## 0.1 Q.049

$n \geqq 1$ とする．$Y_{n+1} = X_{n+1} + \dfrac{1}{Y_n}$ がその不等式を満たすために $X_{n+1}$ がどう出るべきか，ということについて考えたい．それを考えるためには $Y_n$ の大きさに関する場合分けが必要である．

まず $Y_n$ は帰納的に有理数であるため，不等式の等号は実現することがない．そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < Y_n < 1+\sqrt{3}$ を満たす確率を $p_n$，事象を $P_n$ $(n \geqq 1)$ とおく．$n+1$ 回目でこの不等式が成り立っていたとしよう．すると，$\dfrac{1}{\sqrt{3}\pm 1} = \dfrac{\sqrt{3}\mp 1}{2}$ により

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+\sqrt{3}}{2} < Y_{n+1} < 1+\sqrt{3} \\
\iff &\frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{Y_{n+1}} < \sqrt{3}-1 \\
\iff &\frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{Y_n} < X_{n+1} < \sqrt{3}-1-\frac{1}{Y_n}
\end{aligned}
$$

よって，最後の不等号の両側の数がどうであるかによって $X_n$ がどうあるべきかが以下のように分かる：

(i) $2 \geqq \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} > 1$; すなわち $Y_n > \sqrt{3}+1$ であるとき，事象 $P_{n+1}$ が起こるのは $X_n = 2$ のときである．

(ii) $2 \geqq \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} \leqq 1$; すなわち $Y_n > \sqrt{3}+1$ であるとき，事象 $P_{n+1}$ が起こるのは $X_{n+1} = 1, 2$ のときである．

(iii) $2 > \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} < 1$; すなわち $Y_n < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ であるとき，事象 $P_{n+1}$ が起こるのは $X_{n+1} = 1$ のときである．

そこで，$Y_n > \sqrt{3}+1$ を満たす確率を $q_n$，事象を $Q_n$ とおき，$Y_n < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ を満たす確率を $r_n$，事象を $R_n$ とおく．このとき $P_n \cup Q_n \cup R_n$ は全事象であるから $p_n + q_n + r_n = 1$．そして，上の考察により $P_{n+1}$ であるのは「$P_n$ と $X_{n+1} = 1, 2$ が起こるとき」と「$Q_n$ と $X_{n+1} = 2$ が起こるとき」と「$R_n$ と $X_{n+1} = 1$ が起こるとき」である．これらは排反であるから，

$$
p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n = \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}
$$

となる．$Y_1 = X_1$ が不等式を満たすのは $X_1 = 2$ のときであるから $p_1 = \dfrac{1}{6}$．よって漸化式を解く事で $p_{n+1}$ $(n \geqq 1)$ が求まる：

$$
\begin{aligned}
p_{n+1} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{5}\right) \\
&= \frac{1}{6^n}\left(p_1 - \frac{1}{5}\right) \\
&= -\frac{1}{5\cdot 6^{n+1}} \\
\therefore\quad p_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^{n+1}}\right) \quad (n \geqq 1)
\end{aligned}
$$

これは $n = 0$ でも正しいので

$$
\boldsymbol{p_n = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)}
$$

## 0.2 Q.263

10 進法の任意の有限列 $a_1 a_2 \ldots a_r$ $(1 \leqq a_i \leqq 9,\ a_1 \neq 0)$ を考える．$2^n$ の 10 進表記がこの列から始まるための必要十分条件は，$n$ に対してある自然数 $m(n)$ が存在して

$$
10^{m(n)} \times \overline{a_1 a_2 \ldots a_r} \leqq 2^n < 10^{m(n)} \times (\overline{a_1 \ldots a_r} + 1)
$$

となることである．ただし上線はこの列を数字とみなす記号である．この式は

$$
\overline{a_1 \ldots a_r} \leqq 2^n \cdot 10^{-m(n)} < (\overline{a_1 \ldots a_r} + 1)
$$

と同値で，$\log_{10}(\cdot)$ を取り

$$
\log_{10}(\overline{a_1 \ldots a_r}) \leqq n \log_{10} 2 - m(n) < \log_{10}(\overline{a_1 \ldots a_r} + 1)
$$

である．$a = \log_{10}(\overline{a_1 \ldots a_r})$, $b = \log_{10}(\overline{a_1 \ldots a_r} + 1)$ として，示すべきことは，ある自然数 $m, n$ が存在して

$$
a \leqq n \log_{10} 2 - m < b
$$

を満たすということである．ここで $b - a > 0$ であるが，$0 < \delta < b - a$ を満たすような正数 $\delta$ を一つ取る．このとき，$\log_2 10$ が無理数であるから，Kronecker の稠密定理によって，ある自然数 $k$ が存在して $k \log_{10} 2$ の小数部分は $\delta$ 未満である．つまり，$l = [k \log_{10} 2]$ としたときに $0 < k \log_{10} 2 - l < \delta$ を満たす．$\epsilon = k \log_{10} 2 - l$ とおく．このとき $\epsilon$ の整数倍全体の集合 $S := \{ N\epsilon \mid N \in \mathbb{Z} \}$ は，数直線上で幅 $\epsilon$ を空けながら並ぶので，幅 $\delta (> \epsilon)$ である開区間 $(a, b)$ 上には必ず $S$ の点が少なくとも一つ含まれる．それを $N_0 \epsilon$ とすれば，$N_0 \epsilon \in (a, b)$ である．すなわち，

$$
a < N_0 k \log_{10} 2 - N_0 l < b
$$

である．よって $n = N_0 k$, $m = N_0 l$ を構成すればよい．□

## 0.3 Q.264

(1): 鳩ノ巣原理より $a^{m_1}, a^{m_2}$ の $n$ で割った余りが同じであるような異なる自然数 $m_1 < m_2$ がある．すなわち $k = m_2 - m_1$ として，$a^{m_2} - a^{m_1} = a^{m_1}(a^k - 1)$ は $n$ の倍数．$a^{m_1}$ は $n$ と互いに素だから $a^k - 1$ は $n$ の倍数．よって $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ より示せた．□

(2): $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ なる自然数 $k$ を任意に取る．$k$ を $d$ で割って $k = dq + r$ とおく $(0 \leqq r < d)$．このとき $a^k = a^{dq} \cdot a^r = (a^d)^q \cdot a^r \equiv 1^q \cdot a^r = a^r$ だから $a^r \equiv 1 \pmod{n}$ となる．$0 \leqq r < d$ と自然数 $d$ の最小性より $r > 0$ では矛盾．よって $r = 0$．つまり $k = dq$ は $d$ の倍数．

2021 は"素晴らしい数"である．正の正数 $m$ に対して集合

$$\{m, 2m+1, 3m\}$$

のある要素が素晴らしいならばそのすべての要素も素晴らしい．このとき $2021^{2021}$ は素晴らしいか．

ある自然数 $n$ が素晴らしいとする．

(1) もし $n \equiv 0 \pmod 3$ なら, $n/3 \in \mathbb{Z}$ も素晴らしい．

(2) もし $n \equiv 1 \pmod 3$ なら, $2n+1$ が素晴らしい 3 の倍数なので $(2n+1)/3 \in \mathbb{Z}$ も素晴らしい．

(3) もし $n \equiv 2 \pmod 3$ なら, $3n$ が素晴らしく, $6n+1$ が素晴らしく, $12n+3$ が素晴らしく, $(12n+3)/3 = 4n+1$ が素晴らしく, $(4n+1)/3 \in \mathbb{Z}$ が素晴らしい．そして, $2 \cdot \dfrac{2n-1}{3} + 1$ だから $(2n-1)/3 \in \mathbb{Z}$ は素晴らしい．

そしてこれの「逆導出」が可能であることに注意せよ．つまり, $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき, $n/3 \in \mathbb{Z}$ が素晴らしいならば $n$ も素晴らしい．その他についても同様である．つまり, 自然数 $n$ に対して次は同値である．

- $n$ は素晴らしい．
- $n/3, (2n+1)/3, (2n-1)/3$ のどれかが素晴らしい．

よってここから従うことは「任意の自然数 $n$ に対して, $(2n+1)/3$ 以下のある自然数 $n'$ が存在して, $n$ が素晴らしいことと $n'$ が素晴らしいことは同値」ということである．この $n'$ に対しても $(2n'+1)/3$ 以下のある自然数 $n''$ が存在して「$n'$ が素晴らしい $\iff$ $n''$ が素晴らしい」ということも分かる．さて, このように $n \to n' \to n'' \to \cdots$ という対応を続けると, ある所からは 1 がずっと並ばざるを得ない (問: これはなぜか?)．よって, $n$ が素晴らしいことと 1 が素晴らしいことは同値である．これは任意の自然数に対して言えているから, $n = 2021$ とすることで 1 は素晴らしい．よって $n = 2021^{2021}$ とすることで $2021^{2021}$ も素晴らしい． $\square$