{5}{36}P_n \quad ①$$
$(n \geqq 2)$ となる。

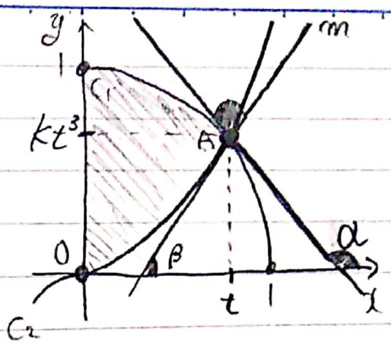
特性方程式 $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{36} = 0$ の解は $x = \frac{5}{6}, -\frac{1}{6}$ であるから，

①を式変形して
$$\begin{cases} P_{n+2} - \frac{5}{6}P_{n+1} = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(P_{n+1} - \frac{5}{6}P_n\right) \\ P_{n+2} + \frac{1}{6}P_{n+1} = \frac{5}{6}\left(P_{n+1} + \frac{1}{6}P_n\right) \end{cases}$$
$(n \geqq 2)$ を得る。

よって，
$$\begin{cases} P_{n+2} - \frac{5}{6}P_{n+1} = \left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(P_3 - \frac{5}{6}P_2\right) \cdots ② \\ P_{n+2} + \frac{1}{6}P_{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(P_3 + \frac{1}{6}P_2\right) \cdots ③ \end{cases}$$
となり，P_2 は $d_1 \neq d_2$ となる確率なので $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = P_2$　P_3 は $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_1$ となる確率で，(d_1, d_2, d_3) の組は6つの目から異なる3つの目をえらんで並びかえる ${}_6P_3 = 120$ 通りあるから $P_3 = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$　③−②と $P_2 = \frac{5}{6}, P_3 = \frac{5}{9}$ より，$P_{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} - 5\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}$ $(n \geqq 2) \iff P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ $(n \geqq 3)$ を得る。これは，$n=2$ でも $\frac{25}{36} + \frac{5}{36} = \frac{5}{6} = P_2$ となるからよい。以上より，$P_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{6}\right)^n$

Q.193

$\boxed{2}$



Aのx座標をtとする。$(t>0)$

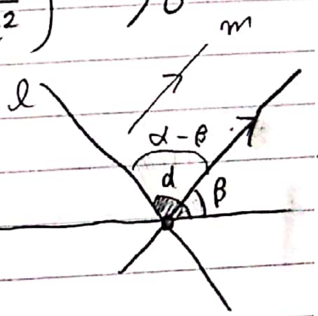
$y=kx^3 \Rightarrow y'=3kx^2$ より、mの傾きは$3kt^2$

原点をOとして、lはOAに垂直だから、lの傾きは

$-\dfrac{1}{(\text{OAの傾き})} = -\dfrac{1}{kt^2}$　　$0\leqq\alpha<\pi$, $0\leqq\beta<\pi$ なる実数α, βが、

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{kt^2}$, $\tan\beta=3kt^2$ を満たすとき、加法定理より

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{-\frac{1}{kt^2}-3kt^2}{1+\left(-\frac{1}{kt^2}\right)\cdot 3kt^2}=\frac{1}{2}\left(3kt^2+\frac{1}{kt^2}\right)>0$$



となる。よって、$\alpha-\beta$は鋭角であるから、$\alpha-\beta$がlとmのなす角である。相加相乗平均不等式から、

$\underbrace{}_{kt^2>0\text{より}}$

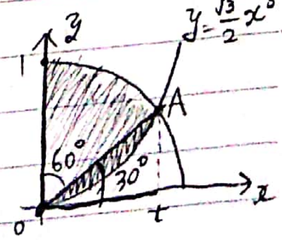
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left(3kt^2+\frac{1}{kt^2}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3kt^2\cdot\frac{1}{kt^2}}=\sqrt{3} \text{ より、}$$

$\tan(\alpha-\beta)\geqq\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ で、$\alpha-\beta$は鋭角だから、$\dfrac{\pi}{3}\leqq\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$

等号成立条件は $3kt^2=\dfrac{1}{kt^2} \Leftrightarrow (kt^2)^2=\dfrac{1}{3}$ ① のときである。AはC$_1$上の点なので

$t^2+(kt^3)^2=1$ となり、①より $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\because t>0)$　①に代入して $k^2=\dfrac{16}{27}$

から $k=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ $(\because k>0)$ となる。よって、実際に $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{3}$ となるので、これが最小となるときである。



$(\text{OAの傾き})=kt^2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ より、右のように中心角60°、半径1のおうぎ形と、$C_2: y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^3$, OA で囲まれた領域に分割して、

求める面積は、$\dfrac{\pi}{6}\cdot 1^2+\displaystyle\int_0^t\left(\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{3}}{9}x^3\right)dx=\frac{\pi}{6}+\left[\frac{x^2}{2\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{9}x^4\right]_0^t$

$$=\frac{\pi}{6}+\left(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{\sqrt{3}}{16}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Q.220

No.

Date

$\boxed{4}$

$$f_n(\theta)=\frac{\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta} \Rightarrow f_n'(\theta)=\frac{\frac{1}{n}(\tan\theta)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\theta-\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta^2}=\frac{\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)$$

の符号を見る。〰部は $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ において正であるから、$\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}$ の符号をみればよい。$g(x)=\frac{\sin x}{x}$ $(0<x<\pi)$ とすると、$g'(x)=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$

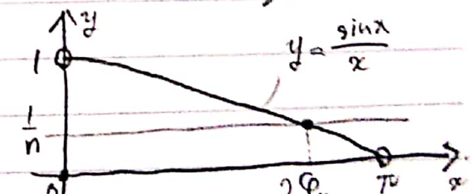
$(x-\tan x)'=1-\frac{1}{\cos^2 x}=-\tan^2 x<0$ より、$x-\tan x$ は $0<x<\pi$ で単調減少し、$\lim_{x\to+0}(x-\tan x)=0>x-\tan x$ を得るから $g'(x)<0$ より $g(x)$ は単調減少する。

よって、$h(\theta)=\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}=\frac{1}{n}-g(2\theta)$ とすると、$\lim_{\theta\to+0}h(\theta)=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)$

$=\frac{1-n}{n}<0$, $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}h(\theta)=\frac{1}{n}-\frac{0}{\pi}=\frac{1}{n}>0$

θ	0	……	φ_n	……	$\frac{\pi}{2}$
$f_n(\theta)$		↘	極小	↗	
$h(\theta)$	$-$	$-(\nearrow)$	0	$+(\nearrow)$	$+$
$h'(\theta)$		$+$	$+$	$+$	$+$

$g(x)$ が単調減少から $h(\theta)$ は単調増加し、右の増減表を得る。中間値の定理から $h(\varphi_n)=0$ $\Leftrightarrow f_n'(\varphi_n)=0$ なる実数 φ_n $\left(0<\varphi_n<\frac{\pi}{2}\right)$ がただ1つ存在し、$\theta=\varphi_n$ において $f_n(\theta)$ は極小かつ最小となる。



$g(x)$ の単調減少性，$\lim_{x\to\pi}g(x)=0$，$\frac{1}{n}=\frac{\sin2\varphi_n}{2\varphi_n}$ より

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin2\varphi_n}{2\varphi_n}=0$，$0<\varphi_n<\frac{\pi}{2}$，これらから、

$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\frac{\pi}{2}$ である。

$$m_n=\frac{\sqrt[n]{\tan\varphi_n}}{\varphi_n}=\frac{1}{\varphi_n}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\varphi_n}\left(\frac{\sin^2\varphi_n}{\sin\varphi_n\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{2\varphi_n}{\sin2\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\cdot n^{\frac{1}{n}}$$ より、

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\cdot n^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{(1)^0}{\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^0}\cdot1=\frac{2}{\pi}$$ //

Q.144

No.

Date . .

3

方程式 $P(x)=0$ の解を $a_1, a_2, \cdots, a_n$, x^n の係数を $k\ (\neq 0)$

とおいて, $P(x) = k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ と表される。このとき,

$$P'(x) = k(x-a_1)'(x-a_2)\cdots(x-a_n) + k(x-a_1)(x-a_2)'\cdots(x-a_n) + \cdots + k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)'$$

となる。$i=1,2,\cdots,n$ に対して, $x=a_i$ を代入すると 因数 $(x-a_i)$ をもつ項は 0 になるので

$$P'(a_i) = k(a_i-a_1)(a_i-a_2)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n) \neq 0$$

より, a_i は方程式 $P(x)=P'(x)$ の解ではない。

よって, $x \neq a_i$ とすると $P(x) \neq 0$ であり, このとき

$$P(x) = P'(x) \iff 1 = \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}$$

となる。この右辺を $Q(x)$ とおく。 また, 以降では

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ として考える (一般性は失われない)

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x-a_i} \implies Q'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-a_i)^2} < 0 \text{ より}$$

$Q(x)$ は単調減少する。 $x<a_1$ では明らかに $Q(x)<0$ で,

区間 $(-\infty, a_1)$ に $Q(x)=1$ の解はない。 $n \geqq 2$ のとき, 区間 (a_i, a_{i+1}) $(i=1,2,\cdots,n-1)$

において $Q(x)$ は単調減少しつつ, $\lim_{x\to a_i+0} Q(x) = \infty$, $\lim_{x\to a_{i+1}-0} Q(x) = -\infty$ より, 中間値の

定理から, 区間 (a_i, a_{i+1}) において $Q(x)=1$ の解がただ1つ存在する。

区間 (a_{i+1}, ∞) では, $\lim_{x\to a_n+0} Q(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} Q(x) = 0$, 単調減少性から, 同様に

$Q(x)=0$ なる x がただ1つ存在する。以上より, 区間 (a_i, a_{i+1}) $(i=1,2,\cdots,n-1)$ と (a_n, ∞)

の中に解が1つずつ含まれており, (これらの解は明らかに異なるので) 題意は示された。□

Q.206

$\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_2}=\cdots=\overrightarrow{v_{2n+1}}=\vec{0}$ ① でないと仮定する。十分大きい自然数Nをとり、$N!\overrightarrow{v_k}$ の成分が全て整数であるようにできる。また、①のときに

$N!x_1, N!x_2, \cdots, N!x_{2n+1}, N!y_1, \cdots, N!y_{2n+1}$ の最大公約数 g を考えることができる。$\dfrac{N!x_k}{g}=X_k$, $\dfrac{N!y_k}{g}=Y_k$ とし、$\dfrac{N!}{g}\overrightarrow{v_k}=\overrightarrow{w_k}$

とすると、$\overrightarrow{w_k}$ の成分は全て整数でかつ、$X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}, Y_1, \cdots, Y_{2n+1}$ の最大公約数は 1 となる。ゆえに、$X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}, Y_1, Y_2, \cdots, Y_{2n+1}$ の中に奇数が必ず1つは存在する。対称性より $X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ の中に少なくとも1つ奇数があるとしてよい。②

このとき、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}\overrightarrow{v_k}=\vec{0} \iff \sum_{k=1}^{2n+1}\overrightarrow{w_k}=\vec{0} \iff \begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}X_k=0 \\ \text{かつ} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}Y_k=0\end{cases}$ ④ であり、

$X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ のなかに奇数が l 個あるとすると、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}X_k \equiv l \pmod 2$ で、

$l\equiv 0 \pmod 2$ だから l は偶数である。すなわち、$X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ のなかに奇数は偶数個、偶数は奇数個ある。(1個以上が確定) ②より、$X_1, X_2, \cdots, X_{2n+1}$ の中には偶数も奇数も必ず1つ存在する。X_a が偶数、X_b が奇数であるような

a と b をとってこれる。$|\overrightarrow{v_a}|=|\overrightarrow{v_b}| \iff |\overrightarrow{w_a}|=|\overrightarrow{w_b}| \iff X_a^2+Y_a^2=X_b^2+Y_b^2$

$\Rightarrow 0+Y_a^2\equiv 1+Y_b^2 \pmod 4$ ③ であり、一般に $m^2\equiv 0, 1 \pmod 4$ であることから、$Y_a^2\equiv 1$, $Y_b^2\equiv 0$ のみが③をみたすパターンであると分かる。ここから、$|\overrightarrow{w_a}|^2=|\overrightarrow{w_b}|^2\equiv 1 \pmod 4$

より、$|\overrightarrow{w_k}|^2\equiv 1 \pmod 4$ となる。すなわち、$X_k^2+Y_k^2$ は奇数なので、X_k と Y_k の偶奇は異なる。このとき、$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{2n+1}$ の中に奇数は奇数個あるので、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}Y_k$ は奇数であり、

④に矛盾する。よって、①でないという仮定が誤りで、①が成立する。

No.

Date

Q.152

$\boxed{2}$

$|z|=1$ 上を一周するから，　$z=\cos\theta+i\sin\theta$　とおいて，

θ を　$0\leqq\theta<2\pi$　で動かすように考える。　このとき，

$$f(z)=(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{n+1}\left(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\right)$$

（∵ ド・モアブルの公式）

$$=\left(\cos\theta-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\right)+\left(\sin\theta-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta\right)i$$

であるから，

$f(z)$ が複素平面上で動く曲線は，xy 平面において，媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases} x=\cos\theta-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y=\sin\theta-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}\quad(0\leqq\theta<2\pi)$$

が表す曲線であり，

その曲線の長さは，　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$　で与えられる。

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\left(-\sin\theta+\sin(n+1)\theta\right)^2+\left(\cos\theta-\cos(n+1)\theta\right)^2$$

$$=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2(n+1)\theta+\cos^2(n+1)\theta)-2\sin\theta\sin(n+1)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta$$

$$=1+1-2\cos\{(n+1)\theta-\theta\}$$

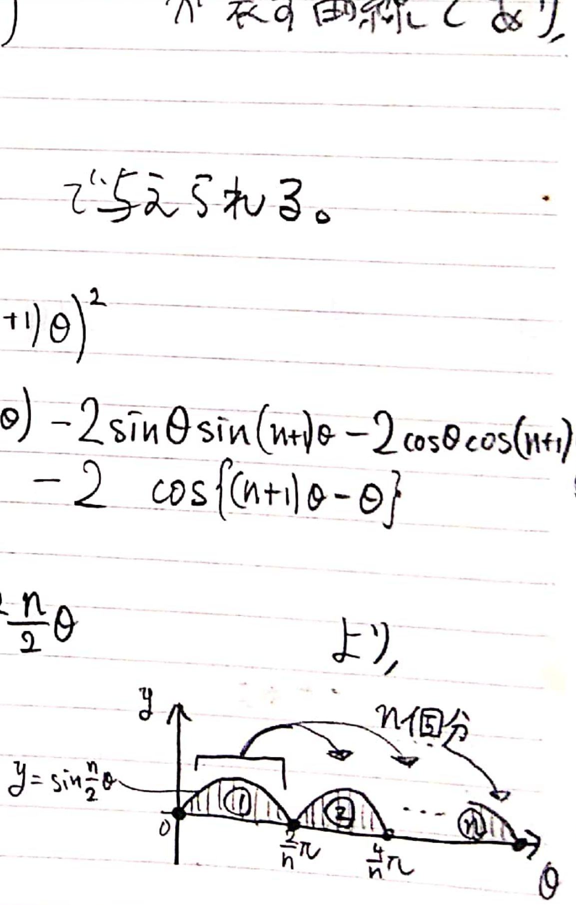
$$=2-2\cos n\theta$$

$$=4\cdot\frac{1-\cos n\theta}{2}=4\sin^2\frac{n}{2}\theta$$

より，

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{n}{2}\theta}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{n}{2}\theta\right|d\theta$$

$$=\left(2\int_0^{\frac{2}{n}\pi}\sin\frac{n}{2}\theta\right)\times n=2n\left[-\frac{2}{n}\cos\frac{n}{2}\theta\right]_0^{\frac{2}{n}\pi}$$

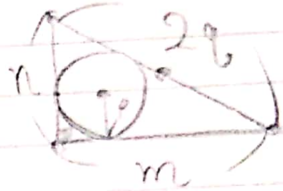


$$=-4(\cos\pi-\cos0)=-4\times(-2)=8$$

Q.191

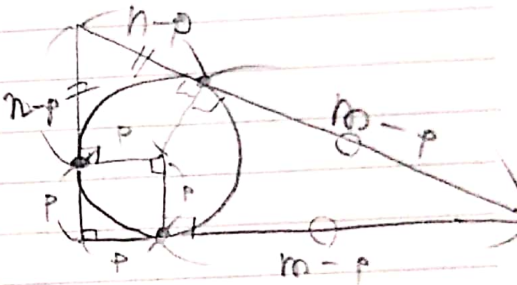
直角三角形の斜辺は外接円の直径であるから $2q$ は斜辺の長さである

残りの辺の長さを n, m とおく。$(n, m \in \mathbb{N})$



三平方の定理より $n^2+m^2=(2q)^2$

よって $n^2+m^2 \equiv 0 \pmod 4 \iff n, m$ は偶数。



右図より $(n-p)+(m-p)=2q$

$\iff n+m=2(p+q)$

$\iff n^2+2nm+m^2=4(p+q)^2$

$\iff 2nm = 4(p+q)^2-(2q)^2$

$= 4(p+2q)p$

$\therefore nm = 2(p+2q)p$

$p \geqq 3$ とすると $2(p+2q)p = 2 \times$奇 で 4の倍数でない。

しかし n, m は偶数なので nm は4の倍数となり不適。

よって, $p=2$ として $n+m=4+2q$, $nm=8+8q$

$\Longrightarrow nm-4(n+m)=-8 \iff (n-4)(m-4)=8$

n, m は4ではない偶数で, $n+m=4+2q \geqq 8$ より 一方は4以上でなければならない。

$n>4$ とすると, $m-4$ も正なので $m>4$ よって $(n, m)=(6,8), (8,6)$ に限る。

これらのとき, $6+8=4+2q \iff q=5$ で素数。$(nm=48=8+40)$

よって $p=2, \ q=5$

$1 = \log_{x^2+y^2}(\sqrt{3}x + y)$ … ☆

底の条件より，$x^2+y^2>0$，$x^2+y^2 \neq 1$ … ①

真数条件より $\sqrt{3}x+y>0$ … ②

(i) $x^2+y^2>1$ のとき…

☆ ⇔ $x^2+y^2 \leqq \sqrt{3}x+y$ ⇔ $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqq 1$ … ③

(ii) $0<x^2+y^2<1$ のとき…

☆ ⇔ $x^2+y^2 \geqq \sqrt{3}x+y$ ⇔ $\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \geqq 1$ … ④

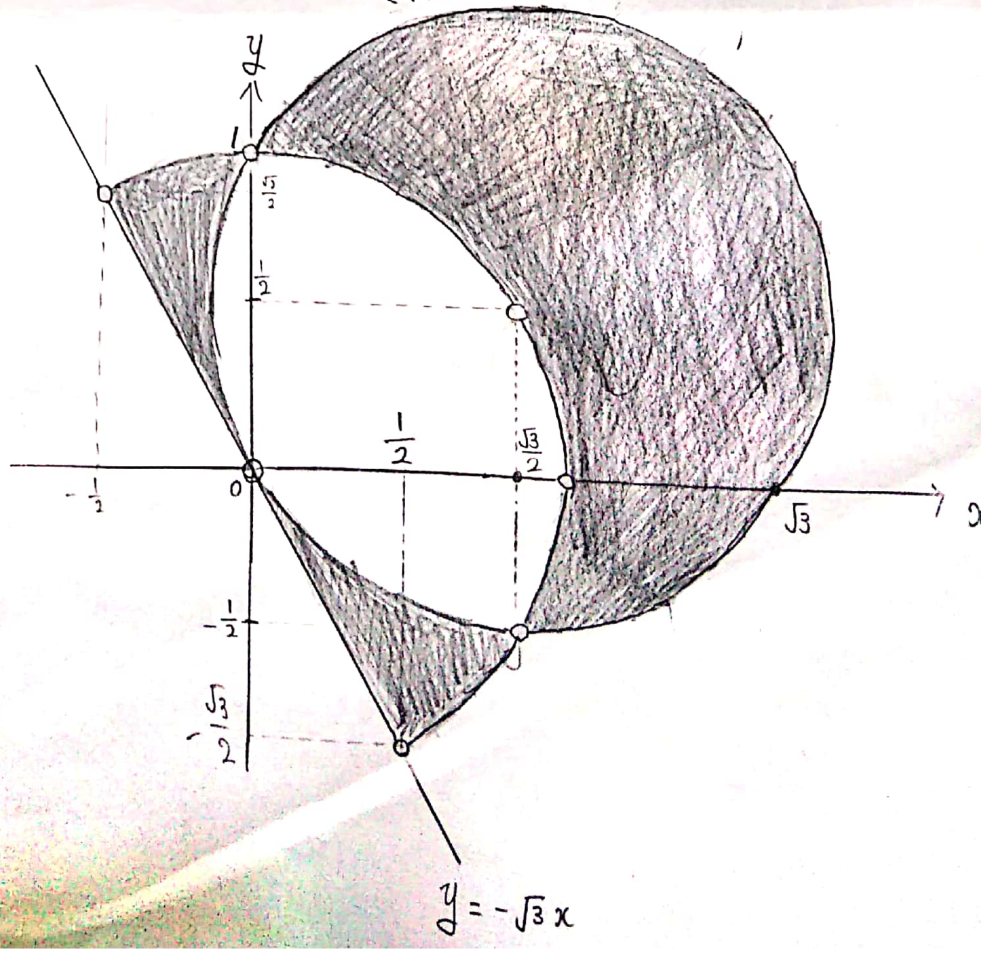
よって，"② かつ $\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2>1 \\ \text{かつ} \\ ③ \end{array}\right.$" または "② かつ $\left\{\begin{array}{c} 0<x^2+y^2<1 \\ \text{かつ} \\ ④ \end{array}\right.$" を図示し，

直線の上側

③円：内側と周
原点中心円の外側

④円：外側と周，原点中心の円の内側から原点を除く。

次のようになる。



ただし 境界線は
線分 $y=-\sqrt{3}x$ $\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right)$ 上は全て含めず，
原点中心半径1の円周上の点も全て含めず，
それらを除き，中心$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$，半径1の円の
円周上の点は全て含める。

No.

Q.48

$f(x) = \sin x - ax(\pi - x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ として $f(x) = 0$ の解の個数を求めればよい。

$f'(x) = \cos x - a\pi + 2ax$ $f''(x) = -\sin x + 2a$ である。また、

← ($f'(\pi/2) = 0$ に注意)

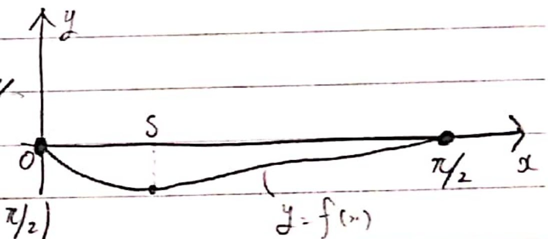
$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(\pi - x) = 0$ なので、$0 \leqq x \leqq \pi/2$ の範囲で考えてから解の個数を求めることができる。

(i) $a = \frac{4}{\pi^2}$ のとき… $2a = \frac{8}{\pi^2} < 1$ なので、$\sin t = \frac{8}{\pi^2}$ なる $0 < t < \pi/2$ が存在する。

x	0	…	s	…	t	…	$\pi/2$
$f(x)$	0	↘	$-$	↗		↗	0
$f'(x)$	$-$	↗$(-)$	0	↗$(+)$	$+$	↘$(+)$	0
$f''(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$-$

よって増減表は右のようになる。ただし、$f'(0) = 1 - \frac{4}{\pi} < 0$、$f'(t) > f'(\pi/2) = 0$ から、中間値の定理より $f'(s) = 0$ なる $s \in (0, t)$ が存在することに注意する。

これによって、$0 \leqq x \leqq \pi/2$ では $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pi/2$ なので、$0 \leqq x \leqq \pi$ では $x = 0, \pi/2, \pi$ の 3つ



(ii) $\frac{1}{\pi} < a < \frac{4}{\pi^2}$ のとき… (i)と同様に、$\sin t = 2a$ なる $t \in (0, \pi/2)$ が存在し、$f'(0) = 1 - a\pi < 0$ なので、このときの増減表は、(i)のものの $x = \pi/2$ における $f(x)$ の欄を「0」から「+」に代えたものになる。($\because f(\pi/2) = 1 - \left(\frac{\pi^2}{4}\right)a > 0$)

$f(s) < f(0) = 0$ と $f(\pi/2) > 0$ より、$(s, \pi/2)$ の範囲に $f(u) = 0$ なる u が存在する。よって、$0 \leqq x \leqq \pi/2$ では $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, u$ なので、$0 \leqq x \leqq \pi$ では $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi, u, \pi - u$ の 4つ

(iii) $0 < a \leqq \frac{1}{\pi}$ のとき… (i)と同様に $\sin t = 2a$ なる $t \in (0, \pi/2)$ が存在する

$f'(0) = 1 - a\pi \geqq 0$ より、増減表は次のようになる

x	0	…	t	…	$\pi/2$
$f(x)$	0	↗$(+)$	$+$	↗$(+)$	$+$
$f'(x)$	非負	↗$(+)$	$+$	↘$(+)$	0
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

よって $0 \leqq x \leqq \pi/2$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\therefore$ $0 \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$ 2つ

(iv) $a \leqq 0$ のとき… $0 < x \leqq \pi/2$ で $\sin x > 0$、$ax(\pi - x) \leqq 0$ なので $f(x) > 0$ $(0 < x \leqq \pi/2)$ $f(0) = 0$ なので、$0 \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$ 2つ

(つづく)

(v) $\frac{4}{\pi^2} < a < \frac{1}{2}$ のとき…　$\sin t = 2a$ なる $t \in (0, \pi/2)$ が存在.

$f'(0) < 0$, $f(\pi/2) < 0$ より増減表は右のようになる。

x		…	s	…	t	…	$\pi/2$
$f(x)$	0	$\searrow(-)$	$-$	$\nearrow(-)$	$-$	$\nearrow(-)$	$-$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\searrow(+)$	0
$f''(x)$	$+$		$+$		0	$-$	$-$

よって $0 \leqq x \leqq \pi/2$ のとき $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\therefore$ $0 \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$ の2つ

(vi) $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき…　$f''(x) \geqq 0$ より $f'(x) \leqq f'(\pi/2) = 0$ なので

$f(0) = 0$ だから,

$0 < x \leqq \pi/2$ では $f(x) < f(0) = 0$

$0 \leqq x \leqq \pi/2$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\therefore$ $0 \leqq x \leqq \pi$ で $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pi$ の2つ

以上より, 共有点の個数は,

$$\begin{cases} a \leqq \frac{1}{\pi},\ \frac{4}{\pi^2} \leqq a & \text{のとき}\quad 2\text{つ} \\ a = \frac{4}{\pi^2} & \text{のとき}\quad 3\text{つ} \\ \frac{1}{\pi} < a < \frac{4}{\pi^2} & \text{のとき}\quad 4\text{つ} \end{cases}$$

Q.224

$\boxed{2}$

4枚のカードの数字の和が3で割り切れる かつ 4枚目のカードの数字が偶数 ① の場合に
Nは6の倍数になる。

$\boxed{1}$と$\boxed{7}$, $\boxed{2}$と$\boxed{8}$, $\boxed{3}$と$\boxed{9}$ は6で割った余りが同じなので、①のような選び方を考えるときには それぞれ同一視してよい。よって、$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ が各4枚、$\boxed{4}\boxed{5}\boxed{6}$ が各2枚 の状況から考えてよい。

1の位(4枚目)を指定して 場合分けを行う。

1の位が $\left(\begin{array}{l}\boxed{2}\\ \boxed{4}\\ \boxed{6}\end{array}\right.$ のとき、その数字を取る方法は $\left(\begin{array}{l}4\\ 2\\ 2\end{array}\right.$ 通り。残りのカードの取り出し方は、

それら3枚の数字の和を3で割った余りが $\left(\begin{array}{l}1\\ 2\\ 0\end{array}\right.$ となるように取ればよいが、3で割った余りをみる際は

$\boxed{4}$を$\boxed{1}$に、$\boxed{5}$を$\boxed{2}$に、$\boxed{6}$を$\boxed{3}$にみなしてよく、残ったカードが $\left(\begin{array}{lll}\boxed{1}\boxed{3}\text{が6枚ずつ} & \boxed{2}\text{が5枚} & \\ \boxed{2}\boxed{3}\ 〃 & \boxed{1}\ 〃 & \text{の状況から}\\ \boxed{1}\boxed{2}\ 〃 & \boxed{3}\ 〃 & \text{考えてよい。}\end{array}\right.$ ②

(これを以降 R で表す)

この状況から $\boxed{\text{残りの3枚の数字の和を3で割った余り}}$が $\left(\begin{array}{l}1\\ 2\\ 0\end{array}\right.$ となる取り出し方が $\left(\begin{array}{l}n_1\\ n_2\\ n_0\end{array}\right.$ 通りあるとする。

ここで、②の各状況はいずれも「$\boxed{1}\boxed{2}$が6枚ずつ、$\boxed{3}$が5枚」の状況にみなせる。

(「$\boxed{1}\boxed{3}$ 6枚ずつ $\boxed{2}$5枚」なら、カードの数字に全て1足し、$\boxed{4}$を$\boxed{1}$にみなしても R は変わらないため
「$\boxed{2}\boxed{3}$ 〃 $\boxed{1}$ 〃」 〃 全て1を引き、$\boxed{0}$を$\boxed{3}$に 〃)

よって、「$\boxed{1}\boxed{2}$ 6枚ずつ $\boxed{3}$5枚」の状況から③ $R=\left(\begin{array}{l}1\\ 2\\ 0\end{array}\right.$ となる取り出し方の場合の数を調べればよい。

すると $n_1+n_2+n_0$ は③の状況における全ての取り出し方なので $n_1+n_2+n_0=17\times16\times15$

1の位の決め方は $\left(\begin{array}{l}4\\ 2\\ 2\end{array}\right.$ 通りだったので、Nが6の倍数になる取り方は $4n_1+2n_2+2n_0$ 通りある。

$4n_1+2n_2+2n_0 = 2\times(17\times16\times15)+2n_1$ である。 n_1を求める。

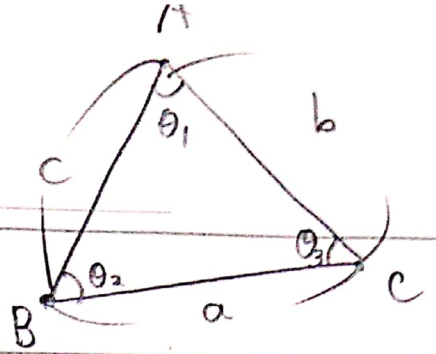
上3桁のケースとして $R=1$ となる

112, 121, 211 Ⓐ　223, 232, 322 Ⓑ　331, 313, 133 Ⓒ がある。Ⓐのパターンでは、

$\boxed{1}$を2枚、$\boxed{2}$を1枚とるので合わせて $3\times(6\times5\times6)$ 同様に、Ⓑのパターンは $3\times(6\times5\times5)$

Ⓒのパターンは $3\times(5\times4\times6)$ 通りある。　よって $n_1=Ⓐ+Ⓑ+Ⓒ=6\times5\times3\times15$

$2n_1+2\times(17\times16\times15)=60\times181$ となるので、求める確率は $\dfrac{60\times181}{{}_{18}P_4}=\dfrac{181}{1224}$



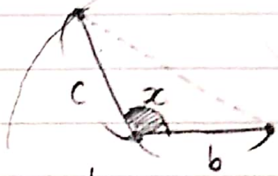
No.

$\boxed{6}$ Q.78

(1) $F = \dfrac{\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} + 2\cdot\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} + 3\cdot\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1}\cdot\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}}{\sin\theta_3}$ である。正弦定理より $\dfrac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \dfrac{b}{a}$, $\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1} = \dfrac{c}{a}$

$\dfrac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2} = \dfrac{c}{b}$ だから, $F = \dfrac{\dfrac{a}{b} + \dfrac{2b}{a} + \dfrac{3c^2}{ab}}{\sin\theta_3} = \dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{ab\sin\theta_3} = \dfrac{a^2+2b^2+3c^2}{2S}$ //

(2) b, c を固定し, $\theta_1 = x$ として $0<x<\pi$ で動かす。



余弦定理より $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos x$ を代入し,

$F = \dfrac{3b^2+4c^2-2bc\cos x}{2S} = \dfrac{3b^2+4c^2-2bc\cos x}{bc\sin x} = \dfrac{3b^2+4c^2}{bc\sin x} - 2\dfrac{1}{\tan x}$

$\dfrac{3b^2+4c^2}{bc} = k$ とし, $f(x) = \dfrac{k}{\sin x} - \dfrac{2}{\tan x}$ $(0<x<\pi)$ としたとき,

$f'(x) = -\dfrac{k\cos x}{\sin^2 x} + \dfrac{2}{\sin^2 x} = \dfrac{1}{\sin^2 x}(2-k\cos x)$ b, c > 0 なので, k で相加相乗

平均不等式を使い, $k \geqq \dfrac{2\sqrt{12b^2c^2}}{bc} = 4\sqrt{3} > 2$ が分かる。

このことから, x が $0 \longrightarrow \pi$ と動くとき, $2-k\cos x$ は単調増加し, $2-k\cos 0 = 2-k < 0$, $2-k\cos\pi = 2+k > 0$ なので, 右のような増減表を得る。($\cos t = \frac{2}{k}$ とした)

x	0	……	t	……	π
$f(x)$	╲	↘	極小	↗	╲
$f'(x)$	╲	−	0	+	╲

よって, b, c を固定したときは $f(x) \geqq f(t) = \dfrac{k}{\sin t} - \dfrac{2}{\tan t} = \dfrac{1}{\sin t}(k-2\cos t) = \dfrac{k-4/k}{\sqrt{1-(2/k)^2}}$

$= \dfrac{k^2-4}{\sqrt{k^2-4}} = \sqrt{k^2-4}$ であるから, $k \geqq 4\sqrt{3}$ より

$\sqrt{k^2-4} \geqq \sqrt{(4\sqrt{3})^2-4} = 2\sqrt{11}$ よって $F \geqq 2\sqrt{11}$

実際, $b=2$, $c=\sqrt{3}$, $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ とすれば $F = 2\sqrt{11}$ となる。

($\sin\theta_1 = \dfrac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$ より $2S = \sqrt{11}$, $3b^2+4c^2-2bc\cos\theta_1 = 22$ なので $F = \dfrac{22}{\sqrt{11}} = 2\sqrt{11}$ となる。相加相乗の等号成立条件から $4b^2=3c^2$ となるように b, c を選んだ。)

よって, 求める最小値は $2\sqrt{11}$ //

Q-187

2 解答用

採点欄

x^2+ax の二次方程式と見て，解の公式より

$$x^2+ax=\frac{-a\pm\sqrt{3a^2}}{2}=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}a,\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2}a$$

よって，

$\underline{x^2+ax+\frac{1+\sqrt{3}}{2}a=0}$ ① または $\underline{x^2+ax+\frac{1-\sqrt{3}}{2}a=0}$ ② が絶対値1の虚数解をもつ。

その虚数解を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ $\underline{(0<\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi)}$ ③ とする。

①が z を解に持つとき，$z^2+az+\frac{1+\sqrt{3}}{2}a=0 \overset{(※)}{\Rightarrow} \bar{z}^2+a\bar{z}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}a=0$.

($\because$ a は実数) より，①の解は $x=z,\ \bar{z}$ 解と係数の関係より

$\underline{z+\bar{z}=2\cos\theta=-a}$，$\underline{z\bar{z}=|z|^2=1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}a}$ $\Leftrightarrow$ $a=\sqrt{3}-1$

このとき，$\cos\theta=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ となり，$-1<\frac{1-\sqrt{3}}{2}<1$ なので これに対応する③をみたす θ が存在する。($\cos\theta\neq1,-1$ より 明らかに $\theta\neq0,\pi$)

②が z を解に持つときも同様に，$z+\bar{z}=2\cos\theta=-a$，$z\bar{z}=|z|^2=1=\frac{1-\sqrt{3}}{2}a$

より $a=-(\sqrt{3}+1)$ このとき $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ だが，$\frac{1+\sqrt{3}}{2}>1$ で

θ は存在しないため不適。 以上より，求める a は

$$a=\sqrt{3}-1$$

//

※ $\overline{z^2+az+\frac{1+\sqrt{3}}{2}a}=\overline{z^2}+\overline{az}+\overline{\frac{1+\sqrt{3}}{2}a}=\bar{z}^2+a\bar{z}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}a$

Q.179

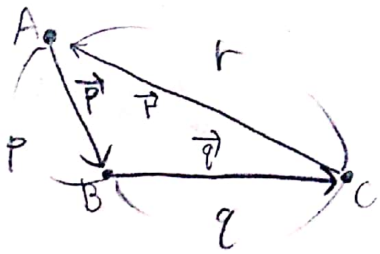
$\overrightarrow{AC}=\vec{p}$
$\overrightarrow{AB}=\vec{q}$
$\overrightarrow{BC}=\vec{r}$

1 解答用

採点欄

$|\vec{p}|=p$, $|\vec{q}|=q$, $|\vec{r}|=r$ とおく。$(q, r, p^3\pm 6 \in \mathbb{P})$

$(\vec{p}+\vec{q})^2=(-\vec{r})^2=|\vec{p}|^2+2\times(\vec{p}\cdot\vec{q})+|\vec{q}|^2$



より、$\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{r^2-p^2-q^2}{2}$ 同様に、

$\vec{q}\cdot\vec{r}=\dfrac{p^2-q^2-r^2}{2}$, $\vec{r}\cdot\vec{p}=\dfrac{q^2-p^2-r^2}{2}$

等比数列をなすことより、$\left(\dfrac{r^2-p^2-q^2}{2}\right)\left(\dfrac{q^2-p^2-r^2}{2}\right)=\left(\dfrac{p^2-q^2-r^2}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow \{-p^2+(r^2-q^2)\}\{-p^2-(r^2-q^2)\}=(p^2-(q^2+r^2))^2$

$\Leftrightarrow p^4-(r^2-q^2)^2=p^4-2p^2(q^2+r^2)+(q^2+r^2)^2$

$\Leftrightarrow 2p^2(q^2+r^2)=2(q^4+r^4)$ $q, r\in\mathbb{P}$ より $q, r\neq 0$ なので

$q^2+r^2\neq 0$ だから $p^2=\dfrac{q^4+r^4}{q^2+r^2}\ (\neq 0)$ ① p^2 は有理数である。

$p^3\pm 6\in\mathbb{P}$ より、p^3 は整数であるから、$p^3\div p^2=p$ も有理数。

pを既約分数にして $p=\frac{m}{n}$ ($n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, m, nは互いに素) とすると、

$p^3=\frac{m^3}{n^3}$ で、n^3とm^3も互いに素だから、nが素因数を持つとmはその素因数を自身に持たないので、$n^3=1$ より $n=1$ でなければならず、pは整数

p^2も整数だから、$\dfrac{q^4+r^4}{q^2+r^2}=(q^2-r^2)+\dfrac{2r^4}{q^2+r^2}$ より $\dfrac{2r^4}{q^2+r^2}$ も整数。

$q\neq r$ だと、$\dfrac{2r^4}{q^2+r^2}$ は r^4 と互いに素で $\dfrac{2}{q^2+r^2}$ が整数になるが、

$q^2+r^2\geqq 2^2+2^2=8>2$ より不適。 $q=r$ で、①に代入すると、$p^2=q^2$ $\therefore p=q=r$

pは素数である。$p\neq 0 \pmod 7 \Rightarrow p^3-6\equiv 0$ または $p^3+6\equiv 0 \pmod 7$, $p^3\pm 6>7$ で不適。$p=7$のとき、$7^3\pm 6$は実際に素数なので適する。

以上より、$p=q=r=7$ //

DMO 4th 理4 Q.200

$a \leqq \frac{1}{2^n}$ のとき, $\cos^n x - a\sin^n 2x = \cos^n x\{1-2^n a\sin^n x\}$ は非負なので ($\because\ 2^n a\sin^n x \leqq 2^n\cdot\frac{1}{2^n}\cdot 1 = 1$)

$I_n(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx - a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,dx\right)$ は a の一次関数で

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $\sin^n 2x$ は非負かつ正の値をとるから,

$I_n(a)$ は単調減少し, $I_n(a) \geqq I_n\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$a > \frac{1}{2^n}$ のとき, $0<x<\frac{\pi}{2}$ で $\cos^n x \neq 0$, $1-2^n a\sin^n x$ は単調減少し, $1-2^n a\sin^n 0 = 1 > 0 > 1-2^n a\sin^n\frac{\pi}{2} = 1-2^n a$

となるので, $\cos^n p\,(1-2^n a\sin^n p) = 0$ を満たす $p\ (0<p<\frac{\pi}{2})$ がただひとつ存在する。この p を用いて

$$I_n(a) = \int_0^p(\cos^n x - a\sin^n 2x)\,dx + \int_p^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n 2x - \cos^n x)\,dx$$

となり, $\cos^n x$, $\sin^n 2x$ の原始関数の1つを $F(x)$, $G(x)$ とすると, $I_n(a) = \left[F(x) - aG(x)\right]_0^p + \left[aG(x) - F(x)\right]_p^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2F(p) - 2aG(p) + a\left(G(0)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(F(0)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

これを a で微分すると,

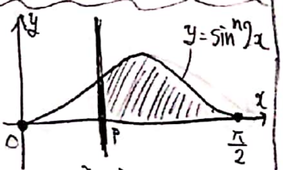
$$\frac{d}{da}I_n(a) = 2\cdot\frac{dp}{da}\cdot\boxed{\frac{d}{dp}F(p)} - 2\left(G(p) - a\cdot\frac{dp}{da}\cdot\boxed{\frac{d}{dp}G(p)}\right) + \left(G(0)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= 2\cdot\frac{dp}{da}\{\cos^n p - a\sin^n 2p\} + G(0) - 2G(p) + G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

p の定義より, $\cos^n p - a\sin^n 2p = 0$ なので

$$\frac{d}{da}I_n(a) = G(0) - 2G(p) + G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_p^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,dx - \int_0^p \sin^n 2x\,dx$$

これは, 右図の $y=\sin^n 2x$, x軸, 直線 $x=p$ で囲まれる2つの領域の面積を介して考えると, (右側) − (左側) の値になっていることから, $0<p<\frac{\pi}{4}$ で $\frac{d}{da}I_n(a) > 0$, $\frac{\pi}{4}<p<\frac{\pi}{2}$ では $\frac{d}{da}I_n(a) < 0$, $p=\frac{\pi}{4}$ で $\frac{d}{da}I_n(a) = 0$



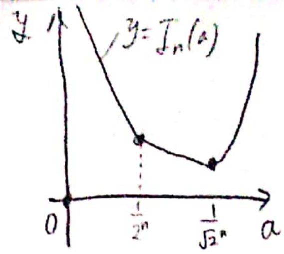
である. $a = \frac{1}{2^n\sin^n p}$ なので, a のみで考えれば

$\frac{1}{2^n} < a < \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ で $\frac{d}{da}I_n(a) < 0$, $\frac{1}{\sqrt{2}^n} < a$ で $\frac{d}{da}I_n(a) > 0$,

$a = \frac{1}{\sqrt{2}^n}$ で $I_n(a)$ は極小値をとる。 よって このとき,

$I_n(a) \geqq I_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}^n}\right)$

以上より $y = I_n(a)$ のグラフは右のようになっているから,



$m_n = I_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}^n}\right)$ であり,

このとき $p = \frac{\pi}{4}$ だから,

$$m_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x - a\sin^n 2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n 2x - \cos^n x)\,dx$$

第二項で $x = \frac{\pi}{2} - t$ と置換すれば

$$m_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x - a\sin^n 2x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(a\sin^n 2t - \sin^n t)(-dt)$$

整理すると, $m_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x - \sin^n x)\,dx$ となる.

$n \geqq 3$ のとき,

$$m_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x - \sin^n x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^{n+2}x - \sin^{n+2}x)\,dx + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 x(\cos^{n-2}x - \sin^{n-2}x)\,dx}_{正}$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^{n+2}x - \sin^{n+2}x)\,dx = m_{n+2}$$ よって

$m_3 > m_5 > m_7 > \cdots$, $m_4 > m_6 > m_8 > \cdots$ となる.

$m_2 = m_4 + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos^2 x(1-1)\,dx}_{=0} = m_2$ で,

$m_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x - \sin^2 x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{1}{2} = m_4$, $m_1 = \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$

一方で, m_3 は,

$$m_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x(1-\sin^2 x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x(1-\cos^2 x)\,dx$$

$$= m_1 + \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 x\sin x - \cos x\sin^2 x)\,dx$$

$$= (\sqrt{2}-1) + \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2}-1) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{5\sqrt{2}-4}{6}$$

$m_3 = \frac{\sqrt{50}-4}{6} > \frac{7-4}{6} = \frac{1}{2} = m_2 = m_4$,

$m_3 = m_1 + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{6}\right) > m_1$ より,

$m_3 > m_2 = m_4 > m_6 > m_8 > \cdots$ かつ

$m_3 > m_1$ かつ $m_3 > m_5 > m_7 > \cdots$ なので,

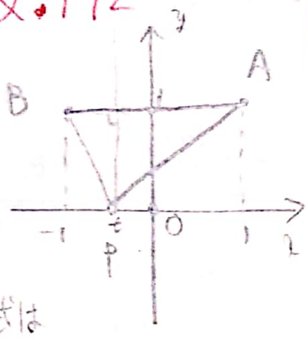
m_n の最大値は,

$$m_3 = \frac{5\sqrt{2}-4}{6}$$

DMO 4th 理1 Q.192

(1)

P(t, 0) とする。



$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}1-t\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix}-1-t\\1\end{pmatrix}$ である。Pから BA に引く垂線の式は $x=t$ であるため、$H(t, h)$ と置ける。よって

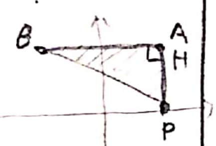
$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix}t+1\\h-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix}t-1\\h-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{PB} \neq \vec{0}$

なので(∵ y成分が1)、$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{PB}$ または $\overrightarrow{AH} = \vec{0}$

$\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ のとき、$t-1 \neq 0$ である。

($t=1$ のとき、AとHは一致する)



そのとき、$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix}t-1\\h-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1-t\\1\end{pmatrix}$

$= -(t^2-1) + h - 1 = 0 \Leftrightarrow h = t^2$

よって $H(t, t^2)$ $(t \neq 1)$ $t=1$ の場合も、$H = A = (1, 1)$ なのでよい。

よって、Hは曲線 $y = x^2$ 上を動く。

$\triangle ABH$ が鈍角三角形なら、A, B, H は一直線上にないから、$t \neq \pm 1$ である。この条件のもとで、鈍角があるならば

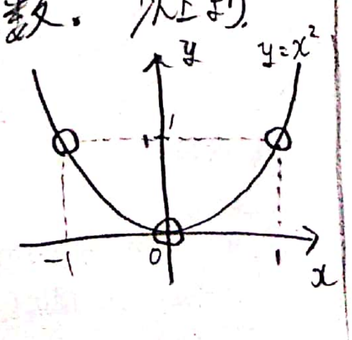
$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} < 0$ または $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH} < 0$ または $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BH} < 0$

$\Leftrightarrow (t^2-1) + (t^2-1)^2 < 0$ または $-2(t-1) < 0$ または $2(t+1) < 0$

$\Leftrightarrow t^2(t^2-1) < 0$ または $t > 1$ または $t < -1$

$\Leftrightarrow$ tは $\pm 1, 0$ 以外の実数。以上より

Lは曲線 $y = x^2$ のうち $(0,0)$ $(\pm 1, 1)$ を除いたもの。



(2) $y = x^2$, $y = ax^2 + bx + 1$ を連立した $(a-1)x^2 + bx + 1 = 0$ というxの方程式が $0, \pm 1$ 以外の実数解を持てばよい。

ただし、$x = 0$ とすると $1 = 0$ となるから、0は解にならない。

$a = 1$ のとき……

$bx + 1 = 0$ が $x = -\frac{1}{b}$ という解(± 1 でない)を持つために、

$b \neq 0$ と、$-\frac{1}{b} \neq \pm 1 \Leftrightarrow b \neq \pm 1$ となる

$a \neq 1$ のとき……

$(a-1)x^2 + bx + 1 = 0$ は二次方程式で、実数解を持つことから、$\frac{b^2}{4} + 1 \geqq a$

(判別式) $= b^2 - 4(a-1) \geqq 0$ が必要。

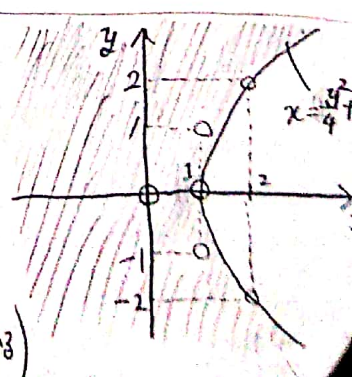
さらに、± 1 以外の解をもつならば、二次方程式の解が「1と−1」「1のみ」「−1のみ」であってはならない。

「1と−1」…$(a-1)x^2 + bx + 1 = (a-1)(x^2-1)$ より $b = 0$, $1 = -(a-1) \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0)$

「1のみ」 $(a-1)x^2 + bx + 1 = (a-1)(x-1)^2$ より $1 = a-1$, $b = -2(a-1) \Leftrightarrow (a, b) = (2, -2)$

「−1のみ」 $(a-1)x^2 + bx + 1 = (a-1)(x+1)^2$ より $1 = a-1$, $b = 2(a-1) \Leftrightarrow (a, b) = (2, 2)$

よって、$a \leqq \frac{b^2}{4} + 1$ のうち $(a, b) = (0, 0)$ $(2, \pm 2)$ $(1, 0)$ $(1, \pm 1)$ を除外した領域となるから、(a, b) の存在範囲は右の斜線部(○は除き、境界線を含める)



Q.130　東工大 [1]

$p=\sqrt{h^2+s^2}$　$q=\sqrt{h^2+t^2}$

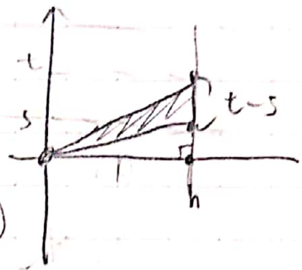
$PQ=r=t-s$ より

$p^2+q^2+r^2=2(h^2+t^2+s^2)-2st$

右図より

$S=\frac{h}{2}(t-s)$

$(\because h>0,\ t-s>0)$



$p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S$

$=2(h^2+t^2+s^2)-2st-2\sqrt{3}h(t-s)$

$=2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(t^2+s^2-st)$

これを $f(h)$ とおき、h の二次関数とみると

$(-2\sqrt{3}(t-s))^2-2\cdot4\cdot2(t^2+s^2-st)$

$=12(t-s)^2-16(t^2+s^2-st)$

$=-4t^2-4s^2-8st$

$=-4(t+s)^2\leqq 0$

であり、$h>0$ において $y=f(h)=0$ の解は1個または解なしで、下に凸な放物線をえがくので $f(h)\geqq 0$ である。
等号が成立するのは $-4(t+s)^2=0$ となるときで、$t+s=0$ の場合に限る。このとき、

$f(h)=2\left(h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right)^2+\frac{t^2+s^2}{2}-st$

$=2\left(h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right)^2$ で、

$h=\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\ (>0)$ のときに最小値0をとる。よって、$s+t=0$ かつ $\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)=h$ なので $t=\frac{h}{\sqrt{3}}$、

$s=-\frac{h}{\sqrt{3}}$ である

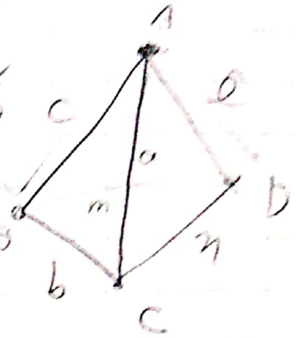
(2) (1)を使うことで

$a^2+b^2+c^2\geqq 4\sqrt{3}\triangle ABC$

$a^2+n^2+l^2\geqq 4\sqrt{3}\triangle ACD$

$c^2+m^2+l^2\geqq 4\sqrt{3}\triangle ABD$

$b^2+m^2+n^2\geqq 4\sqrt{3}\triangle BCD$



となり、これらを足して

$2(a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2)\geqq 4\sqrt{3}T$

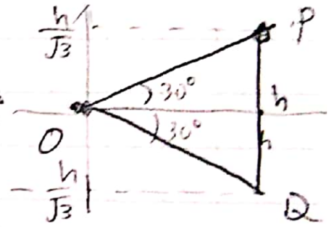
$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2\geqq 2\sqrt{3}T$

(ア)

等号成立条件を考える。

(1)で、$t=\frac{h}{\sqrt{3}}$, $s=\frac{-h}{\sqrt{3}}$ となったので

△PQRは右のようになり、
上のtとsを見て $\angle POQ=60^\circ$
また、$OP=OQ$ なので
△POQは正三角形となる。



(ア)で等号が成立することは

(1)を利用した4つの三角形で等号が成立する場合に同値で、
4つの面すべてが正三角形になることに同値。
1つ辺の長さを指定すれば、その辺の長さをもつ正三角形が4面を構成すると分かるので、

正四面体のときである