Q.022 ★7 数 II 赤チャート

1 つの円に n 本の弦を、どの 2 本も円の内部で交わり、どの 3 本も同じ点を通ることがないように引く。円の内部がこれらの弦によって分けられる部分の個数を求めよ。また、n が 4 以上のとき、これらの部分のうち多角形であるものの個数を求めよ。

n 本の弦によって a_n 個の領域に分けられるとする。明らかに $a_1 = 2$ である。$n+1$ 本目の弦を引くと、既にある n 本の弦と 1 回ずつ交わり $n+1$ 個の線分に分割される。この分割によって領域は $n+1$ 個増える。よって次の漸化式が得られる。

$$a_{n+1} = a_n + n + 1\,,\ a_1 = 2$$

$n \geq 2$ において、

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) = \frac{1}{2}(n^2+n+2)$$

と求まる。これは $n = 1$ についても正しい。よって求める個数は、$\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 個。

分けられた a_n 個の部分のうち、多角形なものの個数を b_n、弦を含むものの個数を c_n とする。明らかに $b_1 = 0$, $c_1 = 2$。$n+1$ 本目の弦は $n+1$ 個の線分に分割される。このうち 2 つの両端は、弦同士の交点と弦と円の交点で構成される。このような場所でのみ弦を含むような領域が 1 つ増えるので、

$$c_{n+1} = c_n + 2\,,\ c_1 = 2$$

と漸化式が求まる。よって $c_n = 2n$。$b_n = a_n - c_n$ だから、求めるものは $\frac{1}{2}(n^2-3n+2)$ 個。