1　どちゃ楽数学 bot（solove_ math）の解答を tex で全部仕上げてまとめよう

もう作って 6 年くらいになったこの bot、中の人が準備を怠りすぎていまだに解答がそろえられてない。そろそろ完成させよう。特にこの問題の解答が欲しいとかいわれたら書くかもしれない。(協力者募集中)[*1]解答は最速とは限らないし, まれに間違えるので間違いを発見したら LimRim のほうでもいいんで教えて下さい。

[*1] @ math_Hurdia さんに非常にご協力いただいています。ありがとうございます。

Q.001　最大公約数、互いに素

$n \in \mathbb{N}$ とする。
(1) n^2+1 と n^2+2n+2 の最大公約数を求めよ。 ★3 (京大実戦)
(2) 2^n+3^{n+1} と 3^n+2^{n+1} の最大公約数を求めよ。 ★5 (京大OP)

(1)

n^2+1 と n^2+2n+2 の最大公約数を G とし、互いに素な自然数 a, b を用いて

$$n^2+1 = aG, \quad n^2+2n+2 = bG$$

とおく。このとき $(2a-b)G = n(n-2)$ となるから、$n(n-2)$ は G の倍数である。一方 $n^2 - aG = 1$ より、n と G は互いに素。なので $n-2$ が G の倍数で $n \equiv 2 \pmod{G}$。このとき

$$n^2+1 = aG \qquad \Rightarrow \qquad 5 \equiv 0 \pmod{G}$$

$$n^2+2n+2 = bG \qquad \Rightarrow \qquad 10 \equiv 0 \pmod{G}$$

となるから、G は 1 か 5 のいずれか。$n \equiv 2 \pmod 5$ のとき、n^2+1 も n^2+2n+2 も、5 で割り切れるから、$G=5$。$n \equiv 0, \pm 1 \pmod 5$ のとき、$n^2+1 \not\equiv 0 \pmod 5$ で、また $n \equiv 3 \pmod 5$ のとき、$n^2+2n+2 \not\equiv 0 \pmod 5$ なので、これらの場合には $G \neq 5$ だから、$G=1$。

以上より、$G = \begin{cases} 1 & n \not\equiv 2 \pmod 5 \text{ のとき} \\ 5 & n \equiv 2 \pmod 5 \text{ のとき} \end{cases}$

(2)

2^n+3^{n+1} と 3^n+2^{n+1} の最大公約数を G とする。このとき、

$$2^n \equiv -3^{n+1} \qquad \text{かつ} \qquad 3^n \equiv -2^{n+1} \qquad \pmod{G}$$

なので、

$$2^n \equiv -3 \cdot 3^n \equiv -3 \cdot (-2^{n+1}) \equiv 6 \cdot 2^n \pmod{G}$$

より、$5 \cdot 2^n \equiv 0 \pmod{G}$ である。一方で $2^n + 3^{n+1}$ は奇数なので、G は奇数である。よって G は $5 \cdot 2^n$ の奇数の約数に限られるから、G は 1 または 5。$G=5$ とすると、

$$2^n+3^{n+1} \equiv 2^n + (-2)^{n+1} = 2^n\left[1+2(-1)^{n+1}\right] \equiv 0 \pmod 5$$

を得て、2 と 5 は互いに素であるから結局 $1+2(-1)^{n+1} \equiv 0 \pmod 5$ となるが、この左辺は 3 または-1 なので矛盾。よって $G=5$ は不適で、求める最大公約数は $G=1$。

Q.002

正の整数 n の正の約数の積を $P(n)$ とする。
(1) $P(n) = 24^{240}$ となる n は 1 つだけある。 n を求めよ。 ★3 (JMO 予選 2012)
(2) 実は $P(n)=P(m)$ ならば $n=m$ である。このことを示せ。 ★? (自作)

(1)

$P(n) = 24^{240} = 2^{720}3^{240}$ であることから、n は 2 と 3 のみを素因数に持つ。そこで $n = 2^a 3^b$ とおく。n の約数のうち、2 で k 回 $(1 \leq k \leq a)$ 割り切れるものは、

$$2^k,\ 2^k 3,\ 2^k 3^2, \cdots,\ 2^k 3^{b-1},\ 2^k 3^b$$

の $b+1$ 個ある。よって、$P(n)$ の中には、2^k が $b+1$ 個掛け算されているから、$P(n)$ の 2 の指数について、

$$\sum_{k=1}^{a} k(b+1) = \frac{a(a+1)(b+1)}{2} = 720$$

が成り立つことがわかる。$P(n)$ の 3 の指数についても同様に考えて、

$$\sum_{k=1}^{b} k(a+1) = \frac{b(b+1)(a+1)}{2} = 240$$

を得る。第 1 式を第 2 式で除すことで、$a=3b$ を得る。これを用いれば b について

$$b(b+1)(3b+1) = 480$$

が得られる。480 の約数のうち 3 で割って 1 余るものは 4, 16, 40, 160 であることを踏まえれば、$b=5$ を解の一つとして得る。題意を満たす n はただ一つであることがわかっているから、これが n における 3 の指数である。さらに $a=15$ とわかるから、

$$n = 2^{15}3^5 = 7962624$$

(2)

$a, b \in \mathbb{N}$ に対して, b が a で割り切れるということ, すなわち a が b の正の約数であることを "$a \mid b$" と表す。
これを用いて,n のすべての正の約数の総積 $P(n)$ を $\displaystyle\prod_{d|n} d$ と表す。 また, $d \mid n$ ならば $\dfrac{n}{d} \mid n$ であるから, $P(n) = \displaystyle\prod_{d|n} \frac{n}{d}$ とも表せる。これより, D_n で n の正の約数の個数を表すとすると,

$$P(n)^2 = \left(\prod_{d|n} d\right)\left(\prod_{d|n} \frac{n}{d}\right) = \prod_{d|n} d \cdot \frac{n}{d} = \prod_{d|n} n = n^{D_n}$$

となる。したがって,$P(n) > 0, n^{\frac{D_n}{2}} > 0$ であることから $P(n) = n^{\frac{D_n}{2}}$ と表される。

よって, $n^{\frac{D_n}{2}} = m^{\frac{D_m}{2}}$ ならば $n=m$ であることを示せばよい。ただし, 負の値になることがないので, $n^{D_n} = m^{D_m}$ で考えればよい。
ある素数 p に対して $p \mid n \Leftrightarrow p \mid m$ なので, n と m の素因数の種類は一致する。次に, n が素数 p で割ることができる最大の回数を $M_p(n)$ と置く。このとき, $n^{D_n} = m^{D_m}$ であることは, n (または m) を割り切る任意の素数 p に対して (左辺と右辺をそれぞれ何回割ることができるかを考えて) $D_n M_p(n) = D_m M_p(m)$ が成り立つことと同値である。

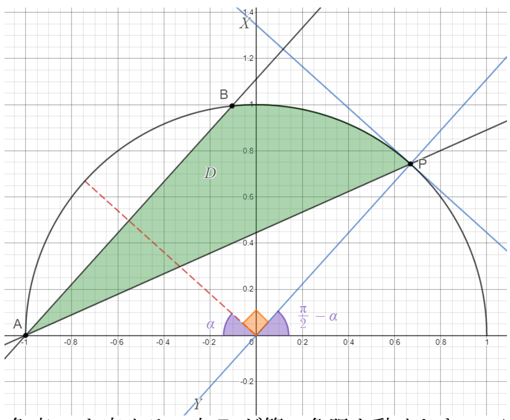
対称性より, $D_m \leq D_n$ とする。このとき,

$$D_n M_p(n) = D_m M_p(m) \leq D_n M_p(m) \Rightarrow M_p(n) \leq M_p(m)$$

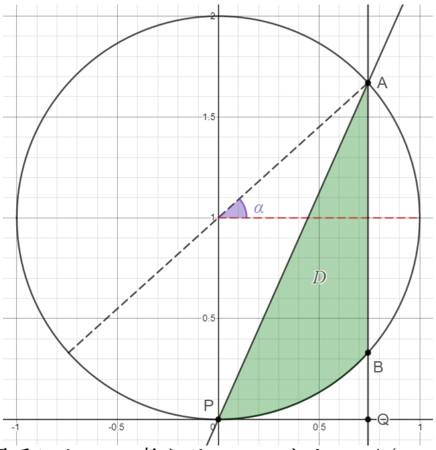
が成立する。 よって, 任意の n を割り切る素数 p に関して, m のほうが, n と同じ回数, あるいは n より多い回数だけ p で割ることができる。よって, $\dfrac{m}{n}$ は整数であり, すなわち $n \mid m$ である。
m が n の倍数ならば, $D_n \leq D_m$ であり, $D_m \leq D_n \leq D_m$ だから, $D_n = D_m$ となる。よって, $n^{D_n} = m^{D_m} = m^{D_n}$ であり, $n, m \in \mathbb{N}$ だから $n=m$ が示された。 □

Q.003 ★8

半円 C: $x^2+y^2=1$, $y>0$ に第一象限の点 P で接する直線 ℓ がある。点 A$(-1,0)$ を通り、ℓ に直交する直線と C の交点を B とし、弦 AB, AP と弧 BP で囲まれた図形を D とする。D を ℓ の周りに一回転させてできる図形の体積 V を最大にするような P の座標を求めよ。



図のように角度 α を定める。点 P が第一象限を動くとき、α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動く。また、点 P を原点とする X, Y 座標を青線のように設定する。この座標の下では、図は次のようになる。



以下この座標系において考える。このもとで $\mathrm{A}(\cos\alpha, 1+\sin\alpha)$, $\mathrm{B}(\cos\alpha, 1-\sin\alpha)$ となる。また弧 BP は $Y = 1-\sqrt{1-X^2}$ (ただし $0 \leq X \leq \cos\alpha$) となる。点 $\mathrm{Q}(\cos\alpha, 0)$ をおく。回転体の体積 V は、△APQ の回転体 (円錐) から線分 PQ, BQ と弧 BP で囲まれた領域の回転体を除くことで得られるから、

$$V = \frac{\pi}{3}(1+\sin\alpha)^2\cos\alpha - \pi\int_0^{\cos\alpha}(1-\sqrt{1-X^2})^2\,dX$$

これを α で微分して、

$$\left(\frac{3}{\pi}V\right)' = 2(1+\sin\alpha)\cos^2\alpha + (1+\sin\alpha)^2(-\sin\alpha)$$
$$-3(1-\sqrt{1-\cos^2\alpha})^2(-\sin\alpha)$$
$$= -2(5\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 1)$$

となる。よって $V' = 0$ となるのは $\sin\alpha = \dfrac{1\pm\sqrt{6}}{5}$ のときであるが、$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ では $\sin\alpha > 0$ であるから複合は正のみ適する。加えてこの範囲において $\sin\alpha$ は単調増加であるから、α の増加とともに V' の符号は負から正へ転じるので、$\sin\alpha = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}$ となるときに V は極大となる。

このとき、点 P の座標は xy 座標で $\mathrm{P}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$ となる。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha = \frac{1+\sqrt{6}}{5}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha = \frac{\sqrt{18-2\sqrt{6}}}{5}$$

であるから、求める点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1+\sqrt{6}}{5}, \frac{\sqrt{18-2\sqrt{6}}}{5}\right)$$

Q.004 ★2

格子点を 3 頂点に持つ正三角形は存在しないことを示せ。また、「ピックの定理」を用いた証明も考えよ。

ここに解答を記述。

Q.005　AMGM

(1) $x > 0$ のとき、$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right)$ の最小値を求めよ。(千葉工大 1997)

(2) $x > 0$ のとき、$x^2 + \dfrac{1}{x^3}$ の最小値を求めよ。

(3) 実数 a, b が $a+b=17$ を満たすとき、$2^a + 4^b$ の最小値を求めよ。(JMO 予選 2005)

(1)

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{4}{x}\right) = x^2 + \dfrac{4}{x^2} + 5$ で, $x^2, \dfrac{4}{x^2} > 0$ より相加相乗平均不等式が使えて $x^2 + \dfrac{4}{x^2} \geqq 2\sqrt{x^2\cdot\dfrac{4}{x^2}} = 4$ となる。(等号は $x = \sqrt{2}$ のときに起こる) よって最小値は $4+5=9$

(2)

$x^2 > 0, x^3 > 0$ なので $x^2 + \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{1}{2x^3} \geqq 5\sqrt[5]{\left(\dfrac{x^2}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{2x^3}\right)^2} = \sqrt[5]{\dfrac{1}{108}}$ (等号成立は $x = \sqrt[5]{\dfrac{3}{2}}$ のときに起こる) より最小値は $\dfrac{1}{\sqrt[5]{108}}$

(3)

$2^{a-1} + 2^{a-1} + 4^b \geqq 3\sqrt[3]{2^{a-1}\cdot 2^{a-1}\cdot 4^b} = \sqrt[3]{2^{2a-2+2b}} = \sqrt[3]{2^{32}}$ (等号成立は $a = \dfrac{35}{3}, b = \dfrac{16}{3}$) より最小値は $3072\sqrt[3]{4}$

Q.006　2 項係数とシグマ

次の式を計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k$ (★2)

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k$ (★2)

(3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k^2} {}_n\mathrm{C}_{\lfloor\sqrt{j}\rfloor}\right)$ (★6 学コン 2016-4-6)

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2$ (★?)

(1)

$$k\,{}_n\mathrm{C}_k = k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!} = n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

であるから、

$$\sum_{k=1}^{n} k\,{}_n\mathrm{C}_k = n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n2^{n-1}$$

(2)

$$k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = kn\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n(k-1)\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$
$$= n(n-1)\,{}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} + n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$

である。ここで、$k=1$ のときの場合を考えれば ${}_{n-2}\mathrm{C}_{-1} = 0$ となる。これを用いて、

$$\sum_{k=1}^{n} k^2\,{}_n\mathrm{C}_k = n(n-1)\sum_{k=1}^{n} {}_{n-2}\mathrm{C}_{k-2} + n\sum_{k=1}^{n} {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}$$
$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

(3)

$\lfloor\sqrt{j}\rfloor = i\ (i = 0, 1, \ldots, k-1)$ を満たす j の個数を求める。j の条件は、

$$i \leq \sqrt{j} < i+1 \Leftrightarrow i^2 \leq j < i^2+2i+1$$

なので、$j = i^2, i^2+1, \ldots, i^2+2i$ の $2i+1$ 個の j が、$\lfloor\sqrt{j}\rfloor = i$ を満たす。よって、

$$\sum_{j=0}^{k} {}_n\mathrm{C}_{\lfloor\sqrt{j}\rfloor} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}(2i+1)\,{}_n\mathrm{C}_i}_{(0\leq j\leq k^2-1)} + \underbrace{{}_n\mathrm{C}_k}_{j=k^2}$$

となる。なお、$k=0$ の場合には右辺第 1 項に相当するものは現れない。

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(2i+1){}_n\mathrm{C}_i+{}_n\mathrm{C}_k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k-1}(2i+1){}_n\mathrm{C}_i\right)+2^n$$

であるから、${}_n\mathrm{C}_m$ $(m=0,1,\ldots,n-1)$ が、この和のなかにどれだけ現れるかを考えればよい。k が $m<k\leq n$ を満たすときに $(2m+1){}_n\mathrm{C}_m$ が 1 回ずつ登場し、k は $n-m$ 通りあるので、

$$\begin{aligned}&\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(2m+1){}_n\mathrm{C}_m+2^n\\ =&-2\sum_{m=0}^{n-1}m^2{}_n\mathrm{C}_m+(2n-1)\sum_{m=0}^{n-1}m{}_n\mathrm{C}_m+n\sum_{m=0}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_m+2^n\\ =&-2\big[n(n+1)2^{n-2}-n^2\big]+(2n-1)(n2^{n-1}-n)\\ &\quad+n(2^n-1)+2^n\\ =&(n^2+2)2^{n-1}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}(1+x)^n&={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n\\ &={}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_0x^n\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}&\big({}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n\big)\\ &\quad\times\big({}_n\mathrm{C}_n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_{n-2}x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_0x^n\big)\end{aligned}$$

を展開したときの x^n の係数が $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}({}_n\mathrm{C}_k)^2$ となる。

一方でこれは $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^2n$ を展開したときの x^n の係数であるから、求める値は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$

Q.007 ★4 東工大 (2017)

> 次の条件 (i), (ii) をともに満たす正の整数 N を全て求めよ。
> (i) N の正の約数は 12 個
> (ii) N の正の約数を小さい順に並べたとき、7 番目の数は 12 である

N の約数を小さい順に $d_1,d_2,\cdots,d_{12}$ とする。このとき、

$$1=d_1<d_2<\cdots<d_{12}=N$$

で、$6\leqq d_6$ であり、

$$N=\frac{N}{d_1}>\frac{N}{d_2}>\cdots>\frac{N}{d_{12}}=1$$

である。また d を N の約数とすると $\dfrac{N}{d}$ も N の約数なので、$\dfrac{N}{d_k}$ は k 番目に大きい約数になるから、$\dfrac{N}{d_k}=d_{13-k}$ である。$k=6$ として、

$$N=d_6d_7=12d_6<12^2$$

を得る。$d_6\geqq 6$ を使って

$$N=12d_6\geqq 12\times 6$$

である。N は 12 を約数に持つので、$N=12m$ とおくと、

$$12\times 6\leqq 12m<12^2$$

より、$m=6,7,8,9,10,11$ が必要である。このうち、$m=10$ では N が約数を 12 個以上持つので不適であり、$m=6$ では $d_7=9$ なので不適。それ以外の N はすべて条件を満たす。よって $N=84,96,108,132$

Q.008 ★5 JMO 予選 2014-3 番 改題

> 15! の正の約数 d の全てについて、$\dfrac{1}{d+\sqrt{15!}}$ を全て足し合わせたものを求めよ。

(解答:2021/11/27 更新) $S_n=\sum_{0<d,d|n}\dfrac{1}{d+\sqrt{n}}$ とおく．ここでシグマの d は n の正の約数を走るというものである．さて, d が n の正の約数を走るとき, n/d もそう走るので,

$$S_n=\sum_{0<d,d|n}\frac{1}{\frac{n}{d}+\sqrt{n}}=\sum_{0<d,d|n}\frac{d}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+d)}$$

が成り立つ．よって,

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{2}S_n+\frac{1}{2}S_n\\ &=\frac{1}{2}\sum_{0<d,d|n}\left\{\frac{1}{d+\sqrt{n}}+\frac{d}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+d)}\right\}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{0<d,d|n}\frac{\sqrt{n}+d}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+d)}\\ &=\frac{1}{2}\sum_{0<d,d|n}\frac{1}{\sqrt{n}}\\ &=\frac{(n\text{ の正の約数の個数})}{2\sqrt{n}}\end{aligned}$$

ここで $n=15!=2^11\times3^6\times5^3\times7^2\times11\times13$ のときは正の約数の個数が 4032 であるから,

$$S_{15!}=\frac{2016}{\sqrt{15!}}=\frac{1}{15\sqrt{1430}}$$

(旧解答) $n=15!$ とする。求めるものは、$\displaystyle\sum_{d|n}\frac{1}{d+\sqrt{n}}$ である。ここで、

$$\frac{1}{d+\sqrt{n}}=\frac{d-\sqrt{n}}{d^2-n}=\frac{1}{d-\frac{n}{d}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\frac{n}{d}}{d-\frac{n}{d}}$$

と整理できる。

$n=15!=2^{11}\times3^6\times5^3\times7^2\times11\times13$ より、n の約数の個数は明らかに偶数である。この個数を $2k$ とおき、小さい順に i 番目の n の約数を d_i とする。ここで、i を $1\leq i\leq k$ の範囲で動かすとき、$\dfrac{n}{d_i}$ は $k+1\leq j\leq 2k$ の範囲のすべての d_j をとる。このことから、n の約数全体についての総和は、

$$\sum_{d|n}\frac{1}{d-\frac{n}{d}}=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{d_i-\frac{n}{d_i}}+\frac{1}{\frac{n}{d_i}-\frac{n}{n/d_i}}\right)=0$$

$$\sum_{d|n}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\frac{n}{d}}{d-\frac{n}{d}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\frac{n}{d_i}}{d_i-\frac{n}{d_i}}+\frac{\frac{n}{n/d_i}}{\frac{n}{d_i}-\frac{n}{n/d_i}}\right)=-\frac{k}{\sqrt{n}}$$

と書き直せる。以上のことから、

$$\sum_{d|n}\frac{1}{d+\sqrt{n}}=\frac{k}{\sqrt{n}}$$

と求められた。n の素因数分解の結果から、n の約数の個数は 4032 個であり、これを $2k$ としたので、$k=2016$ である。

よって求める値は、$\dfrac{2}{15\sqrt{1430}}$。

Q.009 ★7 学コン 2009-5-5

> 2 つの三角形があり、その面積が等しく、外接円の半径も等しく、内接円の半径も等しいとき、この 2 つの三角形は合同であることを示せ。

これら 2 つの三角形の面積を S、外接円半径を R、内接円半径を r とおく。また、それぞれの 3 辺の長さを、a,b,c と d,e,f とおく。すると、

$$S=\frac{abc}{4R}=\frac{def}{4R}\qquad\Leftrightarrow\qquad abc=def$$

$$S=\frac{r(a+b+c)}{2}=\frac{r(d+e+f)}{2}\quad\Leftrightarrow\quad a+b+c=d+e+f$$

$abc=def=u$, $a+b+c=d+e+f=2t$ とおくと、ヘロンの公式より、

$$S=\sqrt{t(t-a)(t-b)(t-c)}=\sqrt{t(t-d)(t-e)(t-f)}$$

$$\Leftrightarrow\quad(t-a)(t-b)(t-c)=(t-d)(t-e)(t-f)$$

となって、展開して整理すれば $ab+bc+ca=de+ef+fd$ が得られる。この値を v とすると、組 (a,b,c) も (d,e,f) も、ともに 3 次方程式 $x^3-2tx^2+vx-u=0$ の解である。すなわち 2 つの三角形は 3 辺の長さが全て等しく合同である。

Q.010 ★3 新潟大 (2016)

$P(x)=x^4+x^3+x-1$ とする。3 次以下の整式 $Q(x)$ であって、$P(1)=Q(1)$, $P(-1)=Q(-1)$, $P(2)=Q(2)$, $P(-2)=Q(-2)$ を全て満たすようなものを求めよ。

$R(x)=P(x)-Q(x)$ とおこう。条件より、

$$R(1)=R(-1)=R(2)=R(-2)=0$$

を満たす。因数定理より $R(x)$ は $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ で割り切れる。しかも、$P(x)$ が 4 次、$Q(x)$ が 3 次以下だから、$R(x)$ は 4 次である。さらに $P(x)$ の x^4 の係数が 1 だから $R(x)$ の x^4 の係数も 1 であって、

$$R(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)=x^4-5x^2+4$$

である。よって、

$$\begin{aligned} Q(x)&=P(x)-R(x)\\ &=(x^4+x^3+x-1)-(x^4-5x^2+4)\\ &=x^3+5x^2+x^5 \end{aligned}$$

Q.011 ★8

有理数 a,b,c について、$a^2\pm(a+b+c), b^2\pm(a+b+c), c^2\pm(a+b+c)$ の全てが平方数であるとする。このとき、a,b,c はいずれも整数であり、かつ $a+b+c=0$ を満たすことを証明せよ。

$a^2\pm(a+b+c)=s_\pm^2$ とおく。ここで $s_\pm$ は整数である。辺々引くと

$$2(a+b+c)=s_+^2-s_-^2$$

を得る。右辺は明らかに整数であるから、$2(a+b+c)$ は整数である。

$$2a^2\pm2(a+b+c)=2s_\pm^2 \quad\Leftrightarrow\quad 2a^2=2s_\pm^2\mp2(a+b+c)$$

から、$2a^2$ が整数であることがわかる。これを n とおく。有理数 a を、正整数 j と、これと互いに素な整数 i を用いて $a=\dfrac{i}{j}$ と表すと、

$$2a^2=n \quad\Leftrightarrow\quad 2i^2=nj^2$$

である。n が奇数であることを仮定する。このとき j が偶数で無ければならず、$j=2j'$ とおく。すると $i^2=2nj'^2$ となって i も偶数で無ければならない。これは i,j が互いに素であるとしたことに矛盾する。したがって n は偶数でなければならない。このとき $n=2n'$ とおけば、$i^2=n'j^2$ である。これは i^2 が j^2 の倍数であることを示しているが、i,j は互いに素であるから、$j=1$ のみが適する。すなわち、$a=\dfrac{i}{j}$ は整数である。同様の議論によって b,c も整数であることが示される。

$a+b+c\neq0$ を仮定する。ここで、対称性から $a^2\leq b^2\leq c^2$ を考えれば十分である。このとき少なくとも $c^2>0$ である。加えて、$a+b+c>0$ として一般性を失わない。なぜなら、$a+b+c<0$ の場合には、a,b,c を $-a,-b,-c$ と取り換えればよいから。

$$c^2<c^2+(a+b+c)\leq c^2+3|c|<c^2+4|c|+4=(|c|+2)^2$$

であるから、$c^2+(a+b+c)=(|c|+1)^2$ である。よって、$a+b+c=2|c|+1$。このとき、

$$c^2-(a+b+c)=c^2-2|c|-1=(|c|-1)^2-2=k^2$$

について、$(|c|+k-1)(|c|-k-1)=2$ を得るが、これを満たす整数 $|c|$, k は存在しない。したがって $c^2-(a+b+c)$ は平方数になり得ず、$a+b+c>0$ は不適であるから $a+b+c=0$ であることが示された。

Q.012 ★4 中京大 (1997)

a を定数とし、$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす x に対して、

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(e^x+a)\cos^{n+1}x+\sin^{n+1}x}{\cos^n x+\sin^n x}$$

とする。$f(x)$ が $0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ で連続であるとき、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$ の値を求めよ。

まず、与式における極限をとるべき式について、

$$\frac{(e^x+a)\cos^{n+1}x+\sin^{n+1}x}{\cos^n x+\sin^n x}=\frac{(e^x+a)\cos x}{1+\tan^n x}+\frac{\sin x}{\frac{1}{\tan^n x}+1}$$

と整理できる。このとき、$0\leq x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき、$0\leq\tan x<1$ であり、$\dfrac{\pi}{4}<x\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\tan x>1$ であり、さらに $x=\frac{\pi}{4}$ のとき $\tan x=1$ であることを踏まえて、

$$\begin{aligned} f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(e^x+a)\cos x}{1+\tan^n x}+\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{\frac{1}{\tan^n x}+1}\\ &=\begin{cases}(e^x+a)\cos x & \left(0\leq x<\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \dfrac{e^{\frac{\pi}{4}}+a+1}{2\sqrt{2}} & \left(x=\dfrac{\pi}{4}\right)\\ \sin x & \left(\dfrac{\pi}{4}<x\leq\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases} \end{aligned}$$

と求められる。したがって $x=\dfrac{\pi}{4}$ で連続となればよい。

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}-0}(e^x+a)\cos x=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}+0}\sin x=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

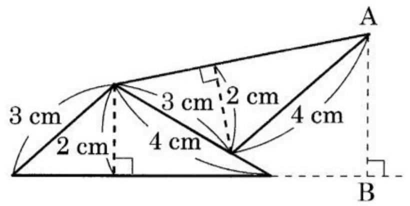
を考えて、$a=1-e^{\frac{\pi}{4}}$ である。これを用いて求める積分は、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(e^x+a)\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

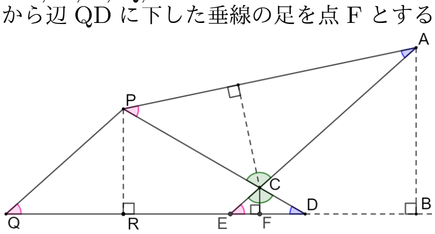
$$=\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+a\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

Q.013 ★4 灘中入試 (2012)

合同な二つの三角形を図のように置きます。このとき AB の長さは何 cm ですか。



下図のように点 C, D, P, Q, R をとる。辺 AC の延長と辺 QD の交点を点 E、点 C から辺 QD に下した垂線の足を点 F とする。



このとき、$\angle\mathrm{PAC}=\angle\mathrm{EDC}$ と $\angle\mathrm{PCA}=\angle\mathrm{ECD}$ によって、$\triangle\mathrm{PCA}\sim\triangle\mathrm{ECD}$ が成り立つ。これによって $\mathrm{CD}:\mathrm{CE}=4:3$ であり、$\mathrm{CD}=\mathrm{PD}-\mathrm{PC}=1$ であるから、$\mathrm{CE}=\dfrac{3}{4}$。さらに、$\angle\mathrm{CED}=\angle\mathrm{CPA}=\angle\mathrm{PQR}$ であることから、

$$\triangle\mathrm{PQR}\sim\triangle\mathrm{CEF}\sim\triangle\mathrm{AEB}$$

が成り立つ。よって $\mathrm{AE}:\mathrm{AB}=3:2$ で、$\mathrm{AE}=\mathrm{AC}+\mathrm{CE}=\dfrac{19}{4}$ だから、$\mathrm{AB}=\dfrac{19}{6}$

Q.014 ★4 $[y=x^x]$

(1) $f(x)=x^x$ $(x>0)$ とする。導関数 $f'(x)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ の最小値 m を求めよ。

(3) $a^a < m$ を満たす実数 a を 1 つ挙げよ。
(4) 原点を通り、曲線 $y = f(x)$ に接する直線を求めよ。

(1)

$\log f(x) = x\log x$ について両辺 x で微分すると、

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \log x + 1 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x) = x^x(\log x + 1)$$

(2)

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \dfrac{1}{e}$ のとき。$x > 0$ においては明らかに $x^x > 0$ であるから増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	$e^{-\frac{1}{e}}$	$\nearrow$

よって $m = e^{-\frac{1}{e}}$

(3)

明らかに $m = e^{-\frac{1}{e}} > 0 > -1 = (-1)^{-1}$ となるから、$a = -1$ とすればよい[*2]。

(4)

点 (t, t^t) を通り、$y = x^x$ に接する直線は、

$$y = \left[t^t(\log t + 1)\right](x - t) + t^t$$

であり、これが原点を通ればよいので、

$$0 = \left[t^t(\log t + 1)\right](0 - t) + t^t \quad\Leftrightarrow\quad t = 1$$

と求まる。よって求める直線は、$y = x$。

Q.015 ★7 数検 1 級二次対策

二進法を変形して -2 を基底に取ると、0 と 1 からなる列が符号をつけずに十進法の全ての整数を表すことができる。これを負二進法という。例えば、$101_{(-2)} = (-2)^2 + 1 = 5$ である。では負二進法で m 桁の整数は十進法でどのような整数の範囲を表すか。

ここに解答を記述。

Q.016　mod 計算編

$n, m \in \mathbb{N}$、p は素数として次の値を求めよ。$\pmod{k}$ の場合、0 から $k-1$ までの整数値で答えよ。
(1) $11^{11} \pmod{100}$
(2) $3^{2^n} \pmod{2^{n+2}}$
(3) $4444^{4444} \pmod 9$
(4) $9 \times 99 \times 999 \times \cdots \times \underbrace{99\cdots99}_{999} \pmod{1000}$
(5) $6^{2017} \pmod{100}$
(6) $10^{10^m} \pmod{13}$
(7) $2017! \pmod 5)^{503}$
(8) ${}_{p-1}\mathrm{C}_{\frac{p-1}{2}} \pmod p$ (ただし $p \geq 3$)
(9) $114514^{1919} \pmod{810}$
(10) $4^{4^{4^{4^{4^{4^m}}}}} \pmod{47}$
出典: (4) AIME、(5) 東大実戦文系、(6,7) 学コン、(8) suiso_728660 様、(10) 自作

(1)

二項定理を用いる。

$$(10+1)^{11} = \sum_{k=0}^{11} 10^k{}_{11}\mathrm{C}_k \equiv 10\cdot{}_{11}\mathrm{C}_1 + 1 \equiv 11 \pmod{100}$$

*2 負の奇数なら結果が負になるのでよい。

(2)

次の因数分解を利用する。

$$\begin{aligned}&3^{2^n} - 1\\ &= \left(3^{2^{n-1}} + 1\right)\left(3^{2^{n-2}} + 1\right)\ldots\left(3^{2^1} + 1\right)\left(3^{2^0} + 1\right)\left(3^{2^0} - 1\right)\end{aligned}$$

ここで、$3^{2^k} + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ は、$3^{2^k} + 1 \equiv 2 \pmod 4$ より、2 で 1 回しか割れない。また、$3^{2^0} + 1 = 4$, $3^{2^0} - 1 = 2$ に注意すると、上の式から $3^{2^n} - 1$ は 2 で $n+2$ 回割れる。よって、

$$3^{2^n} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{n+2}} \quad\Leftrightarrow\quad 3^{2^n} \equiv 1 \pmod{2^{n+2}}$$

(3)

$4444 \equiv -2 \pmod 9$ により、$(-2)^{4444} \pmod 9$ を見ればよい。$(-2)^6 = 64 \equiv 1 \pmod 9$ なので、

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} = (-2)^{6\times 740+4} \equiv (-2)^4 \equiv 7 \pmod 9$$

(4)

問題の数は $\displaystyle\prod_{k=1}^{999}(10^k - 1)$ である。よって、

$$\prod_{k-1}^{999}(10^k - 1) = 9 \times 99 \times \prod_{k=1}^{997}(10^{k+2} - 1)$$

$$\equiv 891\prod_{k=1}^{997}(-1) = 891(-1)^{997} \equiv 109 \pmod{1000}$$

(5)

まず、$6^{2017} \equiv 0 \pmod 4$ である。よって $6^{2017} = 4k_1$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$ と書ける。一方で、二項定理より、

$$6^{2017} = (5+1)^{2017} \equiv {}_{2017}\mathrm{C}_1\cdot 5 + 1 \equiv 11 \pmod{25}$$

となるので、$6^{2017} = 25k_2 + 11$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$ と書ける。いま、$4k_1 = 25k_2 + 11$ が成り立っているが、$\pmod 4$ を取ると、$k_2 \equiv 1 \pmod 4$ が従う。よって、$k_2 = 4k_3 + 1$ $(k_3 \in \mathbb{Z})$ と書ける。したがって、

$$6^{2017} = 25k_2 + 11 = 25(4k_3 + 1) + 11 = 100k_3 + 36$$

となるので、$6^{2017} \equiv 36 \pmod{100}$ となる[*3]。

(6)

10 の $\pmod{13}$ における位数を考える。つまり、$10^d \equiv 1 \pmod{13}$ となるような最小の自然数 d を求める。一般に、剰余類の数 a と mod を取る数 b が互いに素ならば、そのような位数は $\phi(b)$[*4]の約数の中に存在する。この場合では $\phi(13) = 12$ であるから、12 の約数から探す。実際、

$$10^6 \equiv (-3)^6 \equiv (-27)^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{13}$$

である。ここで $10^m = 6k + r$ $(k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 6)$ と表したとき、

$$10^{10^m} = 10^{6k}\cdot 10^r \equiv (10^6)^k \cdot 10^r \equiv 10^r \pmod{13}$$

となる。そこで r、つまり $10^m \pmod 6$ を求めればよいことになる。調べればわかるように[*5]、$10^m \equiv 4 \pmod 4$ が全ての自然数 m で成り立つので、$r = 4$ とできる。よって、

$$10^{10^m} \equiv 10^4 \equiv (-3)^4 \equiv 81 \equiv 3 \pmod{13}$$

(7)

階乗のある素因数の指数を決定する方法はルジャンドルの定理による。この場合、2014! に 5 が何回かけられているかは、

$$\left\lfloor\frac{2014}{5}\right\rfloor = 402,\ \left\lfloor\frac{2014}{25}\right\rfloor = 80,\ \left\lfloor\frac{2014}{125}\right\rfloor = 16,$$

$$\left\lfloor\frac{2014}{625}\right\rfloor = 3,\ \left\lfloor\frac{2014}{5^k}\right\rfloor = 0\ (\text{for}\, k \geq 5)$$

*3 本問の解法の背景には中国剰余定理がある。
*4 オイラーの ϕ 関数
*5 編者註: $10^m = (6+4)^m$ として二項定理から考えればよい

のすべて足し合わせればよい。つまり $402+80+16+3=501$ であり、$2014! = 5^{501}m$ のように書ける。$m = 25k + r$ $(0 \leq r < 25)$ と書いたとき、

$$2014! = 5^{503}k + 5^{501}r$$

となるので、r が分かると $2014! \pmod{5^{503}}$ もわかる。r は $\dfrac{2014!}{5^{501}}$ を 25 で割った余りとして求まるので、$\dfrac{2014!}{5^{501}}$ を調べる。

$f(n) = (5n+1)(5n+2)(5n+3)(5n+4)$ とする。すべての n に対して、

$$f(n) \equiv -1 \pmod{25}$$

であることに注意する[*6]。続いて、1 から 2014 のうち、「5^i の倍数だが 5^{i+1} の倍数ではないもの」の総積を P_i とする。これを $f(n)$ を用いて表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned}
P_0 &= f(n)f(1)\dots f(402)\\
P_1 &= \bigl(5^4 f(0)\bigr)\bigl(5^4 f(1)\bigr)\dots\bigl(5^4 f(79)\bigr)\times 2005\times 2010\\
P_2 &= \bigl(25^4 f(0)\bigr)\bigl(25^4 f(1)\bigr)\dots\bigl(25^4 f(15)\bigr)\\
P_3 &= \bigl(125^4 f(0)\bigr)\bigl(125^4 f(1)\bigr)\bigl(125^4 f(2)\bigr)\times 2000\\
P_4 &= 625^3(1\times 2\times 3)
\end{aligned}$$

これらによって、$2014! = P_0P_1P_2P_3P_4$ である。きりの悪い部分を集めて、

$$C = 2005\times 2010\times 2000\times P_4 = 5^{17}D$$

とおく。ここで D は 5 で割れない整数である。いま、

$$2014! = C\prod_{k=0}^{402} f(k)\prod_{l=0}^{79} 5^4 f(l)\prod_{m=0}^{15} 25^4 f(m)\prod_{n=0}^{2} 125^4 f(n)$$

であるから、両辺 5^{501} で割ると、

$$\begin{aligned}
\frac{2014!}{5^{501}} &= D\prod_{k=0}^{402} f(k)\prod_{l=0}^{79} f(l)\prod_{m=0}^{15} f(m)\prod_{n=0}^{2} f(n)\\
&\equiv D(-1)^{403}(-1)^{80}(-1)^{16}(-1)^3\\
&\equiv D \pmod{25}
\end{aligned}$$

となる。$D = 401\times 402\times 16\times 1\times 2\times 3\times$ であったから、

$$D \equiv 1\times 2\times 16\times 1\times 2\times 3 \equiv 17 \pmod{25}$$

より、$r = 17$ と求まった。よって、

$$2014! \equiv 17\cdot 5^{501} \pmod{5^{503}}$$

(8)

本問ではすべて $\pmod{p}$ とする。${}_{p-1}\mathrm{C}_{\frac{p-1}{2}} = k$ とおく。左辺分母の階乗を払うことで、

$$(p-1)! \equiv k\left(\frac{p-1}{2}!\right)^2$$

となる。ここで、右辺の $\left(\dfrac{p-1}{2}!\right)^2$ は、片方の $\dfrac{p-1}{2}!$ について

$$\frac{p-1}{2}! \equiv \left(-\frac{p+1}{2}\right)\left(-\frac{p+3}{2}\right)\dots\bigl[-(p-1)\bigr]$$

とすることで、$\left(\dfrac{p-1}{2}!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(p-1)!$ であることがわかる。よって、

$$(p-1)! \equiv k(p-1)!(-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad k \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

を得る。したがって、

$$k \equiv \begin{cases} 1 & (p\equiv 1 \pmod{4}) \\ p-1 & (p \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases} \pmod{p}$$

(9)

$n = 114514^{1919}$ とおく。$810 = 2\times 5\times 81$ とみて、これらの mod を考える。まず、$n \equiv 0 \pmod{2}$。続いて

$$n \equiv (-1)^{1919} \equiv 4 \pmod{5}$$

である。$114514 \equiv 61 \pmod{81}$ であるから、61^{1919} を考えればよい。$\phi(81) = 54$ なので、オイラーの定理によって $61^{54} \equiv 1 \pmod{81}$ である。$1919 \equiv 29 \pmod{54}$ なので、$61^{1919} \equiv 61^{29} \pmod{81}$ である。さらに、

$$61^{54} - 1 = (61^{27}-1)(61^{27}+1) \equiv 0 \pmod{81}$$

であって、$61^{27}+1$ が 3 の倍数でないことに注意すると、$61^{27}-1 \equiv 0 \pmod{81}$ が成り立つ。よって、

$$61^{29} \equiv 61^2 \equiv (-20)^2 \equiv 400 \equiv 76 \pmod{81}$$

である。これまでのことは、整数 k_i を用いて、

$$n = 81k_1 + 76 = 2k_2 = 5k_3 + 4$$

とまとめられる。$2k_2 = 5k_3 + 4$ より k_3 は偶数なので、$k_3 = 2k_4$ とかける。続いて $81k_1 + 76 = 10k_4 + 4$ について両辺の $\pmod{10}$ を考えると $k_1 \equiv 8 \pmod{10}$ がわかるから、$k_1 = 10k_6 + 8$ とすると、

$$\begin{aligned}
&n = 81k_1 + 76 = 81(10k_6+8) + 76 = 810k_6 + 724\\
\Leftrightarrow\quad &n \equiv 724 \pmod{810}
\end{aligned}$$

(10)

まず、次のように文字をおく。

$$a = 4^{4^{4^{4^{4^{4^m}}}}},\qquad b = 4^{4^{4^{4^{4^m}}}},\qquad c = 4^{4^{4^{4^m}}},$$
$$d = 4^{4^{4^m}},\qquad e = 4^{4^m},\qquad f = 4^m$$

すなわち、

$$a = 2^{2b},\ b = 2^{2c},\ c = 2^{2d},\ d = 2^{2e},\ e = 2^{2f}$$

まず 47 は素数であるから、Fermat の小定理より $2^n \pmod{47}$ は少なくとも周期 46 になっている。そこで、$2^{2b} \pmod{47}$ を求めるには、$2b \pmod{46}$、つまり $b \pmod{23}$ がわかるとよい。$2^{2c} \pmod{23}$ を知るには同様にして $c \pmod{11}$ を調べればよく、$2^{2d} \pmod{11}$ は $d \pmod{5}$ を調べればよい。e は明らかに偶数なので、

$$d = 4^e \equiv (-1)^e \equiv 1 \pmod{5}$$

である。$d = 5k_1 + 1$ と書く。以下 Fermat の小定理が使えることに注意して計算を進める。まず c について、

$$c = 2^{2(5k_1+1)} = 2^{10k_1+1} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{11}$$

よって $c = 11k_2 + 4$ と書ける。続いて b について、

$$b = 2^{2(11k_2+4)} = 2^{22k_2+8} \equiv 2^8 \equiv 3 \pmod{23}$$

よって $b = 23k_3 + 3$ と書ける。最後に a について、

$$a = 2^{2(23k_3+3)} = 2^{46k_3+6} \equiv 2^6 \equiv 17 \pmod{47}$$

と求まった。なおこの結果は m によらない[*7]。

Q.017

次に挙げるものが無理数であることを証明せよ。

(1) $\sqrt{2}$ ★1
(2) $\log_2 10$ ★1
(3) $3^{\frac{1}{3}}$ ★1
(4) $\tan 1^\circ$ ★4 (京大)
(5) $\cos 1^\circ$ ★4
(6) $3^{\frac{1}{3}}p + \sqrt{2}q$ (ただし、p, q は正の有理数) ★4 (阪大 類)

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

(3)

ここに解答を記述。

[*6] これは展開すればすぐにわかる。

[*7] e が偶数だとわかった後は気にしなくてよかったのである。例えば f の部分を m をおいても結果は変わらない。

(4)

ここに解答を記述。

Q.018 ★5 並べ替え数列

数列 $1, 2, \cdots, n$ のある並び替えを $a_1.a_2, \cdots, a_n$ とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k-n+k-1)^2$ を n で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2$ の最大値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ が最小となるとき、 $a_k=n+1-k$ であることを証明せよ。

(1)

括弧を展開して一つのシグマの中に入れると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\{2a_k^2-2(n+1)a_k+k^2+(n+1-k)^2\}\\ =&2\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}a_k+2\sum_{k=1}^{n}k^2\\ =&4\sum_{k=1}^{n}k^2-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k\\ =&\frac{n(n+1)(8n+4)}{6}-\frac{n(n+1)(6n+6)}{6}\\ =&\frac{n(n+1)(n-1)}{3}=\frac{n^3-n}{3}\end{aligned}$$

(2)

(1) より

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-k)^2=\frac{n^3-n}{3}-\sum_{k=1}^{n}(a_k-n+k-1)^2$$

であって, 右辺を最大化したい。 2 乗の和なので $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-n+k-1)^2 \geqq 0$ が成り立ち, $a_k=n-k+1$ とすることで, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は $1, 2, \cdots, n$ の並び替えでありながら右辺が最大化されると分かる。よって, 最大値はそのような a_k のときに実現される $\dfrac{n^3-n}{3}$ である。

(3)

(2) より

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+k^2-2ka_k)=2\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

が最大化されるのが $a_k=n+1-k$ のときであるが, これは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k$ を最小化させているときとも見れるので明らか。

Q.019 ★0 私の高校の中間テスト

自分の計算･解答に自身を持つことは大切である。ところで、△ABC において、BC=2, AC=$\sqrt{6}$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ のとき、残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

余弦定理を用いて、

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAC}$$

$$\Leftrightarrow\quad 4=6+\mathrm{AB}^2-\sqrt{6}\mathrm{AB}$$

$$\Leftrightarrow\quad \mathrm{AB}^2-\sqrt{6}\mathrm{AB}+2=0$$

が得られた。この 2 次方程式の判別式 D は、$D=(-\sqrt{6})^2-4\times1\times2=-2<0$ となるから、AB は実数解を持たない。したがって、題意を満たす三角形は存在しない。

Q.020 ★11 IMO マスターデーモン

2 以上の整数 n で、$\dfrac{2^n+1}{n^2}$ が整数値をとる n の値を全て求めよ。

$n=1$ は明らか。$n\geq2$ のとき、分子は奇数だから n も奇数である必要がある。n を割り切る最小の素因数 (2 ではない) が存在するので、それを p とおく。このとき、

$$2^n+1\equiv0\quad\Rightarrow 2^{2n}\equiv1\pmod p\quad\cdots①$$

また p は 2 と互いに素だからフェルマーの小定理により $2^{p-1}\equiv1\pmod p$。これと①より、2 の $\pmod p$ の位数は $\gcd(2n, p-1)$ の約数である。
$p-1$ は p より小さい素数で素因数分解されるため、p の最小性から n とは互いに素であるが,$p-1$ は明らかに偶数であるから,$\gcd(2n,p-1)=2$ である。よって位数は 1 または 2 となる。
位数が 1 と仮定すると、

$$2^1\equiv1\quad\Leftrightarrow\quad1\equiv0\pmod p$$

だが、$p\geq3$ なので不適。位数は 2 で $3\equiv0$ となり $p=3$ である。よって n は 3 の倍数である。n が 3 で割り切れる回数を k とおく (ただし $k\geq1$)。
LTE の補題を用いる。$v[3](a)$ で、a が 3 で割り切れる回数を表すとして、

$$v[3](2^n+1^n)=v[3](2+1)+v[3](n)=1+v[3](n)=1+k$$

となる。一方分母は $v[3](n^2)=2k$ である。分母の方が 3 で割り切れる回数が少なくないといけないので、$1+k\geq2k$ より $k=1$。よって n は 3 で一回だけ割り切れる。
次に n の 2 番目に小さい素因数の存在を仮定する。これを q とし、同様の議論から 2 の $\pmod q$ の位数は $\gcd(2n, q-1)$ の約数である。$q-1$ は q より小さい素因数 ($p=3$ も含まれる) で素因数分解されるから、$q-1$ が 3 と互いに素ならば gcd は 2 で、$q-1$ が 3 の倍数ならば gcd は 6 である。
よって位数は 2 または 6 の約数として、1, 2, 3, 6 の場合を調べればよい。以下 $\pmod q$ で、1 なら $1\equiv0$ で不適。2 なら $3\equiv0$ で $q\geq5$ より不適。3 なら $7\equiv0$ で $q=7$ があり得る。6 なら $63\equiv0$ で $q=7$ があり得る。
したがって q が存在するならば $q=7$。このとき n は 7 の倍数であり、2^n+1 も 7 で割り切れる必要があるが、$2^n+1\equiv3,5,2\pmod 7$ であるから不適。よって $q=7$ であってはならないから、n には 3 より大きい素因数が存在せず、3 で一回しか割り切れないから $n=3$ が必要であり、実際に $n=3$ は $\dfrac{2^3+1}{3^2}=1$ となるからよい。
以上より、求める n は $n=1,3$。

Q.021 ★6

xy 平面上の △ABC に対してその 3 頂点の座標がいずれも有理数であるとし、$\angle\mathrm{BAC}=\theta$ とおく。このとき、$\cos\theta$ が有理数であることと、$\sin\theta$ が有理数であることは同値 (必要十分) であることを示せ。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{c}$ とおき、それぞれの成分を b_x などとおくと、これらの成分は全て有理数となる。内積を考えて、

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}=\frac{b_xc_x+b_yc_y}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}$$

このとき、$b_xc_x+b_yc_y$ は明らかに有理数である。$b_xc_x+b_yc_y\neq0$ すなわち $\theta\neq90^\circ$ に限れば、$\cos\theta$ が有理数であることと $\dfrac{1}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}$ が有理数であることは同値である。
続いて三角形の面積 S について

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\sin\theta=\frac{1}{2}|b_xc_y-b_yc_x|\quad\Leftrightarrow\quad\sin\theta=\frac{|b_xc_y-b_yc_x|}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}$$

このとき、$|b_xc_y-b_yc_x|$ は 3 点 A, B, C が三角形を成すことから 0 より

大きい有理数である。したがって $\sin\theta$ が有理数であることと $\dfrac{1}{|\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|}$ が有理数であることは同値である。
これらのことは、$\theta \neq 90^\circ$ な三角形について、$\cos\theta$ が有理数であることと $\sin\theta$ が有理数であることは同値であることを示している。$\theta = 90^\circ$ の場合には、$\cos\theta = 0,\ \sin\theta = 1$ となるからやはり題意を満たす。以上により、題意の成立が示された。

Q.022 ★7 数 II 赤チャート

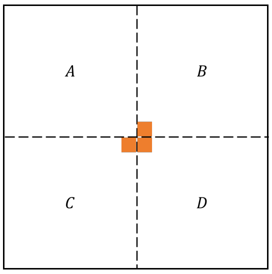
1 つの円に n 本の弦を、どの 2 本も円の内部で交わり、どの 3 本も同じ点を通ることがないように引く。円の内部がこれらの弦によって分けられる部分の個数を求めよ。また、n が 4 以上のとき、これらの部分のうち多角形であるものの個数を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.023 ★3

$2^n \times 2^n$ のチェス盤から、1×1 の正方形を 1 つ取り除いたものを '欠損チェス盤' と呼ぶことにする。この欠損チェス盤は 3 つの 1×1 の正方形からなる L 字形のブロックを用いて充填できることを示せ。

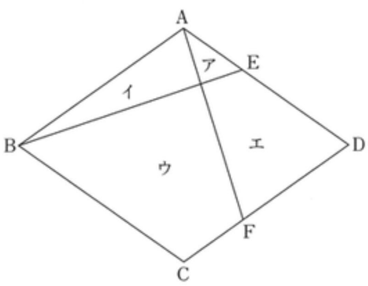
数学的帰納法により証明する。$n=1$ であるとき、欠損チェス盤は L 字型ブロックそのものであるから、明らかに充填可能である。



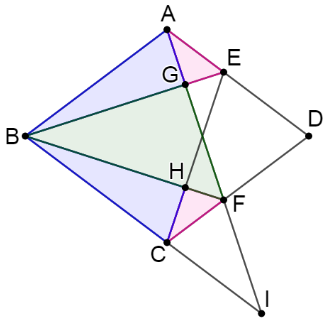
$n = k\ (k \geq 1)$ において、$2^k \times 2^k$ の任意の欠損チェス盤が充填可能であったとする。$2^{k+1}\times 2^{k+1}$ の欠損していないチェス盤を、4 つの $2^k \times 2^k$ のチェス盤 A, B, C, D の集まりと考える。ここから 1 つの 1×1 の小正方形を任意に取り除く。すると A, B, C, D のうちの一つから小正方形が取り除かれるが、それを A としても一般性は失われない。小正方形を取り除いた A を A^* と表すとき、A^* は $2^k\times 2^k$ の欠損チェス盤とみなせるから、帰納法の仮定により L 字型ブロックで充填できる。続いて、B の左下隅、C の右上隅、D の左上隅の小正方形 (図の赤部) を取り除いたものをそれぞれ B^*, C^*, D^* とおくと、これらはすべて $2^k\times 2^k$ の欠損チェス盤とみなせるから帰納法の仮定により L 字型ブロックで充填できる。最後に、B, C, D から取り除いた小正方形は 1 つの L 字型ブロックで埋められる。以上により、$2^{k+1}\times 2^{k+1}$ の欠損チェス盤全体が L 字型ブロックで充填できる。
したがって、数学的帰納法により、全ての自然数 n で $2^n \times 2^n$ の欠損チェス盤を L 字型ブロックで充填できる。

Q.024 ★6 Jr. 算オリ Final

ひし形 ABCD に AE = CF となる点を図のように取ります。図のようにア〜エの 4 つの図形に分けると、アはウより 155 cm^2 小さく、イはエより 31 cm^2 小さいです。アの面積は何 cm^2 ですか。



線分 CE と BF を引き、点 G, H を図のように定める。線分 AF と BC をそれぞれ延長し、交点を I とする。



このとき、△AEG = △CFH = ア、△BAG = △BCH = イ、△CFH + △BCH + △BFG = ウ である。一方、ア + 155 = ウ だから、

$$\triangle BCH + \triangle BFG = \triangle BAG + \triangle BFG = \triangle ABF = 155$$

となる。ここで △ABF はひし形 ABCD の半分の面積を持つから、

$$\triangle BCF + \triangle ADF = \text{イ} + \text{ア} + \text{ア} + \text{エ} = 2\times\text{ア} + 2\times\text{イ} + 31 = 155$$

となって、ア + イ = △BCF = 62, △ADF = 93 を得る。したがって、CF : DF = 2 : 3。ひし形の辺の長さを a とすれば、

$$\begin{aligned} \mathrm{EG} : \mathrm{BG} &= \mathrm{AE} : \mathrm{IB} \quad (\because \triangle AEG \sim \triangle IBG) \\ &= \frac{2}{5}a : \frac{5}{3}a \quad (\because \mathrm{AE} = \mathrm{CF},\ \triangle ADF \sim \triangle ICF) \\ &= 6 : 25 \end{aligned}$$

したがって、アとイはあわせて 62 を 6 : 25 にわけるから、ア = 12 cm^2 と求まった。

Q.025 ★4 学コン 2015-6-2

a, b, c が $a \geq b \geq c > 0$ を満たして動くとき、$\dfrac{2a+b}{c} + \dfrac{2b+c}{a}$ の最小値を求めよ。

$F(a,b,c) = \dfrac{2a+b}{c} + \dfrac{2b+c}{a}$ とおく。a, c を固定すると、F は b に関して増加する関数である。よって、a, c を固定した上では b は $a \leq b \leq c$ を動くから、$b = c$ とすると小さくできる。すなわち、

$$F(a,b,c) \geq F(a,c,c) = 1 + \frac{2a}{c} + \frac{3c}{a}$$

である。$a, c > 0$ だから、相加相乗平均の不等式より、

$$F(a,c,c) \geq 1 + 2\sqrt{\frac{2a}{c}\cdot\frac{3c}{a}} = 1 + 2\sqrt{6}$$

が成立する。等号の成立は $2a^2 = 3c^2$ のときなので、たとえば $b = c = 2,\ a = \sqrt{6}$ とすると、

$$F(\sqrt{6}, 2, 2) = 1 + 2\sqrt{6}$$

が実現する。よって求める最小値は $1 + 2\sqrt{6}$。

Q.026　立体の色塗り

次のいわゆる正多面体の各面を異なる色で塗り分けるとき、色の塗り方は何種類あるか求めよ。正二十面体については、C, P や階乗を残してもよい。(図省略)

ここに解答を記述。

Q.027　積分 20 題

次の不定積分及び定積分を求めよ。ただし、$n, m \in \mathbb{N}$。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^n + x^{n-1})\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx$ (会津大)

(3) $\displaystyle\int x2^x\,dx$ (津田塾大)

(4) $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^2 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}\,dx$ (東邦大 医)

(7) $\displaystyle\int_0^1 x e^{-x^2}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos 7x}$

(10) $\displaystyle\int \log\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\,dx$

(11) $\displaystyle\int_0^\pi \sin mx \sin nx\,dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^m(1-x}$ (神戸大)

(13) $\displaystyle\int e^x \sin x\,dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

(15) $\displaystyle\int_0^{\log 2} (x - \log 2) e^{x + \log 2 - 2\log(1+e^x)}\,dx$ (阪大)

(16) $\displaystyle\int_0^{\frac{pi}{2}} \sin^n x\,dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{\frac{pi}{4}} \tan^n x\,dx$

(18) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x^n)\,dx$

(19) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

(20) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$

(1)

ここに解答を記述。
以下同様。

Q.028 ★9 (東大実戦)

n を 0 以上の整数とする。$0 \leqq k \leqq n$ を満たすすべての整数 k のうち, 2^k の最高位の数字が 1 のものの個数を a_n, 最高位の数字が 4 のものの個数を b_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ の値を求めよ。(最高位の数字は 10 進法で考えるものとする。)

$n \geqq 4$ とする。
2^n が k_n 桁であるとする。(この時, $k_n \geqq 2$) また, 2^i が k_n 桁であるような最大の整数を $M(n)$ として,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{M(n)}}{b_{M(n)}}$$

を代わりに考える。$k_n = k_{M(n)}$ に注意する。

2^j と 2^{j+1} で桁数が異なるとき, ある自然数 s が存在して $5 \cdot 10^{s-1} \leqq 2^j < 10^s$ となるが, この不等式から

$$10^s \leqq 2^{j+1} < 2 \cdot 10^s$$

が言えるため, 2^{j+1} の最高位の数は 1 になる。また, このとき 2^{j+2} は明らかに最高位の数が 2,3 になる。

このことから, s 桁 $(s = 1, \cdots, k_n)$ の 2 の非負整数乗であって, 最高位の数が 1 であるようなものがただひとつ存在するので,$a_n = k_n$, $a_{M(n)} = k_n$ である。

集合 $S_d = \{2^k | 0 \leqq k \leqq M(n), 2^k\text{の最高位の数が } d\}$ $(d = 1, 2, \cdots, 9)$ を考える。このとき, S_1 の各元を 2 倍すると $M(n)$ の取り方から[*8]必ず $S_2 \cup S_3$ に属し, 逆に $S_2 \cup S_3$ の各元を 2 で割ると S_1 に属する。よって, 集合の元の間に 1 対 1 の対応 (全単射) が存在し, 集合の元の個数に関して

$$|S_1| = k_n = |S_2 \cup S_3| = |S_2| + |S_3|$$

が成立する。同様な議論により, $S_2 \cup S_3$ と $S_4 \cup S_5 \cup S_6 \cup S_7$ の間に全単射が存在するので

$$|S_2| + |S_3| = k_n = |S_4| + |S_5| + |S_6| + |S_7|$$

また同様に S_4 と $S_8 \cup S_9$ の間に全単射が存在するので

$$|S_4| = b_{M(n)} = |S_8| + |S_9|$$

また, $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_9$ は $\{2^k | k = 0, 1, \cdots, M(n)\}$ なので

$$M(n) + 1 = \sum_{d=1}^{9} |S_d|$$

であり, 右辺は

$|S_1| + (|S_2| + |S_3|) + (|S_4| + \cdots + |S_7|) + (|S_8| + |S_9|) = 3k_n + b_{M(n)}$

となるから

$$b_{M(n)} = M(n) + 1 - 3k_n$$

を得る。これらにより

$$\frac{a_{M(n)}}{b_{M(n)}} = \frac{k_n}{M(n) + 1 - 3k_n} = \frac{1}{\frac{M(n)}{k_n} + \frac{1}{k_n} - 3}$$

となる。
$2^{M(n)}$ は k_n 桁であるから

$$10^{k_n - 1} \leqq 2^{M(n)} < 10^{k_n}$$

が成り立つ。底を 2 とする対数をとり, 整理すると

$$\left(1 - \frac{1}{k_n}\right) \log_2 10 \leqq \frac{M(n)}{k_n} < \log_2 10$$

となる。明らかに $k_n \to \infty$ なので はさみうちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{M(n)}{k_n} = \log_2 10$ である。よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{M(n)}}{b_{M(n)}} = \frac{1}{\log_2 10 - 3} = \frac{1}{\log_2 5 - 2}$$

を得る。
$b_{M(n)} - b_n$ は, $n < k \leqq M(n)$ なる整数 k のうち 2^k の最高位が 4 であるものの個数であるが, $2^n, 2\ M(n)$ は桁が同じなのでそのような数は高々ひとつである。よって

$$0 \leqq b_{M(n)} - b_n \leqq 1$$

から

$$1 \leqq \frac{b_{M(n)}}{b_n} \leqq 1 + \frac{1}{b_n}$$

$n \to \infty$ のとき, $a_{M(n)} = k_n \to \infty$ で, $\dfrac{a_{M(n)}}{b_{M(n)}}$ は収束するので $b_{M(n)} \to \infty$ が必要である。$b_{M(n)} + 1 \leqq b_n$ だから $b_n \to \infty$ である。よって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{M(n)}}{b_n} = 1$$

である。このことと, $a_n = a_{M(n)}$ から

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_{M(n)}}{b_{M(n)}} \cdot \frac{b_{M(n)}}{b_n}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{\log_2 5 - 2}}$$

Q.030 ★7 (1) 千葉大、(2) ガロア祭 2012

(1) n は 3 以上の自然数とする。整数 x, y, z が $x^n + 2y^n = 4z^n$ を満たすならば、$(x, y, z) = (0, 0, 0)$ であることを示せ。
(2) 有理数 x, y, z, w が、$x^2 - 2y^2 + 5(z^2 - 3w^2) = 0$ を満たすならば、$(x, y, z, w) = (0, 0, 0, 0)$ であることを示せ。

(1)

まず、$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ なる解が得られたとする。このとき x, y, z の最大公約数 g が定義できて、

$$x^n + 2y^n = 4z^n \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x}{g}\right)^n + 2\left(\frac{y}{g}\right)^n = 4\left(\frac{z}{g}\right)^n$$

[*8] $M(n)$ で取れば, S_1 の元を 2 倍したときに必ず $S_2 \cup S_3$ に属するようになる。逆に $n = 7$ 等で考えると, $128 \in S_1$ を 2 倍しても 256 は大小の問題により $S_2 \cup S_3$ には属さなくなる。

であるから、(x,y,z) が解ならば $\left(\frac{x}{g},\frac{y}{g},\frac{z}{g}\right)$ も解であることが従う。よって初めから x,y,z の最大公約数は 1 であることを仮定してよい。

$$x^n=4z^n-2y^n$$

より、x は偶数でなければならない。$n\geq 3$ であるから x^n は 8 の倍数である。 $\pmod 4$ を考えると、

$$0\equiv 2y^n \pmod 4$$

となるから、y は偶数でなければならない。続いて $\pmod 8$ を考えると、x^n,y^n はともに 8 の倍数だから、

$$0\equiv 4z^n \pmod 8$$

となる。よって z も偶数でなければならない。x,y,z がすべて偶数なので、このことは最大公約数を 1 としたことに反する。よって $(x,y,z)=(0,0,0)$ であることが必要で、これは明らかに解である。[*9]

(2)

$(x,y,z,w)\neq(0,0,0,0)$ なる解があったとする。このとき十分大きい自然数 N によって $(N!x,N!y,N!z,N!w)$ を考えることで $(0,0,0,0)$ でない整数解を得ることができる。そこで初めから x,y,z,w が整数であるとしてよい。また今回の場合も前問と同様にして x,y,z,w の最大公約数が 1 であるとしてよい。 $\pmod 5$ を考えることにより、

$$x^2\equiv 2y^2 \pmod 5$$

を得る。$y\not\equiv 0 \pmod 5$ であるなら、$yk\equiv 1 \pmod 5$ となる整数 k が取れるので

$$(kx)^2\equiv 2 \pmod 5$$

となる。しかし 2 は $\pmod 5$ における平方剰余ではないので不適である[*10]。よって $y\equiv 0 \pmod 5$ であり、$x^2\equiv 0 \pmod 5$ なので x も 5 の倍数である。
x^2,y^2 は 25 の倍数である。 $\pmod{25}$ を考えると、

$$5(z^2-3w^2)\equiv 0 \pmod{25}$$

より、$z^2\equiv 3w^2 \pmod 5$ でなければならない。$w\not\equiv 0 \pmod 5$ であるなら、$wl\equiv 1 \pmod 5$ となる整数 l が取れるので

$$(lz)^2\equiv 3 \pmod 5$$

となる。しかし 3 は $\pmod 5$ における平方剰余ではないので不適である。よって $w\equiv 0 \pmod 5$ であり、$z\equiv 0 \pmod 5$ も従う。
以上より、x,y,z,w は全て 5 の倍数となり、最大公約数を 1 としたことに反する。よって $(0,0,0,0)$ でない有理数解は存在しない。また $(0,0,0,0)$ は明らかに解である。

Q.031 ★4 阪大理系 (2005)

> 空間内の 4 点 $\mathrm{A,B,C,D}$ が、$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=2$, $\mathrm{AD}=3$, $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ$, $\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

(座標を設定して)

3 点 $\mathrm{A,B,D}$ の座標をそれぞれ、$\mathrm{A}(0,0,0)$, $\mathrm{B}(1,0,0)$, $\mathrm{D}(0,3,0)$ とおく。直角三角形 ABD の外接円の中心は、辺 BD の中点であり、これを M とおく。$\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$ である。M を通り xy 平面に垂直な直線上に (任意の) 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},p\right)$ (ただし p は実数) をとると、$\triangle\mathrm{AMP}$, $\triangle\mathrm{BMP}$, $\triangle\mathrm{DMP}$ は全て合同であるから、$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PD}$ が成り立つ。
$\triangle\mathrm{ABC}$ について、$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=2$, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ なので、$\angle\mathrm{CBA}=90^\circ$ である。したがって、点 C は平面 $x=1$ 上に存在するから、x 座標は 1。$\triangle\mathrm{ACD}$ において、点 C から辺 AD に垂線を下ろせば、その足は $(0,1,0)$ である。したがって、点 C は平面 $y=1$ 上に存在するから、y 座標は 1。よって $\mathrm{C}(1,1,c)$ とおく。$\mathrm{AC}=2$ より、$c=\pm\sqrt{2}$。

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PD}=t$, $\mathrm{PC}=u$ とおく。

$$t^2=p^2+\frac{5}{2}$$

$$u^2=(p\mp\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}$$

この t,u が等しくなるような p が、点 E の座標を与える。$t^2=u^2$ として p について解くと、

$$p^2+\frac{5}{2}=(p\mp\sqrt{2})^2+\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad p=0$$

したがって、$\mathrm{E}\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$ であって、$\mathrm{AE}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

(余弦定理で)

$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ において余弦定理を用いて、

$$\mathrm{BC}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos60^\circ=3$$

$$\mathrm{CD}^2=2^3+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60^\circ=7$$

続いて $\triangle\mathrm{ABD}$ において三平方の定理を用いて、

$$\mathrm{BD}^2=1^2+3^2=10$$

これらより、$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2=\mathrm{BD}^2$ が成り立つので、三平方の定理の逆より $\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$ である。
点 E を通り、平面 BCD に垂直な直線を引き、その足を H_1 とする。このとき $\mathrm{BE}=\mathrm{CE}=\mathrm{DE}$ と三平方の定理より、点 H_1 が $\triangle\mathrm{BCD}$ の外心であることがわかる。$\mathrm{BCD}=90^\circ$ より、点 H_1 は線分 BD の中点 M に等しい。したがって、点 M を通り平面 BCD に垂直な直線 l_1 上に点 E があることがわかる。点 E と平面 ABD について、$\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$ を用いて同様のことを考えることで、線分 BD の中点 M を通り平面 ABD に垂直な直線 l_2 上に点 E があることがわかる。
これらのことから、点 E は直線 l_1 と l_2 の交点であり、また l_1 と l_2 は明らかに点 M で交わるから、$\mathrm{E}=\mathrm{M}$ である。よって、

$$\mathrm{AE}=\mathrm{BE}=\mathrm{BM}=\frac{1}{2}\mathrm{BD}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

Q.032 ★4 阪大 医 (保健) 学部 (2007)

> n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ、第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。G の期待値を n の式で表せ。

最大公約数が G となる確率を $P(G)$ と書く。$G=4,5,6$ となるのは、それぞれ出た目が全て 4,5,6 の場合のみであるから、

$$P(4)=P(5)=P(6)=\frac{1}{6^n}$$

$G=3$ となる場合は、出た目の全てが 3,6 のどちらかのみである場合から、n 回全て 6 であった場合を除けばよい。よって、

$$P(3)=\frac{1}{3^n}-\frac{1}{6^n}$$

$G=2$ となる場合は、出た目の全てが 2,4,6 のいずれかである場合から、n 回全て 4 であった場合と 6 であった場合を除けばよい。よって、

$$P(2)=\frac{1}{2^n}-\frac{2}{6^n}$$

上掲の場合に該当しない場合はすべて $G=1$ となる。以上のことを用いて、G の期待値は、

$$\begin{aligned}&\sum_{G=1}^{6}G\cdot P(G)\\
=&1\times\left(1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+2\times\left(\frac{1}{2^n}-\frac{2}{6^n}\right)+3\times\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{6^n}\right)\\
&\quad+(4+5+6)\times\frac{1}{6^n}\\
=&1+\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3^n}+\frac{8}{6^n}\end{aligned}$$

Q.033 ★? 琉球大 (2009)

> a,b を正の実数とする。すべての自然数 n に対して
> $$(1^a+2^a+3^a+\cdots+n^a)^2=1^b+2^b+3^b+\cdots+n^b$$
> が成立するとき, a,b をすべて求めよ。

[*9] 無限降下法的な議論でもよい。無限降下法はどの項の次数も同じであるようなときに使えることが多い。(個人的にはこのように最大公約数を取る方が好きである。)

[*10] もちろん、$2y^2\equiv 0,2,3 \pmod 5$ であることを見て、0 以外は非平方剰余なので、と言ってもよい。

式を変形すると

$$n^{2a+2}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\right)^{2}=n^{b+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{b}$$

なので, 両辺を n^{b+1} で割って

$$n^{2a+1-b}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\right)^{2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{b}$$

$2a+1-b=c$ として, 両辺の $n\to\infty$ の極限が一致するので, 区分求積法により

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n^{c}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\right)^{2}\right\}=\int_0^1 x^b dx=\frac{1}{b+1}$$

となるため, 左辺が 0 でない値に収束することが必要となる。上の式の両辺を, 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{a}\right)^{2}=\frac{1}{(a+1)^2}$$

で割ったとき,

$$\lim_{n\to\infty}n^{c}=\frac{(a+1)^2}{b+1}\neq 0,\infty$$

となるから, $c>0$ では左辺が ∞ に, $c<0$ では左辺が 0 になるから不適。よって $c=0$ であって,

$$1=\frac{(a+1)^2}{b+1}$$

となる。$c=0$ はすなわち $b+1=2(a+1)$ ということになるので

$$1=\frac{(a+1)^2}{2(a+1)}=\frac{a+1}{2}$$

より $a=1$ となる。このとき $b=3$ で, 実際, すべての n に対して

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}k^1\right)^2$$

なのでよい。従って $(a,b)=(1,3)$ に限る。

Q.034 ★3

体積が一定の直円錐のうち、表面積が最小であるものの底面の半径と高さの比を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.035 ★8 学コン 2017-10-5

n を自然数, a,b を実数の定数として, 関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=(ax+b)\sin x+(bx+a)\cos x$$

$$f_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}f_x(x)$$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_k(x)\,dx$ とするとき, S_{4m} と S_{4m+1} (m は自然数) を求めよ。

計算により次が成り立つ。

$$f_1(x)+f_3(x)=2a\cos x-2b\sin x$$

$$f_4(x)+f_2(x)=-(2a\sin x+2b\cos x)$$

足して, $2(a-b)=p, 2(a+b)=q$ とすると

$$\sum_{k=1}^{4}f_k(x)=p\cos x-q\sin x$$

両辺を $4n$ 回微分すれば

$$\sum_{k=1}^{4}f_{4n+k}(x)=p\cos x-q\sin x$$

有限和であるため, $S_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{n}f_k(x)\,dx$ としてよく,

$$\sum_{k=1}^{4m}f_k(x)=\sum_{k=1}^{m}(p\cos x-q\sin x)=m(p\cos x-q\sin x)$$

なので, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$ から

$$S_{4m}=mp-mq=-4mb$$

$S_{4m+1}=S_{4m}+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{4m+1}(x)dx$ であるが,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_{4m+1}(x)dx=[f_{4m}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=f_{4m}\left(\frac{\pi}{2}\right)-f_{4m}(0)$$

となる。そこで, $a_n=f_{4n}\left(\frac{\pi}{2}\right)-f_{4n}(0)$ とする。a_n についての漸化式をこれから導く。ここで,

$$f_0(x)=(bx+2a)\sin x-ax\cos x$$

とおくと, $f_1(x)=\dfrac{d}{dx}f_0(x)$ となっている。また, 計算により

$$f_4(x)=f_0(x)-4a\sin x-4b\cos x$$

であって, この式から微分を数回施し

$$f_{4n+4}(x)=f_{4n}(x)-4a\sin x-4b\cos x\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

を導くことができる。この式に $x=0,\dfrac{\pi}{2}$ を代入したとき

$$f_{4n+4}\left(\frac{\pi}{2}\right)=f_{4n+4}\left(\frac{\pi}{2}\right)-4a$$

$$f_{4n+4}(0)=f_{4n}(0)-4b$$

を得るから, 上式から下式を引いて

$$a_{n+1}=a_n+4(b-a)$$

を得る。これは等差数列の漸化式で, $a_m=a_0+4m(b-a)$ になる。

$$a_0=f_0\left(\frac{\pi}{2}\right)-f_0(0)=2a+\frac{\pi}{2}b$$

なので, $m=0,1,\cdots$ において

$$a_m=(2-4m)a+\left(4m+\frac{\pi}{2}\right)b$$

以上から,

$$S_{4m+1}=-4mb+a_m=(2-4m)a+\frac{\pi}{2}b$$

Q.036 ★6 九州大 理系 2018

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行い、n 回目までに取り出したカードの数字のすべての積を X とする。X を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ求めよ。

n 回目時点で X を 4 で割った余りが 0,2 である確率を a_n,b_n とおき, X が奇数である確率を s_n とする. $a_1=b_1=\dfrac{1}{4}$, $s_1=\dfrac{1}{2}$, $a_n+b_n+s_n=1$ が成り立つ. X が奇数であるのは, 常に奇数を出し続けるときなので $s_n=\dfrac{1}{2^n}$ である.

$X\equiv 2 \pmod 4$ なのは n 回目までに 2 を一回出しそれ以外奇数を取り出す確率なので $b_n=\dfrac{2^{n-1}\cdot 1\cdot {}_n\mathrm{C}_1}{4^n}=\dfrac{n}{2^{n+1}}$ である. よって,

$$P(X\equiv 0)=a_n=1-b_n-s_n=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$$

$$P(X\equiv 2)=b_n=\frac{n}{2^{n+1}}$$

$c_n=P(X\equiv 1)$, $d_n=P(X\equiv 3)$ とおく. $c_1=d_1=dfrac14$, $c_n+d_n=s_n$ である. $X\equiv 1$ であるような取り出し方 W は, 最後に取り出した奇数を別の奇数に入れ替えた取り出し方 W' (W で最後が 1 なら W' で最後を 3 にする) とペアにすれば, $X\equiv 3$ であるような取り出し方と同じ個数だけあるといえるので $c_n=d_n=\dfrac{1}{2}s_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}$

$\boxed{c_n,d_n\text{ を求める別方針}}$ $n+1$ 回目で $X\equiv 1$ であるのは, n 回目で

$X \equiv \pm 1$ から ± 1 を取り出すときである (複合同順). よって

$$c_{n+1} = \frac{c_n + d_n}{4}$$

様に考えると $d_{n+1} = \dfrac{c_n + d_n}{4}$ である．よって帰納的に $c_n = d_n$ なので, $c_n = d_n = \dfrac{1}{2}s_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Q.037

(1) 任意の実数 x に対して $\cos(2x) + cx^2 \geq 1$ が成り立つような定数 c の値の範囲を求めよ。 ★3 (北海道大 2001)

(2) $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。$\pi > 3.1$, $\sqrt{3} > 1.7$ は用いてよい。 ★3 (京大理系 2013)

(1)

関数 $f(x)$ を、$f(x) = \cos(2x) + cx^2$ とする。これは偶関数であるから、$x \geq 0$ を考えればよい。これを微分すると、$f'(x) = -2\sin(2x) + 2cx$, $f''(x) = -4\cos(2x) + 2c$ である。

$c < 0$ の場合、$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = c\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2 < 0$ となり題意を満たさない。

$0 \leq c < 2$ のとき、$f''(0) = -4 + 2c < 0$ となる。$\cos(2\alpha) = \dfrac{c}{2}$ を満たす α を用いて、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f''(x) < 0$ であり、$f'(x)$ は単調減少する。$f'(0) = 0$ であるから、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f'(x) < 0$ となり、$f(x)$ は単調減少する。$f(0) = 1$ であるから、$0 < x < \alpha$ の範囲で $f(x) < 1$ となる。よって題意を満たさない。

$c \geq 2$ のとき、常に $f''(x) \geq 0$ であるから、$f'(x)$ は常に単調増加する。$f'(0) = 0$ であるから、常に $f'(x) \geq 0$ となって、$f(x)$ は常に単調増加することがわかる。$f(0) = 1$ であったから、この場合には題意が満たされる。

以上によって、求める c の範囲は、$c \geq 2$。

(2)

関数 g を、$g(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ で定める。関数 g は偶関数であるから、$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えれば十分。ここで、$g'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$, $g''(x) = -\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

$g''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0$ であることを踏まえて増減表を書くと、

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
g''	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$-$	0	$+$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
g'	0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$	$\nearrow$	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$

となる。ここで、$\sqrt{3}\pi > 1.7 \times 3.1 = 5.27$ だから、$-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{12} < 0$ [*11], $-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4} > 0$ がわかる。中間値の定理より、開区間 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内の α であって、$g(\alpha) = 0$ を満たすものが存在する。これを用いて改めて増減表を書くと、

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
g'	0	$-$	0	$+$	$-1 + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{4}$
g	1	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$

となる。$\sqrt{3}\pi^2 > 1.7 \times 3.1^2 = 16.337$ だから、$\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16} > 1$ がわかる。

したがって、求める最大値は $\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{16}$ $(x = \pm\dfrac{\pi}{2}$ のとき)。

*11 増減表から明らかではある。

Q.038　極限 25 題 +Extra

$x, \theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ とする。以下の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{\theta \to \infty} \frac{\theta}{\tan \theta^\circ}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+2}\right)^x$

(3) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\sin \frac{1}{n}\pi + \sin \frac{2}{n}\pi + \cdots + \sin \frac{n-1}{n}\pi\right)$

(4) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \cdots + \frac{1}{4n^2-1}\right)$

(5) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^2 - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor} - n\right)$

(6) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$

(7) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ (ただし、F_n は n 番目のフィボナッチ数)

(8) $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{x^{\sin x} - 1}{x - \pi}$

(9) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{5}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$

(10) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor \sqrt{2n^2 - k^2} \rfloor}{n^2}$

(11) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x} |\sin x|\, dx$

(12) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_0^1 x^2 |\sin n\pi x|\, dx$

(13) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} (1 + a^n)^{\frac{1}{n}}$ (ただし、$a > 0$)

(14) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(r + 2r^2 + \cdots + nr^n\right)$ (ただし、$r \in \mathbb{R}$)

(15) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{1+x}\, dx$

(16) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{{}_{3n}C_n}{{}_{2n}C_n}\right)^{\frac{1}{n}}$

(17) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!}\int_1^e (\log x)^n\, dx$

(18) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

(19) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \cos^{n^2}\left(\frac{1}{n}\right)$

(20) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^\alpha}{\lceil \beta x - 7 \rceil} - \frac{x^\alpha}{\lceil \gamma x + 3 \rceil}\right]$ (ただし、$\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta, \gamma > 0$)

(21) $\displaystyle \lim_{\theta \to +0} \log_\theta (\sin \theta)$

(22) $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\theta^2}\left(1 + \cos \frac{\pi}{2^\theta}\right)$

(23) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3 - \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$

(24) $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \log_{n^n} n!$

(25) $\displaystyle \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta^2}}$

Ex1 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}}$

Ex2 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right)$ (ただし、p_n は n 番目の素数)

Ex3 $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$

Ex4 $\displaystyle \liminf_{n \to \infty} \frac{\phi(n)\sigma(n)}{n^2}$ (ただし、$\phi(n)$ は n と互いに素である自然数の個数 (Euler's totient function)、$\sigma(n)$ は n の正の約数の

総和)

いろんな典型を寄せ集めたつもりである．他にも面白いものがあったら教えてほしい．

(1)

[学校のテストとかでありそうなやつ．変換さえ分かっていれば三角関数の極限で分かる] $180^\circ = \pi$ の比率から考えて $\theta^\circ = \dfrac{\pi}{180}\theta$．よって $\theta = \dfrac{180}{\pi}\theta^\circ$ なので

$$\frac{\theta}{\tan\theta^\circ} = \frac{180}{\pi}\frac{\theta^\circ}{\tan\theta^\circ} \to \frac{180}{\pi}$$

(2)

[e の定義を用いる典型] $x/2 = t$ とおくと

$$\left(\frac{x}{x+2}\right)^x = (1+\frac{1}{t})^{2t} \to e^2$$

(3)

[区分求積法]

$$\int_0^1 \sin\pi x\,dx = \frac{1}{\pi}\{(-\cos\pi)-(-\cos 0)\} = \frac{2}{\pi}$$

(4)

[部分分数分解] $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right\}$ より和がバタバタと消える．その結果

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2\cdot 1-1} - \frac{1}{2n+1}\right\} \to \frac{1}{2}$$

(5)

(6)

[調和級数] これが無限に発散するのは有名な話．次のように積分評価すれば分かる:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geqq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n+1) \to \infty$$

(7)

(8)

[微分係数] $f(x) = x^{\sin x}$ とおくと $f(\pi) = \pi^0 = 1$ なのでこれは $f'(\pi)$ に等しく，$f'(x) = (e^{\log x \sin x})' = (\log x \sin x)' e^{(\log x)\sin x} = (\dfrac{\sin x}{x} + (\log x)\cos x)x^{\sin x}$ だから

$$f'(\pi) = -\log\pi$$

(18)

[メルカトル級数] 東工大で確か出てた． n が偶数の場合を考える; $n = 2m$. 次の変形はとても有名.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{2m}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=m+1}^{2m}\frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+m} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{m}{k+m} \\
&= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(k/m)+1} \\
&\to \int_0^1 \frac{dx}{x+1} = \log 2
\end{aligned}$$

奇数の場合は一番最後の項だけ仲間外れにして偶数の場合と同じ計算すれば同じ値に収束する.

Q.039 ★3 名大 (2001)

e を自然対数の底とし、定数 p, q は $e \leq p < q$ を満たす。このとき以下の不等式を証明せよ。

$$\log_e(\log_e q) - \log_e(\log_e p) < \frac{q-p}{e}$$

Proof. $f(x) = \log\log x$ とする。(底は e)
$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p} < \dfrac{1}{e}$ を示せばよい。f は微分可能なので, 平均値の定理から $p < c < q$ なる実数 c であって, $f'(c) = \dfrac{f(q)-f(p)}{q-p}$ なるものが存在する。ところで,$x \geqq e$ において $f'(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ であり, 分母は単調に増加するから $f'(x)$ は単調減少する。ゆえに $f'(c) < f'(p) < f'(e) = \dfrac{1}{e}$ となるので不等式は示された。 □

Q.040 ★8 学コン 2018-6-6

一辺の長さが $\dfrac{1}{n}$ の正 $2n$ 角形 $\mathrm{P_0P_1 \ldots P_{2n-1}}$ がある。辺 $\mathrm{P_0P_1}$ 上に点 S、辺 $\mathrm{P_0P_{2n-1}}$ 上に点 T を、$\mathrm{P_0S = P_0T}$ となるようにとり、線分 SP_n 上に点 U を $\angle\mathrm{SUT} = \angle\mathrm{P_1P_nP_{2n-1}}$ となるようにとる。ただし、$\mathrm{S = P_0}$ のときは $\mathrm{U = P_0}$ とする。S を $\mathrm{P_0}$ から $\mathrm{P_1}$ まで動かすとき、U の軌跡の長さを $U(n)$ とする。
(1) $U(3)$ を求めよ。
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} U(n)$ を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.041 ★6 東工大

実数 x, y が、$x^2+y^2 \leq 1$ を満たす。m を負でない実数とするとき、$m(x+y)+xy$ の最小値、最大値を求めよ。

$x+y = s$, $xy = t$ とおく。このとき解と係数の関係から x, y は 2 次方程式 $z^2 - sz + t = 0$ の実数解であるから、この判別式は非負であるので、$s^2 - 4t \geq 0$。続いて $x^2+y^2 = s^2-2t \leq 1$。
これらによって、$\dfrac{s^2}{2} - \dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{s^2}{4}$ となるから、

$$\frac{s^2}{2} - \frac{1}{2} \leq \frac{s^2}{4} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$$

が必要条件。この範囲で s を固定したときに t の動く範囲は $\dfrac{s^2}{2} - \dfrac{1}{2} \leq t \leq \dfrac{s^2}{4}$ となる。このとき、

$$\frac{s^2}{2} + ms - \frac{1}{2} \leq ms + t \leq \frac{s^2}{4} + ms$$

となる。
求める最大値は、関数 $f(s) = \dfrac{s^2}{4} + ms$ の $-\sqrt{2} \leq s \leq \sqrt{2}$ における最大値である。$f(s) = \dfrac{1}{4}(s^2+2m)^2 - m^2$ となることと $m \geq 0$ である

ことから、2 次関数 $f(s)$ のグラフを考えれば最大値は $s=\sqrt{2}$ のとき、$f(\sqrt{2})=m\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ と求まる。

求める最小値は、関数 $g(s)=\dfrac{s^2}{2}+ms-\dfrac{1}{2}$ の $-\sqrt{2}\leq s\leq\sqrt{2}$ における最小値である。$g(s)=\dfrac{1}{2}(s+m)^2-\dfrac{m^2+1}{2}$ となることと $m\geq 0$ であることから、2 次関数 $g(s)$ のグラフを考えれば最小値は、$0\geq m\geq\sqrt{2}$ の場合には $s=-m$ のときに $g(-m)=-\dfrac{m^2+1}{2}$、$m>\sqrt{2}$ の場合には $s=-\sqrt{2}$ のときに $g(-\sqrt{2})=-m\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}$ と求まる。

以上まとめて、

$$\text{最大値}=m\sqrt{2}+\frac{1}{2}$$

$$\text{最小値}=\begin{cases}-\dfrac{m^2+1}{2} & (0\leq m\leq\sqrt{2})\\ -m\sqrt{2}+\dfrac{1}{2} & (m>\sqrt{2})\end{cases}$$

*12

Q.042 ★6 東工大 (1969)

実数 a,b,c,x,y,z,p が次の 4 条件を満たしている: $a^2-b^2-c^2>0$, $ax+by+cz=p$, $ap<0$, $x>0$。このとき、$x^2-y^2-z^2$ の符号を調べよ。

$p-ax=by+cz$ であって、この両辺 2 乗する。左辺について $a^2>b^2+c^2$ から、

$$(p-ax)^2=p^2-2apx+a^2x^2>p^2-2apx+(b^2+c^2)x^2$$

一方右辺は、コーシー・シュワルツの不等式を用いて

$$(by+cz)^2\leq(b^2+c^2)(y^2+z^2)$$

となる。$ap<0$, $x>0$ より $-2apx>0$ であるから、

$$p^2-2apx+(b^2+c^2)x^2<(b^2+c^2)(y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow\quad 0<p^2-2apx<-(b^2+c^2)(x^2-y^2-z^2)$$

を得る。明らかに $b^2+c^2>0$ だから、$x^2-y^2-z^2<0$ である。

Q.043 ★8◎ 東大

座標平面において、媒介変数 t $(0\leq t<2\pi)$ を用いて、$x=\cos 2t$, $y=t\sin t$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。

まず、x,y の増減を考える。

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t$$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ となるときの t の値について考える。明らかに $t\neq\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ なので、求める t は $t=-\tan t$ の解である。$y=x$ と $y=-\tan x$ のグラフの交点を考えることにより、$\dfrac{\pi}{2}$ から π の間と $\dfrac{3\pi}{2}$ から 2π の間にそれぞれ 1 つずつ解が存在することがわかる。これらをそれぞれ α, β とおく。これを用いて増減は以下のようにまとめられる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
(x,y)	$\cdot$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$

t	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$\frac{dy}{dt}$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
(x,y)	$\downarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\uparrow$

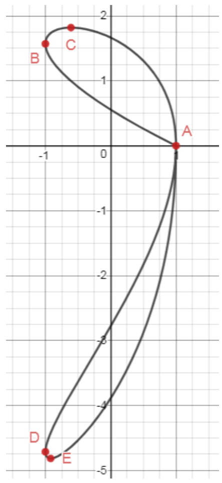
これを踏まえてグラフの概形を書く。点 $\mathrm{A}(1,0)$ $[t=0]$ からはじめ、点 $\mathrm{B}\left(-1,\dfrac{\pi}{2}\right)$ $\left(t=\dfrac{\pi}{2}\right)$、点 $\mathrm{C}(\cos 2\alpha,\alpha\sin\alpha)$ $(t=\alpha)$、点 $\mathrm{A}(1,0)$ $(t=\pi)$、点 $\mathrm{D}\left(-1,-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $\left(t=\dfrac{3\pi}{2}\right)$、点 $\mathrm{E}(\cos 2\beta,\beta\sin\beta)$ $(t=\beta)$、点 $\mathrm{A}(1,0)$ $(t=2\pi)$ を順に通る。加えて $0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$ のとき、

$$(\pi-t)\sin\pi-t-t\sin t=(\pi-2t)\sin t\geq 0$$

であるから経路 BCA は経路 AB よりも常に上にあり端点以外で交わらない。また、$\pi\leq t\leq\dfrac{3}{2}\pi$ のときは、$t=\pi+\alpha$ とおけば $0\leq\alpha\leq\dfrac{\pi}{2}$ で、

$$(2\pi-\alpha)\sin(2\pi-\alpha)-(\pi+\alpha)\sin(\pi+\alpha)$$
$$=-(\pi-2\alpha)\sin\alpha\geq 0$$

であるから経路 AD は経路 DEA よりも常に上にあり端点以外で交わらない。



このことから、グラフは右図のようになることがわかる。これによって囲まれる面積を求めるには、$y\geq 0$ と $y\leq 0$ の二つの領域に分けて考えて、

$$(y\geq 0):\quad \int_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}}y\,dx-\int_{\mathrm{B}\to\mathrm{A}}y\,dx$$

$$(y\leq 0):\quad \int_{\mathrm{D}\to\mathrm{A}}y\,dx-\int_{\mathrm{D}\to\mathrm{E}\to\mathrm{A}}y\,dx$$

とすればよい。このとき、

$$\int y\,dx=\int y(t)\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int t\sin t\cdot(-2\sin 2t)\,dt$$
$$=\int(-4t\sin^2 t\cos t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{4}{3}t\sin^3 t\right]-\int\left(-\frac{4}{3}\sin^3 t\right)\,dt$$
$$=\left[-\frac{4}{3}t\sin^3 t\right]-\left[\frac{4}{3}\cos t-\frac{4}{9}\cos^3 t\right]$$

と計算される。以上のことを用いて求める面積は、

$$\left(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}y\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}y\,dx\right)+\left(\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi}y\,dx-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}y\,dx\right)=\frac{32}{9}$$

Q.044 ★8 学コン 2017-7-6

$G=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Z}\}$ とする。G の元 x,y に対して、$x\sim y$ であるとは、$\dfrac{x-y}{5+2i}\in G$ であることと定める。

(1) $x,y\in G$ のとき、$x\sim y$ であることは、$x-y$ が 29 の倍数であるための必要十分条件であることを示せ。

(2) $x\in G$ のとき、$x\sim m$ を満たす整数 m が存在することを

---

*12 関数や条件の式が対称式なので、対称式で攻めるとよいというわけでした。なお、s,t の存在範囲を求めてからは線形計画法でもいけます。

示せ。
(3) $x \sim y$ かつ $z \sim w$ ならば、$xz \sim yw$ であることを示せ。
(4) n を正の整数とし、$\displaystyle\prod_{k=0}^{27}(n+k+i) \sim r_n$ かつ $0 \leq r_n \leq 28$ を満たす整数 r_n を求めよ。(28! を 29 で割った余りが 28 であることを用いてもよい。)

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

(3)

ここに解答を記述。

(4)

ここに解答を記述。

Q.045 ★7 横浜国立大 2009

(1) $x^2+y^2=41$ を満たす自然数 x, y の組を全て求めよ。
(2) $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$ を因数分解せよ。
(3) 任意の自然数 n に対して、$x^2+y^2=2009^n$ を満たす自然数の組 (x, y) が存在することを証明せよ。

(1)

x^2, y^2 は正である。$41-y^2 \leq 40$ より $1 \leq x^2 \leq 40$ を満たすことが必要。よって $x=1,2,3,4,5,6$ の中から調べれば十分。これらの中から探せば、

$$(x, y)=(4,5),\ (5,4)$$

(2)

計算によって、

$$\begin{aligned}&(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\=&(ac)2-2abcd+(bd)^2+(ad)^2+2abcd+(bc)^2\\=&a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\=&(a^2+b^2)(c^2+d^2)\end{aligned}$$

である[*13]。

(3)

$2009=41\times 49=(4^2+5^2)(0^2+7^2)$ に注意すると、(2) で $a=4$, $b=5$, $c=0$, $d=7$ として

$$(-35)^2+28^2=35^2+28^2=2009$$

を得る。よって $n=1$ の場合はよい。$n=k$ $(k \geq 1)$ において $a_k^2+b_k^2=2009^k$ となるような自然数 a_k, b_k が存在したと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}2009^{k+1}&=(35^2+28^2)(a_k^2+b_k^2)\\&=(35a_k-28b_k)^2+(35b_k+28a_k)^2\\&=(28a_k-35b_k)^2+(28b_k+35a_k)^2\end{aligned}$$

である。よって $35a_k-28b_k \neq 0$ であるなら、

$$a_{k+1}=|35a_k-28b_k|,\ b_{k+1}=35b_k+28a_k$$

とし、$35a_k-28b_k=0$ であるなら $28a_k-35b_k$ は 0 とはならないことがわかるので

$$a_k+1=|28a_k-35b_k|,\ b_{k+1}=28b_k+35a_k$$

とおくことによって $2009^{k+1}=a_{k*1}^2+b_{k+1}^2$ とすることができる。よって数学的帰納法により、全ての n で $a_n^2+b_n^2=2009^n$ となるように自然数 a_n, b_n を構成することができる。

Q.046 ★7◎ 駿台模試

x についての不等式 $(x-a)(x-a^2)<0$ を満たすような整数 x が 5 つだけ存在するような a の範囲を求めよ。

$a^2 \leq a$、すなわち $0 \leq a \leq 1$ の場合を考える。x が $(x-a)(x-a^2)<0$ を満たすことと、区間 (a^2, a) に属することは同値である。しかし a の範囲から、$(a^2, a) \subset (0,1)$ なので、5 つの整数を含めることはできない。よってこの場合は解なし。
$a^2<a$、すなわち $a<0$ または $a>1$ の場合を考えると、x は区間 (a, a^2) に属する。この区間に整数が 5 つ含まれればよい。つまりある整数 N が存在して

$N \leq a<N+1<N+2<N+3<N+4<N+5<a^2 \leq N+6$

であればよい。ここで、整数 N が $N \leq a<N+1$ を満たすことは $N=\lfloor x\rfloor$ であること、$N+5<a^2 \leq N+6$ を満たすことは $N+6=\lceil a^2\rceil$ であることと、それぞれ同じであるから、

$$\lfloor a\rfloor+6=\lceil a^2\rceil$$

を a が満たすことと、区間 (a, a^2) が整数を 5 つ含むことは同値である。
一般に、$\lfloor x\rfloor \leq x$, $\lceil x^2\rceil \geq x^2$ であるから、

$$a+6 \geq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad (a-3)(a+2) \leq 0$$

を満たす、すなわち $-2 \leq a \leq 3$ が必要条件となる。$\lfloor a\rfloor=k$ の値で場合わけを行う。
$k=-2$ のとき、$\lceil a^2\rceil=4$ となるから、

$$-2 \leq a<-1 \quad かつ \quad 3<a^3 \leq 4$$

すなわち、$-2 \leq a<-\sqrt{3}$ である。
$k=-1$ のとき、$\lceil a^2\rceil=5$ となるから、

$$-1 \leq a<0 \quad かつ \quad 4<a^3 \leq 5$$

この場合は解なし。
$k=0$ のとき、$\lceil a^2\rceil=6$ となるから、

$$0 \leq a<1 \quad かつ \quad 5<a^3 \leq 6$$

この場合は解なし。
$k=1$ のとき、$\lceil a^2\rceil=7$ となるから、

$$1 \leq a<2 \quad かつ \quad 6<a^3 \leq 7$$

この場合は解なし。
$k=2$ のとき、$\lceil a^2\rceil=8$ となるから、

$$2 \leq a<3 \quad かつ \quad 7<a^3 \leq 8$$

すなわち、$\sqrt{7} \leq a<2\sqrt{2}$ である。
$k=3$ のとき、$-2 \leq a \leq 3$ であったからこれを満たすのは $a=3$ である。これは $\lceil a^2\rceil=9$ となり $\lfloor a\rfloor+6=\lceil a^2\rceil$ を満たすのでよい。
以上より、

$$-2 \leq a<-\sqrt{3},\ \sqrt{7} \leq a>2\sqrt{2},\ a=3$$

Q.047 ★5 学習院大 (2011)

次の 3 つの条件を全て満たす三角形の三辺の長さを求めよ。
(a) 最大角と最小角の差は 90°
(b) 3 辺の長さを大きさの順に並べたものは等差数列をなす
(c) 3 辺の長さの和は 3

$\triangle$ABC において、$\mathrm{A} \leq \mathrm{B} \leq \mathrm{C}$ とすると、辺と角の大小関係から $a \leq b \leq c$ である。この三角形が与えられた条件を全て満たすとすると、

$$\mathrm{C}=\mathrm{A}+90^\circ \tag{1}$$

$$2b=a+c \tag{2}$$

$$a+b+c=3 \tag{3}$$

(2) と (3) から $b=1$ を得る。また、正弦定理から、

$$a:b:c=\sin\mathrm{A}:\sin\mathrm{B}:\sin\mathrm{C} \tag{4}$$

なので、(2) より、

$$2\sin\mathrm{B}=\sin\mathrm{A}+\sin\mathrm{C} \tag{5}$$

となる。(1) および $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=180^\circ$ から、$\mathrm{B}=90^\circ-2\mathrm{A}$ であるの

[*13] これは、整数 x, y を用いて x^2+y^2 の形で表されるような整数全体の集合は積について閉じていることを主張している。

で、(5) より

$$2\sin(90^\circ - 2\mathrm{A}) = \sin\mathrm{A} + \sin(90^\circ + mrA)$$
$$\Leftrightarrow \quad 2\cos 2\mathrm{A} = \sin\mathrm{A} + \cos\mathrm{A}$$

が成立する。これを変形して、

$$2(\cos\mathrm{A} + \sin\mathrm{A})(\cos\mathrm{A} - \sin\mathrm{A}) = \sin\mathrm{A} + \cos\mathrm{A}$$

$0^\circ < \mathrm{A} < 90^\circ$ なので $\sin\mathrm{A} + \cos\mathrm{A} \neq 0$ であるから、

$$2(\cos\mathrm{A} - \sin\mathrm{A}) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\mathrm{A} - \sin\mathrm{A} = \frac{1}{2} \tag{6}$$

である。両辺 2 乗して整理すると、

$$-\sin\mathrm{A}\cos\mathrm{A} = -\frac{3}{8} \tag{7}$$

となる。(6), (7) より、$\cos\mathrm{A}$ と $-\sin\mathrm{A}$ は二次方程式 $t^2 - \frac{1}{2}t - \frac{3}{8} = 0$ の解 $t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{4}$ である。$\sin\mathrm{A} > 0, \cos\mathrm{A} > 0$ なので、$\sin\mathrm{A} = \frac{\sqrt{7}-1}{4}$, $\cos\mathrm{A} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$ である。これより $\sin\mathrm{C} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}$, $\sin\mathrm{B} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ もわかる。したがって (4) より、

$$a = \frac{\sin\mathrm{A}}{\sin B} \cdot b = 1 - \frac{\sqrt{7}}{7}$$
$$c = \frac{\sin\mathrm{C}}{\sin B} \cdot b = 1 + \frac{\sqrt{7}}{7}$$

となり、求めるものが得られた。

Q.048 ★? 学コン 1996-6

a を実数をとする。$0 \leq x \leq \pi$ の範囲において、2 曲線 $y = \sin x$, $y = ax(\pi - x)$ の共有点は何個あるか。

$f(x) = \sin x - ax(\pi - x)$ (ただし $0 \leq x \leq \pi$) とし、$f(x) = 0$ の解の個数を求めればよい。

$$f'(x) = \cos x + 2ax - a\pi, \qquad f''(x) = -\sin x + 2a$$

である。また、$f(\pi - x) = f(x)$ なので、$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で考えればよい。なお、a の値にかかわらず、$f(0) = f(\pi) = 0$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ となることを注意しておく。

(i) $a \leq 0$ のとき、$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ では $\sin x > 0$ でありかつ $ax(\pi - x) \leq 0$ なので、この範囲では常に $f(x) < 0$ である。$f(0) = 0$ であるから、$0 \leq x \leq \pi$ の範囲での $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pi$ の 2 つ。

(ii) $0 < a \leq \frac{1}{\pi}$ のとき、$\sin t = 2a$ となる t が区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に存在する。$f'(0) = 1 - a\pi \geq 0$ を踏まえて、増減表は次のように書ける。

x	0	$\cdots$	t	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	0 or $+$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	$+$

よって $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = 0$ を満たすのは $x = 0$ のみである。したがって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pi$ の 2 つ。

(iii) $\frac{1}{\pi} < a \leq \frac{4}{\pi^2}$ のとき、$\sin t = 2a$ となる t が区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に存在する。$f'(0) = 1 - a\pi < 0$ および $f'(t) > f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ から、中間値の定理によって、区間 $(0, t)$ に $f'(s) = 0$ を満たす実数 s が存在する。さらに、$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - a\frac{\pi^2}{4} > 0$ を踏まえて、増減表は次のように書ける。

x	0	$\cdots$	s	$\cdots$	t	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+$

$f(s) < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ であるから、中間値の定理によって区間 $\left(s, \frac{\pi}{2}\right)$ に $f(u) = 0$ を満たす実数 u が存在する。よって $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = 0$ を満たすのは $x = 0, u$ の 2 つである。したがって、$0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $f(x) = 0$ の解は $x = 0, u, \pi - u, \pi$ の 4 つ。

(iv) $a = \frac{4}{\pi^2}$ のとき、$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ となる以外は (iii) と同様である。したがって、区間 $\left(s, \frac{\pi}{2}\right)$ において $f(x)$ は常に負である。すなわち、$0 \leq x \leq^{p} i$ における $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ の 3 つ。

(v) $\frac{4}{\pi^2} < a << \frac{1}{2}$ のとき、$\sin t = 2a$ となる t が区間 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に存在する。(iii, vi) と同様に、区間 $(0, t)$ に $f'(s) = 0$ となる実数 s が存在する。$f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ を踏まえて、増減表は次のように書ける。

x	0	$\cdots$	s	$\cdots$	t	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\searrow$	$-$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-$

よって $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = 0$ を満たすのは $x = 0$ のみである。したがって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pi$ の 2 つ。

(vi) $a \geq \frac{1}{2}$ のとき、$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ においては常に $f''(x) \geq 0$ であるから、$f'(x)$ は単調増加する。よって $f'(x) \leq f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ がわかるので、$f(x)$ は単調減少する。これにより $f(x) < f(0) = 0$ となるから、$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x) = 0$ を満たすのは $x = 0$ のみである。したがって $0 \leq x \leq \pi$ の範囲では $f(x) = 0$ の解は $x = 0, \pi$ の 2 つ。

以上まとめると、共有点の個数は、

$$\begin{cases} a \leq \frac{1}{\pi}, \frac{4}{\pi^2} \leq a & \text{のとき、2 つ} \\ a = \frac{4}{\pi^2} & \text{のとき、3 つ} \\ \frac{1}{\pi} < a < \frac{4}{\pi^2} & \text{のとき、4 つ} \end{cases}$$

Q.049 ★7◎ 京都大 理系 (2012)

さいころを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする。さらに、

$$Y_1 = X_1, \quad Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}} \quad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

によって $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ を定める。$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leq Y_n \leq 1 + \sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

(解答: 2021/11/25) $n \geqq 1$ とする. $Y_{n+1} = X_{n+1} + \frac{1}{Y_n}$ がその不等式を満たすために「X_{n+1} がどう出るべきか」 ということについて考えたい. それを考えるためには Y_n の大きさに関する場合分けが必要である. まず Y_n は帰納的に有理数であるため, 不等式の等号は実現することがない. そこで, $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < Y_n < 1 + \sqrt{3}$ を満たす確率を p_n, 事象を P_n $(n \geqq 1)$ とおく. $n + 1$ 回目でこの不等式が成り立っていたとしよう. すると, $\frac{1}{\sqrt{3} \pm 1} = \frac{\sqrt{3} \mp 1}{2}$ により

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} < Y_{n+1} < 1 + \sqrt{3}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} < \frac{1}{Y_{n+1}} < \sqrt{3} - 1$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{1}{Y_n} < X_{n+1} < \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{Y_n}$$

よって, 最後の不等号の両側の数がどうであるかによって X_n がどうあるべきかが以下のように分かる:

(i) $2 \leqq \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} > 1$; すなわち $Y_n > \sqrt{3}+1$ であるとき, 事象 P_{n+1} が起こるのは $X_n = 2$ のときである.

(ii) $2 \leqq \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} \leqq 1$; すなわち $Y_n > \sqrt{3}+1$ であるとき, 事象 P_{n+1} が起こるのは $X_{n+1} = 1, 2$ のときである.

(iii) $2 > \sqrt{3}+1-\dfrac{1}{Y_n}$ かつ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{Y_n} < 1$; すなわち $Y_n < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ であるとき, 事象 P_{n+1} が起こるのは $X_{n+1} = 1$ のときである.

そこで, $Y_n > \sqrt{3}+1$ を満たす確率を q_n, 事象を Q_n とおき, $Y_n < \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ を満たす確率を r_n, 事象を R_n とおく. このとき $P_n \cup Q_n \cup R_n$ は全事象であるから $p_n + q_n + r_n = 1$. そして, 上の考察により P_{n+1} であるのは「P_n と $X_{n+1} = 1, 2$ が起こるとき」と「Q_n と $X_{n+1} = 2$ が起こるとき」と「R_n と $X_{n+1} = 1$ が起こるとき」である. これらは排反であるから,

$$p_{n+1} = \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n + \frac{1}{6}r_n = \frac{2}{6}p_n + \frac{1}{6}(1-p_n) = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{6}$$

となる. $Y_1 = X_1$ が不等式を満たすのは $X_1 = 2$ のときであるから $p_1 = \dfrac{1}{6}$. よって漸化式を解く事で p_{n+1} $(n \geqq 1)$ が求まる:

$$\begin{aligned} p_{n+1} - \frac{1}{5} &= \frac{1}{6}\left(p_n - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{6^n}\left(p_1 - \frac{1}{5}\right) \\ &= -\frac{1}{5 \cdot 6^{n+1}} \\ \therefore \quad p_{n+1} &= \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^{n+1}}\right) \quad (n \geqq 1) \end{aligned}$$

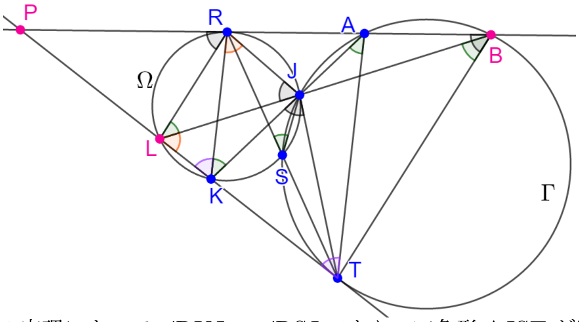
これは $n = 0$ でも正しいので

$$p_n = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$$

Q.050 ★? IMO (2017)

円 Ω 上に RS が直径とならない異なる 2 点 R, S があり、直線 RS 上の点 T は RS = TS を満たす。劣弧 RS 上に点 J をとる。Ω の R における接線と △JST の外接円 Γ の交点のうち、R に近い方を A とすると、直線 AJ は点 K で再び Ω と交わる。このとき、直線 KT は Γ に接することを示せ。

まず、円 Ω の点 R における接線と円 Γ の交点のうち、R から遠いほうを点 B とし、直線 BJ と円 Ω との交点のうち J でない方を点 L とする。



円周角の定理によって ∠RKJ = ∠RSJ であり、四角形 AJST が円 Γ に内接することから ∠RSJ = ∠JAT である。よって ∠RKJ = ∠JAT となって、錯角が等しいから線分 RK と線分 AT は平行である (⋯ ①)。
円周角の定理によって ∠RLJ = ∠RSJ であり、四角形 BJST が円 Γ に内接することから ∠RSJ = ∠JBT である。よって ∠RLJ = ∠JBT となって、錯角が等しいから線分 RL と線分 BT は平行である (⋯ ②)。
さて①によって同位角が等しいことから、∠RKL = ∠ATK。また ∠RKJ = ∠JAT であったから、

$$\angle \mathrm{JKL} = \angle \mathrm{RKL} + \angle \mathrm{RKJ} = \angle \mathrm{ATK} + \angle \mathrm{JAT}$$

が成り立つ。このことは、3 点 T, K, L が 1 直線上にあることを示している (⋯ ③)。直線 RAB と直線 TKL の交点を P とおく。
円周角の定理によって、∠JRK = ∠JLK (⋯ ④)。
接弦定理によって、∠RJL = ∠PRL。②によって同位角が等しいから、∠PRL = ∠ABT。四角形 ABTJ が円 Γ に内接することから、∠ABT = ∠KJT。よって ∠RJL = ∠KJT であるから、

$$\angle \mathrm{RJK} = \angle \mathrm{RJL} + \angle \mathrm{LJK} = \angle \mathrm{KJT} + \angle \mathrm{LJK} = \angle \mathrm{LJT}$$

が成り立つ。これと④によって △RJK ∼ △LJT が示される。したがって、∠RKJ = ∠LTJ となる (⋯ ⑤)。
最後に、∠RKJ = ∠JAT であったから、⑤と合わせれば、∠LTJ = ∠JAT となっている。円 Γ において、接弦定理の逆によって直線 KT は円 Γ の接線であることが示された。[*14]

Q.051

a, b, c を非負整数とする。
(1) 任意の自然数 n に対して、$an^2 + bn + c$ が素数であるならば、$a = b = 0$ かつ c は素数であることを示せ。 ★3
(2) 任意の自然数 n に対して、$a^n + b^{n-1}$ が素数ならば、$a = b = 1$ であることを示せ。 ★? (suiso_728660 様)

(1)

$c = 0$ とすると、$an^2 + bn$ は a, b が 0 でなければ常に n の倍数となるから不適であるし、$a = b = 0$ ならば $an^2 + bn + c$ は常に 0 となるのでやはり不適である。よって $c \neq 0$。
$n = c$ として、$ac^2 + bc + c = c(ac + b + 1)$ が素数だから、(i) c が素数かつ $ac + b + 1 = 1$、または、(ii) $c = 1$ かつ $ac + b + 1$ が素数、であることが必要。
(i) この場合には、$a = b = 0$ が必要であり、実際に $a = b = 0$ かつ c が素数の場合には、任意の自然数 n に対して $an^2 + bn + c$ が素数となるからよい。
(ii) この場合には $a + b + 1$ が素数であることが必要である。これを p とおく。$n = p + 1$ として、

$$a(p+1)^2 + b(p+1) + 1 = ap^2 + 2ap + bp + (a+b+1) = p\,[ap + 2a + b + 1]$$

が素数であることが必要である。よって $ap + 2a + b = 0$ でなければならない。これを満たすのは $a = b = 0$ のみであるが、$a + b + 1$ が素数であることと矛盾する。よってこの場合は不適である。
以上より、$a = b = 0$ かつ c が素数であることが示された。

(2)

$n = 1$ として、$a + 1$ が素数だから、$a \geq 1$ であることが必要。
$n = 2$ として、$a^2 + b$ が素数である。これを p とおく。
$n = p + 1$ として、$a^{p+1} + b^p$ は素数である。これを q とおく。a, b は p と互いに素であるから、Fermat の小定理により

$$a^{p+1} + b^p \equiv a^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

となるので、q は p で割れる素数だから $q = p$ でなければならない。すなわち、

$$a^{p+1} + b^p = a^2 + b$$

を満たさなければならない。$a \geq 1$, $b \geq 0$ により

$$0 \leq a^{p+1} - a^2 = b - b^p \leq 0$$

だから $a^{p+1} = a^2$ かつ $b = b^p$ である。よって a, b ともに 0 か 1 に限られる。
$a \geq 1$ であったから、$a = 1$ である。$b = 0$ とすると、$n = 2$ のとき $p = 1$ となって素数で無いから不適。よって $b = 1$ に限られる。
$a = b = 1$ のとき、$a^n + b^{n-1} = 2$ は実際に全ての n で素数となるからよい。よって $a = b = 1$ であることが示された。

Q.052 ★? 相反方程式

(1) $x + \dfrac{1}{x} = t$ とする。$x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ を t で表せ。
(2) 5 次方程式 $x^5 - 1 = 0$ の解を全て求めよ。なお、解答に円周率や三角関数を一切用いてはならない。

[*14] なお、ここまでの議論で RS = TS の条件を使っていないように見えるが、これが満たされていないと題意の図は構成されない。本証明の中でどのように暗に含まれているかは実は未解決。また、点 R における円 Ω の接線が円 Γ にも接する場合には、直線 KT は円 Γ だけでなく円 Ω にも接する。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.053 ★6 早稲田 商 2019

各項が整数である数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たしている。
(i) $0 < a_n < a_{n+1}$
(ii) 全ての正の整数 n に対し、$a_n - n^2$ は 5 の倍数
(iii) $a_{2019} = 6056$
次の設問に答えよ。
(1) a_4 を 5 で割った余りを求めよ。
(2) $a_n = 2021$ となる正の整数 n を求めよ。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.054 ★4 自作 DMO2nd 4-1

不等式 $1 \leq \log_{x^2+y^2}(\sqrt{3}x + y)$ で表される領域を xy 平面に図示せよ。

底の条件により、$x^2 + y^2 > 0,\ x^2 + y^2 \neq 1$ (⋯ ①)
真数条件により、$\sqrt{3}x + y > 0$ (⋯ ②)
(i) $x^2 + y^2 > 1$ のとき、

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}x + y$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \quad (\cdots ③)$$

(ii) $0 < x^2 + y^2 < 1$ のとき、

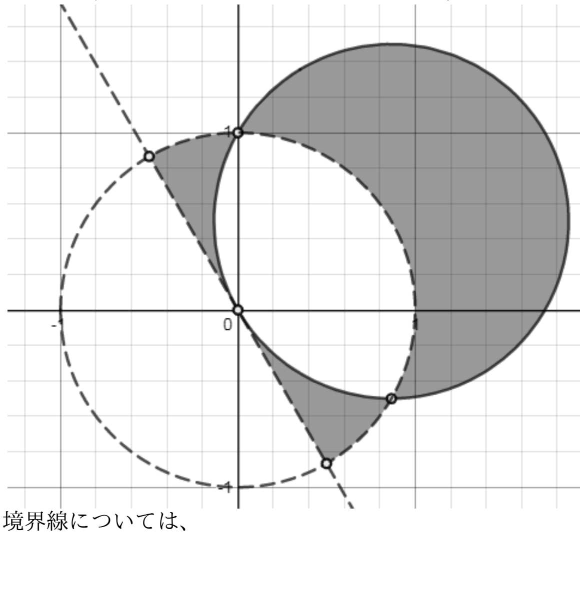
$$(\text{与式}) \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq \sqrt{3}x + y$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 1 \quad (\cdots ④)$$

よって、与式の表す領域は、

$$\begin{cases} ② \text{ かつ } x^2 + y^2 > 1 \text{ かつ } ③ & \text{(i)} \\ ② \text{ かつ } 0 < x^2 + y^2 < 1 \text{ かつ } ④ & \text{(ii)} \end{cases}$$

と求まったので、これを図示すると次のようになる。



なお、境界線については、

- 直線 $y = -\sqrt{3}x$ 上の点は全て含めない。
- 円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点は全て含めない。
- 円 $\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 1$ 上の点は、上記 2 つにかからない範囲において含める。

Q.055 ★6 学コン 2009/11/02

x, y 座標がともに有理数の点を '有理点' とする。
(1) 点 (a, b) を直線 $y = mx$ に関して対称移動した点の座標を求めよ。
(2) 原点を中心とする円 C 上に有理点が 1 つでもあれば、C 上に有理点が無数にあることを示せ。

(1)

移動した先の点の座標を (s, t) とおく。移動前後の点を結んだ線分は直線 $y = mx$ に直交し、かつこれら 2 点の中点は直線 $y = mx$ 上にあるから、

$$\begin{cases} \dfrac{t - b}{s - a} = -\dfrac{1}{m} \\ \dfrac{t + b}{2} = m\dfrac{s + a}{2} \end{cases}$$

これらを s, t について解けば求める点の座標を得る。

$$(s, t) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}a + \frac{2m}{1 + m^2}b,\ \frac{2m}{1 + m^2}a - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}b\right)$$

(2)

原点 O$(0, 0)$ と、有理点 A(a, b) をとる。原点を中心とし、点 A を通る円を C とする。有理数 m によって直線 $y = mx$ をおき、有理点 A をこの直線に関して対称移動した点を S(s, t) とおく。(1) の結果によって、

$$(s, t) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}a + \frac{2m}{1 + m^2}b,\ \frac{2m}{1 + m^2}a - \frac{1 - m^2}{1 + m^2}b\right)$$

であるが、a, b, m がすべて有理数であるから、s, t はともに有理数となる。したがって点 S は有理点である。ここで、

$$s^2 + t^2 = \left[\left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1 + m^2}\right)^2\right](a^2 + b^2) = a^2 + b^2$$

であるから、OA = OS が成り立つ。つまり、点 S は円 C 上にある。有理数 m は任意にとることができるから、円 C 上に点 A と異なる有理点を無数に作ることができる。よって題意は示された。

Q.056

(1) $3 < \pi < 4$ を示せ。★1
(2) $2 < e < 3$ を示せ。 ★3
(3) 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。 ★3 (東大)

(1)

単位円 (周長は 2π) と、それに外接する正方形 (周長は 8) を比較することで $2\pi < 8$ が従う。また内接する正六角形 (周長は 6) を比較することで $6 < 2\pi$ が従う。よって、$3 < \pi < 4$ が成り立つ。[*15]

(2)

e の定義は $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ である[*16]。以降 n は十分大きい自然数と

[*15] 本当は周長が 内接正六角形 < 円 < 外接正方形 であることは調べなければならないが、見るからに明らかであり、高校数学ではこの方法で十分であると思われる。

[*16] $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ という事実はあるけれども、高校数学の範囲で認めてよいか怪しい部分があると思われる。定義に立ち返るのが安全である。

する。まず二項定理によって

$$1+\frac{{}_n\mathrm{C}_1}{n}=2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

が成り立つので $e>2$ である。次に展開した際に現れる $a_k=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}$ を上から評価する。$n^k \geq n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ であることに注意すれば、$n^k(n-k)! \geq n!$ なので、

$$a_k=\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}=\frac{n!}{k!(n-k)!n^k} \leq \frac{n!}{k!n!}=\frac{1}{k!}$$

が従う。なお $k>1$ なら等号は成り立たない。よって、

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

となる。最期に $2^{k-1} \leq k!$ が $k \geq 1$ で常に成り立つから、

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}<1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=1+2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)<3$$

がわかる。よって $e<3$ が示された。

(3)

単位円に内接する正 12 角形を考える。円の中心を点 O、隣り合う 2 頂点を A, B とすると、これは頂角が 30° の二等辺三角形となり、OA = OB = 1。A から OB に垂線を下ろし、その足を H とする。$\angle\mathrm{AOH}=30^\circ$ だから、$\mathrm{OH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \mathrm{AH}=\dfrac{1}{2}, \mathrm{BH}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。直角三角形 ABH について三平方の定理を用いて、

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

AB の 12 倍が正 12 角形の周長であり、円周はこれより長いから、

$$12\sqrt{2-\sqrt{3}}<2\pi \quad\Leftrightarrow\quad 6\sqrt{2-\sqrt{3}}<\pi$$

が成り立つ。よって、$6\sqrt{2-\sqrt{3}}$ が 3.05 よりも大きいことを示せばよい。双方とも正であるから、これらの大小は 2 乗した値、$36(2-\sqrt{3})$ と $3.05^2=9.3025$ との大小に一致する。$1.74^2=3.0276$ より、$\sqrt{3}<1.74$ である。よって、

$$36(2-\sqrt{3})>36(2-1.74)=9.36>9.3025=3.05^2$$

が成り立つ。よって $6\sqrt{2-\sqrt{3}}>3.05$ が従う。
以上により、$\pi>3.05$ が示された。

Q.057 ★4 京大 (2006)

> $Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが、$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つことを示せ。

$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$、余りを $R(x)$ とおくと、$R(x)$ は高々 1 次式であって、

$$P(x)=A(x)Q(x)+R(x)$$

と書ける。これを用いて、

$$\{P(x)\}^2=\{A(x)\}^2\{Q(x)\}^2+2A(x)Q(x)R(x)+\{R(x)\}^2$$

となるから、$\{P(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れることは、$\{R(x)\}^2$ が $Q(x)$ で割り切れることに等しい。
$R(x)$ が 0 次式とする[17]と、$\{R(x)\}^2$ も 0 次式だから $Q(x)$ で割り切れず不適。よって $R(x)$ は 1 次式。これはすなわち $Q(x)$ は 1 次式 $R(x)$ の二乗に因数分解されることを意味するから、2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解を持つ。

Q.058 ★10 MathOlympian

> p を 3 より大きい素数、k を $\dfrac{2}{3}p$ 以下の最大の整数とするとき、
> $${}_p\mathrm{C}_1+{}_p\mathrm{C}_2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_k$$
> は p^2 の倍数であることを示せ。

[17] 0 次式は定義上 $R=0$ を含まない。一方で $P(x)$ は $Q(x)$ で割り切れないから $R=0$ は除かれるべきである。

$$\sum_{1\leq i\leq k}{}_p\mathrm{C}_i=p\underline{\sum_{1\leq i\leq k}\frac{(p-1)!}{(p-i)!i!}}$$

であるから、波線部が p で割り切れることを言えばよいが、p と $(p-1)!$ は互いに素であるから、$\displaystyle\sum_{1\leq i\leq k}\frac{\left[(p-1)!\right]^2}{(p-i)!i!}$ が p で割り切れることを示せばよい。

$$\begin{aligned}
\frac{\left[(p-1)!\right]}{(p-i)!i!}&=\frac{(p-1)!}{(p-i)!}\frac{(p-1)!}{i!}\\
&=(p-1)(p-2)\dots(p-i+1)\times(p-1)(p-2)\dots(i+1)\\
&\equiv(-1)(-2)\dots(-i+1)\times(p-1)(p-2)\dots(i+1) \pmod p\\
&\equiv\frac{(p-1)!}{i}(-1)^{i-1} \pmod p
\end{aligned}$$

これによって

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i\leq k}\frac{\left[(p-1)!\right]^2}{(p-i)!i!}&\equiv\frac{(p-1)!}{i}(-1)^{i-1}\\
&=\frac{(p-1)!}{1}-\frac{(p-1)!}{2}+\frac{(p-1)!}{3}-\cdots+\frac{(p-1)!}{k}(-1)^{k-1}\\
&=\sum_{1\leq i\leq k}\frac{(p-1)!}{i}-2\sum_{1\leq i\leq \frac{k}{2}}\frac{(p-1)!}{2i}\\
&=\sum_{\frac{1}{3}p<i\leq\frac{2}{3}p}\frac{(p-1)!}{i}
\end{aligned}$$

p は 3 より大きい素数であるので、$\dfrac{2}{3}p$ も $\dfrac{1}{2}p$ も整数でないから、

$$\begin{aligned}
\sum_{\frac{1}{3}p<i\leq\frac{2}{3}p}\frac{(p-1)!}{i}&=\sum_{\frac{p}{3}<i<\frac{p}{2}}\left(\frac{(p-1)!}{i}+\frac{(p-1)!}{p-i}\right)\\
&=\sum_{\frac{p}{3}<i<\frac{p}{2}}\frac{p!}{i(p-i)}
\end{aligned}$$

となって、これは p の倍数である。したがって題意は示された。[18]

Q.059

> 次の式の値を計算せよ。
>
> (1) $\displaystyle\int_0^1\left\lfloor\sqrt{\frac{1}{x}+1}\right\rfloor\ \mathrm{dx}$
>
> (2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{1-2\{x\}}{2x}\ \mathrm{dx}$
>
> (1) ★4 Length 様, (2) ★? FromDMRK 様 (Stirling の公式を利用して)

(1)

$0<x\leq 1$ より、$\left\lfloor\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}\right\rfloor \geq \lfloor\sqrt{2}\rfloor=1$。正の整数 n に対して、$n\leq\sqrt{\dfrac{1}{x}+1}<n+1$ となる範囲を考える。二乗して、

$$n^2\leq\frac{1}{x}+1<n^2+2n+1 \quad\Leftrightarrow\quad n^2-1\leq\frac{1}{x}<n^2+2n$$

$n=1$ のとき、$0\leq\dfrac{1}{x}<3$ より、$0<x\leq 1$ とあわせて、$\dfrac{1}{3}<x\leq 1$。

[18] 後半はメルカトル級数の収束値を区分求積法で求める方法に似ています。

$n \geq 2$ のとき、$\dfrac{1}{n^2-1} \geq x > \dfrac{1}{n^2+2n} = \dfrac{1}{(n+1)^2-1}$。
ここで、$E_1 = 1,\ E_n = \dfrac{1}{n^2-1}\ (n = 2, 3, \dots)$ とおけば、$E_{n+1} < x \leq E_n$ のとき、$n \leq \sqrt{\dfrac{1}{x}+1} < n+1$ であるから、$\left\lfloor \sqrt{\dfrac{1}{x}+1} \right\rfloor = n$ である。よって、

$$\int_0^1 \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{x}+1} \right\rfloor dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_{k+1}}^{E_n} \left\lfloor \sqrt{\frac{1}{x}+1} \right\rfloor dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{E_{k+1}}^{E_n} k\,dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(E_k - E_{k+1})$$

と整理された。総和について、

$$\sum_{k=1}^{n} k(E_k - E_{k+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} kE_k - \sum_{k=2}^{n} +1(k-1)E_k$$
$$= E_1 + \sum_{k=2}^{n} E_k - nE_{n+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} - \frac{n}{(n+1)^2-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right] - \frac{1}{n+2}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2-1} + \frac{1}{3-1} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{n+2}$$

であるから、$n \to \infty$ の極限を考えて、求める値は $\dfrac{7}{4}$。

(2)

積分区間を幅 1 に分割して、

$$\int_1^\infty \frac{1-2\{x\}}{2x}\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} \frac{1-2\{x\}}{2x}\,dx$$

とする。$k \leq x < k+1$ において、$\{x\} = x-k$ であるから、

$$\int_k^{k+1} \frac{1-2(x-k)}{2x}\,dx = \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{2z} - 1 + \frac{2k}{2x}\right) dx$$
$$= \Big[(2k+1)\log|2x| \cdot \frac{1}{2} - x\Big]_k^{k+1}$$
$$= \frac{2k+1}{2}\log\left(\frac{k+1}{k}\right) - 1 = \log\frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}{e}$$

と求まる。$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}$ は、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}$ によって求めればよく、

$$\sum_{k=1}^{n} \log\frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}{e} = \log\left[\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}{e}\right]$$
$$= \log\left[\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{2k+1}{2}}}{e^n}\right]$$

である。さらに分母の総積について、

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{2k+1}{2}} = \left(\frac{2}{1}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{7}{2}}\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2n+1}{2}}$$
$$= \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{1^1 \cdot 2^1 \cdot 3^1 \cdot \dots n^1} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$$

であるから、求めるものは、

$$\lim_{n\to\infty} \log\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!} = \lim_{n\to\infty} \log\left[\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \log\left\{\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{n+\frac{1}{2}}{n}}\right\}$$
$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e\right) \quad (\because \text{Stirling の公式})$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\log 2\pi$$

Q.060 整数 素数編

次の各問の条件を満たす素数 p, q, r, s を求めよ。
(1) $p^q + q^p = r$ (京大)
(2) $p + q = r,\ pr = q + s$ (学コン)
(3) $pq - 1,\ qr - 1$ が平方数でかつ $pr - 1$ が素数の 6 乗 (学コン)
(4) $2^{p^2-q^2} - 1 = pqrs$ (AwesomeMath)

(1)

p, q がともに奇素数だと、$p^q + q^p$ が明らかに 2 より大きい偶数となるので不適。よって p, q のどちらかは 2 である。対称性から、$q = 2$ のときを考えればよく、すなわち $p^2 + 2^p$ が素数となる奇素数 p を求めればよい。
$p \not\equiv 0 \pmod 3$ のとき、$p^2 \equiv 1 \pmod 3$ である。一方で、p は奇数であるから、

$$2^p \equiv (-1)^p \equiv -1 \pmod 3$$

である。したがって、p が 3 で割り切れないとき、$p^2 + 2^p \equiv 0 \pmod 3$ が成り立ち、不適である。よって p は 3 のみが適する。このとき $r = 2^3 + 3^2 = 17$。
以上より、$(p, q, r) = (3, 2, 7), (2, 3, 7)$。

(2)

p, q が奇数だと $r > 2$ かつ r が偶数なので不適。$p = 2$ または $q = 2$ である。
$p = 2$ のとき　$r = q + 2$ より, $q + s = 2r = 2(q + 2)$ だから整理して $s = q + 4$.　よって, $q, q+2, q+4$ が素数である。q が 3 の倍数でないとき, $q+2, q+4$ のどちらかひとつが 3 の倍数だが, 明らかに $q + 4 > q + 2 > 3$ なので, 素数かつ 3 の倍数である 3 にはなりえないため不適。$q = 3$ なら $r = 5, s = 7$ でよい。
$q = 2$ のとき　$r = p + 2$ より $p(p+2) - 2 = s$. $p = 3$ のとき $r = 5, s = 13$ なのでよい。$p \equiv 1 \pmod 3$ だと $r > 3$ かつ r が 3 で割れて不適。$p \equiv 2$ のとき $s > 3$ かつ s が 3 で割れて不適。以上より $(p, q, r, s) = (2, 3, 5, 7), (3, 2, 5, 13)$

(3)

$rp - 1 = s^6$ としたとき（s は素数）

$$rp = (s^2+1)(s^4-s^2+1)$$

であって, 各因数は 1 より大きい。p, r は対称性があることに注意すると, $p = s^2 + 1 . s^4 - s^2 + 1 = r$ としてよい。($r = s^2 + 1$ の場合も同様) すると, s が奇素数では $p > 2$ かつ偶数になるので不適。$s = 2$ であり, $p = 5, r = 13$ である。$5q - 1 = a^2, 13q - 1 = b^2$ (a, b は自然数)　と置けるとする。

$$8q = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$$

となる。$q = 2$ のとき, $a = 3, b = 5$ なのでよい。$q \geqq 3$ のとき, $2 < 4 < 2q < 4q$ であり, $a \pm b$ は偶数でかつ $b - a < b + a$ から $(b-a, b+a) = (2, 4q), (4, 2q)$ の場合に限られる。つまり, $(a, b) = (2q-1, 2q+1), (q-2, q+2)$ の場合に限られる。前者のとき,

$$5q - 1 = (2q-1)^2 \Leftrightarrow 4q^2 - 9q + 2 = 0$$

で, $q \geqq 3$ なる解はない。後者のとき

$$5q - 1 = (q-2)^2 \Leftrightarrow q^2 - 9q + 5 = 0$$

で整数解もなく不適。以上より $(p,q,r)=(5,2,13),(13,2,5)$

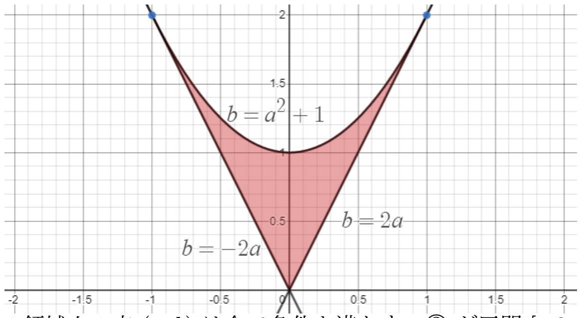
(4)

右辺は正より $p^2-q^2>0$ で, そのとき左辺は奇数なので $p>q>2$ である。$p^2\equiv q^2 \pmod 8$ なので $p^2-q^2=8k$ とすると
$$2^{8k}-1=(2^k-1)(2^k+1)(4^k+1)(16^k+1)$$
$k=1$ のとき, $(p+q)(p-q)=8$ となる p,q は存在しないので不適。
$k\geqq 2$ が奇数のとき,
$$2^k+1=(2+1)(2^{k-1}-2^{k-2}+\cdots+1)$$
となり, $2^{8k}-1$ は 2 以上の整数 5 個以上の積になることから $pqrs$ と表されることはない。$k\geqq 2$ が偶数とする。$k=2m$ として, $m=1$ ならば
$$(p+q)(p-q)=16$$
より $p+q=8, p-q=2$ の場合しかない。$p=5, q=3$ である。
$m\geqq 2$ のときは
$$2^k-1=(2^m-1)(2^m+1)$$
で, $2^m-1\geqq 3$ だから $2^{8k}-1$ は 2 以上の整数 5 個以上の積になり不適。
$2^{16}-1=65535=5\times 3\times 17\times 257$ より,
$$(p,q,r,s)=(5,3,17,257),(5,3,257,17)$$

Q.061 ★7 関西医科大 後期 (2019)

実数 a,b を用いて表される 4 次方程式 $x^4+4ax^3+2(2b-1)x^2+4ax+1=0$ の全ての解が、複素数平面上で原点から等距離にある。この条件を満たす解が存在するような a,b の条件を求め、点 (a,b) の存在範囲を ab 平面上に図示せよ。

与えられた 4 次方程式は明らかに $x=0$ を解に持たないから x^2 で割って、
$$x^4+4ax^3+2(2b-1)x^2+4ax+1=0 \quad \cdots(*)$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}+4a\left(x+\frac{1}{x}\right)+4b-2=0 \quad \cdots①$$
よって $x=z$ が解ならば $x=\dfrac{1}{z}$ も解になることが明らかであり、条件より $|z|=\dfrac{1}{|z|}$ だから $|z|=1$ が従う。したがって、$(*)$ の 4 解が原点から等距離であることは、$(*)$ の 4 解の絶対値が 1 であることと同値である。さて①にて $t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと $t^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$ から、
$$① \Leftrightarrow t^2+4at+4(b-1)=0 \quad \cdots②$$
さらに $x=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと $t=2\cos\theta$ なので、$-2\leq t\leq 2$ の範囲の実数となる、よって、②の全ての実数解は区間 $[-2,2]$ 上になければならない。このような (a,b) の条件を考える。$f(t)=t^2+4at+4(b-1)$ とする。
② の判別式 D について
$$D=16a^2-16(b-1)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2+1\geq b$$
放物線 $f(t)=(t+2a)^2+4(b-1)-4a^2$ の軸が区間 $[-2,2]$ 上にあることが必要で、
$$-2\leq -2a\leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad -1\leq a\leq 1$$
端点について $f(-2)\geq 0$ かつ $f(2)\geq 0$ から、
$$2a+b\geq 0 \text{ かつ } -2a+b\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad b\geq \max 2a,-2a$$
よって (a,b) の存在範囲の必要条件として次を得る。ただし境界は全て含む。



逆にこの領域上の点 (a,b) は全て条件を満たす。② が区間 $[-2,2]$ 上の実数解を持つので、その解を $p,q\,(\in[-2,2])$ としよう[*19]。このとき、
$$\frac{p}{2}=\cos\theta_p\,,\ \frac{q}{2}=\cos\theta_q$$
なる $\theta_p,\theta_q\in[0,\pi]$ がただ一つ存在する。すると $(*)$ の 4 解は、
$$z_p=\cos\theta_p+i\sin\theta_p\,,\ z_q=\cos\theta_q+i\sin\theta_q$$
として $x=z_p,\overline{z_p},z_q,\overline{z_q}$ ですべて与えられ、実際に原点から等距離にある。よって求める領域は先の領域である。

Q.062 ★7 AIMEI (2014)

次の 3 次方程式を解け。
$$\sqrt{2014}x^3-4029x^2+2=0$$

明らかに $x=0$ は解でないから、$x\neq 0$ とする。$a=\sqrt{2014}$ とすると与式は
$$ax^3+(2a^2+1)x^2+2=0 \Leftrightarrow 2x^2y^2-x^3y+x^2-2=0$$
というように表されるから、これを a についての 2 次方程式とみると、解の公式より
$$a=\frac{x^3\pm\sqrt{x^6-8x^4+16x^2}}{4x^2}=\frac{1}{x},\ \frac{x}{2}-\frac{1}{x}$$
が得られる。$a=\sqrt{2014}$ であったから、
$$\sqrt{2014}=\frac{1}{x},\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{2014}},\quad x^2-2\sqrt{2014}x-2=0$$
$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{\sqrt{2014}},\quad \sqrt{2014}\pm\sqrt{2016}$$

Q.063 ★6 京大オープン

p を無理数, q を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が
$$a_{n+1}=pa_n+q \quad (n=1,2,3,\cdots)$$
を満たす。すべての自然数 n に対して a_n が有理数であるとき, a_n は n によらない定数であることを証明せよ。

Proof. 与えられた式から, n をひとつ固定したとき
$$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$$
が成立する。$a_{n+1}\neq a_n$ であるとすると,
$$p=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}$$
であり, 条件より a_n,a_{n+1},a_{n+2} は有理数なのでこの右辺は有理数となる。p は無理数であるからこれは矛盾する。従って $a_{n+1}=a_n$ でなければならず, これがすべての $n=1,2,\cdots$ に対して成立するから
$$a_1=a_2=a_3=\cdots=a_n=a_{n+1}=\cdots$$
となるので, 各 n に対して $a_n=a_1$ という n によらない定数になる。 □

[*19] 編集者註: $p=q$ の場合も含む。

Q.064 ★8 Z 会京大理系実戦演習

a を実数の定数とする。x の方程式 $x^5-x^4+ax^3+ax^2-x+1=0$ の 5 つの解のうち、少なくとも 2 つの解が一致するとき、a の値と、一致する解を求めよ。

(解法 1)

与式は $x=-1$ を解に持つから[20]、

$x^5-x^4+ax^3+ax^2-x+1=(x+1)\left[x^4-2x^3+(a+2)x^2-2x+1\right]$

である。$f(x)=x^4-2x^3+(a+2)x^2-2x+1$ とおく。$x=0$ は解ではないので、以下では $x\neq 0$ のもとで考える。 $x^{-2}f(x)=(x^2+x^{-2})-2(x+x^{-1})+(a+2)$ であり、$t=x+x^{-1}$ とすると $x^{-2}f(x)=t^2-2t+a$ である。これは

$$(t-\alpha)(t-\beta), \alpha=1+\sqrt{1-a},\quad \beta=1-\sqrt{1-a}$$

と因数分解される。よって

$$f(x)=x^2(t-\alpha)(t-\beta)=(x^2-\alpha x+1)(x^2-\beta x+1)$$

である。$A(x)=x^2-\alpha x+1$、$B(x)=x^2-\beta x+1$ とする。

さて、方程式 $(x+1)A(x)B(x)=0$ が重解を持つとすれば、次の 4 パターンの可能性がある。

(1) $f(-1)=A(-1)B(-1)=0$ である場合。
(2) $A(-1)B(-1)\neq 0$ であるが、$A(x)$ に重根がある場合。
(3) $A(-1)B(-1)\neq 0$ であるが、$B(x)$ に重根がある場合。
(4) $A(-1)B(-1)\neq 0$ で $A(x)$ にも $B(x)$ にも重根はないが、$A(x)$ と $B(x)$ が共通根を持つ場合。

(1): $f(-1)=a+8$ より $a=-8$ の場合である。このとき $\alpha=4,\beta=-2$ なので $A(x)=x^2-4x+1$、$B(x)=x^2+2x+1$ だから

$$(x+1)f(x)=(x+1)^3(x^2-4x+1)$$

なので一致する解は -1 である。

以降は $a\neq 8$ とする。このとき $f(1)\neq 0$ である。

(2): $x^2-\alpha x+1=(x-\alpha/2)^2+1-\alpha^2/4$ なので $1-\alpha^2/4=0$、つまり $\alpha=\pm 2$ である。$\alpha\neq -2$ であるような a はなく、$\alpha=2$ となるのは $a=0$ のときである。$a=0$ のとき、$A(x)=(x-1)^2$、$B(x)=x^2+1$ だから

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x-1)^2(x^2+1)$$

であり、一致する解は 1 である。

(3): 同様に、$\beta=\pm 2$ となる。$\beta=2$ となる a はなく、$a\neq -8$ なので $\beta=2$ も考えなくてよい (つまりこのパターンは (1) と兼ねている)。

(4): $A(z)=B(z)=0$ となる z があるとすると、$B(z)-A(z)=(\alpha-\beta)z=(2\sqrt{1-a})z=0$ である。$A(0),B(0)\neq 0$ なので $z\neq 0$ である。よって $\sqrt{1-a}=0$ だから $a=1$ を得る。このとき $\alpha=\beta=1$ だから

$$(x+1)f(x)=(x+1)(x^2-x+1)^2$$

だから、一致する解は (x^2-x+1 の根である) $\dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$ である。

以上より

$$\begin{cases} a=0 & \text{一致する解は}\,1 \\ a=1 & \text{一致する解は}\,\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{-3}}{2} \\ a=-8 & \text{一致する解は}\,-1 \end{cases}$$

(解法 2)

与方程式について、

$$(x+1)\left[(x-1)^2(x^2+1)+ax^2\right]=0$$

と整理できるから、明らかに $x=-1$ を解の 1 つに持ち、残りの 4 解については、

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+1)+ax^2$$

の振る舞いを調べればよい。

$a=0$ のとき、与方程式は

$$(x-1)^2(x+1)(x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=1,\ -1,\ \pm i$$

と解ける。このことから一致する解は 1 である。

$a>0$ のとき、常に $f(x)>0$ であるから、与方程式は $x=-1$ 以外に虚数解を 4 つもつ。ここで a は実数であるから、この 4 つの虚数解は、2 組の共役な虚数である。互いに共役な虚数同士は等しくなりえないから、少なくとも 2 つの解が一致するためには、この 2 組が一致しなければならない。このことから、

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+1)+ax^2=(x^2+sx+t)^2$$

と因数分解することを考える。これの係数を比較することで $(s,t,a)=(-1,1,1)$ を得る。実際に $a=1$ のとき、与方程式は、

$$(x+1)(x^2-x+1)^2=0 \Leftrightarrow x=-1,\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

と解けて、一致する解は $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ と求まる。

$a<0$ のとき、$f(0)=1$, $f(1)=a<0$ から、中間値の定理によって、$0<\alpha<1$ なる実数 α によって $f(\alpha)=0$ となることがわかる。また、

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^4\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{a}{x^2}\right]=+\infty$$

から、十分大きい実数 $M>0$ に対して、$f(M)>0$ がいえる。これより、$f(1)=a<0$ と $f(M)>0$ から、中間値の定理によって、$\beta>1$ なる実数 β によって $f(\beta)=0$ となることがわかる。これらより、$a<0$ の場合には、方程式 $f(x)=0$ の虚数解は高々 2 つであるから、重解は存在するなら実数である。

一般に、方程式 $f(x)=0$ の実数解 $x=t$ が重解[21]であることは、$f(t)=0$ かつ $f'(t)=0$ と同値である。

$$f(t)=(t-1)^2(t^2+1)+at^2=0$$

$$f'(t)=2(t-1)(2t^2-t+1)+2at=0$$

これらから a を消去し整理して、

$$(t-1)(t+1)(t^2-t+1)=0 \quad \cdots(*)$$

が、$x=t$ が方程式 $f(x)=0$ の重解となるための条件である。ここで、先述の α,β は、明らかに $(*)$ を満たさないから、$x=\alpha,\beta$ は重解になり得ない。

ここまでのことから、$a<0$ の場合に、与方程式が重解を持つためには、方程式 $f(x)=0$ が $x=-1$ を解に持たなければならない。

$$f(-1)=8+a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=-8$$

よって、$a=-8$ のとき、一致する解として -1 が得られる。

以上によって、求めるものは

$$\begin{cases} a=0\ \text{のとき、一致する解は}\ x=1 \\ a=1\ \text{のとき、一致する解は}\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2} \\ a=-8\ \text{のとき、一致する解は}\ x=-1 \end{cases}$$

Q.065 ★2 Fermat 数 $2^{2^5}+1$

$641=5^4+2^4=5\cdot 2^7+1$ に注意して、以下の問に答えよ。
(1) $5^4\cdot 2^{28}+2^{32}$ と $5^4\cdot 2^{28}-1$ は 641 の倍数であることを示せ。
(2) $2^{32}+1$ は 641 の倍数であることを示せ。

(1)

まず前者について、

$$5^4\cdot 2^{28}*2^{32}=2^{28}(5^4+2^4)=2^{28}\cdot 641$$

続いて後者について、$X=5\cdot 2^7$ とおけば $X+1=641$ であって、

$$5^4\cdot 2^{28}-1=X^4-1=(X-1)(X+1)(X^2+1)=641(X-1)(X^2+1)$$

したがって、いずれも 641 の倍数である。

(2)

問題の数について

$$2^{32}+1=(5^4\cdot 2^{28}+2^{32})-(5^2\cdot 2^{28}-1)$$

と整理できて、右辺は 641 の倍数同士の和であるから、$2^{32}+1$ も 641 の倍数である。

---

[20] 一般に奇数次の相反方程式は $x=-1$ を解に持つ。

[21] 少なくとも 2 次の

Q.066 ★? (1) 東京大 文科 (2001), (2) 京都大 文系 (2006)

(1) 白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ。(条件) その黒の碁石とそれより右にある碁石を全て除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が一つも残らない場合も同数とみなす。

(2) n, k は正の整数であり、$k \leq n$ とする。穴の開いた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき、適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの部分に分け、どちらの組も白玉 k 個、黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.067 ★4 進研模試 数学 A

$\triangle$ABC について、AB$=5$, BC$=3\sqrt{5}$, $\tan \mathrm{A} = -\frac{3}{4}$ である。$\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$ かつ CD$=\frac{\sqrt{5}}{2}$ である点 D を点 A と同じ側にとり、直線 AC と直線 BD の交点を E とする。DE の長さを求めよ。

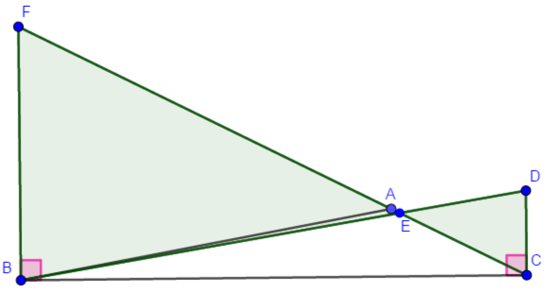
$\tan \mathrm{A} < 0$ より $\angle$A は鈍角なので、$\cos \mathrm{A} < 0$ である。$1 + \tan^2 \mathrm{A} = \frac{1}{\cos^2 \mathrm{A}}$ から、$\cos \mathrm{A} = -\frac{4}{5}$ である。続いて余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\mathrm{A}\ dou\ \mathrm{AC}^2 + 8\mathrm{AC} - 20 = 0$$

よって AC$=2$ がわかる。さらに余弦定理から

$$\cos \mathrm{C} = \frac{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

が得られる。さらに cos と tan の相互関係から、$\tan \mathrm{C} = \frac{1}{2}$ となる ($\angle$C は明らかに鋭角)。
点 B を通り BC に垂直な直線と、AC の交点を F とする。



直角三角形 CBF を考えると、

$$\tan \mathrm{C} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}$$

となっているから、FB$=\frac{3\sqrt{5}}{2}$。一方 FB と DC は平行で、$\triangle$BFE $\sim$ $\triangle$DCE であって、相似比は FB : CD $= \frac{3\sqrt{5}}{2} : \frac{\sqrt{5}}{2} = 3:1$。よって BE : DE $= 3:1$ とわかって、

$$\mathrm{DE} = \frac{1}{4}\mathrm{BD} = \frac{1}{4}\sqrt{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2} = \frac{\sqrt{185}}{8}$$

Q.068 ★4 東大理系 (2016)

z を複素数とする。複素平面上の 3 点 A(1), B(z), C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め、図示せよ。

実数 a, b を用いて、$z = a + bi$ とおけば、

$$z^2 = (a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

複素平面上の 3 点 A, B, C はそれぞれ、座標平面上の点 A$(1,0)$, B(a,b), C$(a^2-b^2, 2ab)$ に対応する。ここで、次のようなベクトルの内積を考える。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (a-1)(a^2-b^2-1) + b\cdot 2ab \\
&= (a+1)(a^2-2a+b^2+1) \quad \cdots ① \\
\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} &= (1-a)(a^2-b^2-a) + (-b)(2ab-b) \\
&= -a(a^2-2a+b^2+1) \quad \cdots ② \\
\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}} &= (1-a^2+b^2)(a-a^2+b^2) + (-2ab)(b-2ab) \\
&= (a^2+a+b^2)(a^2-2a+b^2+1) \quad \cdots ③
\end{aligned}$$

これらが全て正の値をとることが、$\triangle$ABC が鋭角三角形であることと同値である。

$$a^2 - 2a + b^2 + 1 = (a-1)^2 + b^2 \geq 0$$

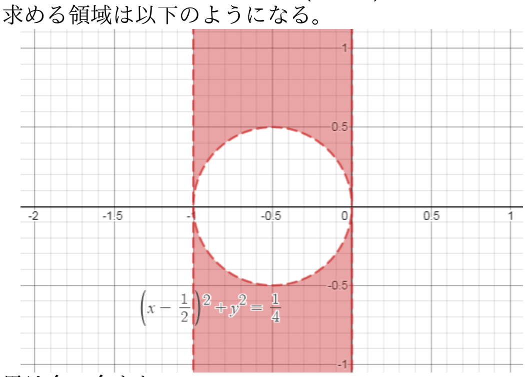
より、①から③が全て正の値をとることは、

$$a + 1 > 0 \quad かつ \quad -a > 0 \quad かつ \quad a^2 + a + b^2 > 0$$

と同値である。

$$a^2 + a + b^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 > \frac{1}{4}$$

なので、求める領域は以下のようになる。



ただし境界は全て含まない。

Q.069 ★4◎ 一橋大 (1984)

$\triangle$ABC において、$\tan \mathrm{A}$, $\tan \mathrm{B}$, $\tan \mathrm{C}$ の値が全て整数であるとき、それらの値を求めよ。

$\angle \mathrm{A} \leq \angle \mathrm{B} \leq \angle \mathrm{C}$ として一般性を失わない。$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ では $\tan \mathrm{C}$ が定義されないので $\angle \mathrm{C} \neq 90^\circ$。三角形が成立することから、$\angle \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \neq 0^\circ$。また、$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = 180^\circ$ だから、$\angle \mathrm{B} < 90^\circ$。$a = \tan \mathrm{A}$, $b = \tan \mathrm{B}$, $c = \tan \mathrm{C}$ とおけば、a, b, c はすべて整数で、

$$0 < a \leq b \leq c \quad \text{or} \quad c < 0 < a \leq b$$

のいずれかの大小関係を満たしている。
$c < 0$ のとき、c は整数だから $c \leq -1$ で、よって $\angle \mathrm{C} \geq 135^\circ$。このとき $\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} \leq 45^\circ$ となるが、これを満たし $\tan \mathrm{A}$, $\tan \mathrm{B}$ が整数となるような $\angle$A, $\angle$B は存在しない。よって $c > 0$ である。さらに、$a = b = 1$ は、$\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{B} = 45^\circ$ を意味するが、このとき $\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ となるために不適。
$\angle \mathrm{C} = \pi - (\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B})$ だから、

$$\tan \mathrm{C} = -\tan(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \frac{\tan \mathrm{A} + \tan \mathrm{B}}{\tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B} - 1} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{a+b}{ab-1}$$

である。さらに整理して

$$c = \frac{a+b}{ab-1} \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = abc \quad \cdots (*)$$

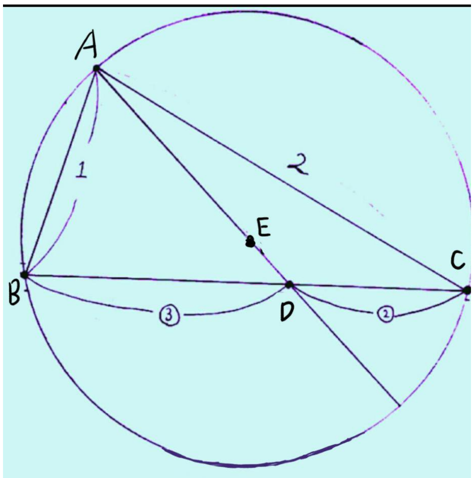
であるから、$0 < a \leq b \leq c$ のもとでこの整数解を求めることを考える。

$$3a \leq a + b + c = abc \leq 3c \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq bc \ かつ\ 1 < ab \leq 3$$

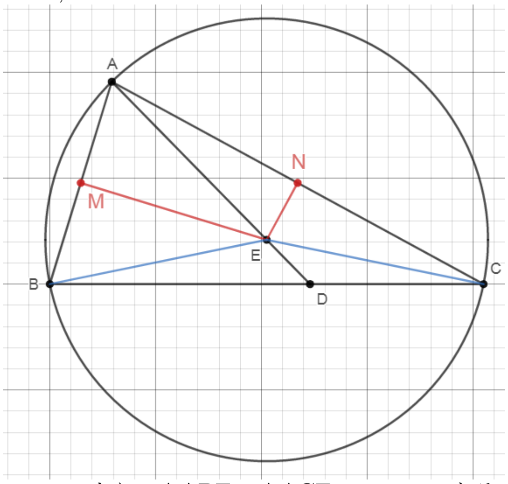
$1 < ab \leq 3$ を満たす (a, b) の組は、$(1,2), (1,3)$ のみである。このときの c の値は $(*)$ よりそれぞれ $c = 3, 2$ であるが、後者は $b \leq c$ に反するので不適。よって $(a,b,c) = (1,2,3)$ が必要であるが、これは実際に $(*)$ を満たす。
以上のことから、$\tan \mathrm{A}$, $\tan \mathrm{B}$, $\tan \mathrm{C}$ は $(1,2,3)$ の並べ替えである。

Q.070 ★7 designgo5 様

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ が、E を中心とする円に内接している。直線 AE と辺 BC との交点を D とすると、$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:2$ がなりたつ。このとき $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。



線分 AE に加えて、線分 BE, CE (青線) は円 E の半径であるから、$\triangle\mathrm{ABE}$, $\triangle\mathrm{ACE}$ は二等辺三角形となる。よって点 E から線分 AB, AC へ垂線を下ろす (赤線) と、その足はそれぞれの線分の中点となる。この点をそれぞれ M, N とする。ここで $\angle\mathrm{AME}=\angle\mathrm{ANE}=90^\circ$。



$\mathrm{BD}:\mathrm{BC}=3:2$ より、$\triangle\mathrm{ABE}:\triangle\mathrm{ACE}=3:2$ である。$\mathrm{AB}=1$, $\mathrm{AC}=2$ であることから、$\mathrm{ME}:\mathrm{NE}=3:1$ とわかる。よって $\mathrm{ME}=3x$, $\mathrm{NE}=x$ とおけば、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(3x)^2=R^2$$
$$1^2+x^2=R^2$$

が得られる。ここで外接円の半径を R とした。 これらから、$R=\sqrt{\dfrac{35}{32}}$ を得られた。
さて正弦定理によって、

$$\frac{2}{\sin\mathrm{B}}=\frac{1}{\sin\mathrm{C}}=2R \quad\Leftrightarrow\quad \sin\mathrm{B}=\frac{1}{R},\ \sin\mathrm{C}=\frac{1}{2R}$$

を得る。さて、このとき $\sin\mathrm{A}$ は、

$$\sin\mathrm{A}=\sin\left(180^\circ-(\mathrm{B}+\mathrm{C})\right)=\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})$$
$$=\sin\mathrm{B}\cos\mathrm{C}+\cos\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$$

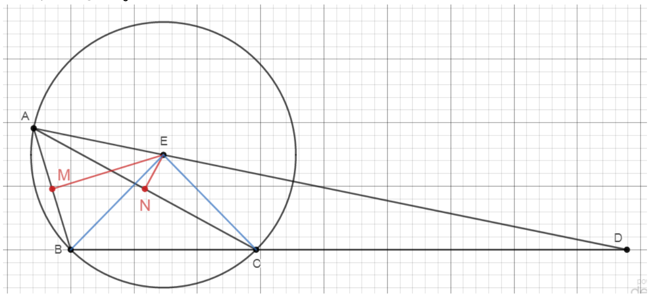
によって求められる。ここで、$\cos\mathrm{B}=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{R^2}}$, $\cos\mathrm{C}=\pm\sqrt{1-\dfrac{1}{4R^2}}$ であり、符号は $\angle\mathrm{B},\angle\mathrm{C}$ が鋭角か鈍角かによって決定される。これを用いて $\sin\mathrm{A}$ は、

$$\sin\mathrm{A}=\frac{\pm\sqrt{4R^2-1}\pm\sqrt{R^2-1}}{2R^2}$$

と整理される。さて $0^\circ<\angle\mathrm{A}<180^\circ$ であるから $\sin\mathrm{A}$ は正でなければならない。よって $\angle\mathrm{C}$ が鈍角であることは不適である。
求めるものは $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積で、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\sin\mathrm{A}\\&=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{4R^2-1}\pm\sqrt{R^2-1}}{2R^2}\\&=\frac{\sqrt{4R^2-1}\pm\sqrt{R^2-1}}{2R^2}\\&=\frac{2\sqrt{6}}{5},\ \frac{2\sqrt{6}}{7}\end{aligned}$$

と求まった。なお前者は $\angle\mathrm{B}$ が鋭角の場合、後者は鈍角の場合である。ちなみに $\angle\mathrm{B}$ が鈍角の場合は、点 D は辺 BC を $3:2$ に外分し、図は以下のようになる。



Q.071 ★8 東大実戦

4 桁の素数 $abcd$ がある。(ただし a,b,c,d はそれぞれ桁を表す。) このとき、3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ は整数解を持たないことを証明せよ。

この 4 桁の素数を p とおくと、$p=1000a+100b+10c+d$ と書ける。ある整数 n によって、

$$an^3+bn^2+cn+d=0$$

が満たされていたとしよう。$a>0,\ b,c,d\geq0$ であるから明らかに $n\leq0$ である。上の式の両辺から $100a+100b+10c+d=p$ を引けば、

$$a(n^3-10^3)+b(n^2-10^2)+c(n-10)=-p$$

となる。整理して、

$$p=(10-n)\left[an^2+(10+b)n+100a+10b+c\right]$$

である。$N=10-n$ とおくと、$N\geq10$ でかつ

$$p=N\left[aN^2-(30a+b)N+300a+20b+c\right]$$

を満たす。よって N は p の 10 より大きい正の約数であるから、$N=p$ であることが必要である。ところがこのとき、

$$1=ap^2-(30a+b)p+300a+20b+c$$

であって、$a>0$ から

$$\left(30+\frac{b}{a}\right)-p=\frac{300a+20b+c-1}{ap}>0$$

を満たさなければならないが、左辺について評価すると、

$$\left(30+\frac{b}{a}\right)-p<\left(30+\frac{9}{1}\right)-1000<0$$

となるので矛盾である。よってこのような整数 N および n がとれないから、整数解は存在しない。

Q.072 ★7 自作 DMO 4.5th

正三角形 ABC とその外接円 K がある。K の弧 BC のうち点 A を含まないほうに 2 点 D, E を取る。このとき、長さに関して $\mathrm{AD},\mathrm{BD},\mathrm{CD}$ はこの順に等差数列、$\mathrm{AE},\mathrm{BE},\mathrm{CE}$ はこの順に等比数列となった。$\mathrm{CD}=1$ のとき、AD, AE の長さを求めよ。

トレミーの定理によって、

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$

であるが、$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{AC}$ だから、これで両辺割って、

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}+\mathrm{BD}\quad\cdots①$$

を得る。同様に、$\mathrm{AE}=\mathrm{CE}+\mathrm{BE}$ $(\cdots②)$ も得られる。
等差数列をなす条件から、$2\mathrm{BD}=\mathrm{AD}+\mathrm{CD}$ $(\cdots③)$。①と③から BD を消去し、$\mathrm{CD}=1$ も用いれば、$\mathrm{AD}=3$ と求まる。なお $\mathrm{BD}=2$。
△BCD で余弦定理を用いると、

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BD}^2+\mathrm{CD}^2-2\cdot\mathrm{BD}\cdot\mathrm{CD}\cos 120^\circ \Leftrightarrow \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

等比数列をなす条件から、$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AE}\cdot\mathrm{CE}$ $(\cdots④)$ である。②と④から CE を消去すると、

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AE}\cdot(\mathrm{AE}-\mathrm{BE}) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{BE}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\mathrm{AE}$$

を得る。$r=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおけば、$\mathrm{BE}=r\mathrm{AE},\ \mathrm{CE}=r^2\mathrm{AE}$ である。
△BCE で余弦定理を用いれば、

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{BE}^2+\mathrm{CE}^2-2\mathrm{BE}\cdot\mathrm{CE}\cos 120^\circ \Leftrightarrow 7=(r^2+r^4+r^3)\mathrm{AE}^2$$

を得る。$r^2+r-1=0$ が成り立っていることに注意すれば、

$$r^3=2r-1,\ r^4=-3r+2,\ \frac{1}{r}=r+1$$

であるから、

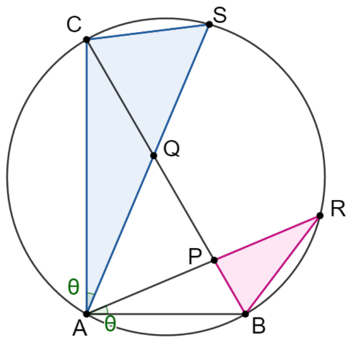
$$\begin{aligned}\mathrm{AE}^2&=\frac{7}{r^2+r^3+r^4}=\frac{7}{-2r+2}\\&=\frac{7}{2}\frac{1}{1-r}=\frac{7}{2}\frac{1}{r^2}\\ \Leftrightarrow\quad \mathrm{AE}&=\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{14}}{2}(r+1)=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{70}}{4}\end{aligned}$$

以上により、求めるものは、

$$\mathrm{AD}=3,\ \mathrm{AE}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{70}}{4}$$

Q.073 ★8 学コン

$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=\sqrt{3},\ \angle\mathrm{A}=90^\circ$ の △ABC の外接円を T とおく。端点除く辺 BC 上にある点 P, Q は、$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{CAQ}=\theta$ を満たす。線分 AP, AQ の延長と T の交点をそれぞれ R, S とし、$\dfrac{\triangle\mathrm{ACS}}{\triangle\mathrm{BPR}}$ が最小になるときの最小値、及び BP, CQ の長さを求めよ。



$\angle\mathrm{CAS}=\angle\mathrm{PAB}=\theta,\ \angle\mathrm{ASC}=\angle\mathrm{ABP}=60^\circ$ なので、$\triangle\mathrm{ACS}\sim\triangle\mathrm{APB}$ である。この相似比は $\mathrm{AC}:\mathrm{AP}$ であるから、面積比は $3:\mathrm{AP}^2$。一方で、

$$\triangle\mathrm{APB}:\triangle\mathrm{BPR}=\mathrm{AP}:\mathrm{RP}=\mathrm{AP}^2:\mathrm{AP}\cdot\mathrm{RP}$$

だから、$\triangle\mathrm{ACS}:\triangle\mathrm{BPR}=3:\mathrm{AP}\cdot\mathrm{RP}$。続いて方べきの定理によって、$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{RP}=\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}$ となる。$\mathrm{BP}=x$ とおくと、$\mathrm{CP}=\mathrm{BC}-\mathrm{BP}=2-x$ なので、

$$\mathrm{BP}\cdot\mathrm{CP}=x(2-x)=-(x-1)^2+1$$

となる。したがって、

$$\frac{\triangle\mathrm{ACS}}{\triangle\mathrm{BPR}}=\frac{3}{-(x-1)^2+1}$$

は $x=1$ のときに最小となり、その値は 3 である。
このとき $\mathrm{BP}=x=1$ である。また $\mathrm{AB}=\mathrm{BP}$ と $\angle\mathrm{ABP}=60^\circ$ であるから △APB は正三角形で、$\theta=60^\circ$。よって $\angle\mathrm{BAQ}=90^\circ-\theta=30^\circ$ とあわせて、$\mathrm{BQ}=\dfrac{1}{2}$ とわかる。したがって、$\mathrm{CQ}=\mathrm{BC}-\mathrm{BQ}=\dfrac{3}{2}$。

Q.074 ★8◎ 東工大 (1985)

$a^2-2b^2=\pm1$ かつ $a+b\sqrt{2}>0$ を満たす整数 a,b から得られる実数 $a+b\sqrt{2}$ 全体の集合を G とする。1 より大きい G の元のうち、最小のものを u とする。
(1) u を求めよ。
(2) 整数 n と $g\in G$ に対して、$gu^n\in G$ を示せ。
(3) G の任意の元は、適当な整数 n により u^n と表されることを示せ。

(1)

$u=1+\sqrt{2}$ であることを示す。$G\ni 1+\sqrt{2}>1$ はよい。$1<w\leq 1+\sqrt{2}$ なる $w\in G$ を考え、$w=a+b\sqrt{2}$ とおく。$|a^2-2b^2|=w|a-b\sqrt{2}|=1$ であるから、

$$|a-b\sqrt{2}|=\frac{1}{w}<1 \quad (\because w>1)$$

より、$-1<a-b\sqrt{2}<1$ となる。これと $1<w=a+b\sqrt{2}$ より、

$$-1+1<(a-b\sqrt{2})+(a+b\sqrt{2})$$

$$1+(a-b\sqrt{2})<1+(a+b\sqrt{2})$$

がそれぞれ成り立つ。整理して $a>0,\ b>0$ を得るので、$a\geq1, b\geq1$ でなければならず、$1+\sqrt{2}\leq w$ となる。$1<w\leq 1+\sqrt{2}$ としたから、$w=1+\sqrt{2}$ となる。このことは、求める最小の元 u は $1+\sqrt{2}$ であることを示している。$u=1+\sqrt{2}$。

(2)

次を示す。

$$w_1,\ w_2\in G \quad\Rightarrow\quad w_1w_2\in G \quad (*)$$

$w_i=a_i+b_i\sqrt{2}$ (ただし $a_i^2-2b_i^2=\pm1,\ w_i>0$) とおく。積を計算すると、

$$w_1w_2=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)\sqrt{2}$$

であるが、

$$\begin{aligned}&(a_1a_2+2b_1b_2)^2-2(a_2b_1+a_1b_2)^2\\=&(a_1a_2)^2+4(b_1b_2)^2-2(a_2b_1)^2-2(a_1b_2)^2\\=&(a_1^2-2b_1^2)(a_2^2-2b_2^2)=\pm1 \quad (\because (a_i^2-2b_i^2)\in\{-1,1\})\end{aligned}$$

となる。明らかに $w_1w_2>0$ であるから、したがって $(*)$ が示された[*22]。
次に整数 n に対して $u^n\in G$ を示す。$n=0$ のときは $u^0=1$ で明らかに G に含まれる。n が正なら、$(*)$ を用いて帰納的に $u^n\in G$ がいえる。n が負なら、$(u^{-1})^{-n}$ を考えて、$u^{-1}=-1+\sqrt{2}\in G$ なので、$(*)$ を用いてこの場合でも $u^n\in G$ である。よって、全ての整数 n について $u^n\in G$ である。

(3)

G の元 g をひとつ取る。このとき、ある整数 $n(g)$ が存在して、

$$u^{n(g)-1<g\leq u^{n(g)}}$$

を満たす。両辺を $u^{n(g)-1}$ で割ると、

$$1<gu^{-n(g)+1}\leq u$$

であり、(2) の結果から $gu^{-n(g)+1}$ は G の元であり、かつ 1 より大きい。(1) の結果から、u は 1 より大きい G の元のうち最小であるから、

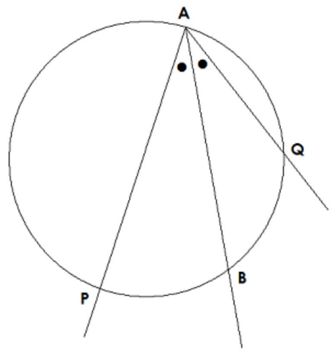
$$gu^{-n(g)+1}=u$$

でなければならない。よって $g=u^{n(g)}$ を得るから、題意は示された。

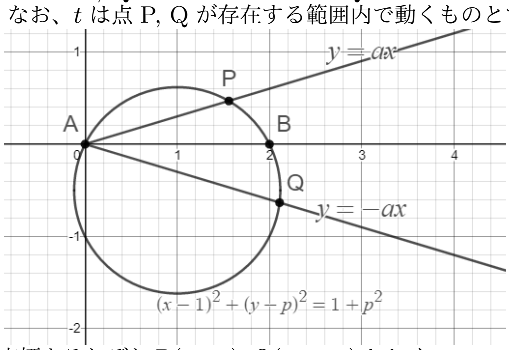
Q.075 ★?

∠A の二等分線上に点 B を決め、線分 AB を弦とする任意の円を描く。このとき、AP+AQ の長さは円の大きさによらず一定となることを示せ。

[*22] つまり G は積について閉じている。



座標平面上で点 A を原点にとり、$a>0$ なる定数 a をおき、座標平面上の 2 直線 $y=ax$ と $y=-ax$ をとる。ただし双方とも $x\geq 0$ の範囲内のみ考える。すると x 軸 ($x\geq 0$ の部分) は $\angle$A の 2 等分線になるから、この上に点 B を決める。ここで B$(2,0)$ として一般性を失わない。線分 AB を弦とするような任意の円は、$(x-1)^2+(y-t)^2=1+t^2$ によってあらわされる。このとき、この円と $y=\pm ax$ との $x>0$ における交点がそれぞれ P, Q となるから、AP+AQ が t によらないことを示せばよい。なお、t は点 P, Q が存在する範囲内で動くものとする。



点 P, Q の座標をそれぞれ P(p,ap), Q$(q,-aq)$ とおく。ここで $p,q>0$。すると、

$$\mathrm{AP}+\mathrm{AQ}=\sqrt{p^2+(ap)^2}+\sqrt{q^2+(-aq)^2}=(p+q)\sqrt{1+a^2}$$

である。直線 $y=\pm ax$ と円 $(x-1)^2+(y-t)^2=1+t^2$ の交点のうち原点でないものの x 座標は、

$$(x-1)^2+(\pm ax-t)^2=1+t^2$$

を $x\neq 0$ のもとで解いて、$x=\dfrac{2(1\pm at)}{1+a^2}$。したがって

$$\mathrm{AP}+\mathrm{AQ}=(p+q)\sqrt{1+a^2}=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$$

となって t によらないから、題意は示された。

Q.076 ★12 IMO 2008

自然数 n であって、n^2+1 が $2n+\sqrt{2}n$ より大きな素因数を持つものが無限に存在することを示せ。

ここに解答を記述。

Q.077 ★4 京大実戦

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF があり、$s+t+u=1$ を満たす 0 以上の実数 s,t,u を用いて、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}+u\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ で表される点 P を考える。このとき、内積 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ の取りうる値の範囲を求めよ。

内積の性質より、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=s(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}})+t(\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}})+u(\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}})$$

一方で、AB $=$ AF $=1$, AD $=2$, AE $=\sqrt{3}$ より、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=1\cdot 1\cdot\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=2\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\sqrt{3}\cdot 1\cdot\cos 30^c irc=\frac{3}{2}$$

であるから、結局 $s,t,u\geq 0$ かつ $s+t+u=1$ のもとで

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}=-\frac{1}{2}s+t+\frac{3}{2}u$$

の動く範囲を求めればよい。右辺を F とおく。$t=1-s-u$ で消去すると、

$$F=1-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}u$$

であり、$t\geq 0$ より、$s,u\geq 0$ かつ $s+u\leq 1$ のもとで考えればよい。s を $0\leq s\leq 1$ でひとつ固定したとき、u は $0\leq u\leq 1-s$ を動くことができ、F は u の関数と見て単調増加なので、s を固定した上では

$$1-\frac{3}{2}s\leq F\leq 1-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}(1-s)=\frac{3}{2}-2s$$

の範囲を動く。F は連続なのでこの範囲を満遍なく走る。この左辺と右辺を $0\leq s\leq 1$ でみると、左辺は $s=1$ で最小となりその値は $-\frac{1}{2}$、右辺は $s=0$ で最大となりその値は $\frac{3}{2}$、となるから、$F=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ のとり得る範囲は、

$$-\frac{1}{2}\leq\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AF}}\leq\frac{3}{2}$$

Q.078 ★9 東大プレ

$\triangle$ABC において、$\angle$A, $\angle$B, $\angle$C の大きさをそれぞれ $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ として、

$$F=\frac{\sin^2\theta_1+2\sin^2\theta_2+3\sin^2\theta_3}{\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3}$$

とおく。

(1) $\triangle$ABC の 3 辺の長さを BC $=a$, CA $=b$, AB $=c$ とおき、さらに $\triangle$ABC の面積を S とする。F を a,b,c,S で表せ。

(2) F の最小値を求めよ。

(1)

$$F=\frac{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}+2\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}+3\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1}\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}}{\sin\theta_3}$$

である。正弦定理により、

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\frac{b}{a},\quad\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_1}=\frac{c}{a},\quad\frac{\sin\theta_3}{\sin\theta_2}=\frac{c}{b}$$

だから、

$$F=\frac{\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}+3\frac{c^2}{ab}}{\sin\theta_3}=\frac{a^2+2b^2+3c^2}{ab\sin\theta_3}=\frac{a^2+2b^2+3c^2}{2S}$$

(2)

b,c を固定し、$\theta_1=x$ として、$0<x<\pi$ で動かす。余弦定理によって $a^2=b^2+c^2-2bc\cos x$ であるから、以下を得る。

$$F=\frac{3b^2+4c^2-2bc\cos x}{bc\sin x}=\frac{3b^2+4c^2}{bc\sin x}-2\frac{1}{\tan x}$$

ここで $\frac{3b^2+4c^2}{bc}=k$ とし、$f(x)=\frac{k}{\sin x}-\frac{2}{\tan x}$ $(0<x<\pi)$ とすれば、$f'(x)$ は以下。

$$f'(x)=-\frac{k\cos x}{\sin^2 x}+\frac{2}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 z}(2-k\cos x)$$

さて、$b,c>0$ なので、相加相乗平均の不等式によって、

$$k=\frac{3b^2+4c^2}{bc}\geq\frac{2\sqrt{12b^2c^2}}{bc}=4\sqrt{3}>2$$

がわかる。等号成立条件は $3b^2=4c^2$。このことから、$0<x<\pi$ では $f'(x)$ は単調増加する。$2-k\cos 0=2-k<0$, $2-k\cos\pi=2+k>0$ を踏まえて、増減表は以下のようになる。

x	0	$\cdots$	t	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで、t は $\cos t = \dfrac{2}{k}$ を満たす実数である。よって b, c を固定したときは、

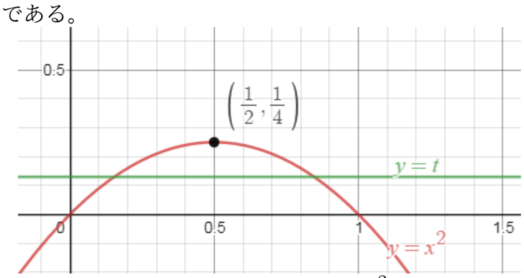
$$f(x) \geq f(t) = \frac{k}{\sin t} - \frac{2}{\tan t} = \frac{k - \frac{4}{k}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2}{k}\right)^2}} = \sqrt{k^2 - 4}$$

である。$k \geq 4\sqrt{3}$ であったから、$\sqrt{k^2-4} \geq 2\sqrt{11}$。よって、$F \geq 2\sqrt{11}$ である。実際に、$b = 2,\ c = \sqrt{3},\ \cos\theta_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$ とすれば $F = 2\sqrt{11}$ とできる[*23]。したがって、求める最小値は $2\sqrt{11}$。

Q.079 ★3

> 相異なる実数 x, y に関して、$2^x + 4^y = 4^x + 2^y$ が成り立っているとき、$8^x + 8^y + 6$ の取りうる値の範囲を求めよ。

$2^x = X,\ 2^y = Y$ とおくと、与式は $X - X^2 = Y - Y^2$ とかける。この値を t とおくと、方程式 $x - x^2 = t$ は異なる 2 つの正の実数解 (X, Y) を持つことが必要である。また解と係数の関係より、$X + Y = 1$, $XY = t$ である。



上図のように、xy 平面において曲線 $y = x - x^2$ と直線 $y = t$ が、$x > 0$ の領域で 2 回交わればよいので、$0 < t < \dfrac{1}{4}$ となる。

$$\begin{aligned} 8^x + 8^y + 6 &= X^3 + Y^3 + 6 \\ &= (X+Y)\left[(X+Y)^2 - 3XY\right] + 6 = 7 - 3t \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{25}{4} < 8^x + 8^y + 6 < 7$$

Q.080 ★3

> (1) $y = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ のグラフの概形をかけ。
> (2) 異なる二つの自然数 m, n の組であって、$m^n = n^m$ を満たすものを全て求めよ。

(1)

(まあ書いてみてください)

(2)

この式は $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ として $f(n) = f(m)$ に同値. $f(x)$ は $0 < x < e$ で増加して $e < x$ で減少するグラフなので, 定数 k に対して $y = f(x)$ と $y = k$ の交点数は 2 以下と分かる. $f(m) = f(n)$ となるなら m, n のどちらかは e 以下である. $m = 1$ のときは $1 = n^1$ より $n = 1$ である. 次に $m = 2$ とする. 交点数が 2 以下なので $f(2) = f(n)$ となる $n \neq 2$ は 1 個以下であるが, それはまさしく $n = 4$ である (実際, $f(2) = f(4) = \dfrac{\log 2}{2}$). よって $(m, n) = (1, 1), (2, 4), (4, 2)$.

Q.081 ★4

> $n^5 = 133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5$ を満たす自然数 n が存在するという。n を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.082 ★12 春合宿

> 関数 f は集合 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ の部分集合に対して定義され、1 以上 2^n 以下の整数値をとる。このような f のうち、次の 3 つの条件を満たすようなものはいくつ存在するか。
> 1. 任意の $X, Y \subset S$ に対して $f(X) + f(Y) \geq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ が成立する。
> 2. $X \neq Y$ ならば、$f(X) \neq f(Y)$
> 3. $f(\varnothing) = 2^n$

補集合を考えるにあたって全体集合は S であることに注意する。まず、次の補題を示す。

> **補題 082.1**
> $f(X) + f(\overline{X}) = 2^n + 1$ である。

(証明) 条件 (i) において $Y = \overline{X}$ とすると、$X \cup \overline{X} = S,\ X \cap \overline{X} = \varnothing$ より、

$$f(X) + f(\overline{X}) \geq f(S) + f(\varnothing) = f(S) + 2^n \tag{1}$$

これについて S のすべての部分集合にわたって総和をとる。

$$\sum_{X \subset S} \left(f(X) + f(\overline{X})\right) \geq \sum_{X \subset S} \left(f(S) + 2^n\right) \tag{2}$$

条件 (ii) より f は単射であり、X が S の部分集合全体 (2^n 個存在する) を動くとき、$f(X),\ f(\overline{X})$ は 1 以上 2^n 以下の整数全体を動く。よって式 (2) の左辺は、

$$\sum_{X \subset S} \left(f(X) + f(\overline{X})\right) = 2\sum_{k=1}^{2^n} k = 2^n(2^n + 1)$$

となる。式 (2) の右辺については、

$$\sum_{X \subset S} \left(f(S) + 2^n\right) = 2^n \left(f(S) + 2^n\right)$$

となる。以上により式 (2) は

$$2^n(2^n + 1) \geq 2^n\left(f(S) + 2^n\right) \Leftrightarrow 1 \geq f(S)$$

となり、$1 \leq f(S)$ であったから、$f(S) = 1$ である。このとき総和の不等式 (2) で等号が成立していることから、各 X に対しての式 (1) の不等式も等号が成り立っていなければならない。したがって $f(X) + f(\overline{X}) = 1 + 2^n$ を得る。 (証明終)
さらに次の補題を示す。

> **補題 082.2**
> 任意の S の部分集合 X, Y に対して次が成り立つ。
> $$f(X) + f(Y) = f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$$

(証明) 条件 (i) において X を $\overline{X}$ に、Y を $\overline{Y}$ にそれぞれおきかえて、

$$f(\overline{X}) + f(\overline{Y}) \geq f(\overline{X} \cup \overline{Y}) + f(\overline{X} \cap \overline{Y}) \tag{3}$$

補題 082.1 を用いると、$f(\overline{X}) + f(\overline{Y}) = (N - f(X)) + (N - f(Y))$。ここで $N = 2^n + 1$ とおいた。さらにド・モルガンの法則により、

$$\begin{aligned} f(\overline{X} \cup \overline{Y}) + f(\overline{X} \cap \overline{Y}) &= f(\overline{X \cap Y}) + f(\overline{X \cup Y}) \\ &= (N - f(X \cap Y)) + (N - f(X \cup Y)) \end{aligned}$$

以上を用いて式 (3) を整理すると、$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ を得るから、(i) の等号は常に成り立つ。 (証明終)
条件 (ii) により、f は全単射なので、$f(X) = i$ $(i = 1, 2, \ldots, 2^n)$ となる X はただひとつ存在する。このような X を S_i とし、また簡単のために $S_{2^n+1-i} = T_i$ とおく。$T_1 = S_{2^n} = \varnothing$ となる。ここで $X \cup Y = T_2$ かつ $X \cap Y = \varnothing$ となるような X, Y をとる[*24]と、

$$f(X) + f(Y) = f(T_2) + f(\varnothing) = 2^{n+1} - 1$$

となるから、$(f(X), f(Y)) = (2^n, 2^n - 1)$ の組み合わせしかありえない。すなわち、$(X, Y) = (T_1, T_2)$ である。このことは、T_2 の元の個数が 1 であることを示している ($\cdots$ ∗)。さらに次の補題を示す。

[*23] もう少し一般に、$3b^2 = 4c^2$ を満たすように b, c を選び、これによって得られる k に対して $\cos\theta_1 = 2/k$ となるように θ_1 を選べば、最小値を得られる。

[*24] このような (X, Y) を T_2 の '直和分割' という

補題 082.3
T_{2^k+1} $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ の元の個数は 1 である。

(証明) ある 0 以上 $n-2$ 以下の整数 i について、T_{2^k+1} $(k=0,1,2,\dots,i)$ の元の個数が 1 であると仮定する。任意の 1 以上 2^{i+1} 以下の整数 m について、$0 \leq m-1 \leq 2^{i+1}-1$ より集合 $\{0,1,2,\dots,i\}$ の部分集合 U_m がただ一つ存在して、$m-1=\sum_{t\in U_m}2^t$ のように 2 進展開される。$V=\bigcup_{t\in U_m}T_{2^t+1}$ とおく。$U_m=\{a_1,a_2,\dots,a_j\}$ とし、$f(X\cup Y)=f(X)+f(Y)-f(X\cap Y)$ を複数回用いて $f(V)$ を求める。ここで、どの 2 つの T_{2^k+1} についても、それぞれの元の個数が 1 であることから共通部分は $\varnothing$ となることに注意する。

$$\begin{aligned}
f(V) &= f\left(\bigcup_{t\in U_m-\{a_1\}}T_{2^t+1}\right)+f\left(T_{2^{a_1}+1}\right)-f(\varnothing)\\
&= f\left(\bigcup_{t\in U_m-\{a_1,a_2\}}T_{2^t+1}\right)\\
&\quad +f\left(T_2^{a_2}+1\right)+f\left(T_{2^{a_1}+1}\right)-2f(\varnothing)\\
&= \cdots\\
&= \sum_{t\in U_m}f(T_{2^t+1})-(j-1)f(\varnothing)\\
&= \sum_{t\in U_m}\left(f(T_{2^t+1})-f(\varnothing)\right)+f(\varnothing)\\
&= 2^n-\sum_{t\in U_m}2^t=2^n+1-m=f(T_m)
\end{aligned}$$

したがって、$V=\bigcup_{t\in U_m}T_{2^t+1}=T_m$ となることが示された (#)。
さて、m がとれる値は 2^{i+1} 個であって、集合 $\{0,1,2,\dots i\}$ の部分集合の個数も 2^{i+1} であるから、m を動かせば U_m は $\{0,1,2,\dots,i\}$ の部分集合全体を動く。よって、逆に T_m が T_{2^k+1} $(k=0,1,2,\dots,i)$ の和集合で表されるならば、$m\leq 2^{i+1}$ である (☆)。
さて、$X\cup Y=T_{2^{i+1}+1}$, $X\cap Y=\varnothing$ となる X,Y をとれば、

$$f(X)+f(Y)=2^{n+1}-2^{i+1}$$

となるから、X,Y の組としてありうるものは、

$$(X,Y)=(T_1,T_{2^{i+1}+1}),\ (T_2,T_{2^{i+1}}),\ \dots,\ (T_{2^{i+1}+1},T_1)$$

となるが、これらのうち最初と最後以外は全て不適である。なぜなら、それらの場合 $f(X),f(Y)\leq 2^{i+1}$ であるから X,Y はともに T_{2^t+1} $(t=0,1,2,\dots,i)$ らの和集合によって表されることがわかり (∵ #)、このとき $X\cup Y$ もそのような和集合によって表されることになるが、(☆) によって従う $2^{i+1}+1\leq 2^{i+1}$ は矛盾するため。よって $(X,Y)=(T_1,T_{2^{i+1}+1}),(T_{2^{i+1}+1},T_1)$ が得られ、(∗) と同様の議論によって、$T_{2^{i+1}+1}$ の元の個数も 1 である。
以上、(∗) により T_2 の元の個数が 1 であったことと合わせて、帰納法によって、補題 082.3 は示された。 (証明終)
補題 082.3 によって、(#) は次のように改められる。
$1\leq m\leq 2^n$ なる整数 m について、T_m は T_{2^k+1} $(k=0,1,2,\dots,n-1)$ らの和集合で表すことができる (##)。
すなわち、n 個の T_{2^k+1} に集合 $\{0,1,2,\dots,n-1\}$ の要素数 1 (n 個ある) の部分集合を割り当てるような $n!$ 個の f が必要条件になる。
このような f の十分性を確認する。$X=T_x$, $Y=T_y$ とし、$\{0,1,2,\dots,n-1\}$ の部分集合 U_x, U_y をとって、$x-1=\sum_{t\in U_x}2^t$, $y-1=\sum_{t\in U_y}2^t$ とする。さらに $V_x=\bigcup_{t\in U_x}T_{2^t+1}$, $V_y=\bigcup_{t\in U_y}T_{2^t+1}$ とおくと、補題 082.3 と同様の計算によって、

$$\begin{aligned}
f(V_x)&=2^n+1-x=f(T_x) &\Leftrightarrow&\quad V_x=T_x=X\\
f(V_y)&=2^n+1-y=f(T_y) &\Leftrightarrow&\quad V_y=T_y=Y
\end{aligned}$$

が得られた。さらに、

$$X\cup Y=\bigcup_{t\in U_x\cup U_y}T_{2^t+1},\quad X\cap Y=\bigcap_{t\in U_x\cap U_y}T_{2^t+1}$$

が成り立つ[*25]。よって、

$$f(X\cup Y)=2^n-\sum_{t\in U_x\cup U_y}2^t,\quad f(X\cap Y)=2^n-\sum_{t\in U_x\cap U_y}2^t$$

これらをもとの関数方程式に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned}
&f(X)+f(Y)\geq f(X\cup Y)+f(X\cap Y)\\
\Leftrightarrow\quad &\sum_{t\in U_x}2^t+\sum_{t\in U_y}2^t\leq\sum_{t\in U_x\cup U_y}2^t+\sum_{t\in U_x\cap U_y}2^t
\end{aligned}$$

が得られるが、この式は包除原理から明らかである。よって必要条件であった $n!$ 個の f はいずれも条件を満たす。
以上より、求める f の個数は $n!$ である。

Q.083 ★4 センター IIB 2017 (誘導抜き)

実数 α,β が、

$$0\leq\alpha<\beta\leq\pi$$
$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta=\frac{4}{15}$$
$$\cos\alpha\cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{15}}$$
$$|\cos\alpha|\geq|\cos\beta|$$

を満たす。$\cos\alpha$ と $\cos\beta$ の値を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.084 ★4◎

正の実数 x,y,z は、

$$x^{xyz}=y^2$$
$$y^{xyz+1}=z^3$$
$$z^{xyz+2}=x^4$$

を満たしている。x,y,z の組を全て求めよ。

$x=1$ のとき、第 1 式より $y^2=1$、よって $y=1$ が得られる。さらに第 2 式より $z^3=1$、よって $z=1$ が得られる。$x=y=z=1$ は第 3 式も満たすから、$(x,y,z)=(1,1,1)$ は解の 1 つになる。
$x\neq1$ とし、$xyz=A$ とする。このとき $A>0$ であるから $x^A\neq1$ なので $y\neq1$。さらに第 2 式で、$y^{A+1}\neq1$ であるから $z\neq1$。したがって第 1, 2, 3 式でそれぞれ x,y,z を底とする対数がとれるから、

$$A=2\log_x y,\quad A+1=3\log_y z,\quad A+2=4\log_z x$$

これらの辺々かけて

$$A(A+1)(A+2)=2\log_x y\cdot 3\log_y z\cdot 4\log_z x=24$$

が得られた。整理して $(A-2)(A^2+5A-12)=0$ で、$A>0$ なので $A=2$ である。もとの式に代入すれば

$$x^2=y^2,\quad y^3=z^3,\quad z^4=x^4$$

x,y,z は全て正の数であるから、$x=y=z$ となる。これを用いて $A=x^3=2$ によって $x=y=z=\sqrt[3]{2}$ と求まった。
以上より、求めるものは $(x,y,z)=(1,1,1),(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2})$

Q.085 ★8 京大 理系 (2017) 誘導抜

$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また、$\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。$\triangle ABC$ の内接円の半径の取り得る値の範囲を求めよ。

ここに解答を記述。

[*25] ∩ のほうは、T_{2^t+1} が要素数 1 の集合であるからこそ成り立つ式である

Q.086 ★4

$0 \le \theta \le 2\pi$ として、次の方程式を解け。

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta + \sin\theta = 2$$

$-1 \le \sin\theta \le 1$, $-1 \le \cos\theta \le 1$ より、

$$\sin^3\theta + \cos^3\theta \le \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

よって、

$$1 + \sin\theta \ge \sin^3\theta + \cos^3\theta + \sin\theta = 2$$

となってこれにより $\sin\theta \ge 1$ となるから、$\sin\theta = 1$ が必要である。このとき $\cos\theta = 0$ となっているから、この場合は解となる。よって求める θ は $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

Q.087 ★3 東北大 理系 (2019) 改題

実数を係数に持つ整式 $A(x)$ を x^2+1 で割った余りとして現れる整式を $[A(x)]$ と表す。

(1) $\left[[2x^2+5x+3][x^5-1]\right]$ を求めよ。

(2) 整式 $A(x), B(x)$ に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[A(x)B(x)] = [[A(x)][B(x)]]$$

(3) 実数 θ と自然数 n に対して、次の等式が成り立つことを示せ。

$$[(\cos\theta + x\sin\theta)^n] = \cos n\theta + x\sin n\theta$$

(4) 次の式を満たす実数 a, b の組を全て求めよ。

$$\left[(ax+b)^4\right] = -1$$

ツイートでも書いてるけど多項式を x^2+1 で割って余りを出す操作は「modx^2+1 において $x^2 \equiv -1$ である」という感じからもわかるように, x が虚数単位に対応した複素数の計算と全く同じです.

(1)

$(2i^2+2i+3)(i^5-1) = (1+2i)(i-1) = -3-i$ だから $-3-x$.

(2)

$A(x) = (x^2+1)Q(x) + (ax+b)$, $B(x) = (x^2+1)S(x) + (cx+d)$ と書いてしまって,

$$A(x)B(x) = (x^2+1)(\dots) + (acx^2 + adx + bcx + bd)$$

だが, 後半の括弧を再び x^2+1 で割れば $(ad+bc)x + (bd-ac)$ になる. これが (2) の左辺の値である. 右辺の値は $[(ax+b)(cx+d)]$ だから, 全く同じ.

(3)

ド・モアブルなので帰納法で示してください.

(4)

$(ai+b)^4 = -1$ なので $z^4 = -1$ なる複素数 z を求める問題とほとんど同じ. これは $z = \cos\theta + i\sin\theta$ $(\theta = \dfrac{k}{4}\pi;\ k = 1,3,5,7)$ だから, 単位円に頂点をもつ正方形で辺が軸に並行なものの頂点の複素数を挙げれば OK. それは $\dfrac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ なので

$$(a,b) = (\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad (\text{複合任意})$$

Q.088 ★3 工学院大 (1989)

半径 r の半球が地平面上にある。太陽が仰角 θ のとき、この半球により日陰になる部分の体積を求めよ。ただし、半球の内部は含まない。

ここに解答を記述。

Q.089 ★8 JMO 予選 1991 改題

自然数に対して定義される関数 f は、

$$f(1) = 1$$

$$f(2n) = f(n)$$

$$f(2n+1) = f(n) + 1$$

を満たしている。$1 \le k \le 114514$ における $f(k)$ の最大値、及びその時の k の値を全て求めよ。

$f(n)$ は n を 2 進数表示したときの 1 の桁の個数である $(\cdots\ *)$ ことを数学的帰納法により証明する。

与えられた条件によって、$n=1$ の場合は $(*)$ が成り立っている。

$1 \le k \le n$ なる任意の自然数 k で $(*)$ が成り立つことを仮定する。

$n+1$ の 2 進数表示を $a_m a_{m-1} \dots a_2 a_1$ とする。

$n+1$ が偶数ならば $a_1 = 0$ である。よって $\dfrac{n+1}{2}$ の 2 進数表示は $a_m a_{m-1} \dots a_2$ なので、$n+1$ と $\dfrac{n+1}{2}$ を 2 進数表示したときの 1 の個数は等しい。一方で与えられた条件によって $f(n+1) = f\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ であるから、$k = n+1$ が偶数のときにも $(*)$ は成り立つ。

$n+1$ が奇数ならば $a_1 = 1$ なので、n の 2 進数表示は $a_m a_{m-1} \dots a_2 0$。さらに $\dfrac{n}{2}$ の 2 進数表示は $a_m a_{m-1} \dots a_2$ なので、$n+1$ を 2 進数表示したときの 1 の個数は、$\dfrac{n}{2}$ のそれよりも 1 大きい。一方で与えられた条件によって $f(n+1) = f\left(\dfrac{n}{2}\right) + 1$ であるから、$k = n+1$ が奇数のときにも $(*)$ は成り立つ。

以上より任意の自然数 n において $(*)$ が成り立つことが示された。

さて、$114514 = 11011111101010010_2$ である。これは 17 桁であり、k は $\underbrace{11\dots11}_{17\text{ 個}}{}_2$ 未満なので、$f(k) < 17$ である。$f(k) = 16$ となる k を求める。このような k は、

$$k = \underbrace{11\dots11}_{17\text{ 個}}{}_2 - 1\underbrace{0\dots00}_{i\text{ 個}}{}_2 \quad (i = 0, 1, \dots, 16)$$

のように表される数に限られ、10 進法で $131071 - 2^i$ である。これが 114514 以下となる i は $i = 15, 16$ のみ[*26]で、このときの k は、$k = 98303, 65535$

Q.090 ★?

(1) 正の整数 n を 9 で割った余りは、n の十進法における各桁の総和を 9 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) 2^{29} は、9 桁の正の整数であり、すべての桁が異なっている。実際に計算することなく、0 以上 9 以下の整数のうち、2^{29} の桁には入っていない数字を求めよ。

(1)

n の 10 進法表示は、

$$n = \sum_{k=0}^{N} a_k 10^k \quad (\text{ただし } N \ge 0,\ a_k \in \{0, 1, \dots, 9\})$$

であるが、これの $\pmod 9$ を考えると、

$$n \equiv \sum_{k=0}^{N} a_k (10-9)^k = \sum_{k=0}^{N} a_k \pmod 9$$

となり、右辺は桁の数字の総和であるから題意は示された。

(2)

入っていない数字を a とおく。$a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ である。このとき 2^{29} の桁の総和は、

$$0 + 1 + 2 + \dots + 8 + 9 - a = 45 - a$$

である。一方で、

$$2^{29} = 8^9 \cdot 2^2 \equiv (-1)^9 \cdot 4 \equiv 5 \pmod 9$$

であるから、$45 - a \equiv 5 \pmod 9$ でなければならない。これを解くと $a \equiv 4 \pmod 9$ となり、$a \in \{0, 1, \dots, 9\}$ であるから、$a = 4$ である。

[*26] $131071 - 2^{14} = 114687$。114514 はこのギリギリを攻めた結果なのである。

Q.091 ★10 学コン 2017-11-6

$0<t<1$ を満たす定数 t と、$\triangle A_1A_2A_3$ に対して、線分 A_nA_{n+1} を $t:(1-t)$ に内分する点を A_{n+3} とする $(n=1,2,3,\cdots)$。$\lim_{n\to\infty} KA_n=0$ となるような、n によらない点 K は存在するか。存在するならば、$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{q}$ として、$\overrightarrow{A_1K}$ を $\overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{q}$, t で表せ。

ここに解答を記述。

Q.092 ★5 JMO 予選 2008-7

6 桁の平方数の上三桁として考えられるものは全部でいくつあるか。

自然数 n の 2 乗が 6 桁になるとき、

$$10^5\leq n^2<10^6 \quad\Leftrightarrow\quad 316<10^{\frac{5}{2}}\leq n<10^3=1000$$

であって、$316^2=99856$, $317^2=100489$, $999^2=998001$ なので、n は $317\leq n\leq 999$ の範囲を動く。

n^2 の上 3 桁を A_n とおく。ここで

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

$317\leq n\leq 499$ のときには $2n+1<1000$ なので、A_{n+1} は A_n か A_n+1 のいずれかである。したがって、$A_{317}=100\leq i\leq A_{500}=250$ を満たす任意の i について、$A_k=i$ を満たす k が 317 から 500 までの間に少なくとも一つ存在する。一方で $500\leq n\leq 998$ のときには、$2n+1>1000$ であるから、A_{n+1} は A_n+1 か A_n+2 のいずれかである。したがって、$501\leq n\leq 999$ における A_n は全て異なる値をとる。以上のことから A_n は、100 から 250 までの 151 通りに加え、$501\leq n\leq 999$ の場合の 499 通りが考えられるから、あわせて 650 通り。

Q.093 ★7 suiso_728600 様

n を自然数、p を素数とする。

$$n^{28}+2016\equiv 0 \pmod{p}$$

が解をもつような p は無限に存在することを示せ。

p が有限個しか存在しないとして, そのような p の集合を K とする。$p=2,3,7$ のとき, $n=2016$ が解になっているので $2,3,7\in K$ である。そこで, $L=K-\{2,3,7\}$ とおく。(2017 は素数であり, $p=2017$ のとき $n=1$ で解を持っているから $2017\in L$, つまり $L\neq\varnothing$.) 仮定より L は有限集合としているので, $L=\{p_1,\cdots,p_m\}$ とおき, $P=(42p_1p_2\cdots p_m)^{28}+2016$ とおく。[*27] P は L の中の任意の素数を約数として持たない。しかし, 2,3,7 の冪で表される数でもないから, P を素因数分解したときに現れる,2,3,7 でない素数 q であって, $q\notin K$ であるものがとれる. このとき,

$$n^{28}+2016\equiv 0 \pmod{q}$$

は $n=42p_1p_2\cdots p_m$ を解にもち, $q\notin K$ に矛盾する。よって K は無限集合。 □

Q.094 ★4 suiso_728660 様

半径 1 の円に内接する正 2016 角形に引ける対角線のうち、長さが 1 以上のものはいくつあるか。

ここに解答を記述。

Q.095 ★4 東大レベル模試

四角形 ABCD を底面とする四角錘 $\mathrm{O-ABCD}$ があり、$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=3\sqrt{2}$, $\mathrm{AB}=3$, $\mathrm{BC}=5$, $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ を満たす。この四角錘の体積を V とするとき、V の最大値を求めよ。

点 O から底面 ABCD へ垂線を下ろし、その足を H とする。ここで 4 つの三角形 $\triangle$AOH, $\triangle$BOH, $\triangle$COH, $\triangle$DOH は全て合同となる。これから AH = BH = CH = DH が従う。このことは、4 点 A, B, C, D が点 H を中心とする同一円周上にあることを意味する。

底面 ABCD を、$\triangle$ABC と $\triangle$CDA に分割して考える。与えられた条件から $\triangle$ABC は定まっていて、余弦定理を用いれば

$$\mathrm{CA}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CA}\cdot\cos 120^\circ \quad\therefore\quad \mathrm{CA}=7$$

である。また面積は、

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin 120^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$$

である。一方、正弦定理を用いれば、

$$\frac{7}{\sin 120^\circ}=2\mathrm{AH} \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{AH}=\frac{7}{\sqrt{3}}$$

であり、これよりさらに $\mathrm{OH}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AH}^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ と求まる。

四面体 $\mathrm{O-ABCD}$ の体積を最大にするためには、$\triangle$CDA の面積が最大となればよい。CA = 7 を底辺と見れば、点 D までの高さが最大となるように D を取ればよい。点 D は円周上を動くから、CA の垂直 2 等分線上にとれば高さを最大とできる。$\angle\mathrm{CDA}=60^\circ$ であるから、このとき DC = DA = 7 で、$\triangle\mathrm{CDA}=\dfrac{49}{4}\sqrt{3}$ となる。

以上のことから、体積 V の最大値は

$$V=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\left(\frac{15}{4}\sqrt{3}+\frac{49}{4}\sqrt{3}\right)=\frac{16}{3}\sqrt{5}$$

Q.096 ★7 京大実戦

座標平面上の 2 つの曲線 (または直線) C_1: $y=ax^2+bx$、C_2: $y=e^{-x}$ が第一象限の点 P において共通の接線を持つという。C_1 と x 軸で囲まれた領域の面積が最大となるときの実数 a,b を求めよ。

まず、$a=0$ のときは、C_1 は直線 $y=bx$ となる。$b\leq 0$ のとき、明らかに C_1 と C_2 は第一象限に共有点を持たないので不適。$b>0$ のとき、C_1 において $y'=b>0$ だが、C_2 において $y'=-e^{-x}<0$ となって、明らかに共通の接線を持てないのでやはり不適。

$a\neq 0$ のとき、C_1 は点 $(0,0)$, $\left(-\dfrac{b}{a},0\right)$ を通る放物線である。$a>0$ のとき、これは下に凸であり、グラフを考えれば、第一象限内では常に単調増加である。よって同様の議論から、これは C_2 と共通の接線を持ち得ない。したがって、$a<0$ のみが適する。

以降 $a<0$ で考える。$b\leq 0$ のとき、C_1 は第一象限を通らないので不適。よって $b>0$。これによって、C_1 と x 軸が囲む領域の面積は、

$$\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)\,dx=\int_0^{-\frac{b}{a}}ax\left(x+\frac{b}{a}\right)\,dx=-\frac{a}{6}\left(-\frac{b}{a}-0\right)^3=\frac{b^3}{6a^2}$$

これの最大値を考える。

点 P の x 座標を p (ただし $p>0$) とおく。この点において、C_1, C_2 が共通の接線を持つことは、

$$ap^2+bp=e^{-p} \quad かつ \quad 2ap+b=-e^{-p}$$

である。第 2 式の両辺に p を乗じ、bp, ap^2 をそれぞれ消去すると、

$$a=-\frac{1+p}{p^2}e^{-p},\ b=\frac{2+p}{p}e^{-p} \quad \cdots(*)$$

を得る。これを用いて、

$$\frac{b^3}{6a^2}=\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}e^{-p}$$

となった。右辺を p の関数とみて $f(p)$ とおく。ここで任意の正の実数 p について、$(*)$ によって得る a,b が C_2 と共通の接線を持つ C_1 を作るから、$f(p)$ の定義域は正の実数全体としてよい。$f(p)$ を微分して、

$$\begin{aligned} f'(p)&=\left\{\left[\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}\right]'-\frac{p(2+p)^3}{6(1+p)^2}\right\}e^{-p}\\ &=-\frac{(p-1)(p+2)^2(p^2+2p+2)}{6(p+1)^3}e^{-p}\end{aligned}$$

より、$0<p<1$ で $f'(p)>0$、$f'(1)=0$、$p>1$ で $f'(p)<0$ だから、$f(p)$ は $p=1$ で最大となる。

したがって求める a,b の値は、$(*)$ に $p=1$ を代入して、

$$a=-\frac{2}{e},\ b=\frac{3}{e}$$

[*27] たとえ $L=\varnothing$ だとしても,L の元のすべての積を 1 とおいて, $P=42^{28}+1$ とすれば問題ない

Q.097 ★5 ドイツ TST (1977) 誘導追加

$N = 4444^{4444}$ の各桁の数の和を A、A の各桁の数の和を B、B の各桁の数の和を C とする。なお、桁は十進法で考える。
(1) $A < 200000$ を示せ。
(2) $C \leq 12$ を示せ。
(3) $N - C$ は 9 の倍数であることを示せ。
(4) C を求めよ。

(1)

$$4444^{4444} < 10000^{4444} = 10^{17776}$$

より、N の桁の個数は 17776 個以下である。桁の個数が 17776 個以下で各桁の和が最も大きくなるのは、$\underbrace{99\ldots99}_{17776\text{ 個}}$ なので、

$$A \leq 9 \times 17776 = 159984 < 200000$$

(2)

200000 未満の数であって、各桁の和が最も大きくなるのは 199999 のときで、このときの各桁の数の和は 46 であるから、$B \leq 46$。さらに、46 以下の数であって、各桁の数の和が最も大きくなるのは 39 のときで、このときの各桁の数の和は 12 であるから、$C \leq 12$ が示された。

(3)

一般にある自然数 a について、桁の個数を k、10^i の位の数字を a_i とおくと、

$$\begin{aligned} a &= 10^0 a_0 + 10^1 a_1 + 10^2 a_2 + \cdots + 10^{k-1} a_{k-1} \\ &= 9 \times (1a_1 + 11a_2 + \cdots + \underbrace{11\ldots11}_{k-1\text{ 個}} a_{k-1}) \\ &\quad + (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) \end{aligned}$$

となるから、ある自然数と、その各桁の数の和を 9 で割った余りはそれぞれ等しい。
したがって、N, A, B, C は、すべて 9 で割った余りが等しい。よって $N - C$ が 9 の倍数であることが示された。

(4)

$N = 4444^{4444}$ を 9 で割った余りを考える。

$$4444^{4444} \equiv (-2)^{3\times1481+1} \equiv (-2) \times 1^{1482} \equiv 7 \pmod 9$$

これによって、C は 1 以上 12 以下でかつ 9 で割った余りが 7 となるような数だから、$C = 7$。
[*28]

Q.098 ★10 juniormemo 様

正の実数 x, y, z について、

$$x^2 + xy + y^2 = 16$$
$$y^2 + yz + z^2 = 25$$
$$z^2 + zx + x^2 = 36$$

であるとき、$x + y + z$ の値を求めよ。

$x + y + z = s$ とおく。$t = xy + yz + zx$ として条件式の総和を取ると, ($x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - 2t$ から)

$$77 - 2s^2 = -3t$$

を得る。また, 条件式を各辺引いたりすると

$$(z - x)s = 25 - 16 = 9$$
$$(x - y)s = 36 - 25 = 11$$
$$(z - y)s = 36 - 16 = 20$$

の 3 式を得る。

$$(z-x)^2 = 36 - 3zx, (x-y)^2 = 16 - 3xy, (z-y)^2 = 25 - 3zy$$

なので, 先の 3 式をそれぞれ 2 乗することで

$$(36 - 3zx)s^2 = 81$$
$$(16 - 3xy)s^2 = 121$$
$$(25 - 3zy)s^2 = 400$$

を得る。

$$77s^2 - 3s^2 t = 602$$

となる。ところで, $77 - 2s^2 = -3t$ であったから

$$77s^2 + (77 - 2s^2)s^2 = 602$$

となり, 整理すると $s^4 - 77s^2 + 301 = 0$ を得るので,s^2 の二次方程式とみて

$$s^2 = \frac{77 \pm 15\sqrt{21}}{2}$$

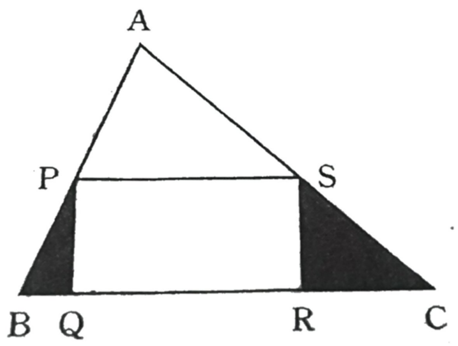
を得る。このとき, $-3t = 77 - 2s^2 = \mp 15\sqrt{21}$ であって, $x, y, z > 0 \Rightarrow t > 0$ なので $-3t < 0$ が必要であるため $s^2 = \dfrac{77 + 15\sqrt{21}}{2}$ のほうが適している。$s > 0$ なので,

$$s = \sqrt{\frac{77 + 15\sqrt{21}}{2}}$$

である。[*29]

Q.099 ★1 高校入試

図のように、$\triangle ABC$ の辺 AB 上に点 P、辺 BC 上に点 Q, R、辺 CA 上に点 S を、四角形 $PQRS$ が長方形となるようにとる。黒く塗られた 2 つの三角形が相似になるとき、$\triangle ABC$ の形状を全て答えよ。



ここに解答を記述。

Q.100 ★8 suiso_728660 様

100 人の田中が同じスタート地点から体育館を永遠に周回する。田中$_n$ ($1 \leq n \leq 100, n \in \mathbb{N}$) が体育館を 1 周するのにかかる時間は n とする。このとき、どの田中に自分から半周離れた場所の他の 99 人の田中が位置するような孤独な瞬間が訪れるか。

体育館の 1 周の長さを 1 とし、田中$_n$ の速さは $\dfrac{1}{n}$ としてよい。スター

[*28] 編者註: はてなブログを参照しつつ、追加された誘導に合うように一部修正・追加しました

[*29] これは 3 辺が 4,5,6 の三角形の「フェルマー点」からの各頂点の距離の和という幾何的解釈もできるが, 代数的にやるほうがいい気がする。ところで, 一般に三角形の内点 I で, I からの各頂点の距離の和が最小化されるのは I がフェルマー点であるときという事実があり, この問題はその最小値を求める問題だったのである。幾何の疑問を代数で考えた一問である。

トの時刻を $t=0$ として、時刻 $t=t_1$ のときの 田中$_n$ が移動した距離は $\dfrac{t_1}{n}$ である。
体育館の周上の位置を 0 以上 1 未満の実数で表現することにすれば、時刻 $t=t_1$ における 田中$_n$ の位置は、$\left\{\dfrac{t_1}{n}\right\}$ と表される。なお、$\{x\}$ で実数 x の小数部分を表すものとする。
さて、田中$_1$ と 田中$_2$ が集合する時刻の条件を考えると、$\{t\}=\left\{\dfrac{t}{2}\right\}$ であるが、これは $t-\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{2}$ が整数であることに同値で、すなわち t は 2 の倍数である。また、このときこの 2 人の田中はともにスタート地点にいる。このことから、田中$_1$ と 田中$_2$ の 2 人が集合するのはスタート地点のみである。
続いて、田中$_4$ と 田中$_8$ が集合する時刻の条件を考えると、$\left\{\dfrac{t}{4}\right\}=\left\{\dfrac{t}{8}\right\}$ であるが、これは $\dfrac{t}{4}-\dfrac{t}{8}=\dfrac{t}{8}$ が整数であることに同値で、すなわち t は 8 の倍数である。また、このときこの 2 人の田中はともにスタート地点にいる。このことから、田中$_4$ と 田中$_8$ の 2 人が集合するのはスタート地点のみである。
孤独な田中の番号を m とする。田中$_n$ は、時刻 $t=nj$ (ただし j は 0 以上の整数) のときに限りスタート地点にいるので、田中$_m$ を除いた 99 人の田中は、

$$\text{時刻 } t=j\times \mathrm{lcm}(1,2,\dots,m-1,m+1,\dots,100)$$

においてスタート地点に集合する。このとき、田中$_1$ と 田中$_2$、田中$_4$ と 田中$_8$ の 2 組のうち少なくとも一方はスタート地点に集合している。これらの集合はスタート地点に限られていたのであるから、この 99 人の集合もスタート地点に限られることがわかる。
$L_m=\mathrm{lcm}(1,2,\dots,m-1,m+1,\dots,100)$ とおく。時刻 $t=L_mj$ のときの 田中$_m$ の位置は、$\left\{\frac{L_mj}{m}\right\}$ なので、求める m は、ある 0 以上の整数 j を用いて $\left\{\dfrac{L_m}{m}\right\}=\dfrac{1}{2}$ となるような m である。さらに整理して、$\dfrac{L_mj}{m}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2L_mj-m}{2m}$ が整数となる j が存在するような m を求めることを考える。
$m=64$ の場合を考える。64 を除いた 1 以上 100 以下の整数は、2 で高々 5 回しか割り切れない。そのため $L_{64}=32l$ (ただし l は奇数) と書ける。よって $\dfrac{2L_{64}j-64}{128}=\dfrac{lj-1}{2}$ は、ある奇数 j を用いれば整数とできる。よって 田中$_{64}$ は題意を満たす。
$m\neq 64$ の場合、m は 2 で高々 6 回しか割り切れないから、$m=2^ab$ (ただし $0\leq a\leq 6$ でかつ b は奇数) と表せるが、一方で L_m は 64 の倍数であるから $L_m=64c$ とすると、

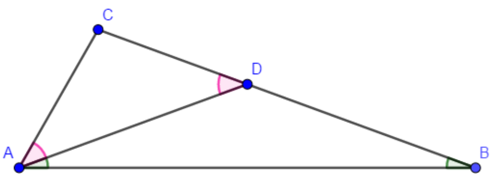
$$\frac{2L_mj-m}{2m}=\frac{2^7cj-2^ab}{2^{a+1}b}=\frac{2^{7-a}cj-b}{2b}$$

が得られる。ここで $7-a\geq 1$ によって、右辺の分子は j にかかわらず奇数であるから、これは整数でない。よって 田中$_{64}$ 以外は題意を満たさない。
以上より孤独な田中は、田中$_{64}$。

Q.101 ★? 駿台理系添削指導

> $\triangle$ABC において、$\angle$A $=3\angle$B, AB $=\sqrt{3}$ で、BC, AC の長さはともに整数である。BC, AC の長さを求めよ。

$\angle B=\theta$ とおく。$\triangle$ABC の内角はすべて正かつ和が π を超えないことから、$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ である。辺 BC 上に点 D を、$\angle$BAD $=\theta$ となるようにとる。このとき、$\triangle$DAB は $\angle$DAB $=\angle$DBA $=\theta$ なる二等辺三角形で、$\triangle$CAD は $\angle$CAD $=\angle$CDA $=2\theta$ なる二等辺三角形である。



AC $=$ CD が整数、BC も整数であることから、BD $=$ AD も整数である。AD $=$ BD $=n$, AC $=$ DC $=m$ とおく。$\sin\angle\mathrm{ACD}=\sin(\pi-4\theta)=\sin 4\theta$ となることを踏まえて、正弦定理によって、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 2\theta}=\frac{n}{\sin\theta}\quad\Leftrightarrow\quad\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2n}$$

$$\frac{m}{\sin 2\theta}=\frac{n}{\sin 4\theta}\quad\Leftrightarrow\quad\cos 2\theta=\frac{n}{2m}$$

倍角公式を用いてさらに整理すると、

$$\frac{3}{2n^2}-1=\frac{n}{2m}\quad\Leftrightarrow\quad m(3-2n^2)=n^3$$

を得る。m,n はともに正の整数だから、$3-2n^2>0$ でなければならない。これを満たす正の整数は $n=1$ のみ。このとき $m=1$ とわかる。
以上より、BC $=m+n=2$, AC $=m=1$。

Q.102

> (1) 2016 の正の約数の逆数和を求めよ。 ★1 (suiso_728660 様)
> (2) 元号の平成が永遠に続くとしたとき、平成 m 年の m が西暦年 n の約数になるような n を求めよ。 ★1
> (3) 2016 の正の約数 n で、n の正の約数の総和が 2016 になるものを求めよ。 ★3 (名大 文系)

(1)

まず、$2016=2^5\times 3^2\times 7$ である。求めるものは、

$$\sum_{d|2016}\frac{1}{d}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{32}\right)\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1-\frac{1}{7}}$$

$$=\frac{\frac{63}{64}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{48}{49}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}}=\cdots=\frac{13}{4}$$

(2)

未完。ここに解答を記述。

(3)

ここに解答を記述。

Q.103 ★? suiso_728660 様

> 2016 桁の自然数 n がある。n の上 1008 桁を A、下 1008 桁を B としたとき、n は、A, B, $A+B$, AB の公倍数であるという。このような n を全て求めよ。

ここに解答を記述。

Q.104 ★6 Benelux (2013)

> 関数 f は任意の実数に対して定義され、実数値をとる。任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して、
> $$f(x+y)+y\leqq f\left(f\left(f(x)\right)\right)$$
> が成り立つとき、f を全て求め、それが必要十分であることを示せ。

$z=x+y$ とおくと与式は、

$$f(z)+z\leq f\left(f\left(f(x)\right)\right)+x$$

と書ける。任意の実数 x,z についてこれを満たす関数 f を求めればよい。
$z=f\left(f(x)\right)$ とすれば、

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)+f\left(f(x)\right)\leq f\left(f\left(f(x)\right)\right)+x\quad\Leftrightarrow\quad f\left(f(x)\right)\leq x$$

を得る。ここで x を $f(x)$ に置き換えれば、$f\left(f\left(f(x)\right)\right)\leq f(x)$ を得る。これによって

$$f(z)+z\leq f\left(f\left(f(x)\right)\right)+x\leq f(x)+x$$

となった。すなわち、任意の実数 x,z について、$f(z)+z\leq f(x)+x$ である。x と z を入れ替えた $f(x)+x\leq f(z)+z$ も成り立つから、結局 $f(z)+z=f(x)+x$ である。$z=0$ として、$f(x)+x=f(0)+0$ となる。$f(0)=c$ とおくと $f(x)=c-x$ となって、これが必要条件である。

逆に、ある実数 c を用いて $f(x)=c-x$ なる関数は、

$$f(x+y)+y=c-(x+y)+y=c-x$$
$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=c-\left(c-(c-x)\right)=c-x$$

となるから題意を満たす。
以上より求める関数は、$f(x)=c-x$。ただし c は実数。

Q.105　Cauchy-Schwarz の不等式

(1) 実数 x, y が $x>0,\ y>0,\ x+y=6$ を満たす。このとき、不等式

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geqq \frac{200}{9}$$

を証明せよ。また、等号が成立するのはいつか。

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a, b>0)$ 上にある点 $P(s, t)$ に対して、$s+t$ の最大値、最小値を求めよ。

(3) 歪んださいころを 2 回続けて投げるとき、同じ目が 2 回続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ より大きいことを示せ。ただし、さいころが歪んでいるとは、$1, 2, 3, 4, 5, 6$ の目が同様に確からしく出ないことをいう。(信州大 2015, 京都大 1979)

(4) x, y が実数のとき、$\dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$ の最大値を求めよ。(東大実戦 理系 2016, 東大院試 2012)

(5) a, b, c を負でない実数とする。負でない全ての実数 x に対して、不等式

$$(ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a) \geq (a+b+c)^2x^2$$

を証明せよ。(Titu Andreesce, Gazeta Mathematica)

(6) $a_1, a_2, \cdots, a_n,\ b_1, b_2, \cdots, b_n$ は実数で、

$$a_1^2+b_2^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2=1$$

を満たすとき、不等式

$$(a!b_2-a_2b_1) \leq 2\left|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n-1\right|$$

を証明せよ。(Korea MO 2002)

未完。

(1)

Caushy-Schwarz の不等式より、

$$\begin{aligned}
&(1^2+1^2)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\right\}\\
\geqq&\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}^2=\left(6+\frac{6}{xy}\right)^2
\end{aligned}$$

$x, y>0$ より、相加相乗不等式を用いて、$\dfrac{x+y}{2}=3 \geqq \sqrt{xy}$ なので、$0<xy \leqq 9$ となる ($x=y=3$ のときに $xy=9$ が実現する)。
よって、$6+\dfrac{6}{xy} \geqq 6+\dfrac{6}{9}=\dfrac{20}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned}
&(1^2+1^2)\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2\right\}\\
\geqq&\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)\right\}^2=\left(6+\frac{6}{xy}\right)^2\\
\geqq&\left(\frac{20}{3}\right)^2=\frac{400}{9}
\end{aligned}$$

より、2 で割って

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2 \geqq \frac{200}{9}$$

が示された。等号が成立するのは、$xy=9$ かつ $1:1=\left(x+\dfrac{1}{x}\right):\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$ のときであって、$x=y=3$ の場合である。

(2)

ここに解答を記述。

(3)

ここに解答を記述。

(4)

ここに解答を記述。

(5)

ここに解答を記述。

(6)

ここに解答を記述。

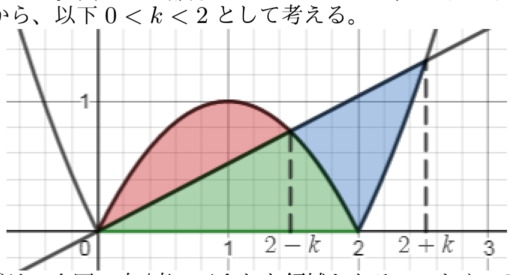
Q.106　★3◎ 富山県立大 (2009)

k は定数で、$0<k<2$ とする。直線 $y=kx$ と曲線 $y=\left|x^2-2x\right|$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しいとき、k の値を求めよ。

曲線 $y=\left|x^2-2x\right|$ は、$x<0,\ x>2$ のとき $y=x^2-2x$、$0 \leq x \leq 2$ のとき $y=-x^2+2x$ と表される。$y=kx$ と $y=\pm x^2 \mp 2x$ との交点の x 座標は、$x=0, 2\pm k$ (複合同順) であることを踏まえると、直線 $y=kx$ と $y=\left|x^2-2x\right|$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned}
&x=0, 2+k && k<-2, k \geq 2\text{のとき}\\
&x=0 && -2 \leq k<0\text{のとき}\\
&x=0, 2 && k=0\text{のとき}\\
&x=0, 2-k, 2+k && 0<k<2\text{のとき}
\end{aligned}$$

とまとめられる。囲まれた部分が 2 つとなるのは、$0<k<2$ の場合のみであるから、以下 $0<k<2$ として考える。



2 つの領域は、上図の赤/青で示された領域となる。これらの面積が等しいためには赤 + 緑、と青 + 緑の面積が等しければよいので、

$$\text{赤}+\text{緑}=\int_0^2 -(x^2-2x)\,dx=\frac{1}{6}(2^3-0^3)=\frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{青}+\text{緑}&=\int_0^{2+k} kx\,dx-\int_2^{2+k}(x^2-2x)\,dx\\
&=\left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{2+k}-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^{2+k}=\frac{1}{6}(2+k)^3-\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

これらの面積が等しくなるような k は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}(2+k)^3-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\\
\Leftrightarrow\quad&(2+k)^3=16\\
\Leftrightarrow\quad&k=2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)
\end{aligned}$$

Q.107　★6 奈良県医大 (2015)

四角形 ABCD がある。その内部の点を P とし、辺 AB, BC, CD, DA またはそれらの延長に、垂線 PE, PF, PG, PH を下ろす。点 P の位置によらず、PE + PG = PF + PH が成り立つとき、四角形 ABCD はひし形であることを示せ。

ここに解答を記述。

Q.108 ★11 大数 宿題

自然数 n とし、整数 a,b,c は、$|a|,|b|,|c|\leq n$ を満たす。x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解を持つ確率を p_n としたとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n$ の値を求めよ。

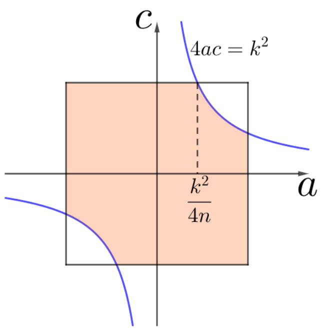
-1 以上 n 以下の整数 3 つの組 (a,b,c) は全部で $(2n+1)^3$ 個あるが、そのうち方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解を持つものの個数を W_n、このうちさらに $a,b\neq 0$ を満たすものの個数を V_n とおく[30]。

$$p_n=\frac{W_n}{(2n+1)^3},\ V_n\leq W_n\leq V_n+2(2n+1)^2$$

である。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)^2}{(2n+1)^3}=0$ より、はさみうちの原理によって

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(2n+1)^3}$$

となる (ただし右辺の極限値が存在するならば) 。
$a\neq 0$ では $ax^2+bx+c=0$ は 2 次方程式であり、これが実数解を持つことは判別式 b^2-4ac が 0 以上であることと同値である。$b^2\geq 4ac$ かつ $a\neq 0$ となる組のうち、$b=k$ を満たすものの個数と $b=-k$ を満たすものの個数は等しく (ただし $1\leq k\leq n$)、この値を S_k とおけば、$\displaystyle V_n=2\sum_{k=1}^{n}S_k$ となる。



S_k $(1\leq k\leq n)$ は、$-n\leq a,c\leq n,\ a\neq 0,\ 4ac\leq k^2$ を満たす (a,c) の組である。このうち $ac\leq 0$ を満たすものの個数は、$a>0,\ c\leq 0$ の場合と、$a<0,\ c\geq 0$ の場合を数えることで、$2n(n+1)$ 個とわかる。$ac>0$ を満たすものは、$a,c>0$ の場合と $a,c<0$ の場合に分けられるが、a,c の符号を入れ替えることで両者の個数は等しいことがわかる。この値を T_k とおけば、

$$S_k=2T_k+2n(n+1)$$

となる。$1\leq a\leq\dfrac{k^2}{4n}\,(<n)$ のとき、条件を満たす c は $c=1,2,\ldots,n$ であり、$\dfrac{k^2}{4n}<a\leq n$ のとき、条件を満たす c は $c=1,2,\ldots,\left\lfloor\dfrac{k^2}{4a}\right\rfloor$ である。よって、

$$T_k=\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor\cdot n+\sum_{a=\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}^{n}\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor$$

となる。これを評価する。第 1 項については、

$$\frac{k^2}{4n}-1\leq\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor\leq\frac{k^2}{4n}$$

であるから、

$$\frac{k^2}{4}-n\leq\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor\cdot n\leq\frac{k^2}{4}$$

続いて第 2 項を上から評価する。$a\geq\left\lfloor\dfrac{k^2}{4n}\right\rfloor+2\,(\geq 2)$ のとき、$\dfrac{k^2}{4x}\,(x>0)$ が単調減少であることから、

$$\left\lfloor\frac{k^2}{4a}\right\rfloor\leq\frac{k^2}{4a}\leq\int_{a-1}^{a}\frac{k^2}{4x}\,dx$$

となるので、

$$\begin{aligned}\sum_{a=\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}^{n}\left\lfloor\frac{k^2}{4a}\right\rfloor&\leq\sum_{a=\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+2}^{n}\left\lfloor\frac{k^2}{4a}\right\rfloor+n\\&\leq\int_{\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}^{n}\frac{k^2}{4x}\,dx+n\leq\int_{\frac{k^2}{4n}}^{n}\frac{k^2}{4x}\,dx+n\\&=\frac{k^2}{4}\left(\log n-\log\frac{k^2}{4n}\right)+n=-\frac{k^2}{2}\log\frac{k}{2n}+n\end{aligned}$$

を得る。次に下から評価する。

$$\left\lfloor\frac{k^2}{4a}\right\rfloor\geq\frac{k^2}{4a}-1\geq\int_{a}^{a+1}\frac{k^2}{4x}\,dx-1$$

であるから、

$$\begin{aligned}\sum_{a=\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}^{n}\left\lfloor\frac{k^2}{4a}\right\rfloor&\geq\int_{\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}^{n+1}\frac{k^2}{4x}\,dx-n\\&=\int_{\frac{k^2}{4n}}^{n+1}\frac{k^2}{4x}\,dx-\int_{\frac{k^2}{4n}}^{\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}\frac{k^2}{4x}\,dx-n\\&\geq\int_{\frac{k^2}{4n}}^{n+1}\frac{k^2}{4x}\,dx-\int_{\frac{k^2}{4n}}^{\left\lfloor\frac{k^2}{4n}\right\rfloor+1}n\,dx-n\\&\geq-\frac{k^2}{2}\log\frac{k}{2n}-2n\end{aligned}$$

を得る。以上から T_k は

$$\left|T_k-\frac{k^2}{4}\left(1-2\log\frac{k}{2n}\right)\right|\leq 3n$$

と評価される。したがって、

$$V_n=2\sum_{k=1}^{n}S_k=4\sum_{k=1}^{n}T_k+4n^2(n+1)$$

であることとあわせて、

$$\left|V_n-\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\left(1-2\log\frac{k}{2n}\right)+4n^2(n+1)\right)\right|\leq 12n^2$$

を得る。区分求積法により、

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\left(1-2\log\frac{k}{2n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^3}{(2n+1)^3}\cdot\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2n}\right)^2\left(1-2\log\frac{k}{2n}\right)\\=&\int_0^{\frac{1}{2}}x^2(1-2\log x)\,dx\\=&\left[\frac{x^3}{3}(1-2\log x)\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^3}{3}\left(-\frac{2}{x}\right)\,dx\\=&\left[\frac{x^3}{3}\left(\frac{5}{3}-2\log x\right)\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{24}\left(\frac{5}{3}+2\log 2\right)=\frac{5}{72}+\frac{\log 2}{12}\end{aligned}$$

と求まる[31]。続いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2(n+1)}{(2n+1)^3}=\frac{1}{2}$ である。

最後に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2}{(2n+1)^3}=0$ であるからはさみうちの原理が適用できて、

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(2n+1)^3}=\left(\frac{5}{72}+\frac{\log 2}{12}\right)+\frac{1}{2}=\frac{41}{72}+\frac{\log 2}{12}$$

Q.109

四面体 $OABC$ で、頂点 A,B,C から対面へ下ろした垂線が、対面の以下の点を通るとき、$OABC$ の形状を答えよ。
(1) 重心 ★5 (京大文)
(2) 外心 ★4 (京大理)
(3) 内心 ★5 (学コン)

(1)

ここに解答を記述。

[30] いただいた文献ではこれを W_n' としていました。

[31] ここで $x^2\log x$ や $x^3\log x$ は $x=0$ において 0 となるものとして計算している。こう定義しておけば $x\geq 0$ において連続な関数になる。

(2)

ここに解答を記述。

(3)

ここに解答を記述。

Q.110 ★7 自作 DMO4.5th

1 つのさいころを n 回 (n は 2 以上の整数) 連続して投げ、出た目を順番に $d_1, d_2, \ldots, d_n$ とする。 $d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq \cdots \neq d_n \neq d_1$ を満たす確率を求めよ。

さいころを n 回振って、事象 A_n, B_n を、

A_n: $d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n \neq d_1$ となる。
B_n: $d_1 \neq d_2 \neq \cdots \neq d_n = d_1$ となる。

によって定める。また、事象 A_n, B_n が起こる確率を p_n, q_n とする。
n 回までさいころを振った結果と、$n+1$ 回目の結果から漸化式を導く。
(i) A_n のとき、$d_{n+1} = d_1$ なら、B_{n+1} となる。
(ii) A_n のとき、$d_{n+1} \neq d_n$ かつ $d_{n+1} \neq d_1$ なら、A_{n+1} となる。
(iii) B_n のとき、$d_{n+1} \neq d_n = d_1$ なら、A_{n+1} となる。
以上から、2 以上の n について、

$$\begin{cases} p_{n+1} = \dfrac{2}{3}p_n + \dfrac{5}{6}q_n \\ q_{n+1} = \dfrac{1}{6}p_n \end{cases}$$

を得るから、p_n についての以下の漸化式を得る。

$$p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{5}{6}q_{n+1} = \frac{2}{3}p_{n+1} + \frac{5}{36}p_n \qquad (\text{ただし } n \geq 2)$$

ここで、A_2 は $d_1 \neq d_2$ となる事象であるからその確率は $p_2 = \dfrac{5}{6}$。A_3 は、$d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_1$ となる事象であるから、(d_1, d_2, d_3) の組は 6 つの目から異なる 3 つの目を選んで並べる順列に相当するので、その場合の数は ${}_6\mathrm{P}_3 = 120$。よって $p_3 = \dfrac{120}{216} = \dfrac{5}{9}$。
さて漸化式は、特性方程式 $x^2 - \dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{36} = 0$ の解 $x = \dfrac{5}{6}, -\dfrac{1}{6}$ を用いて、

$$\begin{cases} p_{n+2} - \dfrac{5}{6}p_{n+1} = -\dfrac{1}{6}\left(p_{n+1} - \dfrac{5}{6}p_n\right) \\ p_{n+2} + \dfrac{1}{6}p_{n+1} = \dfrac{5}{6}\left(p_{n+1} + \dfrac{1}{6}p_n\right) \end{cases}$$

とできるので、$n \geq 3$ の範囲において、

$$\begin{cases} p_{n+1} - \dfrac{5}{6}p_n = \left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n-2}\left(p_3 - \dfrac{5}{6}p_2\right) = -5\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n \\ p_{n+1} + \dfrac{1}{6}p_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-2}\left(p_3 + \dfrac{1}{6}p_2\right) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n \end{cases}$$

が得られた。よって $n \geq 3$ においては $p_n = \left(\dfrac{5}{6}\right)^n + 5\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ となる。しかし $\left(\dfrac{5}{6}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{5}{6} = p_2$ となるから、これは $n = 2$ でも成り立つ。よって、

$$p_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n + 5\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

Q.111 ★3

互いに異なる $n(\geq 3)$ 個の正の数の集合 S が次の性質を持っている。
性質: S から相異なる元 a, b をとれば、$a - b \in S$ または $b - a \in S$ のいずれか一方が成立する。
このとき、S の元を上手く並べると、等差数列を作ることができることを示せ。

S から最小の元 m を取る。$a \in S - \{m\}$ に対して, $a = qm + r$ (q は 0 以上の整数, $0 \leqq r < m$) と書ける。m の最小性より $a > m$ だから, $m - a$ は正でないので $m - a \notin S$ である。よって条件より

$$a - m = (q-1)m + r \in S$$

である。$q \geqq 2$, つまり $a - m > m$ であるなら, この議論を繰り返すことができ $a - 2m \in S$. 以下同様に繰り返せば $a - (q-1)m = m + r \in S$ となる。もし $r > 0$ であるなら, 更に同様の議論を行うことができて $(m+r) - m = r \in S$ となるが, $r < m$ なので m の最小性に矛盾する。よって $r = 0$ でなければならず, $a = qm$ と書ける。つまり, S の元は必ず m の自然数倍で書けることになる。
S の元は n 個だから, S に最大元 dm (d は n より大きい整数) がある。$a = dm, b = m$ として条件を適用すれば $(d-1)m, (d-2)m, \cdots, m$ が S に属することが分かり, これらは異なる S の元であることと S が n 個の元からなることより $d = n$ である。つまり,

$$S = \{m, 2m, \cdots, nm\}$$

なので, S の元は等差数列をなす。 □

Q.112 ★? センター IA (2016)

N 市では温度の単位として摂氏 (^circC) のほかに華氏 (°F) も使われている。華氏 (°F) での温度は、摂氏 (°C) での温度を $\dfrac{9}{5}$ 倍し、32 を加えると得られる。例えば、摂氏 10°C は、$\dfrac{9}{5}$ 倍し 32 を加えることで華氏 50°F となる。
したがって、N 市の最高気温について、摂氏での分散を X、華氏での分散を Y とすると、$\dfrac{Y}{X}$ は $\boxed{\text{ツ}}$ になる。
東京 (摂氏) と N 市 (摂氏) の共分散を Z、東京 (摂氏) と N 市 (華氏) の共分散を W とすると、$\dfrac{W}{Z}$ は $\boxed{\text{テ}}$ になる (ただし、共分散は 2 つの変量のそれぞれの偏差の積の平均値)。
東京 (摂氏) と N 市 (摂氏) の相関係数を U、東京 (摂氏) と N 市 (華氏) の相関係数を V とすると、$\dfrac{V}{U}$ は $\boxed{\text{ト}}$ になる。

ここに解答を記述。

Q.114 ★4 広島大

2 次関数 $f(x) = x^2 + ax + b$ は、

$$\int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx$$

を満たす。$f(x) = 0$ は相異なる実数解を持つことを示せ。また、その実数解のうち少なくとも一つは 0 と 1 の間にあることを示せ。

与式を変形して、$\displaystyle\int_0^1 (x^2 - x)f(x)\,dx$ を得る。ここで $0 < x < 1$ において $x^2 - x < 0$ である。$f(x) = 0$ が $0 < x < 1$ に解を持たないとすると、$0 < x < 1$ において、常に $f(x) > 0$ であるか常に $f(x) < 0$ であるかのいずれかである。このとき、$(x^2 - x)f(x)$ は常に負であるか正であるかのいずれかとなるが、積分した値は 0 になり得ず不適。したがって、$f(x) = 0$ は $0 < x < 1$ の範囲に解を持つ。
この解が重解となると、$f(x)$ の 2 次の係数が正であることから、$0 < x < 1$ の範囲で $f(x) \geq 0$ である。すると $(x^2 - x)f(x) \leq 0$ となるからやはり積分値は 0 にならず不適。よって $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。
以上より、$f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち、少なくとも 1 つは 0 と 1 の間にあることが示された[*32]。

Q.115 ★8 山口大

関数 $f(x)$ は微分可能で、次の条件を満たしているとする。
(a) $f(x) \geq x + 1$
(b) 全ての実数 h に対し、$f(x+h) \geq f(x)f(h)$
以下の問に答えよ。
(1) $f(0)$, $f'(0)$ を求めよ。
(2) $f(x)$ を求めよ。

[*32] 編者註: はてなブログを参考にしつつ、重解についての議論を追加。

(1)

条件 (a) に、$x=0$ を代入することで $f(0)\geq 1$ がわかる。条件 (b) に、$x=h=0$ を代入することで、$f(0)\geq f(0)^2$ がわかる。これをともに満たすのは $f(0)=1$。
続いて、微分係数の定義から、

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$$

である。h を $-h$ に置き換えることで、

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to +}\frac{f(-h)-1}{-h}$$

を得る。ここに条件 (a) を用いて、

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\geq\lim_{h\to 0}\frac{(h+1)-1}{h}=1$$

が得られる。また、条件 (a) において、

$$f(-h)\geq -h+1 \quad\Leftrightarrow\quad -f(-h)\leq h-1$$

であるから、

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{1-f(-h)}{h}\leq\lim_{h\to 0}\frac{1+(h-1)}{h}=1$$

が成り立つ。これらのことから、$f'(0)=1$。

(2)

導関数の定義から、

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\&=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)f'(0)=f(x)\end{aligned}$$

であり、さらに

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\\&\leq\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x)f(-h)}{h}=f(x)\lim_{h\to 0}\frac{1-f(-h)}{h}\\&=f(x)f'(0)=f(x)\end{aligned}$$

であるから、$f'(x)=f(x)$ が従う。よって $f(x)=Ce^x$ であることがわかる。ここで C は定数であって、$f(0)=1$ であったから、$C=1$ である。
以上より、$f(x)=e^x$。

Q.116 ★5 阪大レベル模試

> a を $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数として、x の方程式 $a\sin x=1-\cos a$ について、この方程式は区間 $(0,a)$ にただ一つの実数解 x_a を持つことを示し、$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{x_a}{a}$ の値を求めよ。

関数 $f(x)$ を、$f(x)=a\sin x+\cos a-1$ とおく。すると、$f(0)=\cos a-1<0$ となっている $(\cdots①)$。次に、$f(a)=a\sin a+\cos a-1$ の値を考える。関数 $g(x)=x\sin x+\cos x-1$ をおく。$g'(x)=x\cos x$ となって、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では常に $g'(x)>0$ となっている。よって $g(x)$ は単調増加であって、$g(0)=0$ と合わせると、この範囲では $g(x)>0$ であることがわかる。これによって、$f(a)>0$ である $(\cdots②)$。
続いて、$f'(x)=a\cos x$ であるから、$0<x<a<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲において、常に $f'(x)>0$ である。したがって $f(x)$ は常に単調増加する。① ②と合わせれば、区間 $(0,a)$ 内で $f(x)=0$ を満たす実数はただ一つであることが示される。
さて、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす任意の x について、

$$\sin x<x<\tan x$$

が成り立つから[*33]、

$$\frac{\sin x_a}{a}<\frac{x_a}{a}<\frac{\tan x_a}{a}$$

が得られる。さらに、$a\sin x_a=1-\cos a$ が成り立っているから、

$$\frac{1-\cos a}{a^2}<\frac{x_a}{a}<\frac{1-\cos a}{a^2\cos a}$$

である。
さて、

$$\begin{aligned}\lim_{a\to+0}\frac{1-\cos a}{a^2}&=\lim_{a\to+0}\frac{(1-\cos a)(1+\cos a)}{a^2(1+\cos a)}\\&=\lim_{a\to+0}\frac{\sin^2 a}{a^2}\frac{1}{1+\cos a}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。加えて、

$$\lim_{a\to+0}\frac{1-\cos a}{a^2\cos a}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin^2 a}{a^2}\frac{1}{\cos a(1+\cos a)}=\frac{1}{2}$$

と求まるから、はさみうちの原理によって、

$$\lim_{a\to+0}\frac{x_a}{a}=\frac{1}{2}$$

Q.117 ★2

> 平面 p 上に相異なる n 個の点がある。ここから p 上に点 A を自由にとり、各 n 個の点と点 A の距離の 2 乗の和を $S(A)$ とする。$S(A)$ を最小にする点 A は、n 個の点の重心 (座標の平均を取った点) であることを証明せよ。

ここに解答を記述。

Q.118 ★6 自作

> (1) 全ての $m\in\mathbb{N}$ に対して、以下を示せ。
> $$\sum_{n=1}^{m}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2-n+1}\right)=\mathrm{Arctan}m$$
> (2) 全ての $m\in\mathbb{N}$ に対して、以下を示せ。
> $$\frac{1}{m}\mathrm{Arctan}1\leq\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{m}\right)$$
> (3) $\dfrac{\pi^3}{24}<\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)<\frac{\pi}{2}$ を示せ。
>
> 必要ならば $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ を用いてよい。

(1)

これは知ってる人は知ってます．学コンでも見たことあるかも．帰納法で示す．$m=1$ のときは $\mathrm{Arctan}1=\mathrm{Arctan}1$ となって自明．$m=k$ での成立を仮定せよ．すると $m=k+1$ における示すべき等式は, 次の等式に同値.

$$\arctan k+\arctan\frac{1}{k^2+k+1}=\arctan(k+1)$$

(注: $(k+1)^2-(k+1)+1=k^2+k+1$)
代わりに次を示す:

$$\tan\mathrm{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}=\tan\{\mathrm{Arctan}(k+1)-\mathrm{Arctan}k\}$$

左辺は Arctan の定義から $\dfrac{1}{k^2+k+1}$. 右辺は加法定理より同じくこの値になることがわかる．よって上の式は正しいので, $\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{k^2+k+1}$ と $\mathrm{Arctan}(k+1)-\mathrm{Arctan}k$ は $N\pi$ (N は整数) 程度の違いを除いて等しいことは分かったが, この二つの値が $-\pi<\theta<\pi$ の間にあることも明らかなので $N\pi=0$ である．よって $m=k+1$ でも示せた．

(2)

[*33] これの読者には明らかとしてよいと思っています。

$m=1$ なら明らかなので $m \geqq 2$ とする．斜辺の長さ $\sqrt{2}$ の直角二等辺三角形を考えよう．直角の頂点を A_0 とおき, 一つの鋭角の頂点を A_m とよぶ．A_m と呼ばれなかったほうの鋭角の頂点 B にて角の m 等分線を引き, $m-1$ 本の交点を辺 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_m$ 上に得るが, それを A_0 に近い順から $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{m-1}$ とよぶ．角の二等分線の性質を何回も用いれば分かることだが, $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} < \mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ が $k=0,\ldots,m-2$ で成り立つ．この不等式から $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 < \dfrac{1}{m}$ であることが分かるはずだ (分からないなら $m=4$ で絵を書いてみよ!)．さて, 左辺の $\dfrac{1}{m}\mathrm{Arctan}(1)$ は角 $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{B}\mathrm{A}_0$ に等しい．一方 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 < \dfrac{1}{m}$ で $\mathrm{BA}_0 = 1$ だから, この角度の tan は $\dfrac{1}{m}$ よりは小さいはず．よって Arctan の定義から左辺は $\mathrm{Arctan}(1/m)$ より小さいことが示された．

(3)

前半の不等式を得るには, (2) をそのまま使って $\mathrm{Arctan}1 = \dfrac{\pi}{4}$ に注意すればよい．$\dfrac{\pi}{4} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^3}{24}$ だからそうなる．

後半の不等式を得るには, (1) を使う．$\mathrm{Arctan}\dfrac{1}{n^2} \leqq \mathrm{Arctan}\dfrac{1}{n^2-n+1}$ で抑えてから, (1) を使えば, 真ん中は $\lim_{m\to\infty} \mathrm{Arctan}(m) = \dfrac{\pi}{2}$ で抑えられると分かる．

Q.119 ★8 首都大 (2015)

> 座標平面において、楕円 C: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ とする。全ての辺が C に接する長方形のうち、面積が最大となるものの面積を求めよ。

(解 1)

まず、長方形の一辺が y 軸に平行のとき、4 直線 $x=\pm 4$, $y = \pm 3$ が長方形を構成するので、この面積は $6\times 8 = 48$。

続いて $y = mx + k$ $(m \neq 0,\ k \geq 0)$[*34]が一辺を構成するとき、$y = mx+k$ は C に接するので、

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(mx+k)^2}{9} = 1$$

$$\left(\frac{1}{16} + \frac{m^2}{9}\right)x^2 + \frac{2mk}{9}x + \left(\frac{k^2}{9} - 1\right) = 0$$

を x の方程式と見たとき、解は重解である。この判別式 D を見て、

$$D = \left(\frac{2mk}{9}\right)^2 - \left(\frac{k^2}{9}-1\right)\left(\frac{1}{4}\frac{4}{9}m^2\right)$$

$$= -\frac{1}{36}k^2 + \frac{1}{4}\frac{4}{9}m^2 = 0$$

$$\therefore \quad k = \sqrt{9+16m^2} \qquad (\because\ k \geq 0)$$

を得る。すなわち、傾き m で C に接する直線は、

$$y = mx \pm \sqrt{9+16m^2}$$

の 2 つである。この 2 つが長方形の 2 辺を作るとき、残りの 2 辺は傾き $-\dfrac{1}{m}$ で C に接する直線なので、次のようになる。

$$y = \left(-\frac{1}{m}\right)x \pm \sqrt{9+16\left(-\frac{1}{m}\right)^2}$$

原点と、直線 $y = mx + \sqrt{9+16m^2}$ との距離 $d(m)$ は、$d(m) = \dfrac{\sqrt{9+16m^2}}{m^2+1}$ である。同様に、$d\left(-\dfrac{1}{m}\right)$ は、

$$d\left(-\frac{1}{m}\right) = \frac{\sqrt{9+16(-1/m)^2}}{\sqrt{(-1/m)^2+1}} = \frac{\sqrt{16+9m^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

これを用いて長方形の面積は、

$$2d(m) \times 2d\left(-\frac{1}{m}\right)$$

$$=4\frac{\sqrt{(9+16m^2)(16+9m^2)}}{1+m^2} = 4\frac{\sqrt{\left(\dfrac{9}{m}+16m\right)\left(\dfrac{16}{m}+9m\right)}}{m+\dfrac{1}{m}}$$

$$=4\frac{\sqrt{16^2+9^2+144\left(m^2+\dfrac{1}{m^2}\right)}}{m+\dfrac{1}{m}} = 4\frac{\sqrt{337+144(a^2-2)}}{a}$$

$$=4\frac{\sqrt{49+144a^2}}{a} = 4\sqrt{\frac{49}{a^2}+144}$$

と計算できる。ここで、$a = m + \dfrac{1}{m}$ とした。$m \neq 0$ のとき、a は $|a| \geq 2$ の範囲を動き、$m = \pm 1$ のときに $|a| = 2$ となる。このときに面積は最大化されることが分かるから、

$$4\sqrt{\frac{49}{a^2}+144} \leq 4\sqrt{\frac{49}{2^2}+144} = 50$$

となる。よって求める最大値は 50。[*35]

(解 2)

楕円 C の外部の点 (p,q) から、楕円 C に 2 本の接線を引くことを考える。$p \neq \pm 4$ ならば、接線の式は傾きを a として $y = a(x-p)+q$ とかける。これが楕円 C と共有点を 1 つだけもつので、2 次方程式

$$\frac{x^2}{16} + \frac{1}{9}[a(x-p)+q]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{16}+\frac{a^2}{9}\right)x^2 - \frac{2}{9}a(ap-q)x + \frac{(ap-q)^2}{9} - 1 = 0$$

の判別式 D は 0 である。すなわち、

$$\frac{D}{4} = \frac{1}{9^2}a^2(ap-q)^2 - \left(\frac{1}{16}+\frac{a^2}{9}\right)\left(\frac{(ap-q)^2}{9} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{16\cdot 9}\Big[(p^2-16)a^2 - 2pqa + q^2 - 9\Big] = 0$$

点 (p,q) (ただし $p \neq \pm 4$) に対して、この a についての方程式の解が 2 接線の傾きを与える。

2 接線が直交するような (p,q) の条件を求める。a についての方程式、

$$(p^2-16)a^2 - 2pqa + q^2 - 9 = 0$$

の 2 実数解の積が -1 であることが必要条件であるから、解と係数の関係によって、

$$\frac{q^2-9}{p^2-16} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad p^2+q^2 = 25$$

を得る。逆に、$p^2+q^2=25$ かつ $p \neq \pm 4$ ならば、もとの方程式は積が -1 となる 2 実数解をもつ[*36]。一方で $p = \pm 4$ のときには、$q = \pm 3$ とすれば (複合任意)、$x = p$, $y = q$ の 2 直線が楕円 C に対する直交する 2 接線となり、さらに $p^2+q^2=25$ を満たす。したがって、楕円 C に直交する 2 接線の交点は、円 $x^2+y^2=25$ の全体を動く[*37]。この円を D とする。このことから、楕円 C に外接する長方形の各頂点は円 D 上にあるといえる。

円 D に内接する長方形の 2 辺の長さを s,t とおく (ただし $s,t>0$)。対角線の長さは円の直径に等しく 10 であるから、$s^2+t^2=10^2$ が成り立つ。$s,t>0$ であるから、相加相乗平均の不等式により

$$100 = s^2+t^2 \geq 2\sqrt{s^2t^2} = 2st \quad \Leftrightarrow \quad st \leq 50$$

が成り立つ。等号の成立は $s=t$ のとき。st は長方形の面積に等しいから、円 D に内接する長方形のうち面積が最大となるのは、正方形となるときで、その面積は 50 となる。

最後に、円 D に内接する正方形であって、楕円 C に外接するものが存在することを示す。4 直線 $y = \pm x \pm 5$ は、4 交点 $(\pm 5, 0)$, $(0,\pm 5)$ を持つ (複合任意) が、これらは円 D 上にあり正方形をなす。さらにこれら

[*34] $y = mx - k$ も長方形の一辺を作るから、$k \geq 0$ としてよい。

[*35] 辺が x, y 軸と平行になる場合 ($m=0$ に相当) よりも面積は大きくできる。

[*36] きちんと調べるには判別式をみたらよい

[*37] 楕円の準円

4 直線と楕円 C は、

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{16}+\frac{(\pm x\pm 5)^2}{9}=1\\ \Leftrightarrow\quad &\frac{25}{16\cdot 9}x^2\pm\frac{10}{9}x+\frac{16}{9}=0\\ \Leftrightarrow\quad &\left(\frac{5}{12}x\pm\frac{4}{3}\right)^2=0 \end{aligned}$$

より接する。したがって、この正方形が求める長方形であって、その面積は 50。

Q.120 ★6 IMO 2006 Problem.1

> $\triangle ABC$ の内心を I とする。点 P がこの三角形の内部にあって、等式 $\angle PBA+\angle PCA=\angle PBC+\angle PCB$ を満たすとき、$AP\geq AI$ を示せ。また、この不等式において等号が成立するための必要十分条件は $P=I$ であることを示せ。

ここに解答を記述。

Q.121 ★7 東北大 AO (2017)

> $x\geqq 0$ における関数
> $$\int_0^x\frac{(1+x^2+t)^2}{(1+x^2-t)^3}\,dt$$
> の最大値を求めよ。

$s:=1+x^2-t$ と置換し, $1+x^2=f$ とおいて

$$\int_{1+x^2}^{1+x^2-x}\frac{(2+2x^2-s)^2}{s^3}(-1)ds=\int_{f-x}^{f}\frac{(2f-s)^2}{s^3}\,ds$$

展開して積分すると

$$=\int_{f-x}^{f}\left(\frac{1}{s}-\frac{4f}{s^2}+\frac{4f^2}{s^3}\right)ds=\log\frac{f}{f-x}-4\frac{f}{f-x}+2\frac{f^2}{(f-x)^2}+2$$

これは $\dfrac{x}{f}=g$ とおくと

$$\log\frac{1}{1-g}-4\frac{1}{1-g}+2\frac{1}{(1-g)^2}+2$$

となり, さらに $\dfrac{1}{1-g}=h$ とおくと,

$$\log h-4h+2h^2+2$$

である。

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g=0, g>0, x\leqq 0$ において $1+x^2\geqq 2x$ から $0<g\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くので, h は $1<h\leqq 2$ の範囲を動く。h で $\log h-4h+2h^2+2$ を微分すると

$$\frac{1}{h}+4(h-1)$$

となり, h の範囲からこれは正値をとる。よって, $h=2$ つまり $x=1$ で最大値を取り, その値は

$$2+\log 2$$

である。

Q.122 ★7 AwesomeMath

> $d(n)$ を n の正の約数の個数とする。x_0 は 2 以上の整数であり、漸化式 $x_{n+1}=d(x_n)^2$ $(n=0,1,2,\ldots)$ により数列 $\{x_n\}$ を定めたとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=9$ を示せ。

$x_1=d(x_0)^2$ は 1 より大きい平方数なので、x_0 が 1 より大きい平方数の場合を考えるだけでよい。さらに、平方数の約数の個数は奇数であるから、このときに $d(x_0)^2$ は 1 より大きい奇数の平方数となるので、x_0 が 1 より大きい奇数の平方数の場合を考えるだけでよい。このとき $x_0\geq 9$ である。次の補題を示す。

> **補題 122.1**
> n は 5 以上の奇数とする。このとき次が成り立つ。
> $$d(n^2)^2<n^2$$
> また、$n=3$ では上の不等号を統合にしたものが成立する。

$n=3$ で等号が成立することは、実際に計算すれば明らか。
まず、$n=p^r$ の場合の主張を示す (ただし p は奇素数、r は自然数で、$(p,r)\neq(3,1)$)。

$$d(n^2)^2=d(p^{2r})^2=(2r+1)^2$$

であるから、次の不等式を示せばよいことになる。

$$p^r-2r-1>0$$

$p=3$ の場合、$r\geq 2$ であるから、二項展開により、

$$3^r-2r-1=(2+1)^r-2r-1>\binom{r}{2}\cdot 2^r>0$$

となるのでよい。$r=1$ も含めれば $3^r-2r-1\geq 0$ といえる。$p\geq 5$ の場合、$p=3$ の場合に帰着して、

$$p^r-2r^1>3^r-2r-1\geq 0\quad\Rightarrow p^r-2r-1>0$$

となるのでよい。よって $n=p^r$ の場合が示された。
一般の 5 以上の奇数 n について示す。素因数分解により

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\ldots p_N^{e_N}$$

と表示したとする (各 p_i は奇素数、e_i は自然数、$p_1<p_2<\cdots<p_N$)。$N\geq 2$ としてよく、$2\leq i\leq N$ の場合には $p_i>3$ であるから

$$d(p_i^{2e_i})^2<p_i^{2e_i}$$

となる。p_1 については $p_1=3,\ e_1=1$ の場合も考慮して

$$d(p_1^{2e_1})^2\leq p_1^{2e_1}$$

となる。$N\geq 2$ としたので、

$$d(n^2)=d\left(\prod_{i=1}^{N}p_i^{2e_i}\right)=\prod_{i=1}^{N}d(p_i^{2e_i})^2<\prod_{i=1}^{N}p_i^{2e_i}=n^2$$

が成り立ち、補題が示された。
漸化式から帰納的に、$x_0\geq 9$ が奇数の平方数のとき、$x_1,x_2,\ldots$ も 1 より大きい奇数の平方数だから $x_n\geq 9$ である。よって補題 122.1 から $\{x_n\}$ は非増加数列であって、

$$x_0\geq x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq x_{n+1}\geq\ldots$$

を満たす。もし $x_n>9$ を満たす n が無限個存在するならば、この非増加性より "すべての" n で $x_n>9$ となる。ところがこの場合は補題 122.1 より $x_{n+1}=d(x_n)^2<x_n$ となるから、

$$x_0>x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}>\ldots$$

が成り立つ。各 x_n は自然数だから、いくらでも小さい自然数が存在することになり矛盾する。
したがって、$x_n>9$ を満たす n は高々有限個しか存在しない。すなわち、十分大きい自然数 M が存在して、$n\geq M$ ならば $x_n=9$ であるから、題意は示された。

Q.123 ★9 USAMO 類 (1998)

> 無限の精度で計算できる電卓が壊れて、sin, arcsin, cos, arccos, tan, arctan のボタンしか使えなくなった。最初の画面上の 0 の状態から、$m,n\in\mathbb{N}$ を用いて $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ と表される任意の数を得られることを示せ。

ここでは、arcsin, arccos, arctan の主値を用いることとする。加えて、定義域は正の区間を考えれば十分であるからそのようにする。
(i) 任意の正の実数 r がこの電卓によって得られるとき、$\dfrac{1}{r}$ も得られることを示す。$\theta=\arctan r$ とおく。$\cos\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ であるから、$\arcsin(\cos\theta)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ が得られる。さらに、$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$ である。したがって、画面に r が表示されている状態から、arctan, cos, arcsin, tan の順に操作することで、$\dfrac{1}{r}$ が得られることがわかる。
(ii) ある自然数 $i,j\in\mathbb{N}$ を用いて $\sqrt{\dfrac{j}{i}}$ で表される数がこの電卓によって得られた場合を考える。$\theta=\arctan\sqrt{\dfrac{j}{i}}$ とすると、$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{i}{i+j}}$,

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{j}{i+j}}$ となる。つまり、画面に $\sqrt{\dfrac{j}{i}}$ が表示された状態で arctan, cos の順に操作することで $\sqrt{\dfrac{i}{i+j}}$ が得られ、arctan, sin の順に操作することで $\sqrt{\dfrac{j}{i+j}}$ が得られることがわかる。

(iii) 任意の自然数 n と、$1 \leq m \leq n$ を満たす自然数 m を用いて $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ と表される任意の数はこの電卓によって得られることを示す。まず、はじめ 0 が表示された状態で cos のボタンを押すことで, $\cos 0 = 1 = \sqrt{\dfrac{1}{1}}$ が得られる。続いて、ある k 以下の任意の自然数 i と、$1 \leq j \leq i$ を満たす自然数 j を用いて $\sqrt{\dfrac{j}{i}}$ と表される任意の数がこの電卓によって得られたと仮定する。ここで、$1 \leq l \leq k+1$ を満たす自然数 l を用いて $\sqrt{\dfrac{l}{k+1}}$ と表される数を考えるとき、l と $k-l+1$ のうち大きい方を i、小さい方を j とすれば、$1 \leq j \leq i \leq k$ を満たし、

$$\sqrt{\frac{l}{k+1}} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{i}{i+j}} & \left(l \geq \dfrac{k+1}{2}\right) \\ \sqrt{\dfrac{j}{i+j}} & \left(l < \dfrac{k+1}{2}\right) \end{cases}$$

と書き直すことができる。この右辺は、どちらも (ii) の結果により $\sqrt{\dfrac{j}{i}}$ から得られる数であるから、$\sqrt{\dfrac{l}{k+1}}$ もこの電卓で得られる。以上のことから帰納的に、任意の自然数 n と、$1 \leq m \leq n$ を満たす自然数 m を用いて $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ と表される任意の数はこの電卓によって得られる。

(vi) 自然数 m, n が、$m > n$ となる場合、(iii) の結果により、$\sqrt{\dfrac{n}{m}}$ はこの電卓によって得られる。これに (i) の結果を合わせれば、$\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ もこの電卓によって得られることがわかる。

以上 (i) から (vi) の結果から、$m, n \in \mathbb{N}$ を用いて $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ と表される任意の数はこの電卓によって得られることが示された。

Q.124 ★3 組み合わせ論の精選

n を 1 より大きな奇数とする。${}_n\mathrm{C}_1, {}_n\mathrm{C}_2, \cdots, {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}$ の中には奇数が奇数個あることを示せ。

Proof. ${}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}} = K$ とすると, ${}_n\mathrm{C}_i = {}_n\mathrm{C}_{n-i}$ から $2K = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} = {}_n\mathrm{C}_i = 2^n - 2$ となる。ゆえに $K = 2^{n-1} - 1$ で, $n > 1$ のため K は奇数である。仮に奇数が偶数個あるなら, その中で偶数個ある奇数のみの総和をとると偶数である。偶数のみの総和は明らかに偶数なので, K はそれらをあわせて偶数になる。これは矛盾。よって, 奇数が奇数個ある。 □

Q.125 ★10 BotBot07080546 様

十進法で末尾が 0 でない正の整数 n の末尾を首位へと移し、新しい整数 $f(n)$ を作る。例えば、$f(334) = 433$, $f(893) = 389$ である。$f(5^p) = 2^q$ を満たすような 3 以上の整数の組 (p, q) を全て求めよ。

3 以上の整数 p について、5^p の下 3 桁は p が奇数のときの 125 と偶数のときの 625 の 2 通り。よって $f(5^p)$ の下 2 桁は 12 か 62 のいずれかである。一方で、ある整数 a, b を用いて $2^q = 100a + b$ と表すことを考えると、$q \geq 3$ だから、$b = 2^q - 100a$ は 4 の倍数である。このことから 2^q の下 2 桁は 62 にはなり得ない。
よって $p = 2k+1$ (ただし k は 1 以上の整数) とし、$5^p = 1000x + 125$ とおく。すると

$$5^{2k+1} = 5 \times 25^k = 125(8x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 25^{k-1} = 8x + 1$$

を得る。5^p の桁数は 3 以上だから、x の桁数を n (ただし n は 0 以上の整数) とおく。すると 5^p と $f(5^p)$ はともに $n+3$ 桁であって、

$$f(5^p) = 5 \times 10^{n+2} + 100x + 12 = 2^q$$

である。これについて整理して以下を得る。

$$2^q = 5 \times 10^{n+2} + 100 \cdot \frac{25^{k-1} - 1}{8} + 12$$

$$\Leftrightarrow \quad 2^{q+1} = 10^{n+3} + 25^k - 1 \quad \cdots (*)$$

一方で、2^q は首位が 5 で $n+3$ 桁の数であるから、

$$5 \times 10^{n+2} \leq 2^q < 6 \times 10^{n+2}$$

が成り立つ。常用対数をとる。$a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$ とおいて、

$$n + 3 - a \leq aq < n + 2 + a + b$$

を得る。これを整理して、

$$aq - a - b + 1 < n + 3 \leq aq + a = a(q+1) < q + 1$$

を得た。すなわち、$n + 3 < q + 1$ が成り立っている。
$v_2(m)$ で m が 2 で割り切れる回数を表すことにすると、$v_2(2^{q+1}) = q + 1$, $v_2(10^{n+3}) = n + 3$ である。さらに補題 125.1[*38]によって

$$v_2(25^k - 1) = v_2(25 - 1) + v_2(k) = 3 + v_2(k)$$

とわかる。$n + 3 < q + 1$ であったから、$(*)$ が成り立つためには、$v_2(k) = n$ でなければならない。よって $k = c \cdot 2^n$ と書ける (ただし c は奇数)。
$5^p = 5^{2k+1}$ は $n+3$ 桁の数であるから、

$$10^{n+2} \leq 5^{2k+1} < 10^{n+3}$$

が成り立つ。常用対数をとる。$a = \log_{10} 2$, $b = \log_{10} 3$ とおいて、

$$n + 2 \leq (2k+1)(1-a) < n + 3$$

を得る。これを整理して、

$$\frac{n+a+1}{2(1-a)} \leq k = c \cdot 2^n < \frac{n+a+2}{2(1-a)}$$

を得た。これを満たすような 0 以上の整数 n と奇数 c は $(n, c) = (0, 1), (1, 1)$ のみであり[*39]、これが $(*)$ が成り立つための必要条件である。
$(n, c) = (0, 1)$ のとき $k = 1$ で、$10^3 + 25^1 - 1 = 1024 = 2^{10}$ となるから $q = 9$ が $(*)$ を満たせる。$(n, c) = (1, 1)$ のとき $k = 2$ で、$10^4 + 25^2 - 1 = 10624$ となるから $(*)$ を満たす q は存在しない。
$k = 1$ のとき $p = 3$ であり、

$$f(5^3) = f(125) = 512 = 2^9$$

となるので実際に題意を満たせる。よって求めるものは、$(p, q) = (3, 9)$。

補題 125.1
$v_2(a)$ で a が 2 で割り切れる回数を表すものとする。
整数 n、奇数 x, y であって、$x - y$ が 4 で割り切れるとき、次が成り立つ。

$$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$$

はじめに、n が奇数のときを考える。

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

であり、$x - y$ が 4 で割り切れるから $x \equiv y \pmod 2$ であって、

$$\begin{aligned} & x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1} \\ \equiv & x^{n-1} + x^{n-2}x + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1} \\ \equiv & nx^{n-1} \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

となるから、$v_2(n) = 0$ に注意して、$v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$ が成り立つ。
一般の n については、奇数 k と整数 m を用いて $n = k \cdot 2^m$ と書ける。このとき、

$$v_2(x^n - y^n) = v_2\left((x^{2^m})^k - (y^{2^m})^k\right) = v_2(x^{2^m} - y^{2^m})$$

[*38] LTE の補題の特別な場合
[*39] 詳細は帰納的にするなどすれば証明できる。

とできる。ここで、x, y は奇数だから、$x^{2^c}+y^{2^c}\equiv 2 \pmod 4$ となるので 2 で一回しか割り切れない。また、

$$\begin{aligned}&x^{2^m}-y^{2^m}\\=&(x^{2^{m-1}}-y^{2^{m-1}})(x^{2^{m-2}}-y^{2^{m-2}})\dots(x^2+y^2)(x+y)(x-y)\end{aligned}$$

と因数分解できるから、

$$v_2(x^{2^m}-y^{2^m})=m+v_2(x-y)$$

となっていることがわかる。最後に、$v_2(n)=v_2(k\cdot 2^m)=m$ だから、一般の n に対して

$$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(n)$$

となることが示された。

Q.126 ★8 東京大

実数 a の整数部分を $[a]$ とする。自然数 n として、$f(x)=\dfrac{x^2(54n-x)}{864n^2}$ とするとき、$[f(0)]$, $[f(1)]$, $\cdots$, $[f(36n)]$ の中に何種類の整数があるか、n を用いて答えよ。

まず、

$$\frac{d}{dx}\left(864n^2f(x)\right)=3x(36n-x)$$

であることに注意すると、$f(x)$ は区間 $[0,36n]$ 上増加しているため、i を $0\leq i<36n$ を満たす整数として、$\left[f(i)\right]\leq\left[f(i+1)\right]$ が常に成り立つことがわかる。したがって、このような i のうち、この不等式の等号を生じさせないものが k 種類あるとすれば、求める個数は $k+1$ である。

$f(i+1)-f(i)-1$ を計算する。

$$\begin{aligned}&\frac{1}{864n^2}\left\{54n((i+1)^2-i^2)-((i+1)^3-i^3)\right\}-1\\=&\frac{1}{864n^2}\left\{-3i^2+(108n-3)i+(54n-1)-864n^2\right\}\end{aligned}$$

$\{\}$ の中身の i の二次式について判別式 D を計算する。

$$D=(108n-3)^2+12(-864n^2+54n-1)=1296n^2-3$$

よって、2 次方程式 $-3X^2+(108n-3)X+(-864n^2+54n-1)=0$ の解は $X=18n-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{D}}{6}$ と求まるので、

$$\begin{aligned}&f(i+1)-f(i)-1\geq 0\\\Leftrightarrow\quad&18n-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{D}}{6}\leq i\leq 18n-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{D}}{6}\end{aligned}$$

であることが分かる。これを満たす i とは、i は整数で考えていることを考慮すれば、天井関数と床関数を用いて

$$\left\lceil 18n-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{D}}{6}\right\rceil\leq i\leq\left\lfloor 18n-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{D}}{6}\right\rfloor$$

を満たす i と言える。ここで、

$$6n-\frac{1}{2}<\sqrt{D}=\sqrt{36n^2-\frac{1}{12}}<6n$$

に注意すれば、

$$\left\lceil 18n-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{D}}{6}\right\rceil=12n$$

$$\left\lfloor 18n-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{D}}{6}\right\rfloor=24n-1$$

が従うので、

$$f(i+1)-f(i)-1\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad 12n\leq i<24n$$

となる。この範囲の i においては、

$$f(i)+1\leq f(i+1)\quad\Rightarrow\quad\left[f(i)\right]<\left[f(i+1)\right]$$

が成り立つ。これは

$$7n=\left[f(12n)\right]<\left[f(12n+1)\right]<\cdots<\left[f(24n)\right]=20n$$

という増加列 $\left[f(i)\right]$ が、どの 2 つも違う整数を登場させるので、この部分には $7n$ から $20n$ の間に飛び飛びで $12n+1$ 個の整数が登場していることが分かる。

$0\leq i<12n$ あるいは $24n\leq i<36n$ の場合が、

$$f(i)\leq f(i+1)<f(i)+1$$

となるので、$\left[f(i)\right]\leq\left[f(i+1)\right]$ の等号は成り立つ場合も成り立たない場合もあるが、等号が成り立たない場合であっても $\left[f(i)\right]$ と $\left[f(i+1)\right]$ の差は 1 にしかならない。つまり、

$$0=\left[f(0)\right]\leq\left[f(1)\right]\leq\cdots\leq\left[f(12n)\right]=7n$$

という整数の広義増加列は 0 から $7n$ までの $7n+1$ 個の整数が全て登場している。同様に

$$20n=\left[f(24n)\right]\leq\left[f(24n+1)\right]\leq\cdots\leq\left[f(36n)\right]=27n$$

の間の $7n+1$ 個の整数も全て登場する。

以上のことから登場する整数は、$7n$ と $20n$ の重複に注意して、

$$(12n+1)+(7n+1)+(7n+1)-2=26n+1$$

Q.127 ★7 自作

正の約数の個数が $\sqrt{N}$ 個であるような正の整数 N を求めよう。
(1) N は奇数であることを示せ。
(2) $\sqrt{N}$ 以下の N の正の約数はいくつあるか。
(3) N を全て決定せよ。

(1)

$\sqrt{N}$ が個数を表すためには自然数でなければならないので, 自然数 n を用いて $N=n^2$ とおける。

$$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$$

と素因数分解できたとする。($p_1,\cdots,p_r$ は相異なる素数, $e_i\geqq 1$ $(\forall i)$)

n^2 の約数の個数は

$$(2e_1+1)(2e_2+1)\cdots(2e_r+1)$$

となり, 奇数の積になるから奇数である。これが $\sqrt{N}=n$ に等しいので, n は奇数。

(2)

$N=n^2$ の約数 $d_1,d_2,\cdots,d_{2k-1}$ が

$$1=d_1<d_2<\cdots d_{2k-2}<d_{2k-1}=N$$

となるとする。このとき, $i=1,2,\cdots,k$ に対して $d_id_{2k-i}=N$ となり, とくに $d_k^2=N$ となるから $d_k=n$ である。よって, $\sqrt{N}$ 以下の約数は $d_1,\cdots,d_k$ の k 個であり, $2k-1=\sqrt{N}=n$ だから $\dfrac{n+1}{2}$ 個。

(3)

$N=1$ はよいので $N\geqq 9$ のときを考える。1 から n までの奇数は $\dfrac{n+1}{2}$ 個あり,(2) のものと一致するので, $1,3,\cdots,n$ がすべて n の約数にならなければならない。特に, $n-2$ が n の約数になるので

$$\frac{n}{n-2}=1+\frac{2}{n-2}$$

が整数になる。そのような n は $n=3$ のみで $N=9$ となる。よって $N=1,9$

Q.128 ★4 JBMO SLP 改

$p^2(p^3-1)=q(q+1)$ を満たす素数 p,q について調べよう。
(1) $p<q$ を示し、q を p で割った余りを求めよ。
(2) p^2+p+1 は q の倍数であることを示せ。
(3) $p^2\leq q+1$ を示せ。
(4) 組 (p,q) は存在するか。

(1)

$p\geq q$ と仮定すると、

$$p^2(p^3-1)=q(q+1)\leq p(p+1)$$

であるから、$p\geq 2$ であることに注意して、

$$\begin{aligned}0&\geq p^2(p^3-1)-p(p+1)\\&=p^5-2p^2-p>p^5>0\end{aligned}$$

となるから矛盾。よって $p<q$ である。

与式から、$q(q+1)$ は p で割り切れるが、p と q は互いに素であるから、$q+1$ が p で割り切れる。したがって、q を p で割った余りは $p-1$。

(2)

与式は、$p^2(p-1)(p^2+p+1)=q(q+1)$ と整理できる。ここで p^2 と q は互いに素で、$p-1<q$ より明らかに $p-1$ と q も互いに素である。したがって、p^2+p+1 は q の倍数である。

(3)

やはり $p^2(p-1)(p^2+p+1)=q(q+1)$ からはじめて、p^2 と q は互いに素であるから、$q+1$ は p^2 の倍数である。よって、$p^2 \leq q+1$ といえる。

(4)

$p=2$ とすると、$2^2(2^3-1)=q(q+1)$ を満たす素数 q は存在しない。よって $p \geq 3$。(2) の結果から、$q \leq p^2+p+1$ といえる。(3) の結果とあわせて、

$$p^2 \leq q+1 \leq p^2+p+2 < p^2 \quad (\because p \geq 3)$$

となる。$p^2 \leq q+1 < 2p^2$ でありかつ $q+1$ は p^2 の倍数なので、$q+1=p^2$ である。しかしこのとき

$$q=p^2-1=(p+1)(p-1)$$

で、$p \pm 1$ はともに 2 以上だから q が素数であることに矛盾する。
よって、$p^2(p^3-1)=q(q+1)$ を満たす素数 p, q は存在しない。[*40]

Q.129 ★6 l_ength 様

立体 S をある直交する 3 平面に投影したところ、全て半径 1 の円になった。S の体積の最大値を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.130 ★5 東工大 (2019)

(1) $h>0$ とする。座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,0)$、点 $\mathrm{P}(h,s)$、点 $\mathrm{Q}(h,t)$ に対して、$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とする。ただし $s<t$ とする。$\triangle\mathrm{OPQ}$ の辺 OP, OQ, PQ の長さをそれぞれ p,q,r とするとき、不等式

$$p^2+q^2+r^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するときの s,t の値を求めよ。(Weitzenbock の不等式)

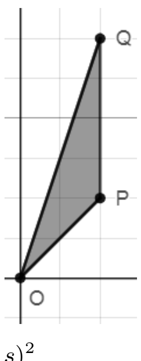
(2) 四面体 ABCD の表面積を T、辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a,b,c とし、辺 AD, BD, CD の長さをそれぞれ l,m,n とする。このとき、不等式

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geq 2\sqrt{3}T$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成立するのは四面体 ABCD がどのような四面体のときか。

(1)

$p=\sqrt{h^2+s^2}$, $q=\sqrt{h^2+t^2}$, $r=t-s$ より、$p^2+q^2+r^2=2(h^2+t^2+s^2)-2st$。また右図より、$S=\dfrac{h}{2}(t-s)$。これらを用いて、



$$\begin{aligned}
&p^2+q^2+r^2-4\sqrt{3}S\\
=&2(h^2+t^2+s^2)-2st-2\sqrt{3}h(t-s)\\
=&2h^2-2\sqrt{3}(t-s)h+2(t^2+s^2-st)
\end{aligned}$$

を得る。これを h の 2 次関数をみて $f(h)$ とおくと、

$$f(h)=2\left[h-\frac{\sqrt{3}}{2}(t-s)\right]^2+\frac{(t+s)^2}{2}$$

と整理できるから、$h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ のときに最小値 $\dfrac{(t+s)^2}{2} \geq 0$ をとることがわかり、題意の不等式の成立が示された。さらに $f(h)$ の最小値は、$t+s=0$ のときに最小値 0 をとる。つまりこのとき与不等式の等号が成立し、このときの s,t の値は、$t+s=0$ と $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(t-s)$ から、$s=-\dfrac{h}{\sqrt{3}}$, $t=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$。

(2)

(1) の結果により、

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &\geq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ABC}\\
a^2+n^2+l^2 &\geq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ACD}\\
c^2+m^2+l^2 &\geq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{ABD}\\
b^2+m^2+n^2 &\geq 4\sqrt{3}\triangle\mathrm{BCD}
\end{aligned}$$

となり、辺々足して、

$$a^2+b^2+c^2+l^2+m^2+n^2 \geq 2\sqrt{3}T \qquad (\cdots *)$$

が示された。($*$) で等号が成立することは、(1) を利用した 4 つの三角形全てにおいて等号が成立する場合と同値である。
翻って (1) の $\triangle\mathrm{OPQ}$ において等号が成立する状況を考えれば、$\angle\mathrm{POQ}=60^\circ$ がわかり、また $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ なので、$\triangle\mathrm{OPQ}$ は正三角形である。
したがって、($*$) で等号が成立することは、$\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{ACD}$, $\triangle\mathrm{ABD}$, $\triangle\mathrm{BCD}$ が全て正三角形であることに同値である。1 つの辺の長さを指定すれば、その辺の長さをもつ正三角形が 4 面を構成するとわかるので、等号の成立は正四面体のときである。

Q.131 ★6 東京大 (2007)

x, a は $0<x<a$ を満たす実数であるとする。
(1) 以下の不等式を示せ。

$$\frac{2x}{a} < \int_{a-x}^{a+x}\frac{dt}{t} < x\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right)$$

(2) $0.68 < \log 2 < 0.71$ であることを証明せよ。ただし、対数は自然対数であるとする。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.132 ★9 京大

a は $0<a<\pi$ を満たす定数とする。非負整数 n に対し、$n\pi < x < (n+1)\pi$ の範囲に $\sin(x+a)=x\sin x$ を満たす x がただ 1 つ存在するので、この x の値を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(x_n-n\pi)$ と、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(x_n-n\pi)$ を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.133 ★7◎ 京大実戦理系 (2016)

$\angle$C が 90° の直角三角形 ABC に対して、$\angle$A の二等分線と BC の交点を P とする。AB と AC の長さが素数であるとき、BP および CP の長さを求めよ。

CP$=p$, BP$=q$, AB$=m$, AC$=n$ とする。角の二等分線の性質から、

$$n:m=p:q \Leftrightarrow mp=nq$$

であり、m は斜辺なので $m>n$。よって $p<q$ となる。これによって p,q は異なる素数だから互いに素である。よって n は p の倍数、m は q の倍数であるから、自然数 k を用いて $n=kp$, $m=kq$ とすると、三平方の定理により

$$(p+q)^2=m^2-n^2=k^2(q^2-p^2)$$

$p+q>0$ で両辺割って整理すると、$k^2-1=\dfrac{2p}{q-p}$ を得る。左辺は正

[*40] 編者註: 小問に沿うように微修正しています

だから $k \geq 2$。右辺は整数だから、$q-p$ は $2p$ の正の約数である。p と q が互いに素であることから、$q-p=1,2$ のいずれか。
$q-p=1$ を満たすのは $p=2$、$q=3$ の場合だが、$4=k^2-1$ となり k が自然数とならず不適。
$q-p=2$ の場合、$p=k^2-1=(k-1)(k+1)$ になる。$k \geq 3$ であると p が 2 つの 2 以上の整数の積となり素数でなく不適。よって $k=2$ で、このとき $p=3,\ q=5$ である。
以上より、BP$=5$, CP$=3$

Q.134

k,n を正の整数とし、$S_k(n)=1+2^k+\cdots+(n-1)^k+n^k$ とする。
(1) $S_2(n)$ が素数になる n を求めよ。 ★1
(2) $S_4(n)$ が素数になる n を求めよ。 ★5
(3) m を奇数とするとき、$S_m(n)$ が素数になる組 (m,n) を求めよ。 ★9

(解答 Ver.1: 2021/11/28)

(1)

教科書より $S_2(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. この値が素数 p であるとせよ. すなわち $n(n+1)(2n+1)=6p$ である. まず $n=1,2$ で $p=1,5$ なので $n=2$ が適する. 以降 $n \geqq 3$ とする. さて, $6p$ に掛けられてある素数の個数は 3 個である. 一方で $n(n+1)(2n+1)$ は 3 つの 1 でない整数の積であるから, それぞれの因数は素因数を一つは持つ. そのため, $6p$ と等しくなるためには, n も $n+1$ も $2n+1$ もすべて素数でなければならない. $n \geqq 3$ としたので n が素数なら n は奇数だが, このとき $n+1$ は 4 以上の偶数であるため不適. よって $n=2$ のみ. $(S_2(2)=5)$

(2)

$S_4(n)$ を閉じた式で表したい. これはどうやるのかというと,
$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^5-k^5)$$
を二通りの方法で計算するのである.

$\boxed{\text{一つ目: 望遠鏡和で計算}}$
和がパタパタと消えるやつ (望遠鏡和) により $(n+1)^5-1^5=n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n$ に等しい.

$\boxed{\text{二つ目: 中身を展開する}}$ $(k+1)^5-k^5=5k^4+10k^3+10k^2+5k+1$ である. よってこの和は
$$5S_4(n)+10(S_3(n)+S_2(n))+5S_1(n)+S_0(n)$$
である. 教科書より $S_3(n)=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, $S_1(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$, $S_0(n)=n$ なので
$$\begin{aligned}
&5S_4(n)+\frac{10n^2(n+1)^2}{4}+\frac{10n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{5n(n+1)}{2}+n\\
&=5S_4(n)+\frac{15n^2(n+1)^2+10n(n+1)(2n+1)+15n(n+1)+6n}{6}\\
&=5S_4(n)+\frac{15n^4+50n^3+60n^2+31n)}{6}
\end{aligned}$$
以上二つの計算方法を比較して
$$\begin{aligned}
5S_4(n)&=(n+1)^5-1-\frac{15n^4+50n^3+60n^2+31n)}{6}\\
&=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{6}\\
&=\frac{n(6n^4+15n^3+10n^2-1)}{6}\\
&=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{6}\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}
\end{aligned}$$
を得る[*41]. さて, $S_4(n)=p$ が素数であるとせよ. このとき
$$30p=n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$
左辺は 4 つの素数の積であり, 右辺は 4 つの整数の積である. まず $n=1$ の場合は $p=1$ となり不適. $n \geqq 2$ の場合, (1) と同様にして右辺の 4 つの因数はすべて素数でなければならず, $n,n+1$ の偶奇に注意すれば $n=2$ でなければならない. $S_4(2)=1+16=17$ だから実際に素数になる. よって $n=2$ が適する. $(S_4(2)=17)$

(3)

$S_m(n)$ を閉じた式で表すことは難しいが別の方法がある. ヒントとしては, $S_1(n),S_2(n),S_3(n),S_4(n)$ はいずれも因数分解したときの形に $n,n+1$ が現れることだ. これと M が奇数であることを活用するとうまくいく.
さて, $S_m(n)=p$ が素数であるとせよ. このとき
$$2p=\sum_{k=1}^{n}k^m+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^m=\sum_{k=1}^{n}\{k^m+(n+1-k)^m\}$$
である. ここで m が奇数なので $k^m+(n+1-k)^m$ は二項展開からも分かるように, $(-k)^m=-k^m$ が k^m と相殺するので $n+1$ で割り切れる (この時点で $n+1=2,p,p,2p$ に絞りにかかっても良いと思う). さらに,
$$2p=2n^m+\sum_{k=1}^{n-1}(k^m+(n-k)^m)$$
であり, $2n^m$ も二項目の和も n で割り切れると分かる. よって n も $n+1$ も $2p$ の約数である. $2p$ の正の約数は $1,2,p,2p$ であり, p と $2p$ は差が 1 以上であることに注意すれば $(n,n+1)=(1,2),(2,p)$ の可能性がありうる. 前者は不適である ($S_m(1)=1$ は素数でないから). 後者では $p=3$ であり, $S_m(2)=1+2^m=3$ となる m は $m=1$ に限る. よって 求める組は
$$(m,n)=(1,2)$$

Q.135 ★?

地球上には知り合いの数が同じであるような 2 人組が必ず存在することを示せ。ただし、一方的に知っている状況はないとする。

地球上の人数を N とする。一人ひとりに対して、その人の知り合いの数としてあり得るのは 0 以上 $N-1$ 以下の N 種類の整数である。しかし、‘知り合いの数が 0 人の人’ と ‘知り合いの数が $N-1$ 人の人’ は共存できない。なぜなら、‘知り合いの数が $N-1$ 人の人’ が ‘知り合いの数が 0 人の人’ を一方的に知っていることになってしまうから。よって、各人に対して知り合いの数を調べ上げると、最大でも $N-1$ 種類にしか分類されないので、鳩ノ巣原理によって、ある 2 人が存在して知り合いの数が同じになる。

Q.136 ★2 makonagix 様

a,b,c,d は 2, 3, 5, 7 の並び替えである。$n^m=a^{b^{c^d}}$ を満たす自然数の組 (n,m) の個数が最も少なくなるときと最も多くなるときの a,b,c,d の値を求め、その 2 つの場合の (n,m) の個数を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.137 ★3◎ Australia (1999) 改題

以下の連立方程式を解け。
$$\begin{cases} x+\lfloor y\rfloor+\{z\}=33.4\\ y+\lfloor z\rfloor+\{x\}=34.3\\ z+\lfloor x\rfloor+\{y\}=43.3\end{cases}$$
ただし、$\lfloor r\rfloor$ で r 以下の最大の整数、$\{r\}$ で r の小数部分を表す。

[*41] $6x^3+9x^2+x-1$ を有理数の範囲で因数分解しようと期待する場合, $x=\dfrac{1}{\pm(6\text{ の約数})}$ の形の有理数解を探すとよい. $x=-\dfrac{1}{2}$ で 0 になることが分かるので, $2x+1$ で割れるというわけだ.

一般に、実数 a に対して $a=\lfloor a\rfloor+\{a\}$ である。3 つの式全て辺々足し合わせれば、

$$\begin{aligned}&(x+y+z)+\left(\lfloor x\rfloor+\lfloor y\rfloor+\lfloor z\rfloor\right)+\left(\{x\}+\{y\}+\{z\}\right)\\=&2(x+y+z)=111\end{aligned}$$

よって $x+y+z=55.5$。続いて第 1 式と第 2 式の辺々足し合わせて、

$$(x+y+z)+\lfloor y\rfloor+\{x\}=67.7 \quad\Leftrightarrow\quad \lfloor y\rfloor+\{x\}=12.2$$

よって、$\lfloor y\rfloor=12,\ \{x\}=0.2$ と求まる。第 2 式において、

$$y+\lfloor z\rfloor+0.2=34.3 \quad\Leftrightarrow\quad y+\lfloor z\rfloor=34.1$$

より、$\{y\}=0.1$ とわかる。したがって、$y=12.1$。また $\lfloor z\rfloor=22$。第 1 式と $\{x\}=0.2$ より、$\{z\}=0.2$ とわかる。したがって $z=22.2$。最後に第 1 式から、

$$x+12+0.2=33.4 \quad\Leftrightarrow\quad x=21.2$$

以上より、$(x,y,z)=(21.2,12.1,22.2)$。

Q.138 ★7 (1) 京大理系 (2014), (2) 東大実戦理系 (2017)

△ABC が条件 ∠B $=2$∠A, BC$=1$ を満たしているとする。
(1) △ABC の面積が最大になるときの $\cos$ B の値を求めよ。
(2) △ABC の内接円半径 r と外接円半径 R の比 r/R の取りうる値の範囲を求めよ。

(1)

∠A $=\theta$ とおくと、∠B $=2\theta$, ∠C $=\pi-3\theta$ となる。すべての角は 0 より大きく π より小さいから、$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$。正弦定理によって、AB $=\dfrac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$ である。よって三角形の面積は、

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\mathrm{B}&=\frac{\sin 3\theta\sin 2\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{(\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta)\sin 2\theta}{2\sin\theta}\\&=\frac{1}{2}(2\cos 2\theta+1)\sqrt{1-\cos^2 2\theta}\end{aligned}$$

で得られる。$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき、$-\dfrac{1}{2}<\cos 2\theta<1$ であることと、三角形の面積は常に正であることから、

$$f(x)=\frac{1}{4}(2x+1)^2(1-x^2)\qquad\left(-\frac{1}{2}<x<1\right)$$

のような関数 $f(x)$ が最大となる x の値について考えればよい。

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{4}\left[2(2x+1)(2x+1)'(1-x^2)+(2x+1)^2(-2x)\right]\\&=-\frac{1}{2}(2x+1)(4x^2+x-2)\end{aligned}$$

により、$f'(x)=0$ となるのは、$x=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$ のとき。これを踏まえて増減表は、以下のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{33}}{8}$	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	0	↗	max	↘	

したがって、$-\dfrac{1}{2}<x<1$ において $f(x)$ は、$x=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ のときに最大となる。よって、△ABC の面積が最大となるのは、$\cos\mathrm{B}=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$ のとき。

(2)

∠A $=\theta$ とすると, ∠B $=2\theta$, ∠C $=\pi-3\theta$ であるから, これらが 0 より大きく π 未満になることより $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ の範囲で動かす。内心を I として, 内接円と AB の接点を H としたとき, 三角形 IHB に注目すると, ∠IBH $=\theta$ なので

$$\mathrm{HB}=\frac{r}{\tan\theta}$$

である。同様に考えると

$$\mathrm{HA}=\frac{r}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

であり, 正弦定理より

$$\mathrm{AB}=2R\sin(\pi-3\theta)=\mathrm{HA}+\mathrm{HB}=r\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

を得る。$\sin\dfrac{\theta}{2}=s, \cos\dfrac{\theta}{2}=c$ とおいて $\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$ と倍角の公式から, 整理すると

$$\begin{aligned}\frac{R}{r}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta\sin 3\theta}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2sc\cdot c+(2c^2-1)s}{s\cdot\sin\theta\sin 3\theta}\right)\\&=\frac{4c^2-1}{2\sin\theta\sin 3\theta}=\frac{2\cos\theta+1}{2\sin\theta\sin 3\theta}=\frac{2\cos\theta+1}{2\sin^2\theta(4\cos^2\theta-1)}\\&=\frac{1}{2(1-\cos^2\theta)(2\cos\theta-1)}\end{aligned}$$

となる。よって, $\cos\theta=x\ \left(\dfrac{1}{2}<x<1\right)$ とおいて

$$\frac{r}{R}=2(2x-1)(1-x^2)$$

の取りうる値の範囲を考えればよい。x で微分すると $-12x^2+4x+4=-4(3x^2-x-1)$ となるから. $x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$ で極値をとる。$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}<1$ で, ここで極大値かつ最大値をとる。$\dfrac{r}{R}$ に $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ を代入し

$$2\cdot\frac{\sqrt{13}-2}{3}\cdot\frac{22-2\sqrt{13}}{36}=\frac{1}{54}(26\sqrt{13}-70)=\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-35)$$

となる。$x\to 1-0$ とすればいくらでも 0 に近づくので, 求める範囲は

$$0<\frac{r}{R}\leqq\frac{1}{27}(13\sqrt{13}-35)$$

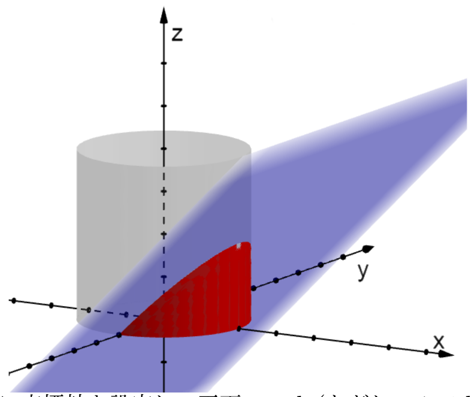
Q.139 ★2 averageman101 様

さいころを 2 回振って出た目の数をそれぞれ m,n としたときの得点を $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$ とする。得点の期待値を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.140 ★4 大阪市大理系 (2017) 改

半径 1 の円柱を、底面の直径を含み、底面と角 $\alpha(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2})$ をなす平面で切ってできる小さい方の立体 K を考える。ただし、円柱の高さは十分大きいとする。K の体積 V と表面積 S を求めよ。



上図のように座標軸を設定し、平面 $y=k$ (ただし $-1\leq k\leq 1$) における断面を考える。これは直角三角形で、底辺は $\sqrt{1-y^2}$ であり、底辺と斜辺のなす角は α となる。この三角形の面積 $T(y)$ は、

$$T(y)=\frac{1}{2}\tan\alpha(1-y^2)$$

これを積分することで体積が得られる。

$$V=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\tan\alpha(1-y^2)\,dy$$
$$=\tan\alpha\Big[y-\frac{1}{3}y^3\Big]_0^1=\frac{2}{3}\tan\alpha$$

表面積を構成するものは、半径 1 の半円 (底面)、2 つの軸半径がそれぞれ $1, \dfrac{1}{\cos\alpha}$ の楕円の半分 (平面による断面)、円柱の側面の一部である。半円の面積は $\dfrac{\pi}{2}$、楕円の半分の面積は $\dfrac{\pi}{2\cos\alpha}$ である。x 軸と角 θ をなし xy 平面と鉛直な面での断面を考えると、これは直角三角形で、高さは $\tan\alpha\cos\theta$ となる。この直角三角形の高さを $-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ で積分すると側面積になって[*42]、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\alpha\cos\theta\,d\theta=\tan\alpha\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\tan\alpha$$

である。これらから表面積は、

$$S=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2\cos\alpha}+2\tan\alpha$$

Q.141 ★3 神戸大理 前期 (2019)

n を 2 以上の整数とする。2 個のさいころを同時に投げるとき、出た目の数の積を n で割った余りが 1 となるような確率を $P(n)$ とする。以下の問に答えよ。
(1) $P(2), P(3), P(4)$ を求めよ。
(2) $n\geq 36$ のとき、$P(n)$ を求めよ。
(3) $P(n)=\dfrac{1}{18}$ となる n を全て求めよ。

2 つの出目に対して、その積から 1 を引いた表を作ると、次のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	3	5	7	9	11
3	2	5	8	11	14	17
4	3	7	11	15	19	23
5	4	9	14	19	24	29
6	5	11	17	23	29	35

$P(n)$ は、この表の 36 個の値のうち、n で割り切れるものの個数を $N(n)$ として、$\dfrac{N(n)}{36}$ で求められる。

(1)

$N(2)=9$ より、$P(2)=\dfrac{1}{4}$
$N(3)=8$ より、$P(3)=\dfrac{2}{9}$
$N(4)=5$ より、$P(4)=\dfrac{5}{36}$

(2)

$n\geq 36$ においては、この表に現れる数字は 35 以下であるから、n で割り切れるものは 0 のみなので $N(n)=1$。よって $P(n)=\dfrac{1}{36}$

(3)

$N(n)=2$ となる n を求めればよい。1 つは 0 なので、これ以外に 1 つだけ n の倍数が存在する。ここで表は対角線に沿って対称なので、対角線上にあるものから見ればよい。3, 8, 15, 24, 35 の約数のうち、$N(n)=2$ となるものを探せば、

$$n=6,12,15,24,35$$

である。

[*42] $y=k$ での断面の周を積分すると、積分の向きと側面の向きが異なるため、正しい側面積が得られない。

Q.142

(1) 19 で割って 14 余る平方数は存在するか。 ★4
(2) $\dfrac{2a^2-1}{b^2+2}$ が整数になる整数の組 (a,b) は存在するか。 ★9
(3) $\dfrac{3^n-1}{2^n-1}$ が整数になる $n\in\mathbb{N}$ を全て求めよ。 ★9
(4) $p!+p$ が平方数になる素数 p を全て求めよ。 ★11

本問では、平方剰余のルジャンドル記号を利用する。

(1)

次の計算により存在しない。

$$\left(\frac{14}{19}\right)=\left(\frac{-5}{19}\right)=\left(\frac{-1}{19}\right)\left(\frac{5}{19}\right)$$
$$=(-1)^{\frac{19-1}{2}}\left(\frac{5}{19}\right)\qquad(\text{第一補充則より})$$
$$=(-1)\left[(-1)^{\frac{19-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}\left(\frac{19}{5}\right)\right]\qquad(\text{相互法則より})$$
$$=(-1)\left(\frac{19}{5}\right)=(-1)\left(\frac{4}{5}\right)=-1$$

(2)

分子は奇数なので、分母は奇数である必要があり、b は奇数となる。このとき $b^2+2\equiv\ (\mathrm{mod}\ 8)$ なので、b^2+2 の素因数 p であって、$o\equiv\pm3\ (\mathrm{mod}\ 8)$ なるものが存在する。
b^2+2 は p で割れるから、$2a^-1$ もこの p で割り切れなければならない。すなわち $2a^2-1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p)$ の必要がある。

$$2a^2\equiv1\equiv1+p\quad\Leftrightarrow\quad a^2\equiv\frac{p+1}{2}\quad(\mathrm{mod}\ p)$$

となるような a を考えなければならない。
平方剰余の第二補充法則より、

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

さらに平方剰余に乗法性があることから、

$$\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{p+1}{p}\right)=\left(\frac{1}{p}\right)=1$$

したがって、

$$\left(\frac{\frac{p+1}{2}}{p}\right)=\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

$p=8k+3\ (k\geq0)$ のとき、$\dfrac{p^2-1}{8}=(2k+1)(4k+1)$ となり奇数である。一方 $p=8k-3\ (k\geq1)$ のとき、$\dfrac{p^2-1}{8}=(2k-1)(4k-1)$ となり奇数である。よっていずれの場合も $(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=-1$ で、$\left(\dfrac{\frac{p+1}{2}}{p}\right)=-1$ となる。これは $a^2\equiv\dfrac{p+1}{2}\ (\mathrm{mod}\ p)$ となる整数 a が存在しないことを示すので、分子は p で割り切れず、$\dfrac{2a^2-1}{b^2+2}$ は整数とならない。

(3)

$n=1$ は明らかに解。$n\geqq2$ とするとき, 2^n-1 には奇素因数が存在するが, それを任意に一つ選んで p とする。$p|2^n-1$ かつ, $p|3^n-1$ でなければならない。$K=\dfrac{3^n-1}{2^n-1}$ が整数のとき, 2^n-1 は 3 で割れない。よって n は奇数である。そのとき,

$$3^n-1\equiv0\quad(\mathrm{mod}p)\Leftrightarrow3^{n+1}\equiv3\quad(\mathrm{mod}p)$$

となり, $n+1$ が偶数であるため 3 は法 p における平方剰余でなければならない。つまり

$$\left(\frac{3}{p}\right)=1$$

である。一方, 相互法則　から

$$\left(\frac{3}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right)$$

である。つまり,

・$p|2^n-1$ が $p\equiv 1 \pmod 4$ ならば, $p\equiv 1 \pmod 3$

・$p|2^n-1$ が $p\equiv 3 \pmod 4$ ならば, $p\equiv 2 \pmod 3$

である。そこで, 2^n-1 を素因数分解したときに現れる $4k+1$ 型素因数のを S, $4k+3$ 型素因数の個数を T とすると,

$$2^n-1\equiv 1^S\cdot 3^T \quad (\mathrm{mod}4)$$

である。$n\geqq 2$ なので $2^n-1\equiv -1 \pmod 4$ であり, T は奇数となる。前に述べたことより, 2^n-1 の $3k+1$ 型素因数の個数も S で, $3k+2$ 型素因数の個数は T になるから,

$$2^n-1\equiv 1^S\cdot 2^T\equiv 2(\mathrm{mod}3) \quad (\because T \text{ は奇数})$$

すると $2^n\equiv 0 \pmod 3$ になり矛盾する。以上より $n=1$.

(4)

$p=2$ および $p=3$ の場合、

$$2!+2=4=2^2\ ,\ 3!+3=9=3^2$$

となるのでよい。

$p>4$ の場合を考える。ある整数 m を用いて $p!+p=m^2$ と書けたとする。このとき、

$$m^2\equiv p!+p\equiv p \pmod 4$$

が成り立つ。p は明らかに奇数でありかつ 4 を法とした平方剰余であることから、$p\equiv 1 \pmod 4$ でなければならない。$p=5$ の場合、$5!+5=125$ より不適。$p=7$ は $7\equiv 3 \pmod 4$ より不適。

$p>8$ の場合を考える。$p\equiv 1 \pmod 4$ であったから、$p\equiv 1,5 \pmod 8$ のいずれかである。

$$m^2\equiv p!+p\equiv p \pmod 8$$

より、p は 8 を法とした平方剰余でなければならないので、$p\equiv 1 \pmod 8$ のみが適する。

さて、$q<p$ を満たす任意の奇素数 q について、

$$m^2\equiv p!+p\equiv p \pmod q$$

が成り立つ。これによって、

$$\left(\frac{p}{q}\right)=1$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)$$

$$\Rightarrow\quad (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}}=\left(\frac{q}{p}\right)$$

が得られる。$p\equiv 1 \pmod 4$ であったから、$(-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{2}}=1$。すなわち $\left(\frac{q}{p}\right)=1$ である。また、$p\equiv 1 \pmod 8$ かつ $p+1$ は偶数だから

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{(p-1)(p+1)}{8}}=1$$

である。したがって、p より小さい全ての素数は p を法とした平方剰余となる。さらに、平方剰余には乗法性があることから、p より小さい任意の整数は p より小さい素数の積で表せるので、p より小さい任意の整数は p を法とした平方剰余であるとわかる。しかしこのことは、平方剰余は $\frac{p-1}{2}$ 個しか存在しないことに矛盾する。

以上のことから、$p!+p$ が平方数となるのは、$p=2,3$。

Q.143　漸化式

漸化式で定義されたそれぞれの数列について (なるべく推測をせずに) 一般項を n を用いて表せ。

(1) $A_1=1,\ A_{n+1}=A_n+2^n$

(2) $B_1=-1,\ B_{n+1}=1+B_1+2B_2+3B_3+\cdots+nB_n$

(3) $C_1=1,\ C_{n+1}=3C_n+2n-1$

(4) $D_1=1,\ D_{n+1}D_n=2\sqrt{D_n}$

(5) $E_1=1,\ E_{n+1}=\dfrac{E_n}{4E_n+3}$

(6) $F_1=1,\ F_2=1,\ F_{n+2}=Fn+1+F_n$

(7) $G_1=\dfrac{1}{2},\ (n+2)G_{n+1}=nG_n$

(8) $H_1=H_2=3,\ H_{n+2}+H_{n+1}+H_n=2$

(9) $I_0=\dfrac{\pi}{2},\ I_1=1,\ I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$

(10) $J_1=\dfrac{1234}{2017},\ J_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{J_n}-\left\lfloor\dfrac{1}{J_n}\right\rfloor & (\text{If } J_n\neq 0)\\ J_n & (\text{If } J_n=0)\end{cases}$

(11) $K_1=4,\ K_{n+1}=\dfrac{4K_n-9}{K_n-2}$

(12) $L_1=1,\ L_{n+1}=n(L_1+L_2+\cdots+L_n)$

(13) $M_1=1,\ M_2=2,\ M_{n+2}=(n+1)(M_{n+1}-M_n)$

(14) $N_1=\dfrac{1}{2},\ 3N_{n+1}+\dfrac{N_n}{2}=1+\dfrac{1}{2^n}$

(15) $O_1=\dfrac{1}{2},\ O_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+O_n}{2}}$

(16) $P_1=2,\ P_{n+1}=\dfrac{2P_n}{1-P_n^2}$

(17) $Q_1=4,\ Q_{n+1}=Q_n^2-2$

(18) $R_1=-1,\ R_{n+1}=2R_n(1-R_n)$

(19) $S_1=0,\ S_{n+1}=S_n+2\sqrt{S_n+n}$

(20) $T_1=2,\ U_1=3,$
$\begin{cases}T_{n+1}=2T_n+4U_n\\ U_{n+1}=4T_n+2U_n\end{cases}$

(21) $V_1=W_1=1,$
$\begin{cases}V_{n+1}=\dfrac{2V_n}{W_n}-V_n^2\\ W_{n+1}=\dfrac{W_n^2}{2V_n^2W_n^2+1}\end{cases}$

(22) $X_1=\dfrac{1}{6},\ Y_1=\dfrac{1}{3},\ Z_1=\dfrac{1}{2},$
$\begin{cases}X_{n+1}=\dfrac{Y_n+Z_n}{2}\\ Y_{n+1}=\dfrac{Z_n+X_n}{2}\\ Z_{n+1}=\dfrac{X_n+Y_n}{2}\end{cases}$

出典等: (1) ★1, (2) ★1, (3) ★1 北海学園大, (4) ★1 赤チャート, (5) ★2 赤チャート, (6) ★2 フィボナッチ数列, (7) ★1 広島大, (8) ★3 suiso_728660 様, (9) ★1 $\sin^n x$ の積分, (10) ★2 元ネタは東大, (11) ★3 赤チャート, (12) ★2 suiso_728660 様, (13) ★3 撹乱順列, (14) ★3 元ネタは京大, (15) ★?, (16) ★?, (17) ★?[難], (18) ★?[難] 信州大 改題 誘導抜き, (19) ★3 東大レベル模試 (?), (20) ★2, (21) ★4 東進数学コンクール, (22) ★2

hint17: $a_1:=c+\dfrac{1}{c}$

hint18: $1-2a_{n+1}=?$

未完。ここに解答を記述。

(17)

$Q_n=q_n+\dfrac{1}{q_n}$ となる実数 q_n が存在することを示す。$n=1$ のときは $q_1=2+\sqrt{3}$ でよい。$Q_{n+1}=Q_n^2-2=q_n^2+\dfrac{1}{q_n^2}$ より, $q_{n+1}=q_n^2$ とすればよいので 帰納的に $Q_n=q_n+\dfrac{1}{q_n}$ と置くことができ, 構成の仕方から $q_n=q_1^{2^{n-1}}=(2+\sqrt{3})^{2^{n-1}}$ とすればよい。よって

$$Q_n=(2+\sqrt{3})^{2^{n-1}}+(2-\sqrt{3})^{2^{n-1}}$$

Q.144 ★6 自作 DMP4.5th

$P(x)$ は n 次の整式である $(n\geq 1)$。方程式 $P(x)=0$ が異なる n 個の実数解を持つとき、方程式 $P(x)=P'(x)$ は異なる n 個の実数解をもつことを証明せよ。

$n=1$ のとき、$P(x)=ax+b$ とおけば、

$$P(x)=P'(x)\Leftrightarrow ax+b=a$$

となるので明らかに 1 つの実数解を持ち、題意を満たしている。以降 $n \geq 2$ について考える。
方程式 $P(x) = 0$ の解を、$a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、$P(x)$ の x^n の係数を k とすれば、

$$P(x) = k(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$

と表される。このとき、

$$\begin{aligned} P'(x) = k&(x-a_1)'(x-a_2)\dots(x-a_n) \\ &+ k(x-a_1)(x-a_2)'\dots(x-a_n) + \dots \\ &+ k(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)' \end{aligned}$$

となる。$i = 1, 2, \dots, n$ に対して、$x = a_i$ を代入すると、
$P(a_i) = k(a_i - a_1)(a_i - a_2)\dots(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})\dots(a_i - a_n) \neq 0$
となるから、a_i は方程式 $P(x) = P'(x)$ の解ではない。よって $x \neq a_i$ とすると $P(x) \neq 0$ であって、

$$P(x) = P'(x) \Leftrightarrow \frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} = 1$$

となる。以降、$a_1 < a_2 < \dots < a_n$ として考える。また、$Q(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}$ とおく。すると、

$$Q'(x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x - a_i)^2} < 0$$

より $Q(x)$ は常に単調減少する。$x < a_1$ では明らかに $Q(x) < 0$ なので、区間 $(-\infty, a_1)$ に $Q(x) = 1$ の解は無い。続いて、区間 (a_i, a_{i+1}) を考える (ただし $i = 1, 2, \dots, n-1$)。$Q(x)$ は単調減少であって、

$$\lim_{x \to a_i + 0} Q(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to a_{i+1} - 0} Q(x) = -infty$$

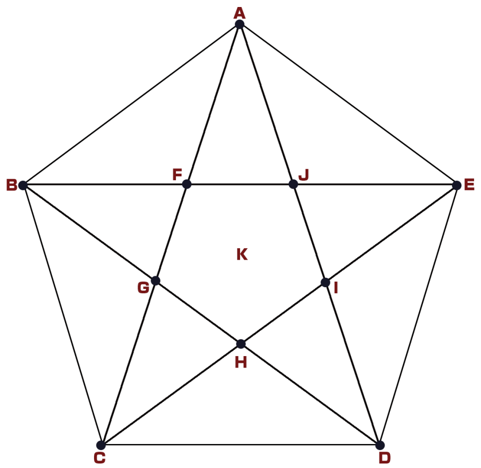
より、中間値の定理から、この区間において $Q(x) = 1$ の解がただ一つ存在する。最後に、区間 $(a_n, infty)$ では、$Q(x)$ は単調減少であって、

$$\lim_{x \to a_n + 0} Q(x) = \infty, \qquad \lim_{x \to \infty} Q(x) = 0$$

より、同様にの区間において $Q(x) = 1$ の解がただ一つ存在する。
以上より、区間 (a_i, a_{i+1}) $(i = 1, 2, \dots, n-1)$ と区間 (a_n, ∞) の中に解が 1 つずつ存在し、これらは明らかに相異なるので、題意は示された。

Q.145 ★?

(1) 以下の画像は正五角形 ABCDE と、その対角線の交点 F, G, H, I, J である。AB = 1 のとき、FG の値を求めよ。
(2) (1) の結果から、$\sin 72^\circ$, $\cos 72^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\cos 36^\circ$ を求めよ。



(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.146 ★10 BotBot07080546 様

空間上の相異なる 6 点 A, B, C, D, E, F は、

$$AB = BC = CD = DE = EF = FA,$$
$$\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$$
$$= \angle DEF = \angle EFA = \angle FAB = 120^\circ$$

を満たす。この 6 点は正六角形の各頂点であるといえるか。

ここに解答を記述。

Q.147 ★7 BotBot07080546 様

点 $(0, 19)$ を通り、傾きが整数値の直線が、放物線 $y = x^2$ によって切り取られる線分の長さもまた、整数値をとるという。その長さを求めよ。

直線を $y = nx + 19$ $(n \in \mathbb{Z})$ とし、

$$x^2 = nx + 19 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{n \pm \sqrt{n^2 + 76}}{2}$$

の小さい方を α、大きい方を β とすれば、切り取られる線分の長さは (α, α^2) と (β, β^2) の距離なので、

$$\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta^2 - \alpha^2)^2} = \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 + 76)}$$

となり、$(n^2 + 1)(n^2 + 76)$ は平方数である。
n が奇数のとき、$n^2 \equiv 1 \pmod 4$ で、$(n^2 + 1)(n^2 + 76) \equiv 2 \cdot 77 \equiv 2 \pmod 4$ となり、平方剰余でないから、n は偶数。
ユークリッドの互除法より、$n^2 + 76$ と $n^2 + 1$ の最大公約数は、75 と $n^2 + 1$ の最大公約数と等しい。この最大公約数を g とする。$g = 1$ のとき、$n^1 + 1$ も $n^2 + 76$ も同時に平方数でなければならない。しかし、n^2 が平方数である一方で $n^2 + 1$ が平方数になるような整数 n は存在しない。よって $g \neq 1$。
$75 = 3 \times 5^2$ より g は、$g = 3, 5, 15, 25, 75$ が考えられる。g が 3 の倍数のときは、

$$n^2 + 1 \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 \equiv -1 \pmod 3$$

となって不適。よって g は 5 または 25 である。
(i) $g = 5$ のとき、5 と互いに素な自然数 k を用いて $n^2 + 1 = 5k$ とし、

$$(n^2 + 1)(n^2 + 76) = 5k(5k + 75) = 25(k^2 + 15k)$$

より、$k^2 + 15k$ が平方数ならよい。$k \geq 50$ だと、$(k+7)^2 < k^2 + 15k < (k+8)^2$ が成り立つから、$k < 50$ でなければならない。よって $n^2 < 249$ から、$|n| \geq 15$。$n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ より $n \equiv 2, 3 \pmod 5$ でかつ、n は偶数より、$n = \pm 2, \pm 8, \pm 12$。このうち適するのは $n = \pm 2$ のときで、長さは 20。
(ii) $g = 25$ のとき、25 と互いに素な自然数 k を用いて $n^2 + 1 = 25k$ とし、

$$(n^2 + 1)(n^2 + 76) = 25k(25k + 75) = 25^2(k^2 + 3k)$$

より、$k^2 + 3k$ が平方数ならよい。しかし、$k \geq 1$ のもとで $(k+1)^2 < k^2 + 3k < (k+2)^2$ が成り立つから、平方数にはなり得ない。
以上より、線分の長さは 20。

Q.148 ★6 ElfenLied_MS2 様

各桁の数が 7 または 2 である正の整数を千早数と呼ぶ。72 桁であり、2^{72} の倍数である千早数は存在するか。

任意の自然数 n に対して、n 桁でかつ 2^n で割り切れる千早数が存在する $(\cdots *)$ ことを示す。
$n = 1$ のときは 2 が存在するのでよい。
2 以上のある自然数 k について $(*)$ の成立を仮定し、この千早数を A とおく。このとき、$2 \cdot 10^k + A$, $7 \cdot 10^k + A$ は、ともに $k + 1$ 桁の千早数である。さて、A は 2^k の倍数であるから、$A = 2^k B$ と書ける (B は自然数)。
B が奇数であるとすると、

$$7 \cdot 10^k + A = 2^k(7 \cdot 5^k + B)$$

は 2^{k+1} で割り切れる。B が偶数であるとすると、

$$2 \cdot 10^k + A = 2^k(2 \cdot 5^k + B)$$

は 2^{k+1} で割り切れる。よって、いずれの場合も $2 \cdot 10^k + A$, $7 \cdot 10^k + A$ の一方が、$k + 1$ 桁でかつ 2^{k+1} で割り切れる千早数となる。

以上より、数学的帰納法によって $(*)$ が示された。特に $n=72$ とすることで、問題の主張を得る。

Q.149 ★5◎ 京大オープン (2016)

p は正の定数とする。xy 平面上の 2 曲線、

$$C_1:\quad |y|=\tan x \quad (0\leq x<\frac{\pi}{2})$$

$$C_2:\quad x=\frac{y^2}{4}+p$$

が 2 点で接しているとする。C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 つの曲線はともに x 軸について対称であるから、$y\geq 0$ についてのみ考えれば十分。よって C_1 は代わりに $y=\tan x$ $\left(0\leq x<\frac{pi}{2}\right)$ を考え、C_2 は $y=2\sqrt{x-p}$ を考える。C_2 は $x\geq p$ の範囲にある曲線なので、C_2 と共有点を持つためには $p<\frac{\pi}{2}$ であることが必要である。また、$p>0$ であるから $\tan p>0$ であり、一方 C_2 では $x=p$ のとき $y=0$ であるから、$x=p$ なる点では 2 曲線が接することはない。

接点の x 座標を t とするとき、$p<t<\frac{\pi}{2}$ である。接点の y 座標が等しくなるから、$\tan t=2\sqrt{t-p}$ である。また接線の傾きも等しくなる。C_1 については、$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$ である。C_2 については、$y'=\frac{1}{\sqrt{x-p}}$ である。したがって、$\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{1}{\sqrt{t-p}}$ である。以上によって、t と p について、

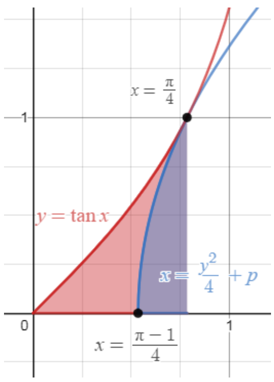
$$\begin{cases}\tan t=2\sqrt{t-p}\\ \dfrac{1}{\cos^2 t}=\dfrac{1}{\sqrt{t-p}}\end{cases}$$

の連立方程式を得る。$\sqrt{t-p}=u$ とおき、$\frac{1}{\cos^2 t}=1+\tan^2 t=1+4u^2$ を下式に代入すれば、

$$1+4u^2=\frac{1}{u}\ \Leftrightarrow\ 4u^3+u^1=0\ \Leftrightarrow\ (2u-1)(2u^2+u+1)=0$$

という u についての方程式を得る。明らかに $u>0$ より、$u=\frac{1}{2}$ と求まる。したがって、$t=p+\frac{1}{4}$ を得る。上式から $\tan t=1$ となるから、$t=\frac{\pi}{4}$ とわかる。また $p=\frac{\pi-1}{4}$。

以上より、$y\geq 0$ における C_1, C_2 のグラフは右図のようになる。C_1, C_2 と $y=0$ で囲まれた部分の面積を、赤部とから青部を引くことによって求める。



$$\int_0^t \tan x\,dx-\int_p^t 2\sqrt{x-p}\,dx$$

$$=\Big[-\log\cos x\Big]_0^t-\left[\frac{4}{3}(x-p)^{\frac{3}{2}}\right]_p^t$$

$$=\log\cos\frac{\pi}{4}-\frac{4}{3}u^3=\frac{\log 2}{2}-\frac{1}{6}$$

これの 2 倍が求める面積であるから、

よって $\log 2-\frac{1}{3}$

Q.150 ★3 芝浦工大

$0<x<1$, $0<y<1$ なる実数 x,y において、次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases}\log_x y+\log_y x=2\\ 2\log_x\sin(x+y)=\log_x\sin y+\log_y\cos x\end{cases}$$

ここに解答を記述。

Q.151 ★?

超越数とは有理数係数多項式の根とならない数である。$\sqrt{2}$ は $x^2-2=0$ の解なので超越数ではないが、円周率 π やネイピア数 e は超越数である。ところで, $e+\pi$ と $e\pi$ が無理数であるかは現在も未解決の問題ではあるが、この 2 つの数のうち少なくとも一方は無理数であることは分かる。なぜか。

Proof. $e+\pi=a, e\pi=b$ がともに有理数であるとする。 解と係数の関係より

$$x^2-ax+b=0$$

の解が π, e である。これらはどちらも超越数であるから, 有理数係数方程式の根とならないことから矛盾する。従って a,b のうち少なくとも一方は無理数である。 □

Q.152 ★5◎ 京大特色 総人理系 (2016)

n を自然数とする。複素数 z が単位円 $|z|=1$ を一周するとき、

$$f(z)=z-\frac{1}{n+1}z^{n+1}$$

が描く曲線の長さを求めよ。

$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおき、θ を $0\leq\theta<2\pi$ で動かすように考える。このとき、ド・モアブルの定理によって、

$$\begin{aligned}f(z)&=(\cos\theta+i\sin\theta)-\frac{1}{n+1}\left(\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\right)\\ &=\left(\cos\theta-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\right)\\ &\quad+i\left(\sin\theta-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta\right)\end{aligned}$$

となるから、$f(z)$ が複素平面上で動く曲線は、xy 平面において、媒介変数 θ を用いて

$$\begin{cases}x=\cos\theta-\dfrac{1}{n+1}\cos(n+1)\theta\\ y=\sin\theta-\dfrac{1}{n+1}\sin(n+1)\theta\end{cases}\qquad(0\leq\theta<2\pi)$$

が表す曲線である。曲線の長さは $\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ で求められる。

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\\ =&(-\sin\theta+\sin(n+1)\theta)^2+(\cos\theta-\cos(n+1)\theta)^2\\ =&(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2(n+1)\theta+\cos^2(n+1)\theta)\\ &\quad-2\sin\theta\sin(n+1)\theta-2\cos\theta\cos(n+1)\theta\\ =&2-2\cos n\theta=4\cdot\frac{1-\cos n\theta}{2}=4\sin^2\frac{n}{2}\theta\end{aligned}$$

であるから、求める長さは、

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{n}{2}\theta}\,d\theta\\ =&2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{n}{2}\theta\right|\,d\theta=\left(2\int_0^{\frac{2}{n}\pi}\sin\frac{n}{2}\theta\,d\theta\right)\times n\\ =&2n\left[-\frac{2}{n}\cos\frac{n}{2}\theta\right]_0^{\frac{2}{n}\pi}=8\end{aligned}$$

Q.153 ★5◎ 一橋後期 (2012)

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ とする。$\log_2(4\sin^2\theta+3\cos\theta-4)$ と $\log_2(-4\cos^3\theta+3\cos\theta+1)$ がともに整数となるような θ の値を求めよ。

$\cos\theta = x$ $(-1 \leq x \leq 1)$ とおく。真数条件より、

$$4\sin^2\theta + 3\cos\theta - 4 = 3x - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{4} \quad \cdots ①$$

続いて、$f(x) = -4x^3 + 3x + 1$ $(0 < x < \frac{3}{4})$ とおくと、$f'(x) = -12x^2+3 = 3(1-4x^2)$ より $f(x)$ は、$0 < x < \frac{1}{2}$ で増加、$x = \frac{1}{2}$ で極大、$\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ で減少する。$f(0) = 1$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{16}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ (極大) であるから、①の範囲において $1 < f(x) \leq 2$ なので、$0 < \log_2 f(x) \leq 1$ であるから、$\log_2 f(x)$ が整数となるのは $\log_2 f(x) = 1$ のとき。すなわち、

$$f(x) = -4x^3 + 3x + 1 = 2 \quad \text{よって} \quad x = -1, \frac{1}{2}$$

ここで①を満たすのは $x = \frac{1}{2}$ のみ。このとき $3x - 4x^2 = \frac{1}{2}$ となるので $\log_2(3x - 4x^2) = -1$ となって題意を満たす。

したがって、求める θ は、$\cos\theta = \frac{1}{2}$ かつ $0 \leq \theta < 2\pi$ より、$\theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

Q.154 ★? Balkan Way 2014

実数に対して定義され実数値をとる関数 f であって、任意の実数 x, y に対して

$$f(f(y)) + f(x-y) = f(xf(y) - x)$$

が成り立つようなものを全て求めよ。

与式に $x = y = 0$ を代入することで、$f\bigl(f(0)\bigr) = 0$ を得る。$f(0) = z$ とおく。
$x = 0, y = z$ を代入することで、$z + f(-z) = z$ を得るので、$f(-z) = 0$ である。
$x = y = z$ を代入することで、$z + z = f(z) = 0$ だから $z = 0$ である。つまり、$f(0) = 0$ である。
$x = 0$ を代入することで、任意の $y \in \mathbb{R}$ について $f\bigl(f(y)\bigr) + f(-y) = 0$ を得る。さらに、$y = 0$ を代入することで、任意の $x \in \mathbb{R}$ について $f(x) = f(-x)$ を得る。よって、任意の $t \in \mathbb{R}$ で

$$f\bigl(f(t)\bigr) = -f(t)$$
$$f(t) = f(-t)$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\Rightarrow \quad f\Bigl(f\bigl(f(t)\bigr)\Bigr) = f\bigl(-f(t)\bigr) \\
&\Rightarrow \quad f\Bigl(f\bigl(f(t)\bigr)\Bigr) = f\bigl(f(t)\bigr) \quad (\because (2)) \\
&\Rightarrow \quad -f\bigl(f(t)\bigr) = f\bigl(f(t)\bigr) \quad (\because (1)) \\
&\Rightarrow \quad f\bigl(f(t)\bigr) = 0 \\
&\Rightarrow \quad -f(t) = 0 \quad (\because (1)) \\
&\therefore \quad f(t) = 0
\end{aligned}$$

より、定数関数 $f(x) = 0$ であることが必要条件。これがもとの関数方程式を満たすことは明らか。
よって求めるものは $f(x) = 0$ のみ。

Q.155 ★?

ある数が「ほとんど整数」であるとは、整数ではないが、整数に非常に近いことを意味する。黄金比 $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の累乗はほとんど整数である。たとえば、$\varphi^{18} = 5777.999826$ は、見ての通り整数に近い。
φ の累乗がほとんど整数である理由を簡潔に説明せよ。

(解 1)

$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする。このとき $s = \varphi + \psi$, $p = \varphi\psi$ とおく。n を整数として、$\varphi^n + \psi^n$ は、s と p の整数係数多項式で表される。ここで $s = 1$, $p = -1$ であるから、$\varphi^n + \psi^n$ はいくつかの整数の和になり、よって整数である。
n を十分大きくすると、ψ の絶対値が 1 未満であることから ψ^n は 0 に十分近くなる。一方で $\varphi^n + \psi^n$ は整数であるから、φ^n はほとんど整数になる。

(解 2)

F_n を n 番目のフィボナッチ数として、$\varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であること (∗) を示す。
$n = 1$ のときは、$F_1\varphi + F_0 = \varphi + 0 = \varphi^1$ となるから、成り立っている。
ある $n = k$ で成り立つと仮定したとき、$\varphi^k = F_k\varphi + F_{k-1}$ の両辺に φ をかけて、

$$\begin{aligned}
\varphi^{k+1} &= F_k\varphi^2 + F_{k-1}\varphi = F_k(1+\varphi) + F_{k-1}\varphi \\
&= (F_{k-1} + F_k)\varphi + F_k = F_{k+1}\varphi + F_k
\end{aligned}$$

が得られ、これは $n = k+1$ の場合でも成り立つことを示しているから、数学的帰納法によって、(∗) が成り立つ。
$\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ についても、φ とまったく同様の議論によって、$\psi^n = F_n\psi + F_{n-1}$ が成り立つ。これらによって

$$\varphi^n + \psi^n = F_n(\varphi + \psi) + 2F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}$$

となって右辺は明らかに整数だから $\varphi^n + \psi^n$ は整数である。
(以下解 1 と同様)

Q.156 ★3 south_37316 様

$\frac{12}{24} > \frac{m}{n} > \frac{12}{25}$ (m, n は正の整数) を満たす最小の m と、その m の時の n を求めよ。

与不等式を次のように整理する。

$$\frac{12}{24} > \frac{m}{n} > \frac{12}{25} \Leftrightarrow \frac{24}{12} < \frac{n}{m} < \frac{25}{12}$$
$$\Leftrightarrow 24m < 12n < 25m \Leftrightarrow 0 < 12(n-2m) < m$$

$12(n-2m)$ は 12 の自然数倍であるから 12 以上。よって $m > 12$ となる。$m = 13$ とすると $0 < 12(n-26) < 13$ より $n = 27$ が与不等式を満たせる。
以上より、最小の m は $m = 13$ で、そのときの n は $n = 27$ である。

Q.157 ★2 JMO 予選 2016-1

次の式の値を計算し, 整数値で答えよ。

$$\sqrt{\frac{11^4 + 100^4 + 111^4}{2}}$$

$x = 11, y = 100$ とする。

$$\frac{x^4 + y^4 + (x+y)^4}{2} = x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4$$

となる。これは $(x^2 + xy + y^2)^2$ に等しいので

$$\sqrt{\frac{x^4 + y^4 + (x+y)^4}{2}} = |x^2 + xy + y^2| = 121 + 1100 + 10000 = 11221$$

Q.158 ★2 河合マーク IA

$a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$, $A = \{3, 4, 7, 9, a^2 - a\}$, $B = \{0, 8, a+b+1, 2a+b\}$ とする。
(1) $A \cap B = \{3, 4\}$ のとき、a と b を求めよ。
(2) $A - B = \{2, 3, 7, 9\}$ のとき、a と b を求めよ。

(1)

a は自然数なので、$(2a+b) - (a+b+1) = a - 1 \geq 0$ であるから、

$$a + b + 1 = 3 \quad \text{かつ} \quad 2a + b = 4$$

であればよい。これを解いて $(a,b)=(2,0)$ を得る (a は自然数でかつ b は整数なのでよい)。このとき、

$$A=\{3,4,7,9,2\},\ B=\{0,8,3,4\}$$

なので、実際に $A\cap B=\{3,4\}$ である。よって、$(a,b)=(2,0)$。

(2)

$2\in A\setminus B$ より、$a^2-a=2$ である。a は自然数なので、$a=2$ である。これによって $B=\{0,8,b+3,b+4\}$。$4\in A$ かつ $4\notin A\setminus B$ なので、$b+3$ か $b+4$ のいずれかが 4 である。よって $b=0$ または $b=1$。
$b=0$ とすると、$3\in A\cap B$ となるので $3\in A\setminus B$ に反する。$b=1$ とすると

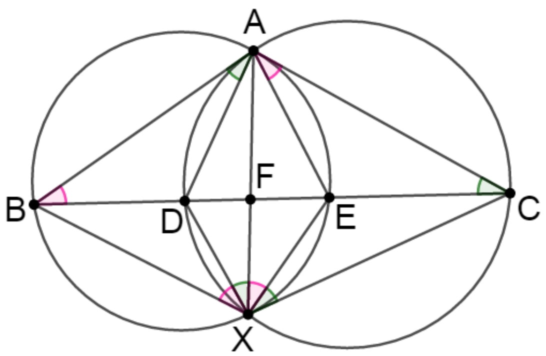
$$A=\{3,4,7,9,2\},\ B=\{0,8,4,5\}$$

より $A\setminus B=\{3,4,7,9\}$ である。よって $(a,b)=(2,1)$。

Q.159 ★7 JMO 予選 2017-8

△ABC の辺 BC 上に 4 点 B, D, E, C がこの順にならぶ。△ABE の外接円と △ADC の外接円の、A と異なる交点を X、AX と BC の交点を F とする。∠BAD = ∠ACE, ∠ABD = ∠CAE, BF = 5, CF = 6, XD = 3 のとき、XE を求めよ。

∠ACE = ∠BAD = θ, ∠CAE = ∠ABD = ϕ とおく。また △ABE の外接円を C_1、△ADC の外接円を C_2 とおく。



∠ADE = ∠AED = $\theta+\phi$ となっているから、AD = AE が成り立つ。円 C_1 で方べきの定理によって DF · FC = AF · FX。また円 C_2 で方べきの定理によって AF · FX = BF · FE。これらによって

$$\mathrm{DF}\cdot\mathrm{FC}=\mathrm{BF}\cdot\mathrm{FE}\Leftrightarrow 6\mathrm{DF}=5\mathrm{FE}\Leftrightarrow \mathrm{DF}:\mathrm{FE}=5:6$$

続いて円周角の定理を用いて、C_2 にて ∠AXD = ∠ACD = θ、C_1 にて ∠AXE = ∠ABE = ϕ なので、

$$\angle\mathrm{DXE}=\angle\mathrm{AXD}+\angle\mathrm{AXE}=\theta+\phi$$

C_1 の別の円周角で ∠AXB = AEB = $\theta+\phi$ であるから、

$$\angle\mathrm{DXB}=\angle\mathrm{AXB}-\angle\mathrm{AXD}=(\theta+\phi)-\theta=\phi=\angle\mathrm{AXE}$$

となる。C_2 でまた別の円周角をみれば、∠XAE = ∠XBD である。これらより、2 つの角が等しいから △XAE ∼ △XBD がわかる。
さて、DF = $5k$, FE = $6k$ とおく。明らかに BF > DF だから $0<k<1$。このとき BD = $5(1-k)$, CE = $6(1-k)$ となる。△ABD ∼ △ECA であって、AD = AE = x とおいて相似比は、

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DA}=\mathrm{AE}:\mathrm{EC}\Leftrightarrow 5(1-k):x=x:6(1-k)$$

よって $x=\sqrt{30}(1-k)$ となる。続いて △XAE と △XBD の相似比をみて、

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DX}=\mathrm{AE}:\mathrm{EX}\Leftrightarrow 5(1-k):3=\sqrt{30}(1-k):\mathrm{EX}$$

であるから、EX = $\frac{3}{5}\sqrt{30}$

Q.160 ★7 京大 (2014)

xy 平面の第一象限において、原点 O を中心とする円 C_1 と、$C_2: y=\frac{1}{x}(0<x)$ が 2 点 A, B で交わっている。点 A における $y=\frac{1}{x}$ の接線と直線 OA のなす角が $\frac{\pi}{6}$ であるとき、C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

2 曲線 C_1, C_2 はともに直線 $y=x$ に関して対称なので、2 点 A, B も直線 $y=x$ に関して対称である。ゆえに点 A は第一象限のうちの $y\leq x$ の範囲にあるとして一般性を失わない。
円 C_1 の半径を r として A$(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく (ただし $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)。
直線 OA の傾きは $\tan\theta$ となる。θ の範囲から、$0\tan\theta<1$ である。
点 A は曲線 C_2 上の点だから、

$$r\sin\theta=\frac{1}{r\cos\theta}\Leftrightarrow r^2\sin\theta\cos\theta=1$$

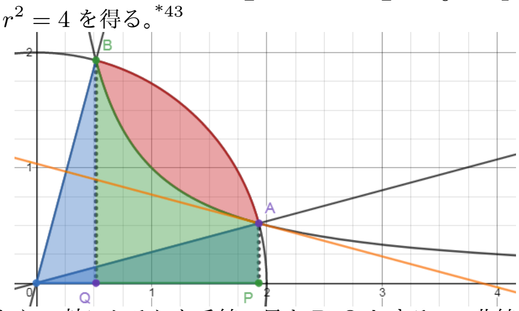
が成り立つ。
曲線 C_2 において、$y'=-\frac{1}{x^2}$ より、点 A における C_2 の接線の傾きは $-\frac{1}{r^2\cos^2\theta}$ である。ここで、

$$r^2\cos^2\theta=r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=1\cdot\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\theta}$$

となるから、この接線の傾きは $-\tan\theta$ と書き直せる。したがって、この接線が x 軸となす角を 0 から $\frac{\pi}{2}$ の範囲で考えると、これは θ に等しいことがわかる。これと $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ を踏まえて、点 A における C_2 の接線と直線 OA のなす角は 2θ であることがわかる。さらにこれが $\frac{\pi}{6}$ に等しいから、$\theta=\frac{\pi}{12}$ と求まった。加えて

$$1=r^2\cos\theta\sin\theta=r^2\frac{1}{2}\sin 2\theta=r^2\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{r^2}{4}$$

によって $r^2=4$ を得る。[43]



点 A, B から x 軸におろした垂線の足を P, Q とする。2 曲線 C_1, C_2 で囲まれた部分の面積は、

扇形 OAB + △OAP − △OBQ − (上図緑領域)

によって求められる。ここで $y=x$ についての対称性から、直線 OB と y 軸のなす角は $\theta=\frac{\pi}{12}$ に等しい。よって点 B の x 座標は $r\sin\theta$ であり、また ∠AOB = $\frac{\pi}{3}$。さらに、∠BOQ = ∠OAP であり、BO=OA とあわせれば △OAP ≡ △BOQ が成り立つから面積も等しい。これらを用いて求める面積は、

$$\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{3}-\int_{r\sin\theta}^{r\cos\theta}\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\left[\log x\right]_{r\sin\theta}^{r\cos\theta}=\frac{2}{3}\pi-\log\left(\frac{1}{\tan\theta}\right)$$

で求められる。さて、

$$\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{1-\cos\frac{\pi}{6}}}=2+\sqrt{3}$$

であるから、求める面積は、$\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$

Q.161 ★3◎ 京大理系 (2016)

n を 2 以上の自然数とするとき, 関数

$$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$$

の $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ における最大値 M_n と, $\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。

[43] ここまでの議論は、はてなブログを参考にしつつ、編者が改訂を行っています。

$f_n(\theta)$ を微分する。

$$\begin{aligned} f_n'(\theta) &= -\sin\theta\sin^{n-1}\theta + (1+\cos\theta)(n-1)\cos\theta\sin^{n-2}\theta \\ &= -\sin^n\theta + (n-1)\sin^{n-2}\theta(\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &= \sin^{n-2}\theta\big[-\sin^2\theta + (n-1)(\cos\theta+\cos^2\theta)\big] \\ &= \sin^{n-2}\theta\big[n\cos^2\theta + (n-1)\cos\theta - 1\big] \\ &= \sin^{n-2}\theta(n\cos\theta-1)(\cos\theta+1) \end{aligned}$$

これより、$f_n'(\theta)=0$ となるのは、

$$\sin\theta = 0,\ \cos\theta = \frac{1}{n},\ \cos\theta = -1$$

のときであるが、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \neq -1$。また、この範囲に $\cos\theta = \dfrac{1}{n}$ を満たすものはただ 1 つ存在するから[*44]、これを θ_n をおく。以上より、

$$f_n'(\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0,\ \theta_n \quad \text{ただし } 0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$$

増減表は以下のようになって、$M_n = f_n(\theta_n)$ とわかる。

θ	0	$\cdots$	θ_n	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f_n'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	1

$\cos\theta_n = \dfrac{1}{n}$ と、$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ より、$\sin\theta_n = \sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}$ なので、

$$M_n = f_n(\theta_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

と求まった。さらに、

$$\begin{aligned} M_n^n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{-n(n-1)}{2n^2}} \end{aligned}$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2} = e$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{n(n-1)}{2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} M_n^n = e\cdot e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Q.162 ★5 京大プレ理系 2017 第 2 回

> 曲線 $y=\log x\ (1 \leq x \leq e)$ を x 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を、y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

体積を求める立体を K とし、その体積を V とする。曲線 $y=\log x$ $(1 \leq x \leq e)$ を x 軸で回転させたときの曲面は、

$$\begin{cases} y^2+z^2 = (\log x)^2 \\ 1 \leq x \leq e \end{cases}$$

として表せる。この曲面は xz 平面対称であるから K もそうであり、K のうち $y \geq 0$ の部分の体積は $\dfrac{1}{2}V$ である。

K は $-1 \leq y \leq 1$ の範囲に存在するので、$y=k\ (0 \leq k \leq 1)$ で K を切断したときの断面を考える。上の曲面を $y=k$ で切断した部分は (xz 平面に射影すると)

$$\begin{cases} z^2 = (\log x)^2 - k^2 \\ e^k \leq x \leq e \end{cases}$$

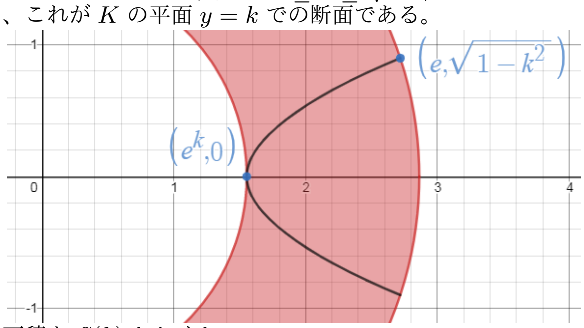
という曲線になるので、これを C_k と呼ぶ。C_k 上の点 P は、$\mathrm{P}(t, \pm\sqrt{(\log t)^2-k^2})$ と書くことができ（ただし $e^k \leq t \leq e$）、符号がいずれであっても原点との距離の 2 乗 $D(t)$ は

$$D(t) = t^2 + (\log t)^2 - k^2$$

となる。$D(t)$ は明らかに t につれて増加するから、

$$e^{2k} \leq D(t) \leq e^2+1-k^2$$

であることがわかる。これは、C_k 上で最も原点に近い点が $(e^k, 0)$ であり、最も遠い点が $(e, \sqrt{1-k^2})$ であることからくる。よって、C_k を原点中心に回転させると円環領域 $e^k \leq r \leq \sqrt{e^2+1-k^2}$ になることが分かり、これが K の平面 $y=k$ での断面である。



この断面積を $S(k)$ とおくと、

$$S(k) = \pi(e^2+1-k^2-e^{2k})$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V &= \int_0^1 S(y)\,dy \\ &= \pi\left[(e^1+1)y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}e^2+\frac{7}{6}\right)\pi \end{aligned}$$

以上より、$V = \left(e^2+\dfrac{7}{3}\right)\pi$

Q.163 ★8◎ 学コン

> N を 4 以上の整数とする。n を $1 \leq n \leq N$ を満たす整数とし、$S_n = n\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k}\right)$ とおく。
>
> (1) S_n が最大となるような n は 1 つまたは 2 つ存在することを示せ。
>
> (2) (1) で定めた n の 1 つを k とする。$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{S_k}{N^\alpha}$ が 0 でない値に収束するような実数の定数 α と、そのときの極限値を求めよ。

(1)

$2 \leq n \leq N-1$ として、

$$\begin{aligned} S_{n+1}-S_n &= (n+1)\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k} - n\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} \\ &= (n+1)\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k} - n\left(\sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{N}\frac{1}{k} - 1 < \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} - 1 = S_n - S_{n-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$S_2 - S_1 = \sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k} - 1 \geq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1 = \frac{1}{12} > 0$$

$$S_N - S_{N-1} = \frac{1}{N} - 1 < 0$$

より、ある整数 k が $2 \leq k \leq N-1$ に存在し、

$$S_N - S_{N-1} < S_{N-1} - S_{N-2} < \cdots < S_{k+1} - S_k \leq 0$$

[*44] この区間では $\cos\theta$ は単調減少

$$\leq S_k - Sk - 1 < \cdots < S_3 - S_2 < S_2 - S_1$$

となるので、これを整理して

$$S_N < S_{N-1} < S_{N-2} < \cdots < S_{k+1} \leq S_k$$
$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_{k-1} \leq S_k$$

が得られ、S_{k-1}, S_k, S_{k+1} が最大となる候補である。
これらが 3 つが等しいとすると、$S_k - S_{k-1} = 0 = S_{k+1} - S_k$ であって、これは $S_k - S_{k-1} > S_{k+1} - S_k$ に矛盾する。よって最大値をとり得るのは、S_k と S_{k+1}、S_k と S_{k-1}、あるいは S_k のみ、であるから、題意は示された。

(2)

(1) の結果から、

$$S_{k+1} - S_k \leq 0 \leq S_k - S_{k-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=k+1}^{N} \frac{1}{i} - 1 \leq - \leq \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i} - 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -1 - \frac{1}{k} \leq - \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i} \leq -1$$
$$\Leftrightarrow \quad k + 1 \geq k \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i} = S_k \geq k \quad \cdots ①$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{k+1}{N^\alpha} \geq \frac{S_k}{N^\alpha} \geq \frac{k}{N^\alpha} \quad \cdots ②$$

を得る。$2 \leq i \leq N$ で $\int_i^{i+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{i} < \int_{i-1}^{i} \frac{dx}{x}$ が成り立つから、$k \leq i \leq N$ で総和をとることで

$$\int_k^{N+1} \frac{dx}{x} < \sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i} < \int_{k-1}^{N} \frac{dx}{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad k \log\left(\frac{N+1}{k}\right) < S_k < k \log\left(\frac{N}{k-1}\right)$$

となる。①から、

$$k \log\left(\frac{N+1}{k}\right) < k+1,\ k \log\left(\frac{N}{k-1}\right) > k$$

となるから、

$$k \log\left(\frac{N+1}{k}\right) - 1 < k < k \log\left(\frac{N}{k-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \log\left(\frac{N+1}{k} \cdot e^{-\frac{1}{k}}\right) < 1 < \log\left(\frac{N}{k-1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{N+1}{k} \cdot e^{-\frac{1}{k}} < e < \frac{N}{k-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{N+1}{N} \cdot e^{-\frac{1}{k}-1} < \frac{k}{N} < \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e}$$

明らかに $\lim_{N\to\infty} k = \infty$ なので[*45]、

$$\lim_{N\to\infty} \frac{k}{k-1} \cdot \frac{1}{e} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{N} \cdot e^{-\frac{1}{k}-1} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

と計算される。よってはさみうちの原理から $\lim_{N\to\infty} \frac{k}{N} = \frac{1}{e}$ と求まった。
②において、

$$\frac{k+1}{N} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}} \geq \frac{S_k}{N^\alpha} \geq \frac{k}{N} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}}$$

であるから、$\frac{1}{N^{\alpha-1}}$ が $N \to \infty$ の極限で 0 でない値に収束すればよい。
これを満たすのは $\alpha = 1$ で、このときはさみうちの原理から

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_k}{N^\alpha} = \frac{1}{e}$$

Q.164 ★5 大阪市立大

1 枚の硬貨を何回も投げ、表が 2 回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回 $(n \geq 2)$ で終了する確率を P_n とする。
(1) P_{n+1} を、P_n および P_{n-1} で表せ。ただし $n \geq 3$ とする。
(2) P_n $(n \geq 2)$ を求めよ。

(1)

$n+1$ 回目で終了する場合は、(1): 1 回目に裏が出たあと n 回投げて終了する、(2): 1 回目に表、2 回目に裏が出たあと $n-1$ 回投げて終了する、のいずれかであるから、

$$P_{n+1} = \frac{1}{2}P_n + \frac{1}{4}P_{n-1}$$

(2)

(1) で得た漸化式は、$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ を用いて

$$P_{n+1} - \alpha P_n = \beta(P_n - \alpha P_{n-1})$$
$$P_{n+1} - \beta P_n = \alpha(P_n - \beta P_{n-1})$$

と整理できる。それぞれ解いて、

$$P_{n+1} - \alpha P_n = \beta^{n-1}(P_2 - \alpha P_1)$$
$$P_{n+1} - \beta P_n = \alpha^{n-1}(P_2 - \beta P_1)$$

明らかに $P_1 = 0,\ P_2 = \frac{1}{4}$ であり、P_{n+1} を消去して、

$$P_n = \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{4(\alpha - \beta)} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} \right]$$

Q.165 ★7◎ 東京大

xy 平面上の各格子点を中心として半径 r の円が描かれており、傾き $\frac{2}{5}$ の任意の直線はこれらのどれかと共有点を持つという。このような性質を持つ実数 r の最小値を求めよ。

傾き $\frac{2}{5}$ の直線の方程式は $5x + 2y - k = 0$ (ただし k は実数) の形で表される。いかなる k に対しても、ある格子点 (m, n) が少なくとも 1 つ存在して、

$$\frac{|5m + 2n - k|}{\sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{|5m + 2n - k|}{\sqrt{29}}$$

が r 以下となることが必要十分である。
適当な整数 N に対して、$m = N,\ n = -2N$ とおけば $5m + 2n = N$ とできる。またいかなる格子点 (m, n) に対しても明らかに $5m + 2n$ は整数になる。すなわち、(m, n) が格子点全体を動くとき、$5m + 2n$ は整数全体を動く。したがって、N を整数全体で動く変数とみて、$|5m + 2n - k| = |N - k|$ が最小となるような N のときに $\frac{|N-k|}{\sqrt{29}} \leq r$ が成り立つ。
実数 k に対して、$M_k + \frac{1}{2} \geq k$ を満たす最小の整数 M_k が存在し、これは $M_k - \frac{1}{2} < k \leq M_k + \frac{1}{2}$ を満たす。$k - M_k = j$ とおくと、$-\frac{1}{2} < j \leq \frac{1}{2}$ であって、$|N - k| = |N + M_k - j|$。
$|N + M_k| \geq 1$ であると、$|N + M_k - j| \geq \frac{1}{2}$ となる。すなわち、$\frac{|N-k|}{\sqrt{29}} \geq \frac{1}{2\sqrt{29}}$ となるような N が必ず存在するから、$r \geq \frac{1}{2\sqrt{29}}$ が r の十分条件である。特に $k = \frac{1}{2}$ の場合を考えれば、$\left|N - \frac{1}{2}\right|$ の最小値は $\frac{1}{2}$ であるから、そのとき直線と格子点の距離は $\sqrt{12}\sqrt{29}$ となり得る

[*45] これが収束すると仮定すると、$\sum_{i=k}^{N} \frac{1}{i}$ は発散するから①が満たされなくなる。

ため、$r < \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ は題意を満たさない。

以上により、$r \geq \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ が必要十分で、r の最小値は $\dfrac{1}{2\sqrt{29}}$ である。

Q.166 ★8 JMO 本選 2017-1

a, b, c を正の整数とするとき、a と b の最小公倍数と、$a+c$ と $b+c$ の最小公倍数は等しくないことを示せ。

a と b の最大公約数を g_1、$a+c$ と $b+c$ の最大公約数を g_2 とする。これら 2 組の最小公倍数が等しいことを仮定すると、

$$\frac{ab}{g_1} = \frac{(a+c)(b+c)}{g_2}$$

が成り立つ。$a = Ag_1$, $b = Bg_1$, $a+c = Pg_2$, $b+c = Qg_2$ と表すと、

$$ABg_1 = PQg_2 \quad \cdots ①$$

である。次に、$a - b = (a+c) - (b+c)$ により、

$$(A-B)g_1 = (P-Q)g_2 \quad \cdots ②$$

である。①から、$g_1 = \dfrac{PQ}{AB}g_2$ なので、②に代入すると、

$$\frac{PQ(A-B)g_2}{AB} = (P-Q)g_2$$

$g_2 \neq 0$ より、$PQ(A-B) = AB(P-Q)$ となる。ここで、A と B、P と Q はそれぞれ互いに素なので、$A-B$ は A でも B でも割り切れず、$P-Q$ は P でも Q でも割り切れない。よって PQ は AB で割り切れてかつ AB は PQ で割り切れるので、$AB = PQ$。ゆえに $A-B = P-Q$。②によって $g_1 = g_2$。よって、

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{g_1} = \frac{(a+c)(b+c)}{g_2} \\ \Leftrightarrow\quad & ab = ab + c(a+b) + c^2 \\ \Leftrightarrow\quad & c^2 = -c(a+b) < 0 \end{aligned}$$

となって矛盾。

よって、a と b、$a+c$ と $b+c$ の最小公倍数は等しくないことが示された。

Q.167 ★5

円 O の半径を 111111111、円 P の半径を 11111 とする。O の円周上に点 A が、P の円周上に点 B が、それぞれ自由に動くものとする。線分 AB の中点 M の存在しうる範囲の面積を求めよ。

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{p}$ とする。このとき,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{a}}{2} + \frac{\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2} + \frac{\overrightarrow{p}}{2}$$

だから, OP の中点を N とすると,

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{NM} = \frac{\overrightarrow{a}}{2} + \frac{\overrightarrow{b}}{2}$$

である。つまり, N を始点としたときの $\dfrac{\overrightarrow{a}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{b}}{2}$ の終点が通る存在範囲が M の存在範囲であり, $|\overrightarrow{a}| = 111111111$, $|\overrightarrow{b}| = 11111$ を満たしながら自由に動けるから, 存在領域は, 半径 r が

$$\frac{111111111}{2} - \frac{11111}{2} \leqq r \leqq \frac{111111111}{2} + \frac{11111}{2}$$

の範囲の円環領域 (輪っか) になっている。よって, 大きい円の面積から小さい円の面積を引くことで

$$\begin{aligned} &\pi\left(\frac{111111111}{2} + \frac{11111}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{111111111}{2} - \frac{11111}{2}\right)^2 \\ =&2 \times \frac{111111111 \times 11111}{2}\pi \\ =&111111111 \times 11111 \times \pi = 1234555554321\pi \end{aligned}$$

Q.168 ★? 自作

$d(k)$ で k の正約数の個数、$\phi(k)$ でオイラーの ϕ 関数、$\sigma(k)$ で k の正約数の総和、$\pi(k)$ で k 以下の素数の約数とする。

n が 2 以上の整数のとき、

$$\sum_{k=2}^{n} \left\lfloor \frac{d(k) + \phi(k)}{\sigma(k)} \right\rfloor = \pi(n)$$

が成立することを示せ。

まず、次の補題を示す。

補題 168.1

$c(n) = \dfrac{d(n) + \phi(n)}{\sigma(n)}$ とおく。このとき, 次が成り立つ。

(1) n が素数ならば、$c(n) = 1$

(2) $n \geqq 2$ が素数でないならば、$0 < c(n) < 1$

(証明 1) n を素数とする。このとき,n の正の約数は $1, n$ の 2 個 で, その和は $n+1$ であり, n 以下の n と互いに素な自然数の個数は 1 から $n-1$ までの全ての整数であり, $n-1$ 個である。したがって, $d(n) = 2, \sigma(n) = n+1, \phi(n) = n-1$ なので,

$$c(n) = \frac{2 + (n-1)}{n+1} = 1$$

よりよい。 □

(証明 2) $n \geqq 2$ を素数でないとする。$0 < c(n)$ であることは明らか。n は 1 と n 以外にも約数を持ち, $1 \neq n$ であるから, $n+1 < \sigma(n)$ が分かる。次の 2 つの集合

$$D = \{k \in \mathbb{Z} \cap [1, n] \mid k \text{ は } n \text{ の約数である }\}$$

$$\Phi = \{k \in \mathbb{Z} \cap [1, n] \mid k \text{ は } n \text{ と互いに素である }\}$$

を定めると、$d(n), \phi(n)$ は D, Φ の元の個数である。さて, 1 は n の約数であり, n と互いに素であるから, $1 \in D, 1 \in \Phi$ であることが分かる。続いて, $2 \leq k \leq n$ なる自然数について, $k \in D$ を満たすとすると, k と n の最大公約数は $k \neq 1$ であるからこの k は Φ に属さない。以上から, $D \cap \Phi = \{1\}$ であると分かる。有限集合 X に対してその元の個数を $|X|$ で書くことにする。定義より明らかに $D \cup \Phi \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ であるから,

$$\begin{aligned} d(n) + \phi(n) &= |D| + |\Phi| \\ &= |D \cup \Phi| + |D \cap \Phi| = |D \cup \Phi| + |\{1\}| \\ &\leq |\{1, 2, \ldots, n\}| + |\{1\}| = n + 1 < \sigma n \end{aligned}$$

となる。ゆえに, $c(n) < 1$ が得られた。 □

補題より, $k \geqq 2$ に対して

$$\lfloor c(k) \rfloor = \begin{cases} 1 & (k \text{ が素数}) \\ 0 & (k \text{ が素数でない}) \end{cases}$$

となるので, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor c(k) \rfloor$ は 2 から n までの素数の個数を計上する。したがって $\pi(n)$ に一致する。 □

Q.169 ★7 学コン

$f(x) = x(2 - \log x)$ とする。

(1) $1 < x < e$ ならば、$2 < f(x) < e$ であることを示せ。

(2) $a_1 = \alpha$ $(1 < \alpha < e)$, $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ により定まる数列 $\{a_n\}$ について、$\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n = e$ であることを示せ。

(1)

$f'(x) = 1 - \log x$ であるから、$1 < x < e$ において常に $f'(x) > 0$、すなわち $f(x)$ は単調増加である。したがって、$1 < x < e$ において

$$f(1) < f(x) < f(e) \quad \Leftrightarrow \quad 2 < f(x) < e$$

であることが示された。

(2)

(1) の結果より、帰納的に $n \geq 2$ ならば $2 < a_n < e$ であることがわかる。$f(e) = e$ であるから、漸化式から

$$|a_{n+1} - e| = |f(a_n) - f(e)|$$

がいえる。この式の右辺について、平均値の定理から、ある $a_n \leq t_n \leq e$

を満たす t_n が存在して

$$|f(a_n)-f(e)|=|a_n-e|\cdot f'(t_n)$$

を満たす。この右辺を評価する。$n\geq 2$ のとき $2<t_n\leq e$ であって、$f'(x)=1-\log x$ は単調減少であることを踏まえて

$$|a_n-e|\cdot|f'(t_n)|<|a_n-e|\cdot|f'(2)|$$

となるので、$n\leq 3$ において

$$0\leq|a_n-e|<|a_{n-1}-e|\cdot|f'(2)|<\cdots<|a_2-e|\cdot|f'(2)|^{n-2}$$

である。$|f'(2)|=1-\log 2=\log\dfrac{e}{2}<1$ であるから、

$$\lim_{n\to\infty}|a_2-e|\cdot|f'(2)|^{n-2}=0$$

である。よってはさみうちの原理から、

$$\lim_{n\to\infty}|a_n-e|=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to\infty}=e$$

Q.170 ★7 AIME I (2014)

次の方程式を解け。

$$\frac{3}{x-3}+\frac{5}{x-5}+\frac{17}{x-17}+\frac{19}{x-19}=x^2-11x-4$$

$x-11=y$ とすると

$$\frac{3}{y+8}+\frac{5}{y+6}+\frac{17}{y-6}+\frac{19}{y-8}=y^2+11y-4$$

左辺の各項は $\dfrac{11-k}{y+k}\quad(k=\pm6,\pm8)$ という形をしている。これに 1 を足すと $1+\dfrac{11-k}{y+k}=\dfrac{y+11}{y+k}$ となるので, 右辺の定数項である -4 を移項して 4 つの 1 に分け, この $\dfrac{11-k}{y+k}$ の項にひとつずつ足せば

$$\frac{y+11}{y+8}+\frac{y+11}{y+6}+\frac{y+11}{y-6}+\frac{y+11}{y-8}=y(y+11)$$

よって $y=-11\Leftrightarrow x=0$ でひとつの解となる。$y\neq-11$ として $y+11$ で割り, 通分を行うと

$$\frac{2y}{y^2-64}+\frac{2y}{y^2-36}=y$$

$y=0\Leftrightarrow x=11$ はひとつの解である。$y\neq 0$ として両辺を y で割り, $y^2-50=z$ として分母を払ったとき

$$2(z+14)+2(z-14)=z^2-196$$

整理して

$$z^2-4z-196=0$$

これを解き $z=2\pm10\sqrt{2}\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{52\pm10\sqrt{2}}$ だから, 求める実数解は

$$x=\mathbf{0,11,11\pm\sqrt{52\pm10\sqrt{2}}}\qquad(\text{複号任意})$$

Q.171 ★12 自作

(前略)
4 つの素数 a,b,n,x があり、これら 4 つの中から上手く 3 つを選ぶと、それらはある順番で等差数列をなす。さらに、$\dfrac{a+b^n}{n}=x$ を満たす。このような組 (a,b,n,x) を全て求めよ。
(後略)

a,b,n,x のうち 3 つからなる等差数列を S と呼ぶことにし、階差は非負となるように並べるものとする。たとえば a が S に選ばれていないという状況を $a\notin S$ で表すことにする。方程式

$$a+b^n=nx\qquad\cdots(*)$$

について考える。

Step. 1 まず、

$$n\leq(1+1)^{n-1}=2^{n-1}\leq b^{n-1}$$

より、$bn\leq b^n$ が従うので、$bn<a+b^n=nx$ より $b<x$ である。さらに $n^2\leq 1+2^n$ が成り立つことに注意すると、

$$n^2\leq1+2^n\leq1+b^n<a+b^n=nx$$

となるので、$n<x$ である。また、このことから $x\neq2$ が分かる。

Step. 2 S の階差が 0 であるとき、S は (p,p,p) (p は素数) となる。b,n のいずれかは S に選ばれているので、Step. 1 より $x\notin S$ が従う。よって $a=b=n=p$ とすると $p+p^p=px$ より $1+p^{p-1}=x$ である。$p>2$ であるとすると左辺は 2 より大きい偶数となって x は素数でないから不適。よって $p=2$ となり $x=3$ となる。よって $(a,b,n,x)=(2,2,2,3)$ は解の一つである。

以降 S の階差 d は正であるとする。まず、a,b,n,x がすべて奇数であるとすると、$(*)$ の左辺は偶数、右辺は奇数なので不適。よって a,b,n のいずれかが 2 である。このとき、$2\in S$ であるとするとこれは S のうち最小の元であって、最大の元は $2+2d$ と書ける。これが a,b,n のいずれかに等しいから $2+2d$ は素数でなければならないが、$d>0$ よりこれは 2 より大きい偶数となり素数でない。よって $2\notin S$ である。同じ理由によって a,b,n の中に 2 は一つしか存在しない。
$2\notin S$ と Step. 1 を踏まえると、a,b,n,x と S としてあり得る状況は次のいずれかである。

$$a=2\text{ で、}\quad S=(b,n,x)\quad\text{or}\quad(n,b,x)$$

$$b=2\text{ で、}\quad S=(a,n,x)\quad\text{or}\quad(n,a,x)\quad\text{or}\quad(n,x,a)$$

$$n=2\text{ で、}\quad S=(a,b,x)\quad\text{or}\quad(b,a,x)\quad\text{or}\quad(b,x,a)$$

Step. 3 $a=2$ の場合、考えるべき方程式 $(*)$ は

$$2+b^n=nx$$

である。$S=(s_1,s_2,s_3)$ とするとき、等差数列だから $s_1+s_3=2s_2$ が成り立つ。このとき $s_3<2s_2$ が成り立っていることに注意する。

Step. 3.1 $S=(b,n,x)$ の場合、$3\leq b<n$ より $n\geq5$ でなければならず、$x<2n$ だから

$$2+2^n<2+b^n=nx<2n^2$$

となるが、$n\geq7$ では $2+2^n>2n^2$ となるので不適。よって $n=5$ で、$b=3$ でなければならない。このとき階差は 2 だから $x=7$ である。しかしこれらは $(*)$ の解にならない。

Step. 3.2 $S=(n,b,x)$ の場合、$n\geq3$ かつ $b\geq5$ であり、$x<2b$ が成り立つ。よって

$$b^n<2+b^n<nx<2bn$$

より、$b^{n^1}<2n$ だから $5^{n-1}<2n$ となる。これは $n\geq3$ で成り立たないので不適。

Step. 4 $b=2$ の場合、考えるべき方程式 $(*)$ は

$$a+2^n=nx$$

である。n はこの場合奇素数だから、$n\equiv\pm1\pmod 6$ である。すると $n=6k\pm1$ と書ける。$n=6k+1$ なら $2^n\equiv64^k\times2\equiv2\pmod 9$ で、$n=6k-1$ なら $2^n\equiv5\pmod 9$ となることがわかる。
また、$S=(s_1,s_2,s_3)$ の階差 d は、$s_1>3$ である限りは 3 の倍数でなければならない。なぜなら、$d\equiv\pm1\pmod 3$, $s_1\equiv\pm1\pmod 3$ であり、いずれの場合においても s_1+d, s_1+2d のいずれかが $\pmod 3$ で 0 となるが、3 より大きい素数 s_1+d, s_1+2d に不適であるから。またこのとき、$s_1\equiv s_2\equiv s_3\pmod 3$ を満たすことに注意する。

Step. 4.1 $S=(a,n,x)$ の場合、$3\leq a$, $x<2n$ だから、

$$3+2^n\leq a+2^n=nx<2n^2$$

より、$3+2^n<2n^2$ である。これは $n\geq7$ で成り立たない。一方 $3\leq a$ から $5\leq n$ なので、$n=5$ に決まる。よって $a=3$, $x=7$ で、

$$3+2^5=35=5\times7$$

は $(*)$ を満たす。よって、$(a,b,n,x)=(3,2,5,7)$ は解の一つである。

Step. 4.2 $S=(n,a,x)$ の場合を考える。$n=3$ とすると $a=\dfrac{x+3}{2}$ から、

$$a+2^3=3x\quad\Leftrightarrow\quad19+x=6x$$

となるが、このような x は存在しない。よって $n>3$ であり、階差 d は 3 の倍数であり、$n=6k\pm1$ となる。
$n=6k+1$ のとき、$2^n\equiv2\pmod 9$, $a=n+d\equiv1\pmod 3$。さらに $nx=(a-d)(a+d)$ を用いて $(*)$ の $\pmod 9$ を考えると、

$$a+2\equiv a^2-d^2\equiv a^2\pmod 9$$

より、$a^2-a-2\equiv0\pmod 9$ である。

$$a^2-a-2\equiv(a+4)^2\equiv0\pmod 9$$

なので、この解は $a+4$ が 3 の倍数のとき、すなわち $a\equiv2\pmod 3$ に限るが、これは $a\equiv1\pmod 3$ に反する。
$n=6k-1$ のとき、$2^n\equiv5\pmod 9$, $a=n+d\equiv2\pmod 3$。同様

に考えて、

$$a+5\equiv a^2 \pmod 9$$

となる。$a\equiv 2 \pmod 3$ より、$a\equiv 2,5,8 \pmod 9$ であるが、この中に上式を満足するものはない。

Step. 4.3 $S=(n,x,a)$ の場合、$a=2x-n$ より、

$$2x-n+2^n=nx$$

となる。$n=3$ とすると、$2x+5=3x$ より $x=5$ で、階差は 2 だから $a=7$ となる。これらは全て素数で、

$$7+2^3=15=3\times 5$$

となり (∗) は確かに満たされる。よって $(a,b,n,x)=(7,2,3,5)$ は解の一つとなる。

$n>3$ とする。階差 d は 3 の倍数だから $n\equiv x\equiv a \pmod 3$ でなければならない。

$n=6k+1$ のとき[*46]、

$$2x-n+2\equiv nx \pmod 9$$

$$(n-2)(x+1)\equiv 0 \pmod 9$$

である。明らかに $n-2$ は 3 の倍数ではないから、$x+1$ は 3 で割り切れる。しかし $x\equiv n\equiv 1 \pmod 3$ であったことに矛盾する。

$n=6k-1$ のとき、

$$2x^n+5\equiv nx \pmod 9$$

$$(n-2)(x+1)\equiv 3 \pmod 9$$

である。この場合では $n\equiv x\equiv 2 \pmod 3$ だから、$n-2,\ x+1$ はともに 3 の倍数となり、上式の左辺は 9 の倍数となるから矛盾となる。

Step. 5 $n=2$ の場合、考えるべき方程式は次のようになる。

$$a+b^2=2x$$

Step. 5.1 $S=(a,b,x)$ の場合、$b\geq 5$ である。また $x=2b-a$ であるから、

$$a+b^2=4b-2a \quad\Leftrightarrow\quad 3a=b(4-b)<0$$

より、解なし。

Step. 5.2 $S=(b,a,x)$ の場合、$x=2a-b$ から、

$$a+b^2=4a-2b \quad\Leftrightarrow\quad 3a=b(b+2)$$

である。$a>b$ がともに素数であることから、$b=3,\ a=b+2$ のみが適する。よって $a=5$, 階差が 2 なので $x=7$ となる。これは

$$5+3^2=14=2\times 7$$

となって (∗) を満たす。よって $(a,b,n,x)=(5,3,2,7)$ は解の一つである。

Step. 5.3 $S=(b,x,a)$ の場合、$2x=a+b$ だから

$$a+b^2=a+b \quad\Leftrightarrow\quad b^2=b$$

だがこれは解にならない。

以上のことから、求める (a,b,n,x) は、

$$(a,b,n,x)=(2,2,2,3),\ (3,2,5,7),\ (7,2,3,5),\ (5,3,2,7)$$

Q.172 ★5 早稲田 教育 (2018)

$\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$ の実部を a_n、虚部を b_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

まず、

$$\left|1+\frac{i}{n}\right|^n=\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1-\frac{i}{n}\right)\right]^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$$

の極限を求める。対数を取ることで

$$\frac{n^2\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n}=\frac{\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{n}\to 0$$

がわかるので、$\left|1+\dfrac{i}{n}\right|^n\to 1$ である。

$1+\dfrac{i}{n}$ の偏角を θ_n (ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) とすると、$\left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$ の偏角は $n\theta_n$ である。また明らかに $\theta_n\to 0$ である。$\tan\theta_n=\dfrac{1}{n}$ より、

$$n\theta_n=\frac{\theta_n}{\tan\theta_n}\to 1 \qquad (\because \theta_n\to 0)$$

よって、

$$a_n+b_ni=\left|1+\frac{i}{n}\right|^n(\cos n\theta_n+i\sin n\theta_n)$$

は絶対値 1、偏角 1 の複素数に限りなく近づくから、

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\cos 1,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=\sin 1$$

Q.173 ★2 京都教育大 (1997)

任意の 3 以上の整数 n に対して、$n<p<n!$ を満たす素素 p が存在することを証明せよ。

$n!-1$ は 2 以上 n 以下の自然数 k で割ると必ず $k-1$ だけ余るので, $n!-1$ は k の倍数ではない。つまり, $n!-1$ の 1 より大きい約数は必ず n より大きい。$n\geqq 3$ より $n!-1>1$ であるから, $n!-1$ はある素数 p で割り切れるが, そのような p がまさしく $n<p<n!$ を満たす素数である。 □

Q.174 ★8 自作 DMO2nd 5

n を正の整数、$f_0(x)=x$ とする。さいころを n 回連続で投げて、k 回目 $(k=1,2,\cdots,n)$ に出たさいころの目が 2 以下ならば $f_k(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}f_{k-1}(x)\right)$ とし、3 以上ならば $f_k(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}f_{k-1}(x)\right)$ とする。実数 a に対して、$f_n(a)=1$ を満たす確率 $p_n(a)$ を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.175 ★10 自作

n を 2 以上の整数とする。任意の素数 p に対して $\dfrac{p^n+1}{p+1}$ は n^2 で割り切れないことを証明せよ。

分子が分母で割りきれなければならないので, $p^n+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p+1)$ である。$(-1)^n+1\equiv 0 \pmod{p+1}$ だから n は奇数でなければならない。n は 3 以上の奇数なので, 素因数が存在しており, かつそれらはすべて奇素因数である。

そのような奇素因数のうち, 最小のものを q とおく。以下で登場する合同式はすべて mod q で考えるものとする。$\dfrac{p^n+1}{p+1}$ は n^2 の倍数なら q^2 の倍数なので $p^n\equiv -1$. 二乗して　$p^{2n}\equiv 1$ である. $p=q$ だとこの式は成り立たないので $p\neq q$ であり, p,q は互いに素である。ゆえにフェルマーの小定理より $p^{q-1}\equiv 1$ である。

p の mod q における位数を d とする。つまり, d は $p^d\equiv 1$ を満たす最小の正の整数である。このとき, d は $p^m\equiv 1$ を満たす整数 m を常に割り切るので, d は $2n$ と $q-1$ を割り切る整数になっている。(d はこの 2 数の公約数である)　ここで, $q-1$ は q 未満の素数で素因数分解され, q は n の最小素因数をとったので n と $q-1$ には共通した素因数が存在しない。したがって d は 2 と $q-1$ の公約数でもあり, $1,2$ があり得る。

$d=1$ の とき, $p\equiv 1$ と $p^n\equiv -1$ から $1\equiv -1$ となり, $q\geqq 3$ に矛盾する。

$d=2$ の とき, $p^2\equiv 1$ であり, $p\equiv -1$ となる。($p\equiv 1$ では位数の定義に矛盾)

このとき $p+1\equiv 0$ だから $p+1$ は q で割り切れる。よって, $v_q(p+1)\geqq 1$ で, $p^n+1=p^n-(-1)^n$ に対して LTE lemma を適用することができるので

$$v_q(p^n+1)=v_q(p+1)+v_q(n)$$

となる。$\dfrac{p^n+1}{p+1}$ が q で割り切れる回数は $v_q(p^n+1)-v_q(p+1)=v_q(n)$ である。 ここでもし自然数 k が存在して $\dfrac{p^n+1}{p+1}=kn^2$ となる

[*46] 実はこの場合は (mod 3) でもわかる。一方 $n=6k-1$ では (mod 9) を見ないとわからない。

なら, $v_q(n) > 0$ に注意して

$$v_q(kn^2) = 2v_q(n) + v_q(k) \geqq 2v_q(n) > v_q(n) = v_q\left(\frac{p^n+1}{p+1}\right)$$

となって矛盾するから, $n \geqq 3$ の奇数において, いかなる素数 p を取っても $\dfrac{p^n+1}{p+1}$ は n^2 の倍数とならない。よって, 題意は示された。

Q.176 ★9 suiso_728660 様

「A, B, C, D は相異なる」ということを、コンマで区切らずに一文字ずつ不等号 '$\neq$' で繋ぎ、一つの数式で表現する際に「$A \neq B \neq C \neq D$」とするのは誤りである。なぜならば、この数式は $A = C = 1$, $B = D = 0$ でも成立しているといえるからである。正しくは「$A \neq B \neq C \neq D \neq A \neq C \neq B \neq D$」であり、最低でも $\neq$ が 7 個必要である。この場合、$B \neq C$ を 2 回参照しているためにまだ多いのではないか、と思われるかもしれないが、しかし 6 本以下で表すことは不可能である。
では、「2018 個の定数 a_k $(k = 1, 2, \cdots, 2018)$ は相異なる」ということを同じような方法で表現するために、不等号 '$\neq$' は最低でも何個必要だろうか。

ここに解答を記述。

Q.177 ★19 第 4 回和田杯 by 灘校数研

$\tan\theta$ は整数値であるとする。
$\tan^m\theta + \dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta} = 2016$ を満たす正の整数 m, n 及び $\tan\theta$ の値をすべて求めよ。

分母に $\cos^n\theta$ があるので, $\cos^n\theta \neq 0$ である。$\tan\theta = T$ とする。i を虚数単位として, $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とする。ド・モアブルの定理より $z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$
一方で, $z = \cos\theta\,(1 + iT)$ と表示すると, $z^n = \cos^n\theta\,(1+iT)^n$ である。
二項定理を用いて z^n の 2 つの表示における実部を比較し,

$$\cos n\theta = \cos^n\theta \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k}$$

となり, $\cos^n\theta \neq 0$ より, $\dfrac{\cos n\theta}{\cos^n\theta} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k}$ となる。よって, 与式は

$$T^m + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k} = 2016$$

と, T のみの式に表すことができる。次に以下の補題を示す。

> **補題 177.1**
> T が奇数であり, $n \geq 2$ であるならば,
> $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k}$ は偶数である。

(証明)
便宜上 ${}_{n-1}C_{-1} = {}_{n-1}C_n = 0$ と定義する。
T は奇数であるから, $-T^2 \equiv 1 \pmod 2$ である。 よって

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k} \equiv \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k}$$

次に, ${}_nC_{2k} = {}_{n-1}C_{2k} + {}_{n-1}C_{2k-1}$ を用いて,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} {}_nC_{2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} ({}_{n-1}C_{2k} + {}_{n-1}C_{2k-1}) = \sum_{k=-1}^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} {}_{n-1}C_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1}C_k = 2^{n-1} \equiv 0 (mod 2)$$

となる。ただし, 途中で ${}_{n-1}C_{-1} = {}_{n-1}C_n = 0$, $n \geq 2$ を用いた。
よって $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k} \equiv 0 \pmod 2$ より, 題意は示された。 (証明終)

シグマの $k = 0$ の項のみを右辺に移項して,$T^m + \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k} =$ 2015 であり, 左辺が T の倍数になる。よって, T は 2015 の約数になるから, **T は奇数** である。このとき **補題 177.1** により, $n \geq 2$ ならば $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k}$ は偶数であり,$T^m = 2016 - \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-T^2)^k {}_nC_{2k}$ より, **T^m が偶数**になる。しかしこれは T が奇数であることに矛盾する。よって $n \geq 2$ において解はない。
$n = 1$ として, 与式は $T^m + \dfrac{\cos 1\theta}{\cos\theta} = T^m + 1 = 2016$ だから, $T^m = 2015$
$2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$ より, 2015 は平方数や立法数ではないことから,$m = 1, T = 2015$ が唯一の解になる。以上より, $(m, n, \tan\theta) = (1, 1, 2015)$

Q.178 ★6 京大オープン

初項 1, 公差 24 の等差数列を $\{a_n\}$ とする。数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ の項には 5 以上の素数がすべて現れることを示せ。

Proof. p を 5 以上の素数とする。$p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ が 24 の倍数であることを示す。まず, p は 3 で割って 1 余るか 2 余るので, $p-1, p+1$ のいずれかは 3 の倍数である。
次に, $p \pm 1$ は偶数であって, p を 4 で割ったあまりは 1 か 3 なので $p-1, p+1$ のいずれかは 4 の倍数である。これにより $(p-1)(p+1)$ は 8 の倍数であるとわかり, $p^2 - 1$ は 24 の倍数である。よって $p^2 - 1 = 24k$ となる自然数 k が存在し, $p = \sqrt{24k+1} = \sqrt{a_k}$ なので題意は示された。 □

Q.179 ★8 自作 DMO3rd 1

平面上に相異なる 3 点 A, B, C があり、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ の値は素数である。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CB}}$ がこの順に等比数列をなし、$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^3 + 6$, $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^3 - 6$ が素数になるとき、$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$ の値を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{r}$ とし、$|\overrightarrow{p}| = p$, $|\overrightarrow{q}| = q$, $|\overrightarrow{r}| = r$ とおく。

$$\left(-\overrightarrow{r}\right)^2 = \left(\overrightarrow{p} + \overrightarrow{q}\right)^2 = |\overrightarrow{p}|^2 + 2\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} + |\overrightarrow{q}|^2$$

なので、$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = \dfrac{r^2 - p^2 - q^2}{2}$ となる。同様に、$\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{r} = \dfrac{p^2 - q^2 - r^2}{2}$, $\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{p} = \dfrac{q^2 - p^2 - r^2}{2}$ である。これらが等比数列をなすことから、

$$\left(\frac{r^2 - p^2 - q^2}{2}\right)\left(\frac{q^2 - p^2 - r^2}{2}\right) = \left(\frac{p^2 - q^2 - r^2}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2p^2(q^2 + r^2) = 2(q^4 + r^4)$$

を得る。q, r は素数であるから $q^2 + r^2 \neq 0$ であるので、$p^2 = \dfrac{q^4 + r^4}{q^2 + r^2}$ $(\cdots\ *)$ と書け、p^2 は有理数である。
$p^3 \pm 6$ が素数、すなわち整数であるから、p も有理数。よって互いに素な整数 m, n を用いて $p = \dfrac{m}{n}$ とする。$p^3 = \dfrac{m^3}{n^3}$ において、m^3, n^3 も互いに素であるが、n が素因数をもつとすると、m はそれを自身に持たないので、p^3 が整数であることに反し、不適。よって $n^3 = 1$、すなわち $n = 1$ で無ければならず、p は整数で p^2 も整数。

$$p^2 = \frac{q^4 + r^4}{q^2 + r^2} = q^2 - r^2 + \frac{2r^4}{q^2 + r^2}$$

により $\dfrac{2r^4}{q^2+r^2}$ も整数。$q \neq r$ の場合、r^4 と q^2+r^2 は互いに素なので、$\dfrac{2}{q^2+r^2}$ が整数になるが、$q^2+r^2 \geq 2^2+2^2=8>2$ より不適。したがって $q=r$。さらに $(*)$ から $p^2=q^2$ となるから、$p=q=r$ である。つまり p も素数。
$p \not\equiv 0 \pmod 7$ のとき、$p^3 \equiv 1,-1 \pmod 7$ であるから、$p^3 \pm 6$ のいずれか片方は 7 で割り切れ、かつ $p^3 \pm 6 > 7$ であるから、素数とならず不適。$p=7$ の場合には、$7^3 \pm 6 = 337, 349$ はともに素数であるから適する。以上より、$p=q=r=7$。

Q.180 ★9 DMO3rd 理 5

正の整数 n の正の約数の個数, 総和をそれぞれ $d(n), \sigma(n)$ とする。次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots+\sigma(n)\right)}{\log\left(d(1)+d(2)+\cdots+d(n)\right)}$$

$D_n = \{d \mid d$ は n の正の約数 $\}$ とする。

$$\sum_{k=1}^{n} d(k) = \sum_{k=1}^{n}|D_k|$$

である。ここで, $i \in D_k$ と k が i の倍数であることは同値である。$1,2,\cdots n$ のうち i の倍数は $\left\lfloor \dfrac{n}{i} \right\rfloor$ 個あるから,i が $D_1, D_2, \cdots D_n$ の要素として現れる回数は, $1,2,\cdots,n$ の中にある k の i の倍数の個数なので $\left\lfloor \dfrac{n}{i} \right\rfloor$ である。この回数を $1 \leq i \leq n$ で足し合わせた $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|D_k|$ に等しい。
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)$ も同様, i が $\left\lfloor \dfrac{n}{i} \right\rfloor$ 回登場することから $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} i\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$ に等しい。
この 2 つの結果を不等式で評価し, はさみうちの原理で極限値を求めることを考える。
一般に $\lfloor x \rfloor \leq x$ が成立し, n が 2 以上のとき

$$n = \sum_{k=1}^{n} 1 < \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i} = nH_n$$

$$\frac{n^2}{2} < \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} i \leq \sum_{i=1}^{n} i\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{n} i\frac{n}{i} = n^2$$

となる (ただし $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$)。そして, 次のように評価が出来る。

$$\frac{\log n^2 - \log 2}{\log n + \log H_n} < \frac{\log\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots\sigma(n)}{\log d(1)+d(2)+\cdots d(n)} < \frac{\log n^2}{\log n} = 2 \quad ①$$

次に十分大きい n で $H_n < 2\log n$ が成り立つこと, 及び次を示す。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log n^2 - \log 2}{\log n + \log H_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\log_n 2}{1+\log_n H_n} = 2$$

$2 \leq k \leq n$ なる整数 k で, (曲線 $y = \dfrac{1}{x}$ の $0<x$ における単調減少性と面積評価から) $\dfrac{1}{k} < \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x}dx$ が成り立つから, 総和を取り

$$H_n - 1 < \int_1^n \frac{1}{x}dx = \log n$$

よって $H_n < \log n + 1 < 2\log n$ である。これを用いて

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\log_n 2}{1+\log_n 2+\log_n\log n} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{2-\log_n 2}{1+\log_n H_n}$$
$$\leq \lim_{n\to\infty}\frac{2-0}{1+0} = 2 \quad ②$$

となる。$\log_n\log n = \dfrac{\log\log n}{\log n} = \dfrac{t}{e^t}$ で (ただし $n = e^{(e^t)}$) $n \to \infty$ のとき $t \to \infty$ なので, $\log_n\log n = \dfrac{t}{e^t} \to 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\log_n 2}{1+\log_n 2+\log_n\log n} = \frac{2-0}{1+0+0} = 2$$

しかるに②とはさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2-\log_n 2}{1+\log_n H_n} = 2$, そして①とはさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\sigma(1)+\sigma(2)+\cdots\sigma(n)}{\log d(1)+d(2)+\cdots d(n)} = 2$$

Q.181 ★6 神戸大 理系 前期 (2017)

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$ $(n = 1,2,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。2 つのベクトル $\overrightarrow{p_n} = (a_n, a_{n+1})$ と $\overrightarrow{p_{n+1}} = (a_{n+1}, a_{n+2})$ のなす角を θ_n とする。ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。$\tan\theta_n$ を n を用いて表し、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\theta_n$ を求めよ。

まず数列 $\{a_n\}$ の漸化式について

$$a_{n+1} = 2a_n + 1 \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$$

より、数列 $\{a_n + 1\}$ は初項が $a_1 + 1 = 2$ で公比が 2 の等比数列であるから、$a_n + 1 = 2^n$。したがって $a_n = 2^n - 1$。
$\overrightarrow{p_n}$ が x 軸となす角を ϕ_n とおくと、$\tan\phi_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$。
一方、

$$\tan\phi_{n+1} - \tan\phi_n = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} - \frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$= \frac{1}{a_na_{n+1}}(a_na_{n+2} - a_{n+1}^2)$$
$$= \frac{1}{a_na_{n+1}}\left(\frac{a_{n+1}-1}{2}(2a_{n+1}+1) - a_{n+1}^2\right)$$
$$= \frac{1}{a_na_{n+1}}\left(-\frac{1}{2}a_{n+1} - \frac{1}{2}\right) < 0 \quad (\because a_n, a_{n+1} > 0)$$

が成り立つから、$\phi_n > \phi_{n+1}$ である。よって $\theta_n = \phi_n - \phi_{n+1}$ で、

$$\tan\theta_n = \frac{\tan\phi_n - \tan\phi_{n+1}}{1+\tan\phi_n\tan\phi_{n+1}}$$
$$= \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}}{1+\frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}} \times \frac{a_na_{n+1}}{a_na_{n+1}}$$
$$= \frac{a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}}{a_{n+1}(a_n + a_{n+2})}$$
$$= \frac{(2^{n+1}-1)^2 - (2^n-1)(2^{n+2}-1)}{(2^{n+1}-1)(2^{n+2}+2^n-2)}$$
$$\tan\theta_n = \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(5\cdot 2^n - 2)}$$

と求まった。

$$\lim_{n\to\infty}\tan\theta_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)(5\cdot 2^n - 2)} = 0$$

となり、かつ $0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$ なので、$\theta_n \to 0$ である。

$$2^n\theta_n = \frac{\theta_n}{\tan\theta_n}2^n\tan\theta_n$$
$$= \cos\theta_n\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\left(5-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}$$

において、$n \to \infty$ のとき $\theta_n \to 0$ を踏まえて、

$$\cos\theta_n \to 1, \quad \frac{\theta_n}{\sin\theta_n} \to 1$$

であるから、

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\theta_n = \lim_{n\to\infty}\cos\theta_n\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{2^n}\right)\left(5-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}$$
$$= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{(2-0)(5-0)} = \frac{1}{10}$$

Q.182 ★5 弘前大 理工 後期 (2017) 改題

漸化式 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 \cdots a_n$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問に答えよ。
(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ を求めよ。また、a_5 は素数でないことを示せ。
(2) n が 2 以上の整数のとき、a_n は $a_k\ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ と互いに素であることを示せ。
(3) (2) を用いて、素数が無限に存在することを示せ。
(4) $a_{n+1} - 1 = a_n(a_n - 1)\ (n \geq 2)$ を示せ。
(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ を求めよ。

(1)

次の計算によって求まる。

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 1 + a_1 = 3$$
$$a_3 = 1 + a_1 a_2 = 7$$
$$a_4 = 1 + a_1 a_2 a_3 = 43$$
$$a_5 = 1 + a_1 a_2 a_3 a_4 = 1807 = 13 \times 139$$

(2)

$$a_1 a_2 \ldots a_{n-1} = a_k b_k \quad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

と書くと、$a_n \times 1 - a_k b_k = 1$ となる。一般に、整数 a, b に対して $ax + by = 1$ となる整数 x, y が存在することと、a, b が互いに素であることは同値であるから、a_n, a_k は互いに素である。

(3)

(2) より、$k = 1, 2, \ldots, n-1$ として、a_n は a_k と互いに素であって、かつ明らかに $a_n > 1$ であるから、a_k のいずれの約数でもないが a_n の約数ではあるような素数 p_n がひとつ取れる。数列 $\{p_n\}$ はどの 2 つの項も一致しない素数の列であるから、素数は無限個あることが示される。

(4)

$n \geq 2$ では、$a_n - 1 = a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ となるから、

$$a_{n+1} - 1 = (a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) a_n = (a_n - 1) a_n$$

よりよい[*47]。

(5)

まず、$a_n \geq n + 1$ を示す。$n = 1$ は明らかによい。$m \geq 1$ として、$n = 1, 2, \ldots, m$ で $a_m \geq m + 1$ ならば、

$$a_{m+1} = 1 + a_1 a_2 \ldots a_m \geq 1 + a_m \geq 1 + (m+1)$$

を得る。よって帰納的に $a_n \geq n + 1$ である。
(4) の結果より、

$$\frac{1}{a_{k+1}} = \frac{1}{a_k(a_k - 1)} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_{k+1} - 1}$$

である。これについて総和をとれば、

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1 - 1} - \frac{1}{a_{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}$$

となる。$n \to \infty$ の極限を考えると、$a_n \geq n + 1$ から $a_n \to \infty$ だから、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1}\right) = 1$$

Q.183 ★5 一橋 (2014)

$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10}$ は十進法において何桁であるか求めよ。
(注: 対数の値は本問では与えられていない。)

$7 \times 11 \times 13 = 1001$ より、

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10} = 10^{10} \times 3^{10} \times 1001^{10}$$

である。計算によって、$3^{10} = 59049$ と求まる。続いて、

$$1001^{10} = (1000 + 1)^{10} = \sum_{k=0}^{10} {}_{10}\mathrm{C}_k 1000^k \cdot 1^{10-k}$$

である。1000^k は k が 1 増えるごとに 3 桁増えるのに対し、

$${}_{10}\mathrm{C}_k \leq {}_{10}\mathrm{C}_5 = 252 \quad (k = 0, 1, \ldots 9, 10)$$

と高々 2 桁であることから、${}_{10}\mathrm{C}_k 1000^k$ (ただし $k = 0, 1, \ldots, 9$) の桁数は 1000^{10} の桁数よりも小さいことがわかる。したがって、1001^{10} の桁数は $k = 10$ の項のみで決まる。これは

$${}_{10}\mathrm{C}_{10} 1000^{10} \cdot 1^0 = 10^{30}$$

である。これを用いて求める桁数は、

$$10^{10} \times 3^{10} \times 10^{30} = 5.9049 \times 10^{44}$$

と等しいから、45 桁。

Q.184

(1) 方程式 $x^3 + 3x^2 - (k-7)x + k - 11 = 0$ はちょうど 2 つの実数解を持つ。実数 k の値を求めよ。 ★2 (東京電機大 2017)
(2) $(a, -9)$ を通る曲線 $y = x^4 - 6x^2$ の接線が 2 本あるとき、a の値を求めよ。 ★8 (学コン 2017-5-4)

(1)

$$x^3 + 3x^2 - (k-7)x + k - 11 = (x-1)(x^2 + 4x + 11 - k)$$

より、k によらず $x = 1$ は与えられた方程式の実数解である。与方程式がちょうど 2 つの実数解をもつとき、方程式 $x^2 + 4x + 11 - k = 0$ が、(i) 1 でない重解を持つ、(ii) 1 と、1 以外の実数解をもつ、の場合がある。
(i) 重解を持つ場合は、判別式を調べることで $k = 7$ とわかり、このときの重解は-2 であるから、これは適する。
(ii) 1 を実数解に持つ場合、$1^2 + 4 \cdot 1 + 11 - k = 0$ より $k = 16$ となり、1 以外の実数解は-5 となるから、これは適する。
以上より、$k = 7, 16$。

(2)

曲線 $y = x^4 - 6x^2$ について、$y' = 4x^3 - 12x$ より、点 $(t, t^4 - 6t^2)$ における接線は、

$$y = (4t^3 - 12t)(x - t) + t^4 - 6t^2 \Leftrightarrow y = (4t^3 - 12t)x - 3t^4 + 6t^2$$

となる。この接線を L_t と呼ぶことにする。
ここで、異なる実数 p, q (ただし $p > q$ とする) であって $L_p = L_q$ となる[*48]ことがあるかを調べる。これは、

$$4p^3 - 12p = 4q^3 - 12q \quad かつ \quad -3p^4 + 6p^2 = -3q^4 + 6q^2$$

が成り立つことと同値である。$p - q \neq 0$ に注意して、

$$4p^3 - 12p = 4q^3 - 12q \Leftrightarrow p^2 + pq + q^2 = 3 \quad ①$$

$$-3p^4 + 6p^2 = -3q^4 + 6q^2 \Leftrightarrow (p+q)(p^2 + q^2) = 2(p+q) \quad ②$$

を得る。まず、$p + q \neq 0$ のとき、② により $p^2 + q^2 = 2$ となり、①に代入すれば $pq = 1$ となる。$p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq = 2$ から $p + q = \pm 2$ を得る。解と係数の関係から、p, q は 2 次方程式 $x^2 - 2x + 1 = 0$ の 2 解であるが、これは明らかに重解を持つ。しかし、$p \neq q$ に矛盾するので不適。すなわち、$p + q \neq 0$ でかつ $L_p = L_q$ となるような p, q は存在しない。
続いて $p + q = 0$ の場合、②は成り立つ。また $p \neq q$ であるから、$p = -q \neq 0$。これを①に代入して、$p = \sqrt{3},\ q = -\sqrt{3}$ となる。
以上のことから、$L_p = L_q$ となるのは、$p = \sqrt{3},\ q = -\sqrt{3}$ のときのみ。
さて、L_t が点 $(a, -9)$ を通ることから、

$$-9 = (4t^3 - 12t)a - 3t^4 + 6t^2 \Leftrightarrow (t^2 - 3)(3t^2 + 4at + 3) = 0$$

を満たすような実数 t に対して、異なる L_t が 2 つだけであるような実数 a を定めればよい。まず $t = \pm\sqrt{3}$ という解が得られているが、$L_{\sqrt{3}}$ と $L_{-\sqrt{3}}$ は等しい直線を示すのであったから、これが 1 本目の接線で

[*47] $n = 1$ の場合でも、$a_2 - 1 = 2 = 2 \times 1 = a_1(a_1 - 1)$ より成り立っている。

[*48] これを複接線という

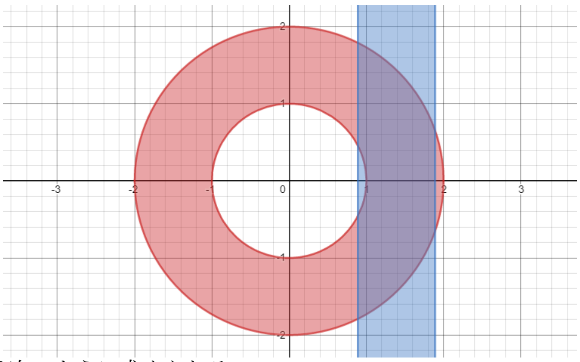
ある。接線が 2 本だけ得られるならば、方程式 $3t^2+4at+3=0$ は、(i) $\pm\sqrt{3}$ ではない重解をもっている、(ii) 相異なる 2 つの実数解を持ち、一方は $\pm\sqrt{3}$ に等しく、もう一方は $\pm\sqrt{3}$ でない、のいずれかである。
(i) この場合には方程式の判別式を見て、$a=\dfrac{3}{2}$ となり、その重解は $t=\mp 1$ となるから適する (複合同順)。
(ii) この場合には $3(\pm\sqrt{3})^2+4a(\pm\sqrt{3})+3=0$ が満たされるので、これより $a=\mp\sqrt{3}$ を得る。このときもう一方の解は $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから適する。
以上より、

$$a=\frac{3}{2}\qquad t=\pm\sqrt{3},-1\qquad a=-\frac{3}{2}\qquad t=\pm\sqrt{3},1$$
$$a=\sqrt{3}\qquad t=\pm\sqrt{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\qquad a=-\sqrt{3}\qquad t=\pm\sqrt{3},\frac{1}{\sqrt{3}}$$

が方程式 $(t^2-3)(3t^2+4at+3)=0$ の解になっており、対応する L_t の種類が 2 つになる。また、これ以外の a の場合には題意を満たさない。
以上より、求める a は $a=\pm\dfrac{3}{2},\pm\sqrt{3}$

Q.185 ★9 東京大 後期 (2005) 誘導抜き

> a は実数で、$\dfrac{1}{2}\leq a\leq 2$ を満たすとする。xy 平面の領域 D,E を、
> $$D:\quad 1\leq x^2+y^2\leq 4$$
> $$E:\quad a\leq x\leq a+1$$
> で定める。領域 D と E の共通部分の面積を a の関数と考えて $S(a)$ とおく。$S(a)$ を最大にするような a の値を求めよ。



$S(a)$ は次のように求められる。

$$S(a)=\begin{cases}2\displaystyle\int_a^{a+1}\sqrt{4-x^2}\,dx-2\int_a^1\sqrt{1-x^2}\,dx & (\frac{1}{2}\leq a\leq 1)\\ 2\displaystyle\int_a^2\sqrt{4-x^2}\,dx & (1\leq a\leq 2)\end{cases}$$

$1\leq a\leq 2$ の範囲では $S(a)$ は明らかに単調減少となるから、$S(a)$ を最大にするような a は $\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$ の範囲に存在する。以降 a は $\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$ の範囲で考える。微分すると、

$$S'(a)=2\left(\sqrt{4-(a+1)^2}-\sqrt{4-a^2}+\sqrt{1-a^2}\right)$$

を得る。これについて、

$$S'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{17}-\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}>0$$
$$S'(1)=-\sqrt{3}<0$$

となる。2 階微分は、

$$S''(a)=-\frac{-(a+1)}{\sqrt{4-(a+1)^2}}-a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}-\frac{1}{\sqrt{4-a^2}}\right)$$

である。$\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$ において、$4-a^2>1-a^2>0$ が成り立っていることに注意すると、この範囲においては常に $S''(a)<0$ である。したがって、$S'(a)$ は単調減少し、$S'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$ と $S'(1)<0$ であることから、$\dfrac{1}{2}<c<1$ なる実数 c がただ一つ存在して、$S'(c)=0$ を満たし、$S(c)$ が極大となることがわかる。
方程式 $S'(a)=0$ を $\dfrac{1}{2}<a<1$ のもとで解く。

$$4-(a+1)^2=(1-a)(3+a)$$

となることに注意して、

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-a}\left[\sqrt{3+a}+\sqrt{1+a}\right]=\sqrt{4-a^2}\\ \Leftrightarrow\quad &2(1-a)\left[(2+a)+\sqrt{(3+a)(1+a)}\right]=(2-a)(2+a)\\ \Leftrightarrow\quad &2(1-a)\sqrt{(3+a)(1+a)}=a(2+a)\\ \Leftrightarrow\quad &4(1-a)^2(3+a)(1+a)=a^2(2+a)^2\\ \Leftrightarrow\quad &3a^4+4a^3-20a^2-8a+12=0\end{aligned}$$

と整理できる。ここで $a=0$ は明らかに解でないから両辺 a^2 で割って、

$$3a^2+4a-20-8\frac{1}{a}+12\frac{1}{a^2}=0$$
$$3\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)+4\left(a-\frac{2}{a}\right)-20=0$$
$$3(t^2+4)+4t-20=0$$
$$\therefore\quad t=\frac{-2\pm 2\sqrt{7}}{3}$$

となる。なお、$t=a-\dfrac{2}{a}$ とした。$\dfrac{1}{2}<a<1$ のもとでは $-\dfrac{7}{2}<t<-1$ なので、符号は負のみが適する。最後に a について解けば、

$$a^2-ta-2=0$$
$$\therefore\quad a=\frac{t\pm\sqrt{t^2+8}}{2}$$

$\dfrac{1}{2}<a<1$ より符号は正のみ適する。$t=\dfrac{-2-2\sqrt{7}}{3}$ を用いて整理すれば、求める a の値は

$$a=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{7}+\sqrt{26+2\sqrt{7}}\right)$$

Q.186 ★5 大阪大

> 実数 a,b,c,d,e に対して、座標平面上の点 $A(a,b)$, $B(c,d)$, $C(e,0)$ をとる。ただし点 A,B は原点 $O(0,0)$ とは異なる。このとき、実数 s,t であって、$s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ を満たすものが存在するための必要十分条件を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.187 ★4 京大 OP

> a を実数の定数とする。x の方程式 $2(x^2+ax)^2+2a(x^2+ax)-a^2=0$ が、絶対値が 1 である虚数を解に持つような a の値を求めよ。

x^2+ax の 2 次方程式とみて、解の公式により

$$x^2+ax=\frac{-a\pm\sqrt{3a^2}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}a$$

なので、

$$x^2+ax+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}a=0\qquad(\cdots *)$$

が絶対値 1 の虚数解を持つ。これを $z=\cos\theta+i\sin\theta$ (ただし $0<\theta<2\pi,\ \theta\neq\pi$) とする。このとき $z^2+az+\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}=0$ が成り立ち、

$$0=\overline{z^2+az+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}=\overline{z^2}+\overline{az}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}=\overline{z}^2+a\overline{z}+\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

となるから、$(*)$ は $z,\overline{z}$ を解に持つ。

解と係数の関係により、

$$z+\overline{z}=2\cos\theta=-a,\quad z\overline{z}=|z|^2=1=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}a$$

であるから、$a=\pm\sqrt{3}-1,\ \cos\theta=\dfrac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ と求まる (複合同順)。
$-1<\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<0$ なので、$\cos\theta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ が存在する。一方、$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}>1$ なので、$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ は存在せず不適。
したがって、求めるものは、$a=\sqrt{3}-1$

Q.188 ★1 同値性

記述問題にて同値性には十分な注意が必要である。次の同値性を示せ。なお、x,y は実数とする。
(1) $x,y\geq 0$ のとき、$x\geq y\Leftrightarrow x^2\geq y^2$
(2) $x^2\geq y^2\Leftrightarrow |x|\geq|y|$
次の x の不等式を解け。
(3) $\sqrt{x^2-4}\leq x-3$
(4) $\sqrt{x^2-4}\leq x-1$

(1)

まず、$x=y=0$ の場合はどちらの方向も明らかによい。そうでない場合を考えると、$x+y>0$ となるので、

$$\begin{aligned}x-y\geq 0\quad&\Leftrightarrow\quad (x-y)(x+y)\geq 0\quad(\because x+y\geq 0)\\&\Leftrightarrow\quad x^2-y^2\geq 0\end{aligned}$$

(2)

まず、$y=0$ の場合は $x^2\geq 0$ なので明らかにどちらの方向もよい。$y\neq 0$ として、

$$\begin{aligned}x^2\geq y^2\quad&\Leftrightarrow\quad \left(\frac{x}{y}\right)^2\geq 1\\&\Leftrightarrow\quad \left|\frac{x}{y}\right|\geq 1\\&\Leftrightarrow\quad |x|^2\geq|y|^2\\&\Leftrightarrow\quad |x|\geq|y|\quad(\because \text{前問})\end{aligned}$$

(3)

$x^2-4\geq 0$ の必要がある。また、左辺はそのとき常に正なので、$x-3\geq 0$ である必要がある。よって $x\geq 3$ に限定して解けばよい。このとき、(1) より両辺を 2 乗しても同値なので、$x^2-4\leq(x-3)^2$ を解くことと同値である。これは $x\leq\dfrac{13}{6}$ となるから、解は存在しない。

(4)

同様のことから、$x^2\geq 4$ かつ $x\geq 1$ である。そこで $x\geq 2$ に限定して解けばよい。この制限の下で (1) より両辺を 2 乗しても同値であり、

$$x^2-4\leq(x-1)^2\quad\Leftrightarrow\quad x\leq\frac{5}{2}$$

となる。よって解は、$2\leq x\leq\dfrac{5}{2}$ である。

Q.189 ★3 大阪大 (2002)

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ が異なる 3 つの実数解を持つとする。$a>0,\ b>0$ ならば、少なくとも 2 つの解は負であることを示せ。

Proof. 3 つの実数解を 小さい順に α,β,γ とおく。

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$$

とする。平均値の定理より，

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0=f'(t)$$

$$\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\beta-\alpha}=0=f'(s)$$

を満たす実数 $t\in[\alpha,\beta],\ s\in[\beta,\gamma]$ が存在する。[*49] s,t は方程式 $3x^2+2ax+b=0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$s+t=-\frac{2a}{3}<0,\qquad st=\frac{b}{3}>0$$

である。二式目より s,t は符号が同じであるが，$s,t>0$ であると 1 式目に矛盾する。よって $s<0,t<0$ であり，

$$\alpha<s<\beta<t<0$$

より $\alpha,\beta<0$ なので題意は示された。 □

Q.190 ★4 茨城大

円周上に異なる定点 A,B があり、円弧 AB のうち短くないほうを点 C が動く。$\triangle ABC$ の内接円の中心 O は、ある円周の 1 部を動くことを示し、内接円の半径が最大となるとき、$AB=AC$ であることを証明せよ。

ここに解答を記述。

Q.191 ★7 自作

三辺の長さが整数値である直角三角形 T の内接円の半径 r が素数であるとする。以下のの問に答えよ。
(1) T の面積は偶数であることを示せ。
(2) T の斜辺の長さが偶数のとき、r を求めよ。また、T の各辺の長さを求めよ。

(1)

3 辺を a,b,c とし、c が斜辺とする。三平方の定理から $c^2=a^2+b^2$ で、面積は $\dfrac{ab}{2}$。ab が 4 で割り切れることを示せばよい。a,b がともに偶数ならば明らか。ともに奇数の場合、$a^2+b^2\equiv 2 \pmod 8$ であり、一方明らかに c は偶数で、このとき $c^2\equiv 0,4 \pmod 8$ となるから矛盾となる。a,b の偶奇が異なる場合、偶数のものが 4 の倍数でないとすると、$a^2+b^2\equiv 5 \pmod 8$ であり、一方 c は明らかに奇数で、このとき $c^2\equiv 1 \pmod 8$ となるから矛盾である。
以上のことから、a,b の一方は 4 の倍数であり、よって ab も 4 の倍数である。よって題意は示された。

(2)

$c=a+b-2r$ である。面積について、

$$\frac{ab}{2}=\frac{r}{2}(a+b+c)=r(c+r)$$

である。r が奇数とすると、いま c が偶数であるから、r と $r+c$ がともに奇数である。一方 $\dfrac{ab}{2}$ は偶数であるから不適。よって r は偶数である。さらに r は素数であったから $r=2$。このとき、$c=a+b-4$ で、

$$\frac{ab}{2}=a+b+c\quad\Leftrightarrow\quad(a-4)(b-4)=8\quad(*)$$

を得る。c が偶数なので a,b の偶奇が一致するが、(1) での議論からこれらはともに偶数であることがわかる。よって $(*)$ を満たすのは $(a,b)=(6,8),(8,6)$ のみである。このとき三平方の定理から $c=10$。
以上より、$r=2$、各辺の長さは 6, 8, 10。

Q.192 ★6 自作 DMO4th 理 1

x 軸上を動く点 P と、2 点 A$(1,1)$, B$(-1,1)$ がある。△ABP の垂心を H とする。
(1) 3 点 A, B, H が鈍角三角形をなすとき、垂心 H の軌跡 L を図示せよ。
(2) L と、線 C: $y=ax^2+bx+1$ が共有点を持つような点 (a,b) の範囲を図示せよ。

[*49] グラフより・・・とすればたいへん明らかなことだが，このように平均値の定理を用いた方が丁寧かと思う。

(1)

点 $\mathrm{P}(t,0)$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-t,1)$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-t,1)$ となる。P から AB に引く垂線の式は $x=t$ であるから、$\mathrm{H}(t,h)$ とおけて、$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(t+1,h-1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(t-1,h-1)$ となる。明らかに $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\neq\vec{0}$ なので、

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PB}} \text{ または } \overrightarrow{AH}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\neq\vec{0}$、すなわち $t-1\neq 0$ のとき、

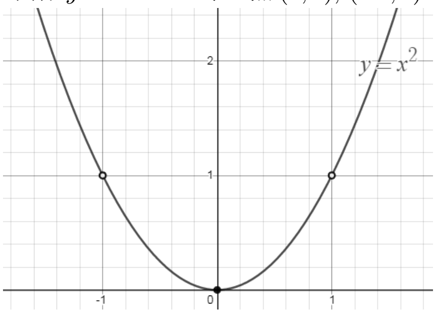
$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=-(t^2-1)+h-1=0 \Leftrightarrow h=t^2$$

よって、$\mathrm{H}(t,t^2)$ (ただし $t\neq 1$)。$t=1$ の場合は $\mathrm{P}(1,0)$ で、$\angle\mathrm{BAH}=90^\circ$ であるから H は A に一致し $\mathrm{H}(1,1)$ となるから、$t=1$ でもこれは満たされる。よって、H は曲線 $y=x^2$ 上を動く。
$\triangle\mathrm{ABH}$ が鈍角三角形なら、A, B, H は一直線上にないから $t\neq 1,-1$ である。このもとで鈍角三角形になるのは、

$$\overrightarrow{\mathrm{HA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{HB}}<0 \quad\text{or}\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}<0 \quad\text{or}\quad \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}<0$$

$$\Leftrightarrow\quad t^2(t^2-1)<0 \quad\text{or}\quad t>1 \quad\text{or}\quad t<-1$$

すなわち、t が $\pm1, 0$ 以外の実数のとき $\triangle\mathrm{ABH}$ は鈍角三角形となる。
以上より、L は曲線 $y=x^2$ のうち、3 点 $(0,0)$, $(\pm1,1)$ を除いたもの。



(2)

$y=x^2$, $y=ax^2+bx+1$ を連立して得る x の方程式 $(a-1)x^2+bx+1=0$ $(\cdots\ *)$ が、$0,\pm1$ 以外の実数解を持てばよい。ここで明らかに $x=0$ は解にならない。
$a=1$ のとき、$bx+1=0$ が ±1 以外の解を持つために、$b\neq 0,\pm1$。
$a\neq 1$ のとき、$(*)$ が実数解を持つことから、これの判別式 D について

$$D=b^2-4(a-1)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{b^2}{4}+1\geq a$$

が必要。さらに ±1 以外の解を持つためには、$(*)$ の解が (i) $x=\pm1$、(ii) $x=1$ のみ、(iii) $x=-1$ のみ、であってはならない。
(i) この場合には $(*)$ の左辺は $(a-1)(x^2-1)$ と書けるから、

$$(a-1)x^2+bx+1=(a-1)(x^2-1) \Leftrightarrow (a,b)=(0,0)$$

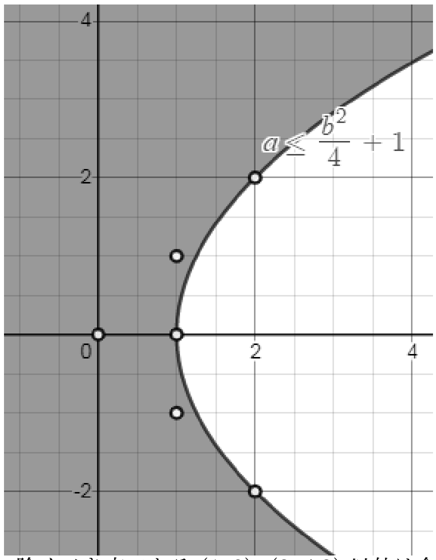
(ii) この場合には

$$(a-1)x^2+bx+1=(a-1)(x-1)^2 \Leftrightarrow (a,b)=(2,-2)$$

(iii) この場合には

$$(a-1)x^2+bx+1=(a-1)(x+1)^2 \Leftrightarrow (a,b)=(2,2)$$

以上により、求める領域は、$a\leq\dfrac{b^2}{4}+1$ のうち、6 点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,\pm1)$, $(2,\pm2)$ を除いたものとなる。



なお、境界は、除くべき点である $(1,0)$, $(2,\pm2)$ 以外は含める。

Q.193 ★6◎ 自作 DMO4th 理 2

> 座標平面上の原点 O を中心とした半径 1 の円周を C_1、曲線 $y=kx^3$ を C_2 とする。ただし $k>0$ とする。C_1 と C_2 は第一象限において点 A で交わり、C_1, C_2 の点 A における接線をそれぞれ l, m とする。l と m のなす角が最小になるとき、第一象限において C_1, C_2, y 軸で囲まれる領域の面積を求めよ。

点 A の x 座標を t とすれば、$\mathrm{A}(t,kt^3)$ と書ける。ただし $t>0$ である。
曲線 C_2 において、$y'=3kx^2$ であるから、直線 m の傾きは $3kt^2$。
円 C_1 において、直線 l は直線 OA と直交するから、l の傾きは $-\dfrac{1}{kt^2}$。
$0\leq\alpha,\beta<\pi$ である実数 α, β が、

$$\tan\alpha=-\frac{1}{kt^2},\qquad \tan\beta=3kt^2$$

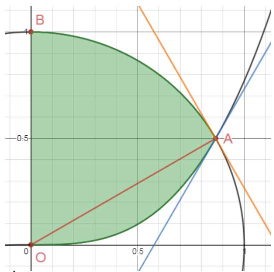
を満たすとき、加法定理により

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{-\frac{1}{kt^2}-3kt^2}{1+\left(-\frac{1}{kt^2}\right)\cdot 3kt^2}=\frac{1}{2}\left(3kt^2+\frac{1}{kt^2}\right)>0$$

となる。$\alpha-\beta$ は鋭角であるから、これが l と m のなす角である。$k>0$ なので、相加相乗平均の不等式を用いて、

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}\left(3kt^2+\frac{1}{kt^2}\right)\geqq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3kt^2\cdot\frac{1}{kt^2}}=\sqrt{3}$$

を得る。等号成立条件は $3kt^2=\dfrac{1}{kt^2}$、すなわち $(kt^2)=\dfrac{1}{3}$ のとき (…①)。$\tan(\alpha-\beta)>0$ だったから、この等号が成立するとき、$\alpha-\beta$ は最小値をとる。
さて、点 A は円 C_1 上の点でもあるから、$t^2+(kt^3)^2=1$ を満たす。①とあわせて、$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $k=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ を得た。



面積を求める領域は図の緑で示した部分である。点 $\mathrm{B}(0,1)$ をおくと、$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ であるから、$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とわかる。面積を求めるにあたって、扇形 OAB と、線分 OA と曲線 C_2 で囲まれた領域に分割して考える。線分 OA は、$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ であるから、求める面積は、

$$\frac{\pi}{6}+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}x-\frac{4\sqrt{3}}{9}x^3\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{6}+\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2-\frac{\sqrt{3}}{9}x^4\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

Q.194 ★6 自作 DMO4th 文 5 改題

n を正の整数とし、n 番目のフィボナッチ数を F_n とおく。$\dfrac{F_n}{\sqrt{5}}$ に最も近い整数と、$\dfrac{F_n}{\sqrt{5}}$ の差の絶対値の最大値を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.195 ★4◎ 自作

n を 2 以上の整数とする。$n+1$ 進法で n 桁の数 $1000\ldots000$ は、n 進法で何桁か。

$n+1$ 進法で n 桁の数 $1000\ldots000$ は、$(n+1)^{n-1}$ と表せる。2 以上の整数 n において以下が成り立つことを示す。

$$n^{n-1} \le (n+1)^{n-1} < n^n \quad (\ast)$$

まず左側の不等式 $n^{n-1} \le (n+1)^{n-1}$ については、$n \ge 2$ により明らか。

右側の不等式は両辺に $\dfrac{n+1}{n^n}$ をかけることで $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n < n+1$ と同値であるから、これを示す。

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k}$$

となっている。ここで $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ に対して、

$$1 \times 2 \times \cdots \times (n-k) \times \overbrace{n \times n \times \cdots \times n}^{k\text{ 個}} \ge 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$$

より、$(n-k)!n^k \ge n!$ であるから、

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!n^k} \le \frac{1}{k!}$$

が言える。さらに、$k = 2, 3, \ldots, n$ に対して、

$$1 \times 2 \times \cdots \times k \ge 1 \times \overbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}^{k-1\text{ 個}}$$

より、$k! \ge 2^{k-1}$ であるから、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

が言える。$n \ge 2$ であるから、

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \le 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \le n+1$$

が示された。

以上により $(\ast)$ が示された。これは $(n+1)^{n-1}$ が n 進法において n 桁であることを示している。よって答えは n 桁である。

Q.196 ★3 数 II青チャート

座標平面上に、どの 3 本も 1 点を共有しない n 本の直線がある。
(1) どの 2 本も平行でないとき、座標平面はこの n 本の直線によっていくつの領域に分かれるか。
(2) $n \ge 2$ として、平行な直線の組が一つだけある場合、座標平面はいくつの領域に分かれるか。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.197 ★7◎ 自作 DMO4th 理 6

三角形 T の 1 つの辺の長さは平方数で、残りの辺の長さは素数である。また、T の面積は整数で、外接円の半径は素数である。T の各辺の長さを求めよ。

T の三辺の長さを p, q, n^2 とし, T の面積を S, T の外接円の直径を d とする。ただし, $n.S$ は自然数, d, p, q は素数である。

長さ n^2 の辺の対角を θ とすると,

$$S = \frac{1}{2}pq\sin\theta$$

であり, 正弦定理より

$$\frac{n^2}{\sin\theta} = d$$

なので

$$S = \frac{pqn^2}{2d}$$

となる。S が整数なので, 右辺が整数となるためには pqn^2 が d で割り切れ, d は素数なので p, q, n のうちの少なくともひとつが d で割り切れる。また, 三角形の各辺は T の外接円における弦であって, その長さは直径を超えてはならないから

$$p \leqq d, \quad q \leqq d, \quad n^2 \leqq d$$

がすべて成り立つ。もし n が d で割り切れれば,

$$d^2 \leqq n^2 \leqq d$$

となり, $d^2 \leqq d$ を満たす素数 d は存在しないので不適である。よって p または q が d で割り切れることになる。一般性を失わず q が d で割り切れるとしてよい。$q \leqq d$ であったから $q = d$ である。(q は素数なのでよい.)

このとき, T のある一つの辺が直径に等しくなるから T は斜辺の長さが q の直角三角形である。そこで, 三平方の定理により

$$q^2 = (n^2)^2 + p^2$$

が成り立つから, 整理すると $p^2 = (q-n^2)(q+n^2)$ と因数分解ができ, $q \pm n^2$ は自然数, $q - n^2 < q + n^2$ だから

$$q - n^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad q + n^2 = p^2$$

でなければならない。この和を取れば $2q = p^2 + 1$ となる。さらに 2 つ目の式から $q = (p-n)(p+n)$ となり, 同様に考えると

$$p - n = 1 \quad \text{かつ} \quad p + n = q$$

である。 この和を取れば $2p = q + 1$ となる。下線部の 2 式から

$$p^2 + 1 = 2q = 2(2p-1) \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 4p + 3 = 0$$

となり, ここから $p = 1, 3$ と出るので $p = 3$ であることが必要である。その他の値を求めると

$$q = 2p - 1 = 5, \quad n = p - 1 = 2$$

となる。$n^2 = 4$ だから T は各辺の長さが $3, 4, 5$ の三角形であることが必要である。[*50] そして, このような T は $S = 6, d = 5$ となっているので実際に条件を全て満たしている。

以上より, T は各辺の長さが $3, 4, 5$ の直角三角形に限る。[*51]

Q.198 ★4 駿台 EXS テスト 改

$P(x)$ は定数でない整数係数多項式とする。$P(1) > 0$ のとき, $P(n+P(1)) - P(1)$ は $P(1)$ の美数であることを示せ。また, 任意の正の整数 n に対して $P(n)$ が素数であるような $P(x)$ は存在しないことを示せ。

$d > 0$, $a_0, a_1, \cdots, a_d$ は整数, $a_d \neq 0$ として,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k$$

とおいたとき,

$$P(n+P(1)) = \sum_{k=0}^{d} a_k(n+P(1))^k \equiv \sum_{k=0}^{d} a_k n^k = P(n) \pmod{P(1)}$$

から前半の主張は明らか。題意を満たす $P(x)$ が取れたとしよう。$P(n)$ が素数のとき, $P(1) = q$ とおくと $q > 0$ であって, すべての自然数 n に対して $P(n+q) - P(n)$ は q の倍数である。特に $n = kq + 1$ $(k \geqq 0)$ とおいたとき,

$$P(kq+1) \equiv P((k-1)q+1) \equiv \cdots \equiv P(1) = q \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, q)$$

*50 $S = \dfrac{pqn^2}{2d}$ において分子が d で割り切れる条件しか見ておらず, 十分条件となっているかが自明な議論ではないため, 十分性を最後に確認せねばならない。

*51 本問は, 2018 年大学への数学 3 月号「読者と作るページ」に掲載された。

だから $P(kq+1)$ は q で割り切れる素数になる。よって, すべての自然数に対して

$$P(kq+1)=q$$

であるが, $0\leqq k\leqq d$ で考えたときに $P(x)$ は $x-kq-1$ で割り切れ, すると $d+1$ 次以上の多項式になってしまい仮定に反する。よって存在しない。 □

Q.199 ★6 開成模試 文系

> 座標平面上で半径 1、原点 O を中心とする球面を S、点 $(0,0,1)$ を A とする。平面 p はベクトル $(1,1,1)$ に垂直で、p と S の共有点の集合は円 C をなし、点 A を頂点として C を底面とする円錐 T が存在する。T の体積の最大値を求めよ。

平面 p は、k を実数として $x+y+z=k$ で表される。p と S が共有点を持ち、それが 1 点でないような k の条件は、p と原点 O の距離が 1 未満であることが必要十分。よって、

$$\frac{|0+0+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{3}}<1$$

より、$-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}$ である。円錐 T が存在するためには、平面 p は点 A を通ってはいけないので、$0+0+1\neq k$ より $k\neq 1$。よって、k のとり得る範囲は $-\sqrt{3}<k<\sqrt{3}, k\neq 1$。

点 O を頂点とし円 C と底面とする円錐を考えれば、三平方の定理によって円 C の半径は

$$\sqrt{1^2-\left(\frac{|k|}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{k^2}{3}}$$

である。

円錐 T の高さは、平面 p と点 A の距離に等しいから、

$$\frac{|0+0+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|1-k|}{\sqrt{3}}$$

したがって T の体積は

$$\frac{1}{3}\pi\left(1-\frac{k^2}{3}\right)\frac{|1-k|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\left(1-\frac{k^2}{3}\right)|1-k|$$

と求められる。これを $f(k)$ とおく。

$0\leq k<1, 1<k<\sqrt{3}$ のとき、$|1-k|\leq 1$ である。一方、$-\sqrt{3}<k<0$ のとき、$|1-k|>1$ である。したがって、$0\leq k<1, 1<k<\sqrt{3}$ のとき、$f(-k)\geq f(k)$ が成り立つ。このことから、$-\sqrt{3}<k\leq 0$ の範囲で $f(k)$ の最大値を求めればよい。またこのとき $|1-k|=1-k$ である。

$f(k)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}\left(1-\dfrac{k^2}{3}\right)(1-k)$ について k で微分して $f'(k)=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}\left(x^2-\dfrac{2}{3}x-1\right)$ であるから、$-\sqrt{3}<k\leq 0$ において、$k=\dfrac{1-\sqrt{10}}{3}$ で極大となるから、求める値は、

$$f\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{729}(13+5\sqrt{10})\pi$$

Q.200 ★10◎ DMO4th 理 4

> 正の整数 n と実数 a に対して、関数 $I_n(a)$ を、
> $$I_n(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos^n x-a\sin^n 2x|\,dx$$
> で定め、m_n を $I_n(a)$ の最小値とする。m_n の最大値を求めよ。

$a\leq\dfrac{1}{2^n}$ のとき、

$$\cos^n x-a\sin^n 2x=\cos^n x\,(1-2^n a\sin^n x)$$

は、$2^n a\sin^n x\leq 2^n\cdot\dfrac{1}{2^n}\cdot 1=1$ から非負であるから、

$$I_n(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx-a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,dx\right)$$

は a についての 1 次関数である。$0\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ で $\sin^n 2x$ は常に 0 以上の値をとるから、$I_n(a)$ は単調減少し、$I_n(a)\geq I_n\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$。

$a>\dfrac{1}{2^n}$ のとき、$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で $\cos^n x\neq 0$、$1-2^n a\sin^n x$ は単調減少する。また、

$$1-2^n a\sin^n 0=1>0,\qquad 1-2^n asin^n\frac{\pi}{2}=1-2^n a<0$$

となるので、$\cos^n p(1-2^n a\sin^n p)=0$ $(\cdots\ *)$ を満たす実数 p $\left(0<p<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がただひとつ存在する。この p を用いて、

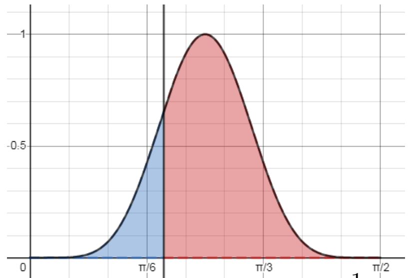
$$I_n(a)=\int_0^p(\cos^n x-a\sin^n 2x)\,dx+\int_p^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n 2x-\cos^n x)\,dx$$

となり、$\cos^n x$, $\sin^2 2x$ の原始関数の 1 つを $F(x)$, $G(x)$ とすると、$I_n(a)$ は以下のように求められる。

$$\begin{aligned}I_n(a)&=\Big[F(x)-aG(x)\Big]_0^p+\Big[aG(x)-F(x)\Big]_p^{\frac{\pi}{2}}\\&=2F(p)-2aG(p)\\&\quad+a\left[G(0)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[F(0)+F\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

これを a で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d}{da}I_n(a)&=2\frac{dp}{da}\frac{d}{dp}F(p)-2\left(G(p)-a\frac{dp}{da}\frac{d}{dp}G(p)\right)\\&\quad+\left(G(0)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\\&=2\frac{dp}{da}(\cos^n p-a\sin^n 2p)+G(0)-2G(p)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\\&=G(0)-2G(p)+G\left(\frac{\pi}{2}\right)\qquad(\because *)\\&=\int_p^{\frac{\pi}{2}}\sin^n 2x\,dx-\int_0^p\sin^n 2x\,dx\end{aligned}$$



この積分は、右図の面積における (赤領域) − (青領域) であることから、$p=\dfrac{\pi}{4}$ で $\dfrac{d}{da}I_n(a)=0$ となり、$0<p<\dfrac{\pi}{4}$ で $\dfrac{d}{da}I_n(a)<0$、$\dfrac{\pi}{4}<p<\dfrac{\pi}{2}$ で $\dfrac{d}{da}I_n(a)>0$ となる。したがって、$p=\dfrac{\pi}{4}$ となる a で、$I_n(a)$ は極小値をとる。$(*)$ によって、$a=\dfrac{1}{2^n\sin^n p}$ なので、このときの a は $a=\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}$。

以上のことから、$I_n\left(\frac{1}{2^n}\right)>I_n\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\right)$ がわかるので、$m_n=I_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2^n}}\right)$ であり、このとき $p=\dfrac{\pi}{4}$ だから、

$$m_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x-a\sin^n 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(a\sin^n 2x-\cos^n x)\,dx$$

となる。第 2 項において、$x=\dfrac{\pi}{2}-t$ と置換すれば、

$$m_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x-a\sin^n 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(a\sin^n 2t-\cos^n t)\,(-dt)$$

さらに整理して以下を得る。

$$m_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x-\sin^n x)\,dx$$

$n\geq 3$ のとき、

$$m_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^n x-\sin^n x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{n+2} x - \sin^{n+2} x)\, dx$$
$$+ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \cos^2 x (\cos^{n-2} x - \sin^{n-2} x)\, dx$$
$$> \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^{n+2} x - \sin^{n+2} x)\, dx = m_{n+2} \quad (\because \text{第 2 項は正})$$

によって、$m_3 > m_5 > m_7 > \ldots, m_4 > m_6 > m_8 > \ldots$ となる。よって m_n が最大となるのは $n = 1, 2, 3, 4$ のいずれか。

$$m_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx = \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1$$
$$m_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$
$$m_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3 x - \sin^3 x)\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x (1 - \sin^2 x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x (1 - \cos^2 x)\, dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x \sin x - \cos x \sin^2 x)\, dx$$
$$= m_1 + \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5\sqrt{2} - 4}{6}$$
$$m_4 = m_2 - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x (\cos^0 x - \sin^0 x)\, dx = m_2 = \frac{1}{2}$$

これらについて、$7 < 5\sqrt{2} < 8$ であることに注意して、

$$m_3 - m_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} > 0$$
$$m_3 = \frac{5\sqrt{2} - 4}{6} > \frac{7 - 4}{6} = \frac{1}{2} = m_2 = m_4$$

がわかるので、m_n の最大値は $n = 3$ のとき[*52]で、$\dfrac{5\sqrt{2} - 4}{6}$

Q.201 ★?

次の定積分 $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx$ を求める。

(1) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})\right)$ を x で微分して、$\sqrt{1 + x^2}$ になることを確認せよ。
(2) $t = x + \sqrt{1 + x^2}$ と置換して I を計算せよ。
(3) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ と置換して I を計算せよ。
(4) $x = \tan\theta, \sin\theta = t$ と置換して I を計算せよ。

最後に、理系版開成模試。

(5) xyz 空間の 2 点 $\mathrm{F}(2, 0, 0)$, $\mathrm{G}(-2, 0, 0)$ とし、点 P が $\mathrm{PF} \times \mathrm{PG} = 4$ を満たすとき、P は曲面 S 上を動く。S で囲まれる領域の体積を求めよ。

---

(1)

$$\left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + x^2} + \log(x + \sqrt{1 + x^2})\right)\right]'$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + x^2} + x \cdot \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})'}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \sqrt{1 + x^2}$$

(2)

置換にあたって、x が $0 \leq x \leq 1$ を動くとき、t は $1 \leq t \leq 1 + \sqrt{2}$ の全体を動く。続いて

$$(t - x)^2 = 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

であり、また

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) dx \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1 + x^2}}{t} dt = dx$$

である。$a = 1 + \sqrt{2}$ とおいて、

$$I = \int_1^a \frac{1 + x^2}{t}\, dt = \int_1^a \frac{1 + \frac{(t^2-1)^2}{4t^2}}{t}\, dt$$
$$= \int_1^a \left(\frac{t}{4} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t^3}\right) dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{8} + \frac{1}{2}\log t - \frac{1}{8t^2}\right]_1^a = \frac{\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})}{2}$$

(3)

置換にあたって、$dx = \frac{e^t + e^{-t}}{2} dt$ である。また、

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \Leftrightarrow (e^t)^2 - 2xe^t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$$

であるから、x が $0 \leq x \leq 1$ を動くとき、t は $0 \leq t \leq \log(1 + \sqrt{2})$ の全体を動く。$b = \log(1 + \sqrt{2})$ とおく。$e^b = 1 + \sqrt{2}$ には注意して、

$$I = \int_0^b \sqrt{1 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt$$
$$= \int_0^b \sqrt{\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2} \frac{e^t + e^{-t}}{2}\, dt = \int_0^b \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt$$
$$= \int_0^b \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}\right) dt = \left[\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} + \frac{t}{2}\right]_0^b$$
$$= \frac{(1 + \sqrt{2})^2 - \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}}{8} + \frac{b}{2} = \frac{\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})}{2}$$

(4)

まず、$dx = \dfrac{1}{\cos^2\theta} d\theta$ である。また、x が $0 \leq x \leq 1$ を動くとき、θ は $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ の全体を動く。よって、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2\theta}\, \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 - \sin^2\theta)\cos\theta}\, d\theta$$

を得る。続く置換において、

$$\cos\theta d\theta = dt \quad \Leftrightarrow \quad d\theta = \frac{1}{\cos\theta} dt$$

であって、θ が $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$ を動くとき、t は $0 \leq t \leq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の全体を動く。よって、

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1 - \sin^2\theta)\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta}\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{(1 - t^2)^2}\, dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + t} + \frac{1}{1 - t}\right)\right]^2 dt$$

[*52] n を実数にまで広げれば、$n = 2\sqrt{2}$ のときに m_n は最大となる (未証明 by math_Hurdia)

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right] dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} + \log|1+t| - \log|1-t|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})}{2}$$

(5)

点 $\mathrm{P}(x,y,z)$ として、$\mathrm{PF}^2 = (x-2)^2+y^2+z^2$, $\mathrm{PG}^2 = (x+2)^2+y^2+z^2$ より、

$\mathrm{PF}\times\mathrm{PG} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[(x-2)^2+y^2+z^2\right]\left[(x+2)^2+y^2+z^2\right] = 16$

である。$y^2+z^2 = r^2$ とおけば、これは

$$\left[(x-2)(x+2)\right]^2 + r^2\left[(x-2)^2+(x+2)^2\right] + r^4 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad r^4 + (2x^2+8)r^2 + (x^4-8x^2) = 0$$

これを r^2 について解けば、$r^2 = -(x^2+4) \pm 4\sqrt{x^2 * 1}$ を得るが、$r^2 \geq 0$ であることから、複合は明らかに正でなければならず、加えて $4\sqrt{x^2+1} \geq x^2+4$ でなければならない。両辺正であるから、

$$4\sqrt{x^2+1} \geq x^2+4 \quad \Leftrightarrow \quad 16x^2+16 \geq x^4+8x^2+16$$

よりこれを解いて、$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ を得る。

すなわち、曲面 S の平面 $x = k$ $(-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2})$ での断面は、半径 $r = \sqrt{4\sqrt{x^2+1}-(x^2+4)}$ の円周である。よって求める体積は $\displaystyle\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi r^2\,dx$ である。r は偶関数なので、

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \pi r^2\,dx = 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left[4\sqrt{x^2+1}-(x^2+4)\right]dx$$
$$=8\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx - 2\pi\left[\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^{2\sqrt{2}}$$
$$=8\pi\left[\log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}\right]$$

と求まった[*53]

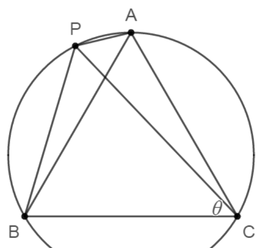
Q.202 ★1 関西医大 (2017)

> 次の 5 つの命題がある。
> 命題 1: 「命題 1 は真」
> 命題 2: 「命題 1 は偽」
> 命題 3: 「命題 2 は真」
> 命題 4: 「命題 3 は偽」
> 命題 5: 「命題 4 は偽」
> この 5 つの命題の中で、2 つの命題が真で、3 つの命題が偽であるとき、真の命題はどれか答えよ。

命題 1 が真であることを仮定すると、命題 2 は偽、命題 3 は偽、命題 4 は真、命題 5 は偽、と順に真偽が定まる。
一方、命題 1 が偽であることを仮定すると、命題 2 は真、命題 3 は真、命題 4 は偽、命題 5 は真、と順に真偽が定まる。
このうち、5 つの命題の中で 2 つの命題が真となるのは、命題 1 が真の場合であるから、真の命題は、命題 1 と命題 4 である。[*54]

Q.203 ★6 第二回駿台全国 (2017)

> 半径 R の外接円 K を持つ正三角形 ABC と、K の劣弧 AB 上 (ただし両端を除く) に点 P があり、$\angle\mathrm{PCB} = \theta$ とするとき、$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}$ を R, θ を用いて表せ。また P が劣弧 AB 上 (ただし両端を含む) を動くとき、$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}$ の最大値を求めよ。



両端を除く劣弧 AB 上を点 P が動くとき、θ は $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ の範囲を動く。$\triangle\mathrm{PCB}$ の外接円も K に等しいから、正弦定理によって、$\mathrm{PB} = 2R\sin\theta$。$\angle\mathrm{PCA} = \frac{\pi}{3} - \theta$ であることを用いて、正弦定理によって $\mathrm{PA} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$。
円周角の定理より $\angle\mathrm{PCB} = \angle\mathrm{PAB}$ なので、$\angle\mathrm{PAC} = \frac{\pi}{3}+\theta$ であるから、正弦定理によって $\mathrm{PC} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$。
これらによって、

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}$$
$$=2R\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right) + \left(2R\sin\theta\right) + 2R\sin\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)$$
$$=4R^2\sin^2\theta + 2\sqrt{3}R\cos\theta \quad (*)$$

と求まった。
点 P が点 A, B に重なる場合も、それぞれ $\theta = \frac{\pi}{3}, 0$ とすれば $(*)$ は成り立つ。よって $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ の範囲で考える。$\cos\theta = t$ とおけば、$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ であって $(*)$ は

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC} = 4R^2(1-t^2) + 2\sqrt{3}Rt$$
$$= -4R^2\left(t - \frac{\sqrt{3}}{4R}\right)^2 + 4R^2 + \frac{3}{4}$$

これの最大値について考える。
(i) $\frac{\sqrt{3}}{4R} < \frac{1}{2}$ すなわち $R > \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、$t = \frac{1}{2}$ において最大値 $3R^2+\sqrt{3}R$ をとる。
(ii) $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{3}}{4R} \leq 1$ すなわち $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq R \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、$t = \frac{\sqrt{3}}{4R}$ において最大値 $4R^2+\frac{3}{4}$ をとる。
(iii) $1 < \frac{\sqrt{3}}{4R}$ すなわち $0 < R < \frac{\sqrt{3}}{4}$ のとき、$t = 1$ において最大値 $2\sqrt{3}R$ をとる。
以上まとめて最大値は、

$$\begin{cases} 3R^2+\sqrt{R} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} < R\right) \\ 4R^2+\dfrac{3}{4} & \left(\dfrac{\sqrt{3}}{4} \leq R \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2\sqrt{3}R & \left(0 < R < \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) \end{cases}$$

Q.204 ★?

> (1) 平面ベクトル $\overrightarrow{a}$ は $|\overrightarrow{a}| = 1$ を満たし、ベクトル $\overrightarrow{p}$ は $\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}) = 1$ を満たす。$|\overrightarrow{p}|$ の取り得る値の範囲と、$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}||\overrightarrow{p}+\overrightarrow{a}|$ の最大値を求めよ。 (明治大 政経 1998)
> (2) 実数 p, q $(q > 0)$ に対して $|\overrightarrow{BC}| = q$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = p$ を満たす三角形 ABC が存在するための必要十分条件を求めよ。

(1)

$\overrightarrow{a} = (1,0)$, $\overrightarrow{p} = (s,t)$ と座標平面上の位置ベクトルで表したとき、

$$\overrightarrow{p}\cdot(\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}) = s(s-1)+t^2 = 1$$

より、$|\overrightarrow{p}| = \sqrt{s^2+t^2} = \sqrt{1+s}$ となる。また、

$$s(s-1)+t^2 = 1 \Leftrightarrow \left(s-\frac{1}{2}\right)^2 + t^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

[*53] 最後の積分の過程は省略させていただいた。これまでの小問の内容を参照して計算されたし。

[*54] 編者の感想: 命の字がゲシュタルト崩壊しました。

なので、s のとり得る範囲は $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le s \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とわかるので、

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \le \sqrt{1+s} \le \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le |\overrightarrow{p}| \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

続いて、$|\overrightarrow{p} \pm \overrightarrow{a}| = \sqrt{(s\pm1)^2+t^2} = \sqrt{1+s\pm2s}$ であるから、

$$|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{a}||\overrightarrow{p}+\overrightarrow{a}| = \sqrt{(2+s)^2-4s^2} = \sqrt{-3s^2+4s+4}$$

$$=\sqrt{-3\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{3}}$$

が得られた。s は $\dfrac{2}{3}$ とできるので、このとき最大となる。求める値は $\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$。

(2)

座標平面上で、$\mathrm{B}(0,0)$, $\mathrm{C}(q,0)$ とおき、$\mathrm{A}(s,t)$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-s,-t)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (q-s-t)$ より、

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = s(s-q)+t^2 = \left(s-\frac{q}{2}\right)^2+t^2-\frac{q^2}{4}$$

であって、これが p に等しいから、

$$\left(s-\frac{q}{2}\right)^2+t^2 = p+\frac{q^2}{4}$$

が得られた。$p+\dfrac{q^2}{4}>0$ のとき、これを満たす s,t であって、$t\neq0$ であるものが存在する。このときの点 $\mathrm{A}(s,t)$ は、直線 BC 上にないから、3 点 A, B, C は三角形をなす。

$p+\dfrac{q^2}{4}=0$ のとき、$s=\dfrac{q}{2}$, $t=0$ となるが、これは 3 点 A, B, C が 1 直線上に存在するから不適。$p+\dfrac{q^2}{4}<0$ のときには s,t が存在せず不適。

以上より、$p+\dfrac{q^2}{4}$ $(q>0)$ が必要十分条件。

Q.205 ★6 奈良県医大 (2009)

> n を 2 以上の整数とし、1 から n までの相異なる n 個の整数を横一列に並べて得られる各順列 σ に対して、左から i 番目の数字を $\sigma(i)$ と記す。このとき、$1\le i<j\le n$ かつ $\sigma(i)>\sigma(j)$ を満たす整数の対 (i,j) の個数を $l(\sigma)$ とおく。さらに、1 から n までの順列 σ 全体のなす集合を S とする。σ が S 全体を動くとき、$l(\sigma)$ の総和 $\displaystyle\sum_{\sigma\in S} l(\sigma)$ を求めよ。

集合 S の要素の個数は、1 から n までの相異なる n 個の整数を横一列に並べる順列の総数だから、$n!$ である。
ある順列 σ に対して、数の並びを逆にした順列を σ^* とおく。すなわち、任意の $1\le i\le n$ について、$\sigma(i)=\sigma^*(n+1-i)$ が成り立つ。
順列 σ と $1\le i<j\le n$ なる i,j において、$\sigma(i)>\sigma(j)$ が成り立つとき、$\sigma^*(n+1-i)>\sigma^*(n+1-j)$ も成り立つ。また $\sigma(i)<\sigma(j)$ が成り立つとき、$\sigma^*(n+1-i)<\sigma^*(n+1-j)$ も成り立つ。このことから、

$$l(\sigma)+l(\sigma^*) = {}_n\mathrm{C}_2$$

となることが従う。σ が S 全体を動くとき、σ^* も S 全体を動くから、

$$2\sum_{\sigma\in S} l(\sigma) = \sum_{\sigma\in S} l(\sigma) + \sum_{\sigma^*\in S} l(\sigma^*) = \sum_{\sigma\in S}\Big(l(\sigma)+l(\sigma^*)\Big)$$

$$=\sum_{\sigma\in S} {}_n\mathrm{C}_2 = n!\,{}_n\mathrm{C}_2$$

と計算される。したがって求めるものは、

$$\sum_{\sigma\in S} l(\sigma) = \frac{n(n-1)n!}{4}$$

Q.206 ★8 駿台全国 誘導抜き 改題

> n を正の整数とする。成分がすべて有理数である $2n+1$ 個のベクトル
> $$\overrightarrow{v_k} = (x_k, y_k) \quad (k=1,2,\cdots,2n+1)$$
> について、以下の 2 つの関係式
> $$\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+\cdots+\overrightarrow{v_{2n+1}} = \overrightarrow{0}$$
> $$|\overrightarrow{v_1}| = |\overrightarrow{v_2}| = \cdots = |\overrightarrow{v_{2n+1}}|$$
> を同時に満たすならば、
> $$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = \cdots = \overrightarrow{v_{2n+1}} = \overrightarrow{0}$$
> であることを証明せよ。

$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} = \cdots = \overrightarrow{v_{2n+1}} = \overrightarrow{0}$ でないと仮定する ($\Diamond$)。十分大きい自然数 N をとり、$N!\overrightarrow{v_k}$ の成分が全て整数であるようにできる。また、

$$N!x_1,\ N!x_2,\ \ldots,\ N!x_{2n+1},\ N!y_1,\ N!y_2,\ \ldots,\ N!y_{2n+1}$$

の最大公約数を g とおく。$\dfrac{N!x_k}{g} = X_k$, $\dfrac{N!y_k}{g} = Y_k$ とし、$\dfrac{N!}{g}\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{w_k}$ とすると、$\overrightarrow{w_k}$ の成分は全て整数でかつ各成分の最大公約数は 1 となる。ゆえに、$\overrightarrow{w_k}$ の各成分の中に奇数が必ず一つは存在する。対称性から、X_k $(k=1,2,\ldots,2n+1)$ の中に少なくとも 1 つ奇数があるとしてよい。
このとき、

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\overrightarrow{v_k} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{2n+1}\overrightarrow{w_k} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} X_k = 0\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} Y_k = 0\end{cases} \quad (*)$$

である。このことから、X_k $(k=1,2,\ldots,2n+1)$ の中に奇数は偶数個ある。したがってこの中に偶数は奇数個 (すなわち少なくとも 1 つ) あることになる。
X_a が偶数であり X_b が奇数となるような a と b をとる。

$$|\overrightarrow{v_a}| = |\overrightarrow{v_b}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{w_a}| = |\overrightarrow{w_b}| \Leftrightarrow X_a^2+Y_a^2 = X_b^2+Y_b^2$$

$$\Leftrightarrow 0+Y_a^2 \equiv 1+Y_b^2 \pmod 4$$

である。一般に、自然数 m について $m^2\equiv 0,1 \pmod 4$ であることから、$Y_a\equiv1$, $Y_b\equiv0 \pmod 4$ のみが適する。したがって、$|\overrightarrow{w_a}|^2 \equiv |\overrightarrow{w_b}|^2 \equiv 1 \pmod 4$ となっているから、任意の k $(k=1,2,\ldots,2n+1)$ に対して $|\overrightarrow{w_k}|^2\equiv 1 \pmod 4$ となる。すなわち $X_k^2+Y_k^2$ は奇数なので、X_k と Y_k の偶奇は異なる。すると Y_k $(k=1,2,\ldots,2n+1)$ の中に奇数は奇数個あるから、$\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} Y_k$ は奇数となるが、これは $(*)$ に矛盾する。
したがって、($\Diamond$) の仮定が誤りであって、題意の成立が示された。

Q.207 ★? 自作

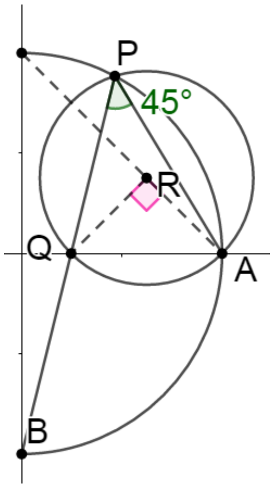
> $4^{4^{4^{4^{4^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{4^4}}}}}}}}$ を 47 で割った余りを求めよ。

ここに解答を記述。
編者註: この問題は Q.016 (10) と同一である。

Q.208 ★6 東大 OP 文系

> 座標平面において、原点 O を中心とする半径 1 の円 C 上に 2 点 $\mathrm{A}(1,0)$, $\mathrm{B}(0,-1)$ をとり、点 P は C の $x>0, y>0$ の部分を全て動く。直線 PB と x 軸との交点を Q とし、$\triangle\mathrm{APQ}$ の外心を R とする。R の軌跡を求め、図示せよ。

$\angle \mathrm{AOB} = 90^\circ$ より、円周角の定理から $\angle \mathrm{BPA} = \angle \mathrm{QPA} = 45^\circ$。$\triangle \mathrm{APQ}$ の外接円上で、$\angle \mathrm{QPA}$ は弧 QA に対する円周角なので、$\angle \mathrm{QRA} = 90^\circ$。点 R は外心なので、$\mathrm{RQ} = \mathrm{RA}$ だから $\triangle \mathrm{QRA}$ は直角二等辺三角形。



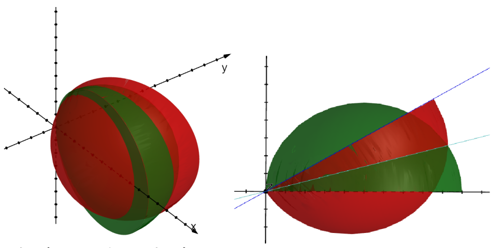
$\mathrm{P}(s,t)$ とする $(s^2+t^2=1,\ s,t>0)$。直線 PB は $y = \dfrac{t+1}{s}x - 1$ より、$\mathrm{Q}\left(\dfrac{s}{t+1}, 0\right)$。点 R の x 座標は AQ の中点の x 座標に等しいので、$\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{s}{t+1}\right)$ であり、y 座標は $\dfrac{1}{2}\mathrm{AQ}$ に等しいので、$\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{s}{1+t}\right)$ である。$m = \dfrac{s}{2(t+1)}$ として、$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2}+m, \dfrac{1}{2}-m\right)$。ここで、

$$m = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

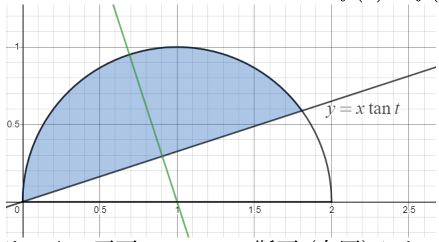
と、$0<t<1$ から、m は $0<m<\dfrac{1}{2}$ の範囲全体を動く。
$X = \dfrac{1}{2}+m,\ Y = \dfrac{1}{2}-m$ として、$Y = -X+1,\ \dfrac{1}{2} < X < 1,\ 0 < Y < \dfrac{1}{2}$ なので、点 R の軌跡は、線分 $y = -x+1\ \left(\dfrac{1}{2} < x < 1\right)$。

Q.209 ★9 東大実戦

> xyz 空間の点 $(1,0,0)$ を中心とする半径 1 の球の $y \geq 0$ の部分を A、$y \leq 0$ の部分を B とする。B を z 軸周りに角 2θ $(0 < \theta < \frac{\pi}{4})$ だけ回転移動した立体を C とする。A と C の共通部分の体積 V を θ で表し、V が最大となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ。



上図の緑半球が A、赤半球が C。
立体は平面 $y = x\tan\theta$ について対称なので、$y \geq x\tan\theta$ の部分を考える。これは A のうち、平面 $y = x\tan\theta$ と $y = x\tan 2\theta$ によって囲まれる領域である。$0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ に対し、A のうち $y \geq x\tan t$ を満たす部分の体積を $f(t)$ とおくと[*55]、求める体積は $V = f(\theta) - f(2\theta)$ で表せる。



$f(t)$ を計算する。A の平面 $z=0$ での断面 (右図) において、青色域を緑線を軸に回転させた領域の体積が $f(t)$ となる。緑線を w 軸とすれば、

$$f(t) = \int_{\sin t}^{1} \pi\left(\sqrt{1-w^2}\right)^2 dw = \pi\left(\frac{\sin^3 t}{3} - \sin t\right) + \frac{2}{3}\pi$$

と求まる。これを用いて

$$V = f(\theta) - f(2\theta) = \frac{\pi}{3}(\sin^3\theta - \sin^3 2\theta) - \pi(\sin\theta - \sin 2\theta)$$

となる。これを θ で微分して、

$$\begin{aligned}\frac{dV}{d\theta} &= \pi(\cos\theta\sin^2\theta - 2\cos 2\theta\sin^2 2\theta) - \pi(\cos\theta - 2\cos 2\theta)\\ &= 2\pi\cos^3 2\theta - \pi\cos^3\theta\\ &= \pi(\sqrt[3]{2}\cos 2\theta - \cos\theta)\\ &\quad\times(\sqrt[3]{4}\cos^2 2\theta + \sqrt[3]{2}\cos 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\end{aligned}$$

を得る。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲では最後の項は常に正だから、$\dfrac{dV}{d\theta}$ の符号は $\sqrt[3]{2}\cos 2\theta - \cos\theta$ の正負によって決まる。$c = \cos\theta$ についての 2 次関数 $g = 2\sqrt[3]{2}c^2 - c - \sqrt[3]{2}$ (ただし $\frac{1}{\sqrt{2}} < c < 1$) を考えれば、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < c < \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt{32+2\sqrt[3]{2}}}{8} \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} < 0$$

$$\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt{32+2\sqrt[3]{2}}}{8} < c < 1 \text{ のとき } \frac{dV}{d\theta} > 0$$

である。$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt{32+2\sqrt[3]{2}}}{8}$ となる α (ただし $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$) をとる。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\cos\theta$ は単調減少することをふまえれば、V は $0 < \theta < \alpha$ で増加、$\alpha < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ で減少するから、V は $\theta = \alpha$ のとき極大となる。
よって求める値は $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{4}+\sqrt{32+2\sqrt[3]{2}}}{8}$

Q.210 ★7◎ 京大理系 (2017)

> w を 0 でない複素数, x, y を $w + \dfrac{1}{w} = x + yi$ を満たす実数とする.[*56]
> (1) 実数 R は $R > 1$ を満たす定数とする. w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x,y) の軌跡を求めよ。
> (2) 実数 α は $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする. w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点 (x,y) の軌跡を求めよ。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.211 (1) ★4, (2) ★10 京大特色 (2018)

> 自然数 k と n は互いに素で, $k < n$ を満たすとする. n 項 からなる数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が次の 3 条件 (イ),(ロ),(ハ) を満たすとき, 性質 $P(k,n)$ を持つとする。
> (イ) $a_1, a_2, \cdots, a_n$ はすべて整数
> (ロ) $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n < 2^n - 1$
> (ハ) $a_{n+1}, \cdots a_{n+k}$ を $a_{n+j} = a_j$ $(1 \leq j \leq k)$ で定めたとき, n 以下のすべての自然数 m に対して $2a_m - a_{m+k}$ は $2^n - 1$ で割り切れる。
>
> 以下の問に答えよ。
> (1) $k = 2$ かつ $n = 5$ の場合を考える. 性質 $P(2,5)$ を持つ数列 $a_1, a_2, \cdots, a_5$ をすべて求めよ。
> (2) 数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が性質 $P(k,n)$ を持つとする. $a_{k+1} - a_k = 1$ であることを示せ。

Proof. 正の整数 p, q に対して, $p \equiv q \pmod{n}$ ならば $a_p = a_q$ となるように定めてもよい。$m = 1, 2, \ldots, n-k$ であれば, 条件 (ロ) より 不等式

$$-(2^n - 1) < 0 - a_n \leq 2a_m - a_n \leq 2a_m - a_{m+k}$$

[*55] 編者註: 読みやすさのため関数記号を変更しました。

$$< 2a_m - a_m = a_m < 2^n - 1$$

が成立し, 条件 (ハ) より $2^n - 1 | 2a_m - a_{m+k}$ であるため,

$$2a_m - a_{m+k} = 0 \ \ (m = 1, 2, \cdots n-k) \qquad (1)$$

が成立する。同様に, $m = n-k+1, n-k+2, \cdots n$ であるときは, 不等式

$$0 \leq a_{m+k} = 2a_{m+k} - a_{m+k} < 2a_m - a_{m+k} < 2a_m < 2(2^n - 1)$$

及び $2^n - 1 | 2a_m - a_{m+k}$ であるから,

$$2a_m - a_{m+k} = 2^n - 1 \ \ (m = n-k+1, n-k+2, \cdots n) \ (2)$$

が成立する。正の整数 i に対して, b_i を $b_i = a_{i+1} - a_i$ と置く。この際, $p \equiv q(\mathrm{mod}\ n)$ ならば $b_p = b_q$ であることに注意する。(1),(2) を用いて数列 $a_1, a_2, \cdots$ の階差をとるように引くと

$$2b_m - b_{m+k} = \begin{cases} 0 & (1 \leq m \leq n-k, m \neq n-k) \\ 2^n - 1 & (m = n-k) \end{cases} \qquad (3)$$

という式を得る。$1 \leq m \leq n-k, m \neq n-k$ のとき, n, k が互いに素であることから, ある $2 \leq r \leq n-1$ を満たす整数 r であって, $m \equiv (r-1)k \ (\mathrm{mod}\ n)$ を満たすものがただ一つ存在する。また,$m = n-k$ のときは $m \equiv (n-1)k \ (\mathrm{mod}\ n)$ であるから,$r = n$ と定める。このような r を用いて (3) は

$$2b_m - b_{m+k} = 2b_{(r-1)k} - b_{rk} = \begin{cases} 0 & (2 \leq r \leq n-1) \\ 2^n - 1 & (r = n) \end{cases} \qquad (4)$$

と同値である。(4) で $r = 2, 3, \cdots n-1$ の場合,$b_{rk} = 2b_{(r-1)k}$ となり, 右辺に更に式を適用させることで

$$b_{rk} = 2b_{(r-1)k} = 4b_{(r-2)k} = \cdots = 2^{r-1}b_k$$

を得る。この結果と $r = n$ の場合の式から

$$b_{nk} = 2b_{(n-1)k} - (2^n - 1)$$
$$= 2 \times 2^{(n-1)-1}b_k - (2^n - 1) = 2^{n-1}b_k - (2^n - 1)$$

を得る。これらの式を $r = 2, 3, \cdots, n$ について足せば

$$\sum_{r=2}^{n} b_{rk} = \left(\sum_{r=2}^{n} 2^{r-1} \right) b_k - (2^n - 1)$$

となり, 両辺に $b_{1k} = 2^{1-1}b_k$ を加えて整理することで

$$\sum_{r=1}^{n} b_{rk} = \left(\sum_{r=1}^{n} 2^{r-1} \right) b_k - (2^n - 1) = (2^n - 1)(b_k - 1)$$

となる。n, k は互いに素であることより 数列 $k, 2k, \cdots, rk \cdots, (n-1)k, nk$ は 数列 $1, 2, 3, \cdots i \cdots, n-1, n$ のある置換になっているので

$$\sum_{r=1}^{n} b_{rk} = \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i) = 0$$

以上より $0 = (2^n - 1)(b_k - 1)$ となるから,$b_k = a_{k+1} - a_k = 1$ □

Q.212 ★4 大阪大 (1995)

どのような実数 x に対しても、不等式

$$|x^3 + ax^2 + bx + c| \leq |x^3|$$

が成立するような実数 a, b, c の値を求めよ。

$x = 0$ とすることで、$|c| \leq 0$ を満たすから $c = 0$。このとき不等式は、

$$|x| \cdot |x^2 + ax + b| \leq |x|^3$$

だから、$x \neq 0$ に対して

$$|x^2 + ax + b| \leq |x|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left| 1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} \right| \leq 1$$

となる。$\dfrac{1}{x} = t$ とおいたとき、t は 0 でない実数を走るので、任意の 0 でない実数 t に対して

$$|1 + at + bt^2| \leq 1$$

が成立する。$b \neq 0$ だと、t を十分大きくとれば、$1 + at + bt^2$ は発散させられるため不適。$b = 0$ とすると、$|1 + at| \leq 1$ が常に成り立つためには、同様の理由から $a = 0$ でなければならない。よって $a = b = c = 0$ であるが、このとき確かに

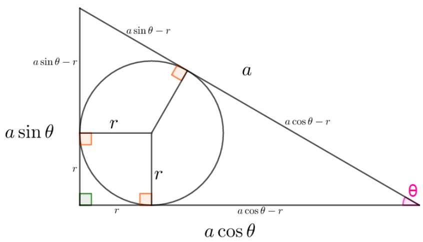
$$|x^3 + ax^2 + bx + c| = |x^3| \leq |x^3|$$

となっているのでよい。よって $(a, b, c) = (0, 0, 0)$。

Q.213 ★6 京大 OP 添削用問題

直角三角形の周の長さを L、内接円の半径を r とおく。$\dfrac{L}{r}$ の最小値を求めよ。

直角三角形の斜辺を a、1 つの鋭角を θ (ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$) とおく。



すると

$$L = a(1 + \cos\theta + \sin\theta)$$

である。直角三角形の面積を考えて、

$$\frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2}a^2 \sin\theta\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{L}{r} = \frac{a^2}{r^2}\sin\theta\cos\theta$$

が成り立つ。一方で、

$$a = (a\sin\theta - r) + (a\cos\theta - r) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{r} = \frac{2}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$$

である。以上のことから、

$$\frac{L}{r} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin\theta\cos\theta = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{(\sin\theta + \cos\theta - 1)^2}$$

と書ける。$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと、

$$\frac{L}{r} = \frac{2(t^2 - 1)}{(t-1)^2} = \frac{2(t+1)}{(t-1)} = 2 + \frac{4}{t-1}$$

であるから、t を最大化すればこの値は最小となる。$t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ なので、$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のときに t は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。このとき最小値は、

$$2 + \frac{4}{\sqrt{2} - 1} = 4\sqrt{2} + 6$$

Q.214 ★4 慶応理工 (2015)

$m > 0$ とし、$f(x) = \dfrac{m^2}{2}\cos 2x - m\cos x \ (-\pi < x < \pi)$ と定める。

(1) $f(x)$ の最小値を求めよ。
(2) 曲線 $y = f(x)$ が x 軸と接するとき、m の値を求めよ。
(3) (2) のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた領域を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

(1)

$$f'(x) = -m^2 \sin 2x + m\sin x = m\sin x(1 - 2m\cos x)$$

であるから、m の値によらず $x = 0, \pm\pi$ のときに $f'(x) = 0$ となる。

(i) $0 < m \leq \dfrac{1}{2}$ のとき、$-\pi < x < 0,\ 0 < x < \pi$ では常に $1 - 2m\cos x > 0$ であるから、$f'(x)$ の符号は $\pi < x < 0$ で負、$0 < x < \pi$ で正となるから、$f(x)$ は $x = 0$ で極小値をとり、またこれが最小値となる。この値は $f(0) = \dfrac{m^2}{2} - m$。

(ii) $m > \dfrac{1}{2}$ のとき、$1 - 2m\cos\alpha$ を満たす実数 α $(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2})$ が存在する。これを用いて増減表は、

x	π	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	−	0	+	0	−	0	+	0
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

ここで $f(\alpha)=f(-\alpha)$ であるから、これが最小値となる。値は $\cos\alpha=\dfrac{1}{2m}$ によって、

$$\frac{m^2}{2}\cos 2\alpha - m\cos\alpha = \frac{m^2}{2}(2\cos^2\alpha - 1) - m\cos\alpha = -\frac{m^2}{2} - \frac{1}{4}$$

(2)

曲線 $y=f(x)$ が x 軸と接するとき、その接点の座標を $\bigl(t, f(t)\bigr)$ とおく。このとき t が満たすべき条件は $f'(t)=0$ かつ $f(t)=0$ である。

(i) $0<m\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき、$f'(t)=0$ となるのは $t=0,\pm\pi$ である。このもとで、

$$f(0)=\frac{m^2}{2}-m,\quad f(\pm\pi)=\frac{m^2}{2}+m$$

であるが、これらが 0 となるような m は $0<m\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲に存在しない。

(ii) $m>\dfrac{1}{2}$ のとき、$f'(t)=0$ となるのは $t=0,\pm\pi,\pm\alpha$ である (ただし α は (1) と同様)。このもとで、

$$f(0)=\frac{m^2}{2}-m,\quad f(\pm\pi)=\frac{m^2}{2}+m,\quad f(\pm\alpha)=-\frac{m^2}{2}-\frac{1}{4}$$

である。これらが 0 になるような m を考えると、$m>\dfrac{1}{2}$ においては $f(\pm\pi)>0$ でありまた $f(\pm\alpha)<0$ であるから、$x=\pm\pi,\pm\alpha$ の各極値では m によらず x 軸に接することはない。一方で、$m=2$ のとき、$f(0)=0$ とできるから、すなわち $m=2$ のとき、曲線 $y=f(x)$ は $x=0$ において x 軸に接することがわかる。

以上より、求める m の値は $m=2$。

(3)

$m=2$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos 2x - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x \\ &= 2(2\cos x + 1)(\cos x - 1) \end{aligned}$$

なので、$\cos x = 0, -\dfrac{1}{2}$ のとき、すなわち $x=0,\pm\dfrac{2}{3}\pi$ のときに曲線 $y=f(x)$ は x 軸と交わる。$f(x)$ が偶関数であることに注意すると、求める体積は、

$$\pi\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi}\Bigl(f(x)\Bigr)^2\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(4\cos^2 2x - 8\cos x\cos 2x + 4\cos^2 x)\,dx$$

である。ここで、

$$4\cos^2 2x = 2(1+\cos 4x),\quad 4\cos^2 x = 2(1+\cos 2x)$$
$$8\cos x\cos 2x = 4(\cos x + \cos 3x)$$

を用いてさらに整理すると

$$2\pi\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(2\cos 4x - 4\cos 3x + 2\cos 2x - 4\cos x + 4)\,dx$$
$$=2\pi\Bigl[\frac{1}{2}\sin 4x - \frac{4}{3}\sin 3x + \sin 2x - 4\sin x + 4x\Bigr]_0^{\frac{2}{3}\pi}$$
$$=\pi\left(\frac{16}{3}\pi - \frac{9}{2}\sqrt{3}\right)$$

と求められた。

Q.215 ★5 学コン 2014-5-1

凸 15 角形 T の頂点を $P_1, P_2, \cdots, P_{15}$ とする。これらの頂点から 5 点を選んでできる凸 5 角形のうち、T と辺を共有しないものは何個あるか。

P_1〜P_{15} から, 隣り合わない 5 点を選べばよい。15 角形の頂点のうち, 選ぶ 5 点を○, 残りの 10 点を×で表す。まず , P_1 が○の場合は, P_2, P_15 は×になり , のこり 4 個の○は, 次の図の 9 箇所の↑から 4 箇所選んでひとつずつ入れればよいから, ${}_9\mathrm{C}_4=126$ 通り。

○　×　×　×　×　×　×　×　×　×　×

P_1　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑　↑ P_{15}

以上より P_1 を頂点とする 5 角形は 126 個で, 対等性から P_2〜P_{15} を頂点とする 5 角形も 126 個あるが, 126×15 とすると 1 つの 5 角形について 5 回重複して数えることになるので求める個数は $126\times 15\div 5=378$ 個。

Q.216 ★6 東進東大レベル模試

対数は自然対数とする。
(1) $x>0$ に対し、$\log x\leq x-1$ が成立することを示せ。
(2) $\log 101$ を小数第 3 位まで正しく求めよ。
必要なら $2.30258<\log 10<2.30259$ を用いてよい。

(1)

$f(x)=x-1-\log x$ とおいて, $x>0$ で $f(x)\geqq 0$ であることを示せば良い。$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ より, $f(x)$ は $0<x<1$ で減少し, $x=1$ で極小値を取り, $x>1$ で増加する。従って, $f(x)>f(1)=0$ だから示された。

(2)

$p=\log 101$ とおく。$p=2\log 10+\log 1.01$ なので, (1) の不等式より

$$p\leqq 2\log 10 + 0.01 < 2\times(2.30259)+0.01 = 4.61518$$

(1) の不等式の x を $\frac{1}{x}>0$ に置き換えて, $f(\frac{1}{x})\geqq 0$ という不等式が成立することを利用すれば,

$$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-1+\log x\geqq 0$$

が $x>0$ で成立する。整理すると

$$1-\frac{1}{x}\leqq \log x$$

となるので, これに $x=1.01$ を代入すれば

$$\log 1.01 \geqq 1-\frac{1}{1.01}=\frac{1}{101}>0.0099$$

という $\log 1.01$ の下からの評価を得る。これによって,

$$p\geqq 2\log 10+\log 1.01 > 2\times(2.30258)+0.0099 = 4.61506$$

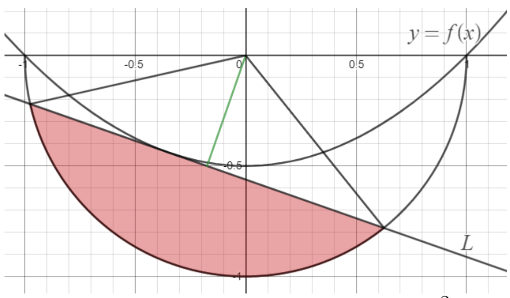
となる。従って,

$$4.61506<p<4.61518$$

だから, $p=4.615\cdots$ である。

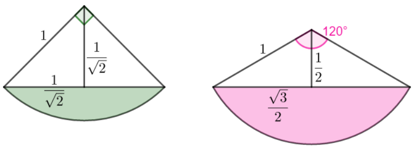
Q.217 ★6 一橋 (2018)

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{2}$ とおく。$-1\leq t\leq 1$ とし、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線を L とする。半円 $x^2+y^2=1$ $(y\leq 0)$ と L で囲まれた部分の面積を S とする。S の取り得る値の範囲を求めよ。



$f'(x)=x$ であるから、接線 L の方程式は $y=tx-\dfrac{t^2+1}{2}$ となる。これと原点との距離 d は、$d=\dfrac{\left|t\cdot 0 - 0 - \frac{t^2+1}{2}\right|}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{2}<1$ であり、かつ点 $(\pm 1, 0)$ は接線 L 上にあるかこれより上にあるので、接線と半円の弧は常に 2 点で交わる。

よって領域は常に半円と L (が半円に切り取られる弦) のみに囲まれており、その面積は L と原点との距離 $d=\dfrac{\sqrt{t^2+1}}{2}$ が長いほど小さくなり、短いほど大きくなる。
d が最大となるのは $t=\pm1$ のときで、$d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。このとき面積は最小で、その値は下左図より $S=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}$。
d が最小となるのは $t=0$ のときで、$d=\dfrac{1}{2}$。このとき面積は最大で、その値は下右図より $S=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。



以上より、S の取り得る範囲は $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\leq S\leq\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

Q.218 ★8 名古屋大 (2015)

$f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり、$x>0$ で $0<f(x)<1$ を満たすものとする。

$$a_1=1,\quad a_{m+1}=\int_0^{a_m}f(x)\,dx\quad(m=1,2,3,\cdots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める。1 未満の任意の正の数 ε に対して、$\varepsilon>a_m$ を満たす m が存在することを示せ。

(解法 1　単調収束定理を用いて)

実数 t $(0\leq t\leq1)$ に対して定義される関数 $g(t)$ を、

$$g(t)=\int_0^t f(x)\,dx$$

と定める。このとき、被積分関数が常に正であることから $g(t)\geq0$ である。ここで $g(t)=0$ となるのは $t=0$ の場合のみである。さらに、

$$\int_0^t(1-f(x))\,dx=t-g(t)\geq0$$

も同様の理由によって成り立つ。$t-g(t)=0$ となるのは $t=0$ の場合のみである。したがって $0<t\leq1$ において $0<g(t)<t$ である。
さて、$a_1=1$ であるから、$0<a_2<1$ である。さらにある自然数 2 以上の k において $0<a_k<1$ であれば、$0<g(a_k)=a_{k+1}<a_k<1$ が成り立つから、帰納的に考えて、任意の自然数 m において $a_{m+1}=g(a_m)$ であり、$0<a_{m+1}<a_m$ が成り立つ。したがって、数列 $\{a_m\}$ は極限値 α を $0\leq\alpha\leq1$ の範囲に持つ。
極限値 α について、$a_{m+1}=g(a_m)$ の両辺の極限を考えることによって、

$$\lim_{m\to\infty}a_{m+1}=\lim_{m\to\infty}g(a_m)\Leftrightarrow\alpha=g(\alpha)$$

を得る。つまり、$\{a_m\}$ の極限値 α は、方程式 $x=g(x)$ の $0\leq x\leq1$ における解である。先に議論した関数 g の性質からこの解は $x=0$ に限ることがわかる。よって $\displaystyle\lim_{m\to\infty}a_m=0$ である。このことを用いれば、1 未満の任意の正の数 ε に対して、ある (往々にして大きな) 自然数 m を用いれば $0<a_m<\varepsilon\leq a_{m-1}$ とできることがわかる。これにより題意が示された。

(解法 2　最大値原理を用いて)

$f(x)<1$ より、

$$a_{m+1}=\int_0^{a_m}f(x)\,dx<\int_0^{a_m}dx=a_m\quad(m\geq1)$$

なので、$a_1>a_2>a_3>\cdots$ となる (①)。全ての m で $a_m\geq\varepsilon$ を仮定する。また、$p=\displaystyle\int_0^{\varepsilon}f(x)\,dx$ とおく。f は連続なので、$f(x)$ は閉区間 $[\varepsilon,a_2]\subset(0,1)$ 上で最大値 M をとる。このとき $0<M<1$ である。
$m\geq2$ に対して、①より $[\varepsilon,a_m]\subset[\varepsilon,a_2]$ であるから、$x\in[\varepsilon,a_m]\Rightarrow f(x)\leq M$ が $m\geq2$ で成り立つ。よって $m\geq3$ として、

$$a_m=\int_0^{\varepsilon}f(x)\,dx+\int_{\varepsilon}^{a_{m-1}}\leq p+M(a_{m-1}-\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow\quad a_m-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}\leq M\left(a_{m-1}-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}\right)\quad\cdots②$$

となる。$p<\displaystyle\int_0^{\varepsilon}=\varepsilon$ と $0<1-M<1$ に加えて①より、

$$a_m-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}=(a_m-\varepsilon)+\frac{\varepsilon-p}{1-M}\geq\frac{\varepsilon-p}{1-M}>0$$

が言えるから、

$$②\Rightarrow0<\frac{\varepsilon-p}{1-M}\leq a_m-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}\leq M^{m-2}\left(a_2-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}\right)$$

となって、これより

$$0<\frac{\varepsilon-p}{1-M}\left(a_2-\frac{p-M\varepsilon}{1-M}\right)^{-1}\leq M^{m-2}\quad\cdots③$$

が得られた。$\displaystyle\lim_{m\to\infty}M^{m-2}=0$ より、③は十分大きい $m\in\mathbb{N}$ で成立しないから矛盾。よって $a_m<\varepsilon$ となる m が必ず存在する。

Q.219 ★6 1 対 1 数 A

凸多面体の頂点、辺、面の数をそれぞれ v,e,f とすると、$v-e+f=2$ が成り立つ。これをオイラーの多面体定理という。正五角形と正六角形の面からなる凸多面体がある。正五角形の面どうしが辺を共有しないとき、この多面体の面の数を求めよ。
なお、凸多面体は次の性質をもつ。
- 1 つの頂点に集まる面の数は 3 以上
- 1 つの頂点に集まる角の和は 360° 未満

ここに解答を記述。

Q.220 ★8 自作 DMO4.5th

2 以上の自然数 n に対して、関数

$$f_n(\theta)=\frac{\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta}\quad(0<\theta<\frac{\pi}{2})$$

の最小値を m_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}m_n$ を求めよ。
必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}$ を用いてよい。

導関数は以下のように求められる。

$$f_n'(\theta)=\frac{\frac{1}{n}(\tan\theta)^{\frac{1}{n}-1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\theta-\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta^2}$$

$$=\frac{\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲においては、常に $\dfrac{\sqrt[n]{\tan\theta}}{\theta\sin\theta\cos\theta}>0$ であるから、$\dfrac{1}{n}-\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}$ の符号をみればよい。
$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ とおくと、$g'(x)=\dfrac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$ となる。さらに、関数 $x-\tan x$ について、

$$(x-\tan x)'=1-\frac{1}{\cos^2x}=-\tan^2x<0$$

であるから $x-\tan x$ は常に単調減少する。$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲では、$0-\tan0=0$ を踏まえれば $x-\tan x<0$ であり、$\cos x>0$ と合わせて、$g'(x)<0$ が言える。また、$\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ の範囲では、$\tan x<0$ によって $x-\tan x>0$ であり、$\cos x<0$ と合わせて、やはり $g'(x)<0$ が言える。なお、$x=\dfrac{\pi}{2}$ では、$g'(x)=\dfrac{\cos x}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}=-\dfrac{4}{\pi^2}<0$ であるので、$0<x<\pi$ では、常に $g'(x)<0$ であり、$g(x)$ は単調減少することがわかる。
続いて、$h(\theta)=\dfrac{1}{n}-g(2\theta)$ とおく。$0<x<\pi$ で $g(x)$ は単調減少したから、$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $h(\theta)$ は単調増加する。加えて、

$$\lim_{\theta\to+0}h(\theta)=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)=\frac{1}{n}-1<0$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0} h(\theta)=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{n}-\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)=\frac{1}{n}>0$$

であるから、中間値の定理によって、$h(\varphi_n)=0$ を満たす実数 φ_n が区間 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ にただ一つ存在することがわかる。また、$\theta=\varphi_n$ のとき、$f_n(\theta)$ は極小かつ最小となる。

θ	0	$\cdots$	φ_n	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$h(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f_n(\theta)$		$\searrow$	m_n	$\nearrow$	

さて、$\dfrac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n}=\dfrac{1}{n}$ であるから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 2\varphi_n}{2\varphi_n}=0$ である。これに加え、$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ は単調減少し $\displaystyle\lim_{x\to\pi}g(x)=0$ であること、さらに $0<\varphi_n<\dfrac{\pi}{2}$ であることから、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\frac{\pi}{2}$ である。

以上の事柄から、

$$\begin{aligned}
m_n=\frac{\sqrt[n]{\tan\varphi_n}}{\varphi_n}&=\frac{1}{\varphi_n}\left(\frac{\sin\varphi_n}{\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\varphi_n}\left(\frac{\sin^2\varphi_n}{\sin\varphi_n\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}\\
&=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n\cos\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{2\varphi_n}{\sin 2\varphi_n}\right)^{\frac{1}{n}}\\
&=\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\cdot n^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

と整理できるから、求めるものは、

$$\lim_{n\to\infty}m_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(\sin\varphi_n)^{\frac{2}{n}}}{\varphi_n\cdot\varphi_n^{\frac{1}{n}}}\cdot n^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{\pi}$$

Q.221 ★7 学コン 2018-5-4

xyz 座標空間に異なる 5 点 A,B,C,D,E があり、$AB=BC=DE=EA=1$, $\angle EAB=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=\angle DEA=90^\circ$ を満たしている。
(1) CD の長さを求めよ。
(2) A,B,C,D,E を全て通る球は存在するか。存在するならば、その球の半径を求めよ。

(1)

ここに解答を記述。

(2)

ここに解答を記述。

Q.222 ★? 日本医科大 (2017)

次の極限を求めよ。

$$\lim_{x\to\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}\,dt$$

$f(t)=\dfrac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{t^2\log t}$ とおく。$x\neq\sqrt{\pi}$ のとき、平均値の定理により x と $\sqrt{\pi}$ の間に[*57]次を見たす c が存在する。

$$\begin{aligned}
&\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{(x^2+\sqrt{\pi}t)e^{t^2}}{(x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi})t^2\log t}\,dt\\
=&\frac{1}{x^2+\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}f(t)\,dt\\
=&\frac{1}{x^2+\sqrt{\pi}}\cdot f(c)
\end{aligned}$$

$x\to\sqrt{\pi}$ のとき、$c\to\sqrt{\pi}$ であるから、求める極限値は

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}=\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}$$

Q.223 ★8 東レ模試

点 O を中心とする半径 R の円を K とする。与えられた正の数 a,b,c に対して R を十分大きく取り、K の周上に 4 点 A,B,C,D を $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ かつ、$\angle ABC$ と $\angle ACD$ が鈍角となるように取る。$AC=x$, $AD=y$ とする。
(1) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}R^2(a+b-x)$ を求めよ。
(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}R^2(a+b+c-y)$ を求めよ。

本問で R に依存する量は $x,y,\angle\mathrm{ABC},\angle\mathrm{ACD}$ などであることに注意する。

(1)

$\angle\mathrm{ABC}=\theta_R$ とおく。三角不等式より

$$x<a+b \tag{5}$$

である。正弦定理および (5) より

$$\sin\theta_R=\frac{x}{2R}<\frac{a+b}{2R}\to 0\quad(R\to\infty) \tag{6}$$

なので, $\theta_R>\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\theta_R\to\pi\quad(R\to\infty) \tag{7}$$

余弦定理より

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta_R\to(a+b)^2\quad(R\to\infty)$$

だから, $a+b>0, x>0$ より

$$x\to a+b\quad(R\to\infty) \tag{8}$$

ふたたび余弦定理, (6) により

$$\begin{aligned}
R^2(a+b-x)&=R^2\cdot\frac{(a+b)^2-x^2}{a+b+x}\\
&=R^2\cdot\frac{2ab(1+\cos\theta_R)}{a+b+x}\\
&=R^2\cdot\frac{2ab}{(a+b+x)(1-\cos\theta_R)}\sin^2\theta_R\\
&=R^2\frac{2ab}{(a+b+x)(1-\cos\theta_R)}\left(\frac{x}{2R}\right)^2\\
&=\frac{2abx^2}{4(a+b+x)(1-\cos\theta_R)}
\end{aligned}$$

(7), (8) より

$$\lim_{R\to\infty}R^2(a+b-x)=\frac{2ab(a+b)^2}{4(2a+2b)(1-(-1))}=\frac{ab(a+b)}{8}$$

(2)

まず

$$R^2(a+b+c-y)=R^2(a+b-x)+R^2(x+c-y)$$

であるから $R^2(x+c-y)$ の極限を見れば求まる。$\angle\mathrm{ACD}=\phi_R$ とおく。三角不等式, (5) により

$$y<x+c<a+b+c \tag{9}$$

正弦定理, (9) より

$$\sin\phi_R=\frac{y}{2R}<\frac{a+b+c}{2R}\to 0\quad(R\to\infty) \tag{10}$$

である。$\phi_R>\dfrac{\pi}{2}$ だから

$$\phi_R\to\pi\quad(R\to\infty) \tag{11}$$

余弦定理, (8), (11) より

$$y^2=(x+c)^2-2xc(1+\cos\phi_R)\to(a+b+c)^2\quad(R\to\infty)$$

だから, $a+b+c>0, y>0$ より

$$y\to a+b+c\quad(R\to\infty) \tag{12}$$

[*57] x と $\sqrt{\pi}$ のどちらが大きくとも

ふたたび余弦定理, (10) により

$$\begin{aligned}R^2(x+c-y) &= R^2\cdot\frac{(x+c)^2-y^2}{x+c+y}\\ &= R^2\cdot\frac{2xc(1+\cos\phi_R)}{x+c+y}\\ &= R^2\cdot\frac{2xc}{(x+c+y)(1-\cos\phi_R)}\sin^2\phi_R\\ &= R^2\frac{2xc}{(x+c+y)(1-\cos\phi_R)}\left(\frac{y}{2R}\right)^2\\ &= \frac{2xcy^2}{4(x+c+y)(1-\cos\phi_R)}\end{aligned}$$

(8),(10),(11),(12) より

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}R^2(x+c-y) &= \frac{2(a+b)c(a+b+c)^2}{4(2a+2b+2c)(1-(-1))}\\ &= \frac{c(a+b)(a+b+c)}{8}\end{aligned}$$

よって, 本問の (1) より

$$\begin{aligned}&\lim_{R\to\infty}R^2(a+b-x)+\lim_{R\to\infty}R^2(x+c-y)\\ &= \lim_{R\to\infty}R^2(a+b+c-y)\\ &= \frac{ab(a+b)}{8}+\frac{c(a+b)(a+b+c)}{8}\\ &= \frac{(ab+bc+ca)(a+b+c)}{8}\end{aligned}$$

Q.224 ★7◎ 学コン 2018-6-1

> 1, 2, 3 と書かれたカードが各 3 枚、4, 5, 6 と書かれたカードが各 2 枚、7, 8, 9 と書かれたカードが各 1 枚ある。これら 18 枚のカードから 4 枚を無作為に 1 枚ずつ取り出して、左から順に並べて 4 桁の整数 N を作る。N が 6 の倍数である確率を求めよ。

4 枚のカードの数字の和が 3 で割り切れ、かつ、4 枚目のカードの数字が偶数 ($\cdots$ ∗) の場合に、N は 6 の倍数になる。1 と 7、2 と 8、3 と 9 は、6 で割った余りがそれぞれ同じなので、(∗) のような選び方を考えるときには、それぞれ同一視してよい。よって、1, 2, 3 が各 4 枚、4, 5, 6 が各 2 枚の状況から考える。
1 の位 (4 枚目) を指定して場合わけを行う。1 の位が 2, 4, 6 のとき、その数字を取り方はそれぞれ 4, 2, 2 通り。残りのカードの取り出し方は、それら 3 枚の数字の和を 3 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 0 となるようにすればよい。以降では、'残り 3 枚のカードの数字の和を 3 で割った余り' を R で表す。
R を考えるにあたっては、4 を 1 に、5 を 2 に、6 を 3 にみなせるので、残ったカードが、(i) 1, 3 が 6 枚ずつと 2 が 5 枚、(ii) 2, 3 が 6 枚ずつと 1 が 5 枚、(iii) 1, 2 が 6 枚ずつと 3 が 5 枚、のそれぞれの状況から考えればよい。加えて、(i) の場合では、カードの数字に全て 1 を足し、4 を 1 とみなす、(ii) の場合では、カードの数字に全て 1 を引き、0 を 3 とみなす、という操作を行っても R の値は変わらない。したがって、1, 2 が 6 枚ずつと 3 が 5 枚の状況[*58]から、R が 1, 2, 0 のそれぞれになる場合の数を調べればよい。それぞれを n_1, n_2, n_0 とおく。
$n_1+n_2+n_0$ は、1,2 が 6 枚ずつと 3 が 5 枚ある中から 3 枚取り出す場合の数に相当するから、$17\times16\times15$。1 の位の決め方はそれぞれ 4, 2, 2 通りであったから、N が 6 の倍数になる取り方は $4n_1+2n_2+2n_0$ 通りである。$R=1$ となる 3 枚の組み合わせは、(1, 1, 2), (2, 2, 3), (1, 3, 3)。これの並べ替えが N の上 3 桁になる。場合の数は、

$$n_1=3(6\times5\times6)+3(6\times5\times6)+3(6\times5\times4)=6\times5\times3\times15$$

と求まる。
N が 6 の倍数となる取り出し方は、

$$\begin{aligned}4n_1+2n_2+2n_0 &= 2(n_1+n_2+n_0)+2n_1\\ &=2(17\times16\times15)+2(6\times5\times3\times15)=60\times181\end{aligned}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{60\times181}{{}_{18}\mathrm{P}_4}=\frac{181}{1224}$$

[*58] 最終的に確率を考えるのであるから、計 17 枚のカードは全て区別できるものと考える

Q.225 (1) ★7, (2) ★11 年賀状問題 2019

> a,b,c,d は整数とする。以下の問に答えよ。
> (1) $ac-5bd=2019$, $ad+bc=0$, $a\geq0$ を満たす (a,b,c,d) の組を全て求めよ。
> (2) $ac+5bd=2019$, $ad+bc=0$ を満たす (a,b,c,d) の組を全て求めよ。

(1)

与式は

$$(a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})=2019$$

が成り立つことに同値である。さらに, 次の式とも同値である。

$$(a-b\sqrt{-5})(c-d\sqrt{-5})=2019$$

この 2 式を辺々かけあわせれば

$$(a^2+5b^2)(c^2+5d^2)=2019^2=3^2\times673^2$$

となる。ここから左辺の因数は 2019^2 の約数になることが必要条件である。この約数の候補をさらに限定するために次の補題を用意する。

> **補題 225.1**
> $m=X^2+5Y^2$ $(X,Y\in\mathbb{Z})$ とあらわされる整数 m に対して, 次が成立する。
>
> (i) $m\geqq0$
> (ii) $m\equiv0,1,2 \pmod 4$
> (iii) $m\equiv0,1,4 \pmod 5$
> (iv) m が 673 で割れるならば、673^2 でも割れる。

(i) は自明。(ii), (iii) は平方剰余を列挙すればやさしい。(iv) を証明する。
X が 673 で割れないと仮定する。このとき,Y も 673 で割れないので,

$$1=\left(\frac{X^2}{673}\right)=\left(\frac{-5Y^2}{673}\right)=\left(\frac{-5}{673}\right)$$

となる。しかし, 相互法則と第一補充則により

$$\left(\frac{-5}{673}\right)=(-1)^{336}\left(\frac{5}{673}\right)=(-1)^{2\cdot336}\left(\frac{673}{5}\right)=-1$$

より矛盾する。($\because p\equiv2,3$)
よって, X は 673 で割り切れ, Y も 673 で割り切れるので X^2-5Y^2 は 673^2 で割り切れる。 □
この補題 225.1 により, $a^2+5b^2=1,3^2,673^2,2019^2$ にまで絞られる。
$c+d\sqrt{5}=\dfrac{2019a}{a^2+5b^2}+\dfrac{2019b}{a^2+5b^2}\sqrt{5}$ より, a,b を右辺に代入して係数を比較すれば (c,d) が求まることに注意する。$a\geqq0$ より $c\geqq0$ であるとわかる。
$a^2+5b^2=1$ のとき, $a\geqq0$ より $(a,b)=(1,0)$ のみ。$(c,d)=(2019,0)$ を得る。
$a^2+5b^2=9$ のとき, $(a,b)=(2,\pm1),(3,0)$ で, 前者は $c=\dfrac{1346}{3}$ で整数にならないので不適。後者のとき, $(c,d)=(673,0)$
$a^2+5b^2=673^2,2019^2$ のときは $c^2+5d^2=9,1$ であって, $c\geqq0$ が分かっているから上の 2 つの場合と同様になる。つまり, $(a,b,c,d)=(673,0,3,0),(2019,0,1,0)$
以上より, 求めるすべての組は, $(a,b,c,d)=$

$$\mathbf{(3,0,673,0),(673,0,3,0),(1,0,2019,0),(2019,0,1,0)}$$

(2)

$\sqrt{5}$ が無理数であることから, 与式は

$$(a+b\sqrt{5})(c+d\sqrt{5})=2019$$

が成り立つことに同値である。さらに, 次の式とも同値である。

$$(a-b\sqrt{5})(c-d\sqrt{5})=2019$$

この 2 式を辺々かけあわせれば

$$(a^2-5b^2)(c^2-5d^2)=2019^2=3^2\times 673^2$$

となる。ここから左辺の因数は 2019^2 の約数になることが必要条件である。この約数の候補をさらに限定するために次の補題を用意する。（補題 225.1 の (iv) とほぼ同様である。）

> **補題 225.2.1**
> X^2-5Y^2 が素数 p で割り切れる（$p\equiv 2,3 \pmod 5$）とき, X,Y はともに p で割り切れ, X^2-5Y^2 は p^2 で割り切れる。特に, $p=3,673$ で主張が成り立つ。

証明.
X が p で割れないと仮定する。このとき,Y も p で割れず, Ledgendre 記号により

$$1=\left(\frac{X^2}{p}\right)=\left(\frac{5Y^2}{p}\right)=\left(\frac{5}{p}\right)$$

となる。しかし, 相互法則により $\left(\dfrac{5}{p}\right)=(-1)^{2\cdot 336}\left(\dfrac{p}{5}\right)=-1$ より矛盾する。($\because p\equiv 2,3$)
よって, X は p で割り切れ, Y も p で割り切れるので X^2-5Y^2 は p^2 で割り切れる。□
補題 225.2.1 により, $a^2-5b^2=\pm1,\pm9,\pm673^2,\pm2019^2$ であることが必要になる。$a^2-5b^2=\pm m^2$ $(m=1,9,673,2019)$ としたとき, 補題 2.1 から a,b はともに m の倍数であることが言えるため, $a=ma'$, $b=mb'$ として $a'^2-5b'^2=\pm1$ となるので, 特に $a^2-5b^2=\pm1$ の場合について考えることを目標にする。次の補題 225.2.2 を示す。

> **補題 225.2.2**
> $S=\{X+Y\sqrt{5}\in\mathbb{Z}[\sqrt{5}]|X^2-5Y^2=\pm1,\quad X+\sqrt{5}Y>0\}$ とする。
> (i) $(2+\sqrt{5})^n=x_n+y_n\sqrt{5}$ とおくと, $(x_n,y_n)\in S$.
> (ii) n が奇数 $\Leftrightarrow x_n^2-5y_n^2=-1$.
> (iii) 任意の整数 n と任意の S の元 s に対して, $s\times(2+\sqrt{5})^n\in S$
> (iv) 任意の S の元は, ある $n\in\mathbb{Z}$ によって上の $x_n+y_n\sqrt{5}$ の形になる。

証明. (i) $f:\mathbb{Z}[\sqrt{5}]\to\mathbb{Z}$ を $f(x+y\sqrt{5})=x^2-5y^2$ で定義すると,$x,y,z,w\in\mathbb{Z}$ に対して次が成立することが容易な計算によりわかる。

$$f(x+y\sqrt{5})f(z+w\sqrt{5})=f((xz+5yw)+(xw+yz)\sqrt{5})$$

これを用いて,

$$f(x_n+y_n\sqrt{5})=x_n^2-5y_n^2=f(2+\sqrt{5})^n=(-1)^n$$

である。また, $x_n+y_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^n>0$ である。以上から $(x_n,y_n)\in S$ である。
$(-1)^n$ の値を見れば (ii) は明らか。

(iii)$s=X+Y\sqrt{5}\in S$ とする。$s>0, 2+\sqrt{5}>0$ より $s(2+\sqrt{5})^n>0$ であり,

$$f(s(2+\sqrt{5})^n)=f(s)f(2+\sqrt{5})^n=1\cdot(-1)^n=(-1)^n$$

より明らか。

(iv) $u=X+Y\sqrt{5}\in S$ かつ $1<u$ とする。このとき, $|u(X-\sqrt{5}Y)|=1$ なので $|X-\sqrt{5}Y|<1$ である。すなわち

$$-1<X-\sqrt{5}Y<1,\qquad 1<X+\sqrt{5}Y$$

なので, これらから $0<X, 0<Y$ を得る。そこで, $1<u\leqq 2+\sqrt{5}$ という条件を考えたとき, 不等式の条件から $u=1+\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$ の可能性があるが, $1+\sqrt{5}\notin S$ である。したがって, $u=2+\sqrt{5}$ は S の 1 より大きい元のうち最小なものである。
いま, $s\in S$ を任意にとるとき, $1<u$ で指数関数 u^n は単調に増加していくことから, $u^n\leqq s<u^{n+1}$ を満たす $n\in\mathbb{Z}$ がただひとつ存在する。したがって

$$1\leqq su^{-n}<u$$

であり, (iii) より $su^{-n}\in S$ かつ, S の 1 以上の元になっているので, u の最小性により $1=su^{-n}$ である。よって $s=u^n=x_n+y_n\sqrt{5}$ □
S のすべての元を -1 倍した集合を T とすると,

$$T=\{X+Y\sqrt{5}\in\mathbb{Z}[\sqrt{5}]|X^2-5Y^2=\pm1, X+Y\sqrt{5}<0\}$$

だから, $S\cup T=:K$ として, $X^2-5Y^2=\pm1$ の解 (X,Y) から対応する $X+Y\sqrt{5}$ 全体の集合は, K に一致する。そして, 補題 225.2.2(iv) から

$$K=\{\epsilon(2+\sqrt{5})^n|n\in\mathbb{Z},\quad \epsilon=1,-1\}$$

となる。$(2+\sqrt{5})^n=x_n+y_n\sqrt{5}$ のとき, $(2-\sqrt{5})^n=x_n-y_n\sqrt{5}$ なので

$$x_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2},\qquad y_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

だから,$X^2-5Y^2=\pm1$ の解は $(\pm x_n,\pm y_n)$ (複号同順, $n\in\mathbb{Z}$)。
補題 225.2.2(ii) より $X^2-5Y^2=1$ の解は $(\pm x_{2n},\pm y_{2n})$ (複号同順, $n\in\mathbb{Z}$) である。
$a^2-5b^2=m^2$ $(m=1,3,673,2019)$ の場合, 上のことから 複号同順で $(a,b)=(\pm mx_{2n},\pm my_{2n})$ である。m,n を固定し, このとき,(c,d) が存在するかを見る。最初の式から

$$m(\pm x_{2n}c\pm 5y_{2n}d)=2019,\qquad \pm x_{2n}d\pm y_{2n}c=0$$

で, c,d の連立方程式とみてとくと

$$(c,d)=(\pm\frac{2019}{m}x_{2n},\mp\frac{2019}{m}y_{2n})$$

となる。$x_{2n}=x_{-2n},\quad y_{2n}=-y_{-2n}$ より,

$$(a,b,c,d)=\left(\pm mx_{2n},\pm my_{2n},\pm\frac{2019}{m}x_{-2n},\pm\frac{2019}{m}y_{-2n}\right)$$

$a^2-5b^2=-m^2$ $(m=1,3,673,2019)$ の場合も, 同様に考えることができて, $x_{2n-1}=-x_{1-2n},\quad y_{2n-1}=y_{1-2n}$ より

$$(a,b,c,d)=\left(\pm mx_{2n-1},\pm my_{2n-1},\mp\frac{2019}{m}x_{1-2n},\mp\frac{2019}{m}y_{1-2n}\right)$$

以上より, 求める組のすべては, $(a,b,c,d)=$

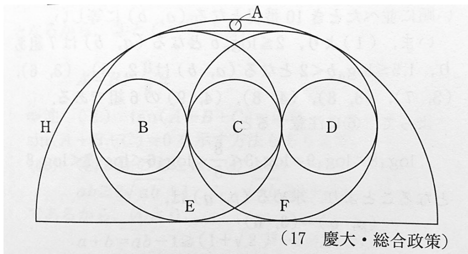
$$\boldsymbol{\left(\pm mx_n,\pm my_n,\pm(-1)^n\frac{2019}{m}x_{-n},\pm(-1)^n\frac{2019}{m}y_{-n}\right)}$$

ただし, 複号同順, $m=1,3,673,2019$, $n\in\mathbb{Z}$

$$x_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n}{2},\qquad y_n=\frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

Q.226 ★2 慶大 総合政策 (2017)

半円 H が 6 つの円 A, ..., F を含む。B, C, D は全て合同で、B と C、C と D は接している。E, F は合同で、E は B と C に、F は C と D に接している。E, F は半円 H の円弧と直径に接している。A の下に接する直線は E, F と接している。A の半径が 1 のとき、B, H の半径を求めよ。



B,C,D の半径を x、E,F の半径を y とする。
E の直径 =B の直径 +C の直径より $y=2x$
H の半径は E の直径 +A の直径なので $2y+2=4x+2$
H の中心を O とし, B,C の交点を K とすると
OK の長さは三平方の定理から $\sqrt{x^2+(2x)^2}\ \sqrt{5}x$
E と H の円弧との接点を L とすると, KL は E の半径 $2x$ に等しい。
よって, OL$=(2+\sqrt{5})x$
これは H の半径にも等しいので OL$=4x+2$
この 2 式から, B の半径は $x=\dfrac{2}{\sqrt{5}-2}=4+2\sqrt{5}$
H の半径は $(2+\sqrt{5})x=18+8\sqrt{5}$

Q.227 ★8 自作, 学コン 2018-9-3

xy 平面上の放物線 G: $y=mx^2+px+q^n$ を考える。G と x 軸は 2 つの交点を持つものとする。各交点における G の 2 本の接線と

x 軸で囲まれる部分の面積を S とするとき、
(1) S を m, n, p, q で表せ。
(2) m を整数、n を自然数、p, q を素数とする。S が自然数となるとき、p および S を求めよ。

$m=0$ では G は直線であるので、以下では $m \neq 0$ とする。

(1)

G は x 軸と 2 つの交点を持つことから、2 次方程式 $mx^2+px+q^n=0$ の判別式を考えて $p^2-4mq^n>0$ であることが必要。この 2 つの実数解を α, β $(\alpha>\beta)$ とおく。解と係数の関係から、

$$m(\alpha+\beta)=-p, \quad m\alpha\beta=q^n$$

が導かれる。
G において、$y'=2mx+p$ より、$x=t$ における接線の方程式は、

$$y=(2mt+p)x-mt^2+q^n$$

である。$t=\alpha, \beta$ での式を連立することで、

$$(2m\alpha+p)x-m\alpha^2+q^n=(2m\beta+p)x-m\beta^2+q^n \Leftrightarrow x=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

より、2 接線の交点の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とわかる。交点の y 座標については、

$$(2m\alpha+p)\frac{\alpha+\beta}{2}-m\alpha^2+q^n=-\frac{m}{2}(\alpha-\beta)^2$$

と求まる。S は、底辺の長さが $\alpha-\beta$、高さが $\dfrac{|m|}{2}(\alpha-\beta)^2$ の三角形の面積であるから、

$$S=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cdot\frac{|m|}{2}(\alpha-\beta)^2=\frac{|m|}{4}(\alpha-\beta)^3$$
$$=\frac{|m|}{4}\left(\frac{\sqrt{p^2-4mq^n}}{|m|}\right)^3=\frac{(p^2-4mq^n)^{\frac{3}{2}}}{4m^2}$$

と求められた。

(2)

S が自然数となるので、$S^2=\dfrac{(p^2-4mq^n)^3}{16m^4}$ も自然数である。この分母は偶数であるから、分子も偶数で無ければならず、p は偶数である。かつ p は素数であるから、$p=2$。
$p^2-4mq^n=4(1-mq^n)>0$ であることが必要であったから、$mq^n \leq 0$ より $m<0$ である。$-m=M$ とおけば M は自然数であり、

$$S^2=\frac{(4+4Mq^n)^3}{16M^4}=\frac{4(1+Mq^n)^3}{M^4}$$

も自然数である。ここで M が偶数であるとすると、$1+Mq^n$ は奇数のため、分子 $4(1+Mq^n)^3$ は 8 の倍数でない。一方で分母 M^4 は 16 の倍数であり、S^2 が自然数でなくなるため不適。よって M は奇数である。さらに、

$$4(1+Mq^n) \text{ が } M \text{ の倍数} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \text{ が } M \text{ の倍数}$$

である。つまり M は 4 の正の約数のうち奇数のものであるから、$M=1$。
$M=1$ を代入して $S^2=4(1+q^n)^3=(2+2q^n)^2(1+q^n)$ となる。S^2 と $(2+2a^n)^2$ がともに平方数なので、$1+q^n$ も平方数である。よっては 2 以上の自然数 k を用いて

$$1+q^n=k^2 \Leftrightarrow q^n=(k-1)(k+1)$$

とかける。q は素数であるから、q^n の約数は $1, q, q^2, \ldots, q^n-1, q^n$ である。
$k \geq 3$ のとき、$k \pm 1$ は 1 より大きい q^n の約数であるから、$k \pm 1$ の双方が q の倍数である。したがって $(k+1)-(k-1)=2$ も q の倍数なので、$q=2$ である。$2^n=(k-1)(k+1)$ において、k は 3 以上の奇数であり、$k-1$ と $k+1$ は隣り合う偶数ゆえ、どちらか一方は 4 の倍数ではない。かつ 1 より大きい 2^n の約数であるから、$k-1=2$, $k+1=4$ のみが適するから、このとき $k=3$, $n=3$ である。
$k=2$ のとき、$q^n=3$ より、$q=3$, $n=1$ である。
以上より、$(p,q,m,n)=(2,2,-1,3),(2,3,-1,1)$ が題意を満たす組で、このとき S は

$$S=\frac{(p^2-4mq^n)^{\frac{3}{2}}}{4m^2}=54, 16$$

Q.228

$f(x)=x^2+x+1$ とする。また、i を虚数単位として $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする。
(1) $\left|f\left(\sqrt[3]{2}\omega\right)\right|<1$ であることを示せ。
(2) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)^{2019}$ に最も近い整数を 8 で割った余りを求めよ。

(1)

$f(x)$ が実数係数であるから, $f(\sqrt[3]{2}\omega)$ の共役複素数は

$$f(\sqrt[3]{2}\omega^2)=\sqrt[3]{4}\omega^4+\sqrt[3]{2}\omega+1$$

なので, $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ と $\omega^3=1$ により

$$\left|f\left(\sqrt[3]{2}\omega\right)\right|^2=\frac{(\sqrt[3]{2}\omega)^3-1}{\sqrt[3]{2}\omega-1}\cdot\frac{(\sqrt[3]{2}\omega^2)^3-1}{\sqrt[3]{2}\omega^2-1}$$
$$=\frac{1\cdot 1}{\sqrt[3]{4}-(\omega+\omega^2)\sqrt[3]{2}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$
$$<\frac{1}{1+1+1}=\frac{1}{3}<1$$

により $|f(\sqrt[3]{2})|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}<1$ で成立する。 □

(2)

$f(x)^{2019}=P(x)$ とおく。$P(\sqrt[3]{2})$ は, 実は「ほぼ整数」である。そして, この数に最も近い整数は

$$P(\sqrt[3]{2})+P(\sqrt[3]{2}\omega)+P(\sqrt[3]{2}\omega^2)$$

で与えられる。そのことを今から示そう。
$P(x)$ を展開すると, 正の整数 $a_0, a_1, \cdots a_{4038}$ を用いて

$$P(x)=\sum_{k=0}^{4038}a_kx^k$$

と表される。このとき,

$$P(x)+P(\omega x)+P(\omega^2x)=\sum_{k=0}^{4038}a_kx^k(1+\omega^k+\omega^{2k})$$

となる。$1+\omega^k+\omega^{2k}$ は k が 3 で割り切れるときは 3 に, それ以外の場合には 0 となることがわかる。つまり上の多項式は x^{3k} の項しか登場せず

$$P(x)+P(\omega x)+P(\omega^2x)=\sum_{m=0}^{1346}3a_{3m}x^{3m}$$

となる。$x=\sqrt[3]{2}$ を代入すると

$$P(\sqrt[3]{2})+P(\sqrt[3]{2}\omega)+P(\sqrt[3]{2}\omega^2)=\sum_{m=0}^{1346}3a_{3m}\cdot 2^m$$

となり, 右辺で根号が消滅し, これが整数になることがわかる。この整数を N とおくと

$$P(\sqrt[3]{2})=N-(P(\sqrt[3]{2}\omega)+P(\sqrt[3]{2}\omega^2))$$

とかけるが, $P(x)$ もまた実数係数多項式なので $P(\sqrt[3]{2}\omega)$ の共役複素数が $P(\sqrt[3]{2}\omega^2)$ である。よって

$$P(\sqrt[3]{2})=N-2\mathrm{Re}(P(\sqrt[3]{2}\omega))$$

である。$|Re| \leqq \sqrt{(Re)^2+(Im)^2}$ と, (1) より

$$|\mathrm{Re}(P(\sqrt[3]{2}\omega))| \leqq |P(\sqrt[3]{2}\omega)|<\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2019}<0.25$$

だから,

$$N-0.5<N-2\mathrm{Re}(P(\sqrt[3]{2}))<N+0.5$$

となり, $P(\sqrt[3]{2})$ に最も近い整数が N であることを意味する。
つまりこの N を 8 で割ったあまりを考察すればよい。

$$N=3a_0+6a_3+12a_6+24a_9+\cdots$$

であったから, $\displaystyle\sum_{m=0}^{1346} 3a_{3m}\cdot 2^m$ の $m \geqq 3$ 以降の項は 8 を法として 0 になることが分かる。つまり

$$N \equiv 3a_0 + 6a_3 + 12a_6 \quad (mod 8)$$

なので a_0, a_3, a_6 が求まればよい。
$3a_0 = 3P(0) = 3$ である。
a_3 は, $(1+x+x^2)^{2019}$ の 3 次の係数だから, $1^{2017}(x)^1(x^2)^1$ $1^{2016}(x)^3(x^2)^0$ の組み合わせで多項定理により係数を求めると

$$a_3 = \frac{2019!}{2017!1!1!} + \frac{2019!}{2016!3!0!}$$

となるから,

$$6a_3 \equiv 6\cdot 2018\cdot 2019 + 2017\cdot 2018\cdot 2019 \equiv 4+6 \equiv 2$$

続いて a_6 を計算する。

$$1^{2013}(x)^6(x^2)^0, 1^{2014}(x)^4(x^2)^1, 1^{2015}(x)^2(x^2)^2, 1^{2016}(x)^0(x^2)^3$$

のパターンを調べれば

$$a_6 = \frac{2019!}{2013!6!0!} + \frac{2019!}{2014!4!1!} + \frac{2019!}{2015!2!2!} + \frac{2019!}{2016!0!3!}$$

となる。先頭 3 つについては, 分母にある $6!0!, 4!1!, 2!2!$ が高々 2 で 4 回しか割れず, 2016 が 2 で 6 回割れることを考慮すれば偶数になることが分かる。つまり, 先頭 3 つは 12 倍して 8 で割れる数になるから

$$12a_6 \equiv 0+0+0+12\cdot\frac{2017\cdot 2018\cdot 2019}{6} \equiv 4\cdot(\text{奇数}) \equiv 4 \quad (mod 8)$$

と分かる。以上より

$$N \equiv 3a_0 + 6a_3 + 12a_6 \equiv 3+2+4 \equiv 1$$

だから答えは 1 である。

Q.229 ★7 学コン 2019-6-5

n を正の整数、e を自然対数の底とする。

(1) 関数 $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ とするとき、$x > 0$ において、$0 < e^x - f_n(x) < \dfrac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$ であることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \cos\frac{2\pi en!}{3} = -\frac{1}{2}$ を示せ。

(1)

$g_n(x) = 1 - e^{-x}f_n(x)$ とする。

$$g_n'(x) = -e^{-x}\left(f_n'(x) - f_n(x)\right) = \frac{e^{-x}x^n}{n!} > 0$$

より $g_n(x)$ は増加するから、$g_n(x) > g_n(0) = 0$ となる。$e^x > 0$ をかけることで $e^x - f_n(x) > 0$ を得る。

$h_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} - g_n(x)$ とする。

$$h_n'(x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{e^{-x}x^n}{n!} = \frac{x^n}{n!}(1 - e^{-x}) > 0$$

より $h_n(x)$ は増加するから、$h_n(x) > h_n(0) = 0$ となる。e^x をかけることで

$$0 < e^x h_n(x) \quad \Leftrightarrow \quad e^x - f_n(x) < \frac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}$$

を得る。以上より題意は示された。

(2)

(1) のから $x = 1$ とし $n!$ をかけると、

$$0 < en! - \left(n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!} + 1\right) < \frac{e}{n+1}$$

となる。ここで、

$$m_n = n! + \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} + \cdots + \frac{n!}{(n-1)!} + 1$$

とおく。m_n は整数である。さらに $n \geq 3$ のとき ($n \to \infty$ を考えるので 3 以上としてよい)、

$$m_n = 1 + {}_n\mathrm{P}_1 + {}_n\mathrm{P}_2 + \sum_{k=3}^{n} {}_n\mathrm{P}_k$$

$$= (n^2+1) + \sum_{k=3}^{n} k!\,{}_n\mathrm{C}_k$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{m_n}{3} = \frac{n^2+1}{3} + \sum_{k=3}^{n} \frac{k!}{3}{}_n\mathrm{C}_k$$

であり、$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{k!}{3}{}_n\mathrm{C}_k$ は整数である。これを S_n とおく。したがって以下を得る。

$$\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi < \frac{2\pi en!}{3} - 2S_n\pi < \frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}$$

次に $\cos\left(\dfrac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi\right)$ の値について考える。$n \equiv 1, 2 \pmod 3$ のとき、$n^2+1 \equiv 2$ であるため、$n^2+1 = 3N+2$ となる整数 N が存在し、

$$\cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi\right) = \cos\left(2N\pi + \frac{4}{3}\pi\right) = \cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

である。また $n \equiv 0 \pmod 3$ のとき、$n^2+1 = 3N+1$ となる整数 N が存在し、

$$\cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi\right) = \cos\left(2N\pi + \frac{2}{3}\pi\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

である。つまり任意の整数 n に対して $\cos\left(\dfrac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi\right) = -\dfrac{1}{2}$ である $(\cdots\ *)$。
さてこれらのことは、

$$\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi \equiv \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi \pmod{2\pi}$$

を意味しているから、n を $0 < \dfrac{2e\pi}{3(n+1)} < \dfrac{\pi}{3}$ を満たすように大きくとれば、$\dfrac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi < x < \dfrac{n^2+1}{3} + \dfrac{2e\pi}{3(n+1)}$ の範囲で $\cos x$ は単調に増加または減少する。したがって、

$$\cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi\right),\ \cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right)$$

のうち、小さいほうを L_n、大きいほうを H_n とおけば、

$$L_n \leq \cos\left(\frac{2\pi en!}{3} - 2S_n\pi\right) = \cos\frac{2\pi en!}{3} \leq H_n \quad \cdots(\#)$$

である。ただし中央の等号において S_n が整数であることを用いた。
L_n, H_n が $-\dfrac{1}{2}$ に近づくことを論じる。
$n \equiv 1, 2 \pmod 3$ のとき、

$$\cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right)$$

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき、

$$\cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right)$$

であり、$0 < \dfrac{2e\pi}{3(n+1)} = \dfrac{\pi}{3}$ を満たすようにとっているので、

$$\frac{2}{3}\pi - \frac{2e\pi}{3(n+1)} \leq x \leq \frac{2}{3}\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}$$

の範囲で $\cos x$ は単調減少する。したがって

$$\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) \leq \cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) \leq \cos\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right)$$

となり、この式から挟み撃ちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{n^2+1}{3}\cdot 2\pi + \frac{2e\pi}{3(n+1)}\right) = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$

である。よって (*) とあわせれば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} H_n = -\frac{1}{2}$ となる

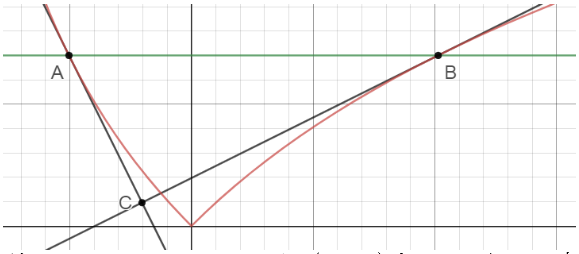
から、式 (#) においてはさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2\pi en!}{3}=-\frac{1}{2}$$

Q.230 ★6 京レ (2019)

> t を正の実数とし、直線 $\mathrm{L}: y=t$ と、曲線 $\mathrm{K}: y=|\log(1+x)|$ $(x>-1)$ の 2 交点を A, B とする。A, B における K の接線の交点を C とし、△ABC の外接円 E の面積を $S(t)$ とする。$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{t^2}$ を求めよ。

2 交点のうち、x 座標が負のものを A、正のものを B とする。



曲線 K は、$-1<x\leq 0$ で $y=-\log(1+x)$ なので、A の x 座標は

$$-\log(1+x)=t \quad\Leftrightarrow\quad x=e^{-t}-1$$

$y'=-\dfrac{1}{1+x}$ より、点 A での接線は、

$$y=-e^t x+1+t-e^t$$

一方、曲線 K は $x\geq 0$ で $y=\log(1+x)$ なので、B の x 座標は

$$\log(1+x)=t \quad\Leftrightarrow\quad x=e^t-1$$

$y'=\dfrac{1}{1+x}$ より、点 B での接線は、

$$y=e^{-t}x-1+t+e^{-t}$$

これら 2 本の接線は直交するから、△ABC は ∠C が直角な直角三角形となる。したがって、△ABC の外心は AB の中点にある。よって外接円の半径 R は

$$R=\frac{(e^t-1)-(e^{-t}-1)}{2}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

と求まる。$S(t)=\pi R^2$ であることから、$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{R}{t}$ を考えると、

$$\lim_{t\to+0}\frac{R}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{e^t-e^{-t}}{2t}$$

この極限を求めるために、次の関数を考える。

$$f(x)=e^x-e^{-x}-2x\,,\ g(x)=2xe^x-(e^x-e^{-x})$$

これらについて、微分すると

$$f'(x)=2e^x-2\,,\ g'(x)=2xe^x$$

であるから、任意の $x\geq 0$ において $f'(x)\geq 0,\ g'(x)\geq 0$ が成り立ち、$f(x),\ g(x)$ は単調増加である。さらに $f(0)=g(0)=0$ より、任意の $x\geq 0$ において $f(x)\geq 0,\ g(x)\geq 0$ が成り立つ。したがって、

$$2x\leq e^x-e^{-x}\leq 2xe^x \quad\Leftrightarrow\quad 1\leq\frac{e^x-e^{-x}}{2x}\leq e^x$$

これについて $x\to+0$ の極限を考えれば、$\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{R}{t}=1$ が示される。

よって求める極限は、

$$\lim_{t\to+0}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to+0}\pi\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2t}\right)^2=\pi$$

Q.231 ★6 IMO shortlist (2013)

> 正の整数 n であって、つぎの条件を満たすものが無限に存在することを証明せよ。
> 条件: n^4+n^2+1 の最大の素因数と $(n+1)^4+(n+1)^2+1$ の最大の素因数が等しい

$f(n)=n^2+n+1$ とおく。このとき $f(n^2)=n^4+n^2+1$ であって、因数分解すると

$$f(n^2)=f(n)f(n-1)\quad\cdots(\#)$$

であることがわかる。そこで $f(n)$ の最大の素因数を p_n とする。(便宜上 $p_0=1$ とする。) $p_{n^2}=p_{(n+1)^2}$ となる n が無限に存在することを示せばよい。式 (#) から、$p_{n^2}=\max\{p_n\,,\ p_{n-1}\}$ が全ての正の整数 n で成り立つことに注意すると次のことがわかる。

いかなる自然数 M を与えても、$i>j>M$ を満たす自然数 i,j であって $p_i=p_j$ を満たすものが存在する。$\cdots$ (∗)

$p_{n^2}=p_{(n+1)^2}$ を満たす n が有限個だと仮定する。そのような n の最大値を N_0 とおく。$m>N_0$ を満たす任意の自然数 m について、$p_{m^2}>p_{(m+1)^2}$ または $p_{m^2}<p_{(m+1)^2}$ が満たされる。

素数の真の無限減少数列を作ることはできないから、ある $m_0>N_0$ が存在して $p_{m_0^2}<p_{(m_0+1)^2}$ となる。

$$p_{m_0}\leq\max\{p_{m_0}\,,\ p_{m_0-1}\}<\max\{p_{m_0+1}\,,\ p_{m_0}\}$$

であるから、右辺は p_{m_0} に等しくなってはならないので、$\max\{p_{m_0+1}\,,\ p_{m_0}\}=p_{m_0+1}$ がわかる。すると $p_{m_0}<p_{m_0+1}$ となる。

さて $p_{(m_0+1)^2}=\max\{p_{m_0+1}\,,\ p_{m_0}\}=p_{m_0+1}$ であったから、$p_{m_0+1}>\max\{p_{m_0+2}\,,\ p_{m_0+1}\}$ は成り立たない。したがって $p_{(m_0+1)^2}<p_{(m_0+2)^2}$ となり、ここから同様な議論により $p_{m_0+1}<p_{m_0+2}$ がわかる。

帰納的に、$m_0\leq n$ を満たす任意の n に対して $p_n<p_{n+1}$ でなければならないことがわかる。これは (∗) で $K=m_0$ とした内容に矛盾する。

よって、$p_{n^2}=p_{(n+1)^2}$ を満たす n が無限に存在する。

Q.232　滋賀医科大 (2016)

> 分母が奇数、分子が整数の分数で表される有理数を「控えめな有理数」と呼ぶことにする。1 個以上の控えめな有理数 $a_1,\ldots,a_n$ に対して、集合 $S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ を
>
> $$S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\,\middle|\,\text{各 } x_i \text{ は控えめな有理数}\right\}$$
>
> と定める。例えば、$1\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{2}{3}\cdot 2=1$ であるから、$1\in S\langle-\dfrac{1}{3},2\rangle$ である。
>
> (1) 控えめな有理数 $a_1,\ldots,a_n$ が定める集合 $S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ の要素は控えめな有理数であることを示せ。
>
> (2) 0 でない控えめな有理数 a が与えられたとき、$S\langle a\rangle=S\langle 2^t\rangle$ となる 0 以上の整数 t が存在することを示せ。
>
> (3) 控えめな有理数 $a_1,\ldots,a_n$ が与えられたとき、$S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=S\langle b\rangle$ となる控えめな有理数 b が存在することを示せ。
>
> (4) 2016 が属する集合 $S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ はいくつあるか。ただし、$a_1,\ldots,a_n$ は控えめな有理数であるとし、$a_1,\ldots,a_n$ と $b_1,\ldots,b_n$ が異なっていても、$S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle=S\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ であれば、$S\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ と $S\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ は 1 つの集合として数える。

ここに解答を記述。

Q.233 ★2 阪大 (2020)

> 三角形 ABC において、辺 AB の長さを c、辺 CA の長さを b で表す。
>
> (1) $\angle\mathrm{ACB}=3\angle\mathrm{ABC}$ であるとき、$c<3b$ を示せ。
>
> (2) n を 2 以上の自然数とする。$\angle\mathrm{ACB}=n\mathrm{ABC}$ であるとき、$c<nb$ を示せ。
>
> (1): 文系、(2): 理系

(註) ここでは理系の読者を想定し、(2) のみ記す。

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ とする。正弦定理から、

$$\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin n\theta}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{c}{b}$$

である。角度について $0<\theta<\pi,\ 0<n\theta<\pi,\ 0<\pi-(n+1)\theta<\pi$ が成り立つので、$0<\theta<\dfrac{\pi}{n+1}$ で考える。このもとで $\dfrac{\sin n\theta}{\sin\theta}<n$ を示せばよい。$\sin\theta>0$ に注意して、$f(\theta)=n\sin\theta-\sin n\theta>0$ を示してもよいのでそのようにする。

$$f'(\theta)=n\cos\theta-n\cos n\theta$$

$$= n(\cos\theta - \cos n\theta)$$
$$= 2n\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta$$

であって、$0 < \dfrac{n-1}{2}\theta < \dfrac{n+1}{2}\theta < \pi$ よりこれは正である。従って $f(\theta)$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{n+1}$ で単調増加する関数であって、

$$f(\theta) > \lim_{t\to+0} f(t) = 0$$

が示された。以上より、$c < nb$。

Q.234 ★6 ◎ 東京大理系 (2020)

> a, b, c, p を実数とする。不等式、
> $$ax^2 + bx + c > 0$$
> $$bx^2 + cx + a > 0$$
> $$cx^2 + ax + b > 0$$
> を全て満たす実数 x の集合と、$x > p$ を満たす実数の集合が一致しているとする。次を示せ。
> (1) $a, b, c \geq 0$
> (2) a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 である。
> (3) $p = 0$

(1)

$a = k_1 = k_4,\ b = k_2 = k_5,\ c = k_3$ と再び名付ける。a, b, c が全て負なら、$i = 1, 2, 3$ について

$$k_1x^2 + k_{i+1}x + k_{i+2} > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{k_{i+1}}{k_i}x + \frac{k_{i+2}}{k_i} < 0 \quad \cdots(*)$$

となる。$i = 1, 2, 3$ について $k_ix^2 + k_{i+1}x + k_{i+2} > 0$ が $x > p$ で全て満たされるが、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(x^2 + \frac{k_{i+1}}{k_i}x + \frac{k_{i+2}}{k_i}\right) = \infty$ なので、十分大きい $x_0 > p$ において $(*)$ が成り立たず矛盾する。よって $a, b, c \geq 0$。

(2)

a, b, c が全て正だと仮定する。このとき $i = 1, 2, 3$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(k_ix^2 + k_{i+1}x + k_{i+2}) = \infty$ である。よって、十分 $|x|$ の大きい負の数からは、$k_ix^2 + k_{i+1}x + k_{i+2} > 0$ は全て成り立つ。しかしこれは $x > p$ を満たす実数の集合とは一致せず不適。よってある a, b, c のうち少なくとも 1 つは 0 であることが従う。

(3)

まず、$a = b = c = 0$ では 3 つの不等式を満たす x は存在せず不適。
(ア): a, b, c のうち 2 つが 0 であるとする。$a = b = 0$ として、3 つの不等式は $c > 0,\ cx > 0,\ cx^2 > 0$ となるからこれをすべて満たすのは $x > 0$ となるから $p = 0$ である。
(イ): a, b, c のうちただ 1 つが 0 であるとする。$a = 0$ として 3 つの不等式は $bx + c > 0,\ bx^2 + cx > 0,\ cx^2 + b > 0$ となる。第一式は $x > -\dfrac{c}{b}$、第二式は $x < -\dfrac{c}{b},\ x > 0$、第三式は全ての実数 x を、それぞれ解に持つ。これらすべてを満たす x は $x > 0$ であるから、$p = 0$ である。
以上より、$p = 0$。

Q.235 ★7 京都府立医科大 (2020)

> n は自然数とする。変量 x についての $2n$ 個のデータの値を x_i $(1 \leq i \leq 2n)$ とし、変量 y についての $2n$ 個のデータの値を y_i $(1 \leq i \leq 2n)$ とする。k は $1 \leq k \leq 2n-1$ を満たす整数とする。変量 x と y の $2n$ 個の組を、
> $$(x_i, y_i) = \begin{cases} (i, i+2n-k) & (1 \leq i \leq k) \\ (i, i-k) & (k+1 \leq i \leq 2n) \end{cases}$$
> で与える。x と y の共分散を s_{xy} とし、相関係数を r とする。
> (1) s_{xy} を k と n を用いて表せ。
> (2) $r = 0$ となる k は存在しないことを証明せよ。
> (3) 自然数 n に対して r を最小にする k を取り、そのときの r を r_n と表す。$\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n$ を求めよ。

(1)

$\{x_i\}$ の平均 $\overline{x}$ は、

$$\overline{x} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} x_i = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i = \frac{1}{2n}\cdot\frac{2n(2n+1)}{2} = n + \frac{1}{2}$$

である。$\{y_i\}_{i=1}^{2n}$ は $\{1, \ldots, 2n\}$ の置換であることに注意すると、この平均について $\overline{y} = n + \dfrac{1}{2}$ である。よって s_{xy} は、

$$\begin{aligned}
s_{xy} &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_iy_i) - \frac{1}{2n}\left(n + \frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{2n}(x_i + y_i) + \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}(x_iy_i) - \left(n + \frac{1}{2}\right)(\overline{x} + \overline{y}) + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{k} i(i+2n-k) + \sum_{i=k+1}^{2n} i(i-k)\right] - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n} i(i-k) + 2n\sum_{i=1}^{k} i\right] - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2n}\left[\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - k\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}\right] + \frac{k(k+1)}{2} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(2n+1)(4n+1)}{6} + k\left(\frac{k+1}{2} - \frac{2n+1}{2}\right) - \frac{(2n+1)(3n+\frac{3}{2})}{6} \\
&= \frac{4n^2-1}{12} + \frac{1}{2}k(k-2n)
\end{aligned}$$

(2)

x, y の分散をそれぞれ s_x, s_y として、$r = \dfrac{s_{xy}}{\sqrt{s_xs_y}}$ である[*59]。よって $1 \leq k \leq 2n$ に対して $s_{xy} \neq 0$ を言えばよい。(1) の結果から、このような k が存在したとすると

$$s_{xy} = \frac{4n^2-1}{12} + \frac{1}{2}k(k-2n) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 3k^2 - 6nk + \frac{1}{2}(4n^2-1) = 0$$
$$\therefore \quad k = n \pm \frac{1}{6}\sqrt{12n^2+6}$$

であるが、

$$6k - 6n = \pm\sqrt{12n^2+6}\,(\in \mathbb{Z})$$
$$\Rightarrow \quad (6k-6n)^2 = 12n^2 + 6$$
$$\Rightarrow \quad 0 \equiv 2 \pmod 4$$

となって矛盾。よって $r \neq 0$。

(3)

まず、k が動いても $\{x_i\}, \{y_i\}$ は常に $\{1, \ldots, 2n\}$ の置換であるから $s_x,\ s_y$ は不変であり、その値は $z_i = i$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ とい

*59 編者註: 相関係数の分母は標準偏差を用いる旨改訂

う変量 z の分散に等しい。よって

$$\begin{aligned} s_x = s_y &= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i^2 - \left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} i\right)^2 \\ &= \frac{1}{2n}\cdot\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \left(\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n(2n+1)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{12} \end{aligned}$$

一方、$s_{xy} = \dfrac{4n^2-1}{12} + \dfrac{(k-n)^2}{2} - \dfrac{n^2}{2}$ より、これは $k=n$ で最小となる。このとき $s_{xy} = -\frac{2n^2+1}{12}$ となる。以上より、

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{-\frac{2n^2+1}{12}}{\frac{1}{3}n^2 - \frac{1}{12}} = -\frac{1}{2}$$

Q.236 ★4 自作: 3rd 文

n を自然数、p を素数とする。次を満たす組 (n,p) を全て決定せよ。

$$\frac{1+2+3+\cdots+2n}{2+4+6+\cdots+2p} = p$$

(解答:2021/11/28)
与式を変形し $n(2n+1) = p^2(p+1)$ を n, p が満たしたとする．左辺は p の倍数で, n と $2n+1$ は互いに素なので, n と $2n+1$ のどちらかは p^2 で割れる．n が p^2 の倍数なら $n \geqq p^2$ で, $2n+1$ が p^2 の倍数なら $n \geqq (p^2-1)/2$ なので, いずれにしても $n \geqq (p^2-1)/2$ が言える．このとき $2n+1 \geqq p^2$ だから

$$p^2(p+1) = n(2n+1) \geqq \frac{p^2-1}{2}\cdot p^2 \iff p+1 \geqq \frac{p^2-1}{2}$$

を得る．これは $0 \geqq p^2-2p-3 = (p-3)(p+1)$ であるから $p=2,3$ の必要がある．$p=2$ なら $n(2n+1)=12$ だが解はない．$p=3$ なら $n=4$ のみが満たすと分かる．よって $(n,p)=(4,3)$.

Q.237 ★5 京都府立医科大 (2020)

実数全体で定義された関数 $f(x)$ は微分可能で $f(0)=0$ を満たし、その導関数 $f'(x)$ は連続かつ単調に減少しているとする。

(1) n を自然数とし、k は $1 \leq k \leq n$ を満たす整数とする。$\dfrac{k-1}{n} \leq x \leq \dfrac{k}{n}$ のとき、以下の不等式 (a), (b) が成り立つことを証明せよ。

(a) $f\left(\dfrac{k}{n}\right) + f'\left(\dfrac{k-1}{n}\right)\left(x - \dfrac{k}{n}\right) \leq f(x)$

(b) $f(x) \leq f\left(\dfrac{k}{n}\right) + f'\left(\dfrac{k}{n}\right)\left(x - \dfrac{k}{n}\right)$

(2) $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ $(n=1,2,\dots)$ とおく。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = -\frac{1}{2}f(1)$ であることを証明せよ。

(1)

(a): $x < \dfrac{k}{n}$ なら、平均値の定理よりある $x < c < \dfrac{k}{n}$ が存在して、

$$f'(c)\left(x - \frac{k}{n}\right) = f(x) - f(\frac{k}{n}) \quad \cdots(*)$$

が成り立つ。ここで $f'(x)$ は単調減少するから、$f'(c) \leq f'(\frac{n-1}{k})$ であり、$x - \dfrac{k}{n} < 0$ であることに注意すると、

$$f(x) - f(\frac{k}{n}) = f'(c)\left(x - \frac{k}{n}\right) \geq f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

より与不等式が示された。また、$x = \dfrac{k}{n}$ なら与不等式は $f\left(\dfrac{k}{n}\right) + 0 \leq f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ となり明らかに成り立つ。

(b): $(*)$ において、$f'(c) \geq f'(\frac{k}{n})$ から (a) と同様にして得られる。

(2)

(1a) の左辺を $A_1^{(n,k)}(x)$、(1b) の右辺を $A_2^{(n,k)}(x)$ とおくと、$\dfrac{k-1}{n} \leq x \leq \dfrac{k}{n}$ において $A_1^{(n,k)}(x) \leq f(x) \leq A_2^{(n,k)}(x)$ である $(k=1,2,\dots,n)$。よって、

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} A_1^{(n,k)}(x)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} A_2^{(n,k)}(x)\,dx \quad \cdots(★)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} A_1^{(n,k)}(x)\,dx &= \left[\frac{1}{2}f'\left(\frac{k-1}{n}\right)\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 + f\left(\frac{k}{n}\right)\cdots\right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} A_2^{(n,k)}(x)\,dx = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

よって (★) より、

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq a_n \leq -\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq na_n \leq -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

これについて $n \to \infty$ の極限を考えると、左辺と右辺はともに区分求積法によって $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx$ となる。$\displaystyle\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$ であり $f(0)=0$ だから、

$$\lim_{n\to\infty} na_n = -\frac{1}{2}f(1)$$

Q.238 ★4

自然数で、十進法表示したとき 0 が現れないものを小さい順に並べてできる数列を $\{a_n\}$ とする。
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}<C$ を満たす定数 C が存在することを示せ。

(注) 理工系の微分積分学。「有界単調増加数列は収束する」ため、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ は収束する。

ここに解答を記述。

Q.239 ★7 自作

△OPQ について、OP と OQ の長さは整数とし、PQ の長さは素数とする。さらに ∠P : ∠Q = 1 : 2 とする。△OPQ としてあり得るものをすべて求めよ。

ここに解答を記述。

Q.240 ★?

定規とコンパスによって後に示す操作 (a), (b) を有限回行うことだけが許されている。座標平面内の 2 点 $(0,0)$, $(1,0)$ を始めに与え、有限回の操作の組み合わせから得られる平面上の点全体を A とする。このとき、$(\cos\frac{2}{17}\pi,0)\in A$ を示せ。また、正 17 角形が有限回の操作 (a), (b) だけで得られることを示せ。

操作 (a)　与えられた 2 点を結ぶ直線を描く

操作 (b)　与えられた点を中心とし、与えられた長さを半径とする円を描く

なお、$\cos\frac{2}{17}\pi$ が次に示す値であることは認めてよい。

$$\frac{1}{16}\left(\sqrt{17}-1+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170+38\sqrt{17}}}\right)$$

まず、次の補題 240.1 を設定する。

補題 240.1

(1) 有理数 a に対し、$(a,0)\in A$

(2) $(a,0),(b,0)\in A$ ならば、$(a\pm b,0)\in A$

(3) $(a,0)\in A$ ならば $(\sqrt{|a|},0)\in A$

(1): 題意より $(0,0),(1,0)\in A$ である。針を原点においてコンパスを使うことで $(a,0)\in A$ なら $(-a,0)\in A$ でもあるから、$a>0$ の場合を考えればよい。自然数 m,n によって $a=\dfrac{m}{n}$ と表す。コンパスによって適当な自然数倍の長さを持った線分を構成することができるので、$(\frac{1}{n},0)\in A$ を示せば $(a,0)\in A$ も従う。さて原点から $(1,1)$ に向かう半直線を考え、原点と $(1,1)$ にコンパスを合わせて繰り返し使うことで点 (n,n) を作図できる。(n,n) と $(1,0)$ を結ぶ直線を l_n とすると、点 $(1,1)$ を通り l_n に平行な直線を定規とコンパスで作図できる。この直線と x 軸との交点が $(\frac{1}{n},0)$ である。よって $(\frac{1}{n},0)\in A$ である。

(2): $a,b>0$ としてよく、コンパスを使えば明らかに作図できる。

(3): $a>0$ としてよい。(1),(2) より、十分大きい n をとれば $a-\dfrac{1}{4n^2}>0$ かつ $(a\pm\frac{1}{4n^2},0)\in A$ である。$a+\dfrac{1}{4n^2}$ を斜辺に、$a-\dfrac{1}{4n^2}$ を高さにもつ直角三角形が作図でき、その残りの辺の長さは $\dfrac{\sqrt{a}}{n}$ であるから、これを n 倍にすることで $\sqrt{a}$ の長さの線分が作図できる。よって $(\sqrt{a},0)\in A$。

この補題を繰り返し用いることで、与えられた $\cos\dfrac{2}{17}\pi$ について $(\cos\dfrac{2}{17}\pi,0)\in A$ であることがわかる。

Q.241 ★?

任意の自然数 N に対して、座標空間内の球であって、その内部に格子点を N 個含むものが存在することを証明せよ。

$\mathrm{P}=(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$ とする[*60]。P と格子点 (l,m,n) との距離は、

$$\sqrt{(l-\sqrt{2})^2+(m-\sqrt{3})^2+(n-\sqrt{5})^2}$$

である。この距離の 2 乗を $f(l,m,n)$ とおく。2 つの格子点 (l_1,m_1,n_1), (l_2,m_2,n_2) に対して $f(l_1,m_1,n_1)=f(l_2,m_2,n_2)$ が成り立っていたとする。このとき、

$$\begin{aligned}&f(l_1,m_1,n_1)-f(l_2,m_2,n_2)=0\\ \Leftrightarrow\quad&(l_1^2+m_1^2+n_1^2-l_2^2-m_2^2-n_2^2)\\ &+2(l_2-l_1)\sqrt{2}+2(m_2-m_1)\sqrt{3}+2(n_2-n_1)\sqrt{5}=0\end{aligned}$$

となる。ここで次の補題を用意する[*61]。

補題 241.1

$\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5}$ は無理数である。a,b,c,d を有理数とし、

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{5}=0$$

が成り立つとする。このとき、$a=b=c=d=0$ である。

この補題によって、

$$\begin{aligned}2(l_2-l_1)=0\,,\ 2(m_2-m_1)=0\,,\ 2(n_2-n_1)=0\\ l_1^2+m_1^2+n_1^2-l_2^2-m_2^2-n_2^2=0\end{aligned}$$

が従うので、$(l_1,m_1,n_1)=(l_2,m_2,n_2)$ である。すなわち

$$f(l_1,m_1,n_1)=f(l_2,m_2,n_2)\ \Rightarrow\ (l_1,m_1,n_1)=(l_2,m_2,n_2)$$

[*60] これが球の中心となるが、これ以外にも様々な取り方がある。後述の補題が成り立つような座標を取るとよい。

[*61] ここでは証明を略すが、さほど難しくない。

だから、対偶を取れば

$$(l_1, m_1, n_1) \neq (l_2, m_2, n_2) \Rightarrow f(l_1, m_1, n_1) \neq f(l_2, m_2, n_2)$$

つまり格子点全体の集合で定義された実数値関数 $f(l, m, n)$ は、異なる二つの格子点に対して異なる値を返すような関数である。よって、座標空間内の格子点全体を f の値が小さい順に $(l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), \ldots$ と並べることができる。
このように並べたとき、$f(l_i, m_i, n_i) < f(l_{i+1}, m_{i+1}, n_{i+1})$ が成り立っている。そこで正の実数 R_N を、

$$f(l_N, m_N, n_N) < R_N^2 < f(l_{N+1}, m_{N+1}, n_{N+1})$$

が成り立つようにとる。このとき、球

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{3})^2 + (z-\sqrt{5})^2 < R_N^2$$

は、その内部に (l_i, m_i, n_i) $(i = 1, 2, \ldots, N)$ という N 個の格子点だけを含む球となっている。

Q.242 ★1

$\sin 1, \sin 2, \sin 3, \sin 4, \pi - 3, \cos 1, \tan 1$ を小さい順に並べよ。
なお、$\pi = 3.14\cdots$ である。

はじめに、$\sin 1, \sin 2, \sin 3, \cos 1$ の大小を決定する。そのためにこれらを全て $\sin x$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ の形で表したい。$\sin 1$ についてはすでによい。その他は

$$\sin 2 = \sin(\pi - 2),\ \sin 3 = \sin(\pi - 3),\ \cos 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

である。$\sin x$ が $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で単調増加であることを踏まえれば、これらの大小を決定するには $1, \pi - 2, \pi - 3, \frac{\pi}{2} - 1$ の大小を見ればよい。$3.14 < \pi = 3.14\cdots < 3.15$ より、

$$\pi - 3 < \frac{\pi}{2} - 1 < 1 < \pi - 2$$

であるから、

$$\sin 3 < \cos 1 < \sin 1 < \sin 2$$

$\pi < 4 < 2\pi$ より、$\sin 4 < 0$ である。これ以外の数は全て正である。
$\tan 1 > \tan\frac{\pi}{4} = 1$ である。これ以外の数は全て 1 未満である。
よって、$\pi - 3$ 以外の数については次のように大小が決まる。

$$\sin 4 < \sin 3 < \cos 1 < \sin 1 < \sin 2 < \tan 1$$

$x > 0$ のとき、$\sin x < x$ であった[*62*63]。これに $x = \pi - 3$ を代入すれば $\sin(\pi - 3) = \sin 3 < \pi - 3$ となる。

[*62] この証明は非常に基本的なので略

[*63] 編集者註: 原文では「$0 \leq x$ のとき $\sin x \leq x$」となっていましたが、等号を含まない方が議論に都合がよいので変更しました。

$3.14 < \pi = 3.14\cdots < 3.15$ と、$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で $\cos x$ が単調減少であることから、

$$\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} > 0.15 > \pi - 3$$

なので、$\pi - 3 < \cos 1$ である。
以上より、

$$\sin 4 < \sin 3 < \pi - 3 < \cos 1 < \sin 1 < \sin 2 < \tan 1$$

Q.243 ★6 APMO 2004

全ての自然数 n に対して $\dfrac{(n-1)!}{n(n+1)}$ は偶数であることを示せ。

ここに解答を記述。

Q.244

次の命題を証明または反証せよ。
(1) $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ が全ての整数 n で $P(n) \in \mathbb{Z}$ ならば、$P(x) \in \mathbb{Z}[x]$
(2) $\mathbb{R} - \{0\}$ で定義された関数 $f(x)$ が $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ を満たすならば、ある定数 C が存在して $f(x) = \log|x| + C$
(3) 有理数上 0 である連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は定数関数 0 である。

(1)

偽である。たとえば $P(x) = \dfrac{x(x-1)}{2}$ とせよ。x が整数のとき, $x(x+1)$ は必ず偶数であるが, 明らかに整数係数多項式ではない。よってこれが反例である。ちなみに, このような整数の上で常に整数値となる多項式 $P(x)$ は**整数値多項式**と呼ばれており, 一般に次のような形で表示できることと同値であることが知られている。

$$P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k p_k(x)$$

ただし, $a_k \in \mathbb{Z}, N \geqq 0, p_k(x) = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$. 先の解答で挙げた $P(x)$ は $p_2(x)$ にあたる。

(2)

偽である！ (本問は中々の引っかけ問題である.[*64] 間違えても気にしなくてよい)

[*64] アンケート機能使ったら偽と答えた方が半分未満だった。

たとえば次のような関数はもれなく $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ を満たすけれども, すべての実数で $f(x)=\log|x|+C$ となるわけではない:

$$f(x)=\begin{cases}\log x+A & (x>0)\\ \log(-x)+B & (x<0)\end{cases}$$

つまり, 積分定数にあたるものを 2 カ所に与えても問題ないということである。

(余談) この現象は高度な話で de Rham Cohomology(ド・ラームコホモロジー) という概念に関連があり, $f(x)$ が $x\neq 0$ でしか定義されてないことに起因する問題である。さて, 上の f を天下りに与えはしたが, 次のように考えれば自然と現れるものであることが理解できる。$g(x):=f(x)-\log|x|$ は $\mathbb{R}-\{0\}$ 上の無限回微分可能な関数で, $g'(x)=0$ を満たしている。結果論的には,

$$g(x)=\begin{cases}A & (x>0)\\ B & (x<0)\end{cases}$$

であるから, このようなものに限ることを示せばいいわけだが, $g'(x)=0$ ということは $g(x)$ は $\mathbb{R}-\{0\}$ の各点 x の十分近くでは定数関数である。しかし $g(x)$ は $\mathbb{R}-\{0\}$ 全体の定数関数にはならない。なぜなら, この $\mathbb{R}-\{0\}$ という領域が, 原点で断絶を起こしているから。より数学的には「$\mathbb{R}-\{0\}$ は二つの連結成分 $\mathbb{R}_{>0}$ と $\mathbb{R}_{<0}$ に分割される」から。一方で原点を埋めた $\mathbb{R}$ 全体で $F'(x)=0$ ならば $F(x)$ は定数であることは紛れもなく真であって, 局所定数関数 g が二つの半直線 $\mathbb{R}_{>0}$ と $\mathbb{R}_{<0}$ の上では定数であることも平均値の定理から容易に分かることである。だから, $g(x)$ は「二つの連結成分 (半直線) に実数 A,B を割り当てるしかない」のだから, このように決まってしまうのである。

ようは「微分方程式は, "何処" で解くかで様子が変わることがある」と言えるのだ。

一般に C^∞ 多様体 M(局所的には $\mathbb{R}^n$ のようななめらかな座標が取れる空間概念) に関する "不変量" として de Rham Cohomology $H^*(M)$ というものが定義される。物としては $\mathbb{R}$ ベクトル空間なので $0,\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3,\cdots$ といった "値" をとるものであり[*65], 不変量なので, これを用いて多様体という図形を分類できたりできなかったりするという代物だ。$H^*(M)$ は $H^0(M)$, $H^1(M),H^2(M),\cdots$ というものたちに分解され, それらが「wedge 積」と呼ばれるかけ算でひとつの環[*66]をなすようなものである。とくにこの中の $H^0(M)$ は「M 上の無限回微分可能な関数であって, 微分して 0 であるようなもの全体の集合」と同じである。だから, 先と同様に「M 上の局所定数関数全体」の集合である。$M=\mathbb{R}$ なら, 局所定数関数は本当の定数関数しかないから $H^0(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. 一方で本問のように $H^0(\mathbb{R}-\{0\})=\mathbb{R}^2$ である。右辺の $\mathbb{R}$ の指数が, M の連結成分の個数に等しいのだろうと想像できると思う (厳密に示すにはやはり少し言葉が必要なのだが)。

さて, このことをふまえた上で再び次の問題に挑戦してみたいという人はいるかな？

(問題): $M=\mathbb{R}-\{0,1,2,\cdots,100\}$ で定義された関数 $f(x)$ であって

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-2)^2}+\cdots+\frac{1}{(x-100)^2}$$

を満たすものをすべて求めよ。(**Hint:** $H^0(M)=\mathbb{R}^{102}$)

de Rham Cohomology は代数的位相幾何学という分野で登場する。京大数学科では 3 回生で習う程度のものである。参考書としては Raoul Bott , Loring W.Tu の Differential Forms in Algebraic Topology という本が有名である (前提知識としては多様体論, 加群論の初歩, 線形代数程度, であろうか)。

(3)

真である。 任意の無理数 p を取る。このとき p を近似する有理数列 $q_1,q_2,\cdots$, が存在する。具体的には, p の 10 進展開を小数第 n 位で切り捨てるなどとすればよい。連続性から

$$f(p)=f(\lim_{n\to\infty}q_n)=\lim_{n\to\infty}f(q_n)=\lim_{n\to\infty}0=0$$

なので示された。

Q.245

次の命題を証明または反証せよ。

(1) $x,y,z\in\mathbb{R}$ が $x+y+z,xy+yz+zx,xyz\in\mathbb{Q}$ ならば $x,y,z\in\mathbb{Q}$

(2) $1+\sqrt{-1}$ は 16 の 8 乗根である

(3) 単調増加かつ微分可能な $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ がある定数 M によって $f(x)<M$ となるならば、$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$

(4) $x>0$ が無理数ならば $\sqrt{x}$ は無理数である。

(1)

偽である。 $x=0,y=\sqrt{2},z=-\sqrt{2}$ とすればよい。実際

$$x+y+z=0,xy+yz+zx=-2,xyz=0.$$

別のアプローチも述べておこう。$x+y+z\in\mathbb{Q},\cdots$ などという条件から, 解と係数の関係をふまえれば

$$(T-x)(T-y)(T-z)$$

[*65] 少しややこしいが, この "値" としての $\mathbb{R}$ はどちらかというと「代数構造の入った $\mathbb{R}$」であり, 多様体としての $\mathbb{R},\mathbb{R}-\{0\}$ とは少し性格が違うものではある。もちろん, $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ でしかないが, 群 (対称的な構造を持った集合) とも思えたり多様体とも思えたりするということだ。

[*66] 集合であって, 積や和と "呼ばれる" 諸々の条件を満たした演算が組み込まれたもの。たとえば $\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Z}$ など。

という T の多項式は実解を 3 つ持つ有理数多項式にになるわけである。だから, そのような多項式の根は果たして有理数なのか? という視点で解く事もできる。センスがあるのかないのかわからない反例だが,

$$T(T-\cos\frac{2\pi}{3})(T-\cos\frac{4\pi}{3})=T^3+\frac{3}{4}T+\frac{1}{4}$$

などもよいだろう。これは

$$\cos 3\theta=-4\cos^3\theta+3\cos\theta$$

の $\cos 3\theta=1$ となる場合, すなわち $\theta=0,\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}$ から現れる三次方程式である。

(2)

真である。 n 乗根は何も実数に限る話ではない。単に n 乗して x になったら x の n 乗根というのである。実際に 8 乗して 16 になることは容易である:

$$(1+\sqrt{-1})^8=(2\sqrt{-1})^4=(-4)^2=16$$

(3)

偽である。 本問の中ではこれが最もトリッキーである。数学界の反例探しというのを甘く見てはいけない。ただ, 正直なところ具体的な "$f(x)$ の数式" を与えるのは面倒 (かつ意義はない) だしその式だけ見ても分かりづらいので, どういうグラフであるかの説明をするだけで想像をしてほしい。

まず $-\pi/2\leqq x\leqq 0$ では $f(x)=\cos x-1$ とする。$x=-\frac{\pi}{2}$ での傾きが 1 だから, そこから微分可能になるように別の単調増加グラフをつなげればいい。たとえば $y=e^x$ の $x\leqq 0$ の部分を, $(0,1)\to(-\frac{\pi}{2},-1)$ という平行移動で繋げれば良い。これで $f(x)$ の $x\leqq 0$ の部分は完成した。

次に $0\leqq x\leqq\pi$ では $\sin x$ の $-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2$ のグラフ (これは単調増加) を平行移動して $f(0)=0$ のところで繋げる (この繋げ方は微分可能である)。次に $\pi\leqq x\leqq 2\pi$ においては, $\dfrac{1}{2^2}\sin x$ の $-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2$ の部分を繋げればよい。以下このように繋げていく。すなわち, この次には $y=\dfrac{1}{3^2}\sin 3^2x$ $(-\pi/18\leqq x\leqq\pi/18)$ を繋げてから $y=\dfrac{1}{4^4}\sin x$ $(-\pi/2\leqq\pi/2)$ を繋げていき, 以下 $n=3,4,5,6,\cdots$ に対しても

$$y=\frac{1}{(2n-1)^2}\sin{(2n-1)^2x}$$

の $(-\pi/\{2(2n-1)^2\}\leqq x\leqq\pi/\{2(2n-1)^2\}$ の部分を繋げてから

$$y=\frac{1}{(2n)^2}\sin x$$

の $-\pi/2\leqq\pi/2$ の部分を繋げる。

よくみると $-\pi/2\leqq x\leqq\pi/2$ の部分にあるサインカーブを (縦に縮めて) 何度も繋げているから, 横方向にいくらでも $f(x)$ が伸びていくことが分かる。これで $f(x)$ が帰納的な構成を通して実数全体で定義されたことになる。繋げていった物としてはサインカーブの増加部分しか使っていないわけだから, (狭義) 単調増加性は明らか。微分可能性もつながりの部分で傾きが 0 になっていることから分かるであろう。

さて, この $f(x)$ はいわば階段状であるが, 天にまで登っていくわけではない。なぜなら, 用いたサインカーブは $\dfrac{1}{k^2}\sin Ax$ という形であって, 一つ上昇するときに上昇値は $\dfrac{2}{k^2}$ しかないので, $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{k^2}<\infty$ というよく知られた話によって $f(x)<M$ が常に満たされるように定数 M を取ることが出来る。しかしながら $\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ は満たされない。なぜなら, 繋げたサインカーブのうち $\dfrac{1}{(2k-1)^2}\sin{(2k-1)^2x}$ というものを微分すると $\cos{(2k-1)^2x}$ であって, この導関数の値が 1 になるような点をこのサインカーブは含んでしまっていて, $f'(x)$ が無限回 1 という値を取ることがわかるからである。

よってこのような $f(x)$ を与えると良い。

(4)

真である。 有名問題ではあるが, 対偶, あるいは背理法を使わないと難しいというのはなぜか不思議な感じがする。さて, $\sqrt{x}$ が有理数だと仮定して x が有理数であることを示せばよいが, 有理数の積は有理数なのであたりまえである。

Q.246 ★5 自作、学コン 2020-10-5

四面体 OABC は、OA $=1$, OB $=$ OC $=2$ を満たし、面 ABC は正三角形であるとする。

(1) 正三角形 ABC の一辺の長さ x の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積の最大値を求めよ。

---

(1)

簡単のため $x=2d$ とおく。まず, 面 OAB の三辺は $1,2,2d$ であり, この三辺について三角不等式が成り立つので

$$\begin{cases}1<2+2d\\2<1+2d\\2d<1+2\end{cases}\Leftrightarrow\quad\frac{1}{2}<d<\frac{3}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 1<x<3\quad\cdots①$$

が必要。また, この範囲であれば面 $\mathrm{OAC},\mathrm{OBC}$ に関しても三角不等式が成り立つ。

次に, BC の中点を M とすると, $\mathrm{BM}=d,\mathrm{OM}=\sqrt{4-d^2},\mathrm{AM}=\sqrt{3}d$ である。点 A, 点 O はともに, M を通る BC に垂直な平面 p 上にある。一辺が $x=2d$ のときにこの四面体が成り立つとする

なら, p 上で三角形 OAB が成り立つので, 三角不等式により

$$\frac{1}{2}<d<\frac{3}{2}\ \text{かつ}\ \begin{cases}\sqrt{3}d<1+\sqrt{4-d^2}\\ 1<\sqrt{3}d+\sqrt{4-d^2}\\ \sqrt{4-d^2}<\sqrt{3}d+1\end{cases}$$

を満たすことが必要。逆にこれを満たせば, 先に 1 辺 $2d$ の正三角形 ABC を与えて, p 上の点 O であって, $\mathrm{OM}=\sqrt{4-d^2}$ かつ $\mathrm{AM}=\sqrt{3}d$, したがって $\mathrm{OA}=1, \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=2$ を満たすようなものを取ることができる。

そこでこの不等式を解く。1 式目と 2 式目は $(1-\sqrt{3}d)^2<4-d^2$ を考えることに同値。これを整理すると

$$\begin{aligned}&4d^2-2\sqrt{3}d-3=x^2-\sqrt{3}x-3<0\\ \Leftrightarrow\quad&\frac{\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}\quad\cdots②\end{aligned}$$

となる。3 式目は, $\frac{1}{2}<d<\frac{3}{2}$ のもとで両辺が正であるから, 二乗しても同値であり

$$\begin{aligned}&4-d^2<(\sqrt{3}d+1)^2\quad\Leftrightarrow\quad x^2+\sqrt{3}x-x>0\\ \Leftrightarrow\quad&x<\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{15}}{2}\ \text{or}\ \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}<x\quad\cdots③\end{aligned}$$

である。以上①,②,③を満たせば良いので, 求める範囲は

$$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$$

(2)

$\angle\mathrm{OAM}=\theta$ とおく。余弦定理により,

$$\cos\theta=\frac{1^2+(\sqrt{3}d)^2-(\sqrt{4-d^2})^2}{2\sqrt{3}d}=\frac{4d^2-3}{2\sqrt{3}d}$$

なので,

$$\sin^2\theta=1-\left(\frac{4d^2-3}{2\sqrt{3}d}\right)^2=\frac{1}{12d^2}\cdot(-16d^4+36d^2-9)$$

であり, $0<\theta<\pi$ なので $\sin\theta>0$ であるから,

$$\sin\theta=\frac{1}{2\sqrt{3}d}\sqrt{-16d^4+36d^2-9}$$

となる。$\mathrm{OA}=1$ であるから, $\triangle\mathrm{OAM}$ の AM を底辺としたときの高さが $\sin\theta$ である。p は O を通り, 平面 ABC に垂直であるから, この高さは四面体の ABC を底面とみたときの高さでもある。面 ABC の面積は $\sqrt{3}d^2$ であるから, $\mathrm{AB}=x$ のときの四面体の体積を $V(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}V(x)&=(\sqrt{3}d^2)\times\frac{1}{2\sqrt{3}d}\sqrt{-16d^4+36d^2-9}\times\frac{1}{3}\\ &=\frac{1}{6}\sqrt{d^2(-16d^4+36d^2-9)}=\frac{1}{12}\sqrt{x^2(-x^4+9x^2-9)}\end{aligned}$$

$x^2=X$ とおいて, $V(x)=\frac{1}{12}\sqrt{-X^3+9X^2-9X}$ となる。
$W(X)=-X^3+9X^2-9X$ とおくと,

$$W'(X)=-3(X^2-6X+3)=-3\left(X-(3-\sqrt{6})\right)\left(X-(3+\sqrt{6})\right)$$

となる。問 (1) により, X の取る範囲は $\frac{9-3\sqrt{5}}{2}<X<\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$ であって, 数の大小に注意すると, 次の増減表を得る:

X	$\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	$3+\sqrt{6}$	$\cdots$	$\frac{9+3\sqrt{5}}{2}$
$W'(x)$		$+$	0	$-$	
$W(x)$		$\nearrow$	極大	$\searrow$	

よって $V(x)=\frac{1}{12}\sqrt{W(X)}$ も $X=3+\sqrt{6}$ で最大となるので,

$$\begin{aligned}&V(x)\text{ の最大値}\\ =&\frac{1}{12}\sqrt{W(3+\sqrt{6})}\\ =&\frac{1}{12}\sqrt{-(3+\sqrt{6})\left\{-(3+\sqrt{6})^2+9(3+\sqrt{6})-9\right\}}\\ =&\frac{1}{12}\sqrt{-(3+\sqrt{6})\left\{3+3\sqrt{6}\right\}}\\ =&\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt{9+4\sqrt{6}}\end{aligned}$$

Q.247 ★? 元ネタ: 京大院試 (英語)

> 0 でない実数係数多項式 $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ の次数は $a_n\neq 0$ ならば n とされる。では 0 の次数はどのように定めるのが自然か。

あえて答えがいくつかに分かれそうな書き方をした。自由に論じてもらえば良いが, もっともらしいことを言わなければならない。$f\in\mathbb{R}[x]\setminus\{0\}$ に対して, その次数を $\deg f$ と書くことにしよう。このとき, 次が成り立つことは明らかである。

$$\deg(fg)=\deg f+\deg g\quad(f,g\in\mathbb{R}[x]\setminus\{0\})$$

仮に $\deg 0$ を定義しようものなら, この公式を $f=0, g=0$ の場合にも拡張したいと考えたくなるものである。では形式的に $g=0$ としてみると

$$\deg 0=\deg f+\deg 0$$

となり, $\deg 0$ は普通の実数のような数では定義しづらい。そこで, 極限計算的には正しい $\infty+x=\infty, -\infty+x=-\infty$ のような式を思い出し, $\deg 0=\infty$ または $\deg 0=-\infty$ とするとこの公式は「ある意味では崩れない」感じがする。
さて, 現段階では $\pm\infty$ のどちらも妥当である。そこで, 他に $\deg f$ にまつわる公式がないかを探し, その公式を $\deg 0$ が入る場合に

拡張出来ないかということを再び考えてみよう。たとえば次のようなものがある。

$$\deg(f+g) \leqq \max\{\deg f, \deg g\} \quad (f, g, f+g \neq 0)$$

形式的に $f+g=0$ であるとすると

$$\deg 0 \leqq \max\{\deg f, \deg(-f)\} = \deg f$$

となる。この式を見るに, $\deg 0 = \infty$ とはしづらい。$\infty \leqq \deg f$ は奇妙だからである。一方で $\deg 0 = -\infty$ はこの点に関しては問題がない！

その他, $\deg 0 = -\infty$ とするのが有用そうであると思える点はある。たとえば,

(1) 剰余の定理を思いだそう。$g(x) \neq 0$ とする。f の g による割り算を実行した $f(x) = g(x)Q(x) + R(x)$ ($Q(x)$ は整式, $R(x) = 0$ または $R \neq 0$ かつ $\deg R < \deg g$) における R の条件は, $\deg 0 = -\infty$, $-\infty < r$ ($r \in \mathbb{R}$) と取り決めるならば「$\deg R < \deg g$」とだけ書いてもよいだろう。

$\deg 0 = \infty$ としたい理由もいくつか考えられる。

(1) $f \neq 0$ のとき, $\deg f$ は方程式 $f(x) = 0$ の複素数解の個数である。だから $\deg 0 = \infty$ が相応しい。
(2) etc ...

個人的には, これを理由にするのはいささか微妙なのではと思う。確かに (1) のような事実はある。しかしながらそれは $\deg f$ の「生の情報」と言えるかどうかは少し怪しい。つまり, 多項式の零点の個数は $\deg f$ と同じだという事実が先走り, それが $\deg f$ の本質だ, と主張できるかどうかは微妙ではないかと思うのである。まるで「1 ってなんですか？」という哲学的な問いに対して「乗法単位元です」と答えているかのようだ[*67]。多項式は関数とも見れるが, 関数と思わない視点もある。$\deg f$ は多項式を関数と思わずとも定まる概念である。だから, 零点の個数 (関数の視点による情報) はやや $\deg f$ の概念から離れているのではないかと思う。結局, 「deg というのは $\mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ に対して整数値を与える写像にすぎない」という立場からすれば, 零点の個数と話を結びつけるのは自然とは言いがたい。一方で $\deg 0 = -\infty$ を採用するに至った方法では, deg という写像に関する話の範囲内である。だから, より生の deg を使って話が展開できているのではないだろうか。

[*67] 実際に見たことがある。

Q.248 ★4 学コン 2020-10-1 改

k を自然数とする。

$$\sin\theta + \sin 2k\theta = \cos\theta + \cos 2k\theta\,,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

を満たす θ の個数を k で表せ。

ここに解答を記述。

Q.249 ★7 東北大数学科院試 H31 共同

$\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 Φ が凸関数であるとき、すなわち任意の $x, y \in \mathbb{R}$ と $t \in (0,1)$ に対して

$$\Phi\bigl(tx + (1-t)y\bigr) \leq t\Phi(x) + (1-t)\Phi(y)$$

を満たすとき、次の問に答えよ。

(1) Φ は $\mathbb{R}$ 上連続であることを示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} t_j = 1$ を満たす $t_j > 0$ と $x_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) に対して $\displaystyle\Phi\left(\sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} t_j \Phi(x_j)$ が成り立つことを示せ。

(3) $a > 0$ とする。区間 $[0, a]$ 上の実数値連続関数 f に対して $\displaystyle\Phi\left(\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\,dx\right) \leq \frac{1}{a}\int_0^a \Phi\bigl(f(x)\bigr)\,dx$ が成り立つことを示せ。

ここに解答を記述。

Q.250 ★10 東北大数学科院試 H28 選択 改

p を奇素数とする。

(1) 正の整数 d に対して次を示せ。

$$\sum_{k=0}^{p-1} k^d \equiv \begin{cases} -1 & (p-1 \text{ が } d \text{ を割り切るとき}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \pmod{p}$$

(2) $p \equiv 1 \pmod 4$ のときは $B_p = {}_{\frac{p-1}{2}}\mathrm{C}_{\frac{p-1}{4}}$ とし、$p \equiv 3 \pmod 4$ のときは $B_p = 0$ とする。p 未満の非負整数の組 x, y であって $y^2 \equiv x(x^2+1) \pmod p$ を満たすようなものの個数を N_p とするとき、$N_p \equiv -B_p \pmod p$ であることを証明せよ。

ここに解答を記述。

Q.251 ★2

xy 平面に $y^2 = x(x+1)^2$ によって表されるグラフを図示せよ。(注意せよ!)

(Hint) グラフは, 曲線と 1 点になる.

(注意) 図形は,「1 点」と「連結な部分」の和になっている。この図形と似たものとして楕円曲線というものがある (注:本問のグラフは楕円曲線とは言わない). 楕円曲線の 実平面上での一般的な式は,

$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (a, b \in \mathbb{R}, 4a^3 - 27b^2 \neq 0)$$

という方程式である。最後の条件が成り立てばグラフ全体は一つにつながっているか,「閉じた曲線」と一つの曲線の和集合になっているのだが, 逆にこの条件を外すと楕円曲線が変な形になるのである. この問では, この「閉じた曲線」が 1 点に縮んでいった瞬間の a, b を本問で選んできたというわけである. そういうわけで, この 1 点を非常に見落としやすいという, そういう問題である.

Q.252 ★8◎ 自作 学コン 2020-11-5 原題

(1) $x^2 + y^2 = 3z^2$ の整数解は $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ に限ることを証明せよ。

(2) xy 平面において、x 座標と y 座標がともに有理数であるような点を有理点と呼ぶこととする。θ を $0 < \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし、次の条件を満たす xy 平面上の三角形 ABC を考える。

(条件) A は有理点であり、AB の長さは有理数である。さらに $\angle\mathrm{ACB} = \theta$ である。

三角形 ABC の外心を X とする。次の問に答えよ。

(a) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき、X は有理点でないことを証明せよ。

(b) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2020}}$ のとき、X が有理点となることはあるか。ないならば証明し、あるならば A, B, C の座標を挙げそれらが条件を満たすことを示せ。

(1)

$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ なる解が存在したとする。$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3$ であるが, 一般に自然数 n に対して $n^2 \equiv 0, 1 \pmod 3$ であるため, x, y はともに 3 の倍数でなければならない。このとき, $3z^2$ は 9 の倍数となるから, z は 3 の倍数である。すると, この方程式の解に関して

$$(x, y, z) \text{ が整数解ならば } \left(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3}\right) \text{ が整数解}$$

が言えるから, この議論を繰り返して $N = 0, 1, 2 \cdots$ に対して $(\frac{x}{3^N}, \frac{y}{3^N}, \frac{z}{3^N})$ が整数解となる。しかし, x, y, z のどれかが 0 ではないから, その 0 でないものに関して, 十分大きい N に対してそれを 3^N で割ったものが整数でなくなるから矛盾する。よってこのような解は存在せず, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ は自明な解であるから示された。

(2a)

背理法によって証明する。X が有理点であるような三角形 ABC が存在したとする。ここで, そのようなものが存在するならば, A の座標は $(0, 0)$ であるとしてよい。なぜなら, A と原点はともに有理点であり, A を原点に動かす平行移動によってすべての有理点は有理点へと移動し, X の移動先も有理点であるからである。さらに, AB は有理数であるから, 有理数倍の原点を中心とした拡大縮小によって有理点が有理点に移ることを利用し, $\dfrac{1}{\mathrm{AB}}$ 倍によって $\mathrm{AB} = 1$ であるとしてもよい。

X の座標を (p, q) とする (p, q は有理数)。三角形 ABC の外接円の半径を R とすれば, その外接円の方程式は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = R^2$$

で与えられ これは原点 (= A) を通るので $p^2 + q^2 = R^2$ が従う。正弦定理によって

$$R = \frac{1}{2\sin\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから, $p^2 + q^2 = \dfrac{1}{3}$ である。p, q は有理数であったから, $t = p, q$ に関して 自然数 x_t, 整数 y_t を取って

$$t = \frac{y_t}{x_t}$$

と表示することができる。すると,

$$\begin{aligned} & p^2 + q^2 = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & \left(\frac{y_p}{x_p}\right)^2 + \left(\frac{y_q}{x_q}\right)^2 = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \quad & (3y_p x_q)^2 + (3y_q x_p)^2 = 3(x_p x_q)^2 \end{aligned}$$

となり, $x_p x_q \neq 0$ であるから (1) に反する。よって矛盾であり, X は有理点でない。

(2b)

存在する。まず, 不定方程式 $x^2 + y^2 = 2020z^2$ は非自明な有理数解 $(x, y, z) = (12, 19, \frac{1}{2})$ を持つ[*68]ことに注意する。$x_0 = 12, y_0 = 19$ とおく。

A を原点とする。$\mathrm{AB} = 1$ となるように作ろう。このとき, 正弦定理より外接円半径は $\sqrt{505}$ である。有理点 $\mathrm{X}(p, q)$ が取れたとするなら, 外接円の方程式は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = 505$$

を満たし, それが原点を通るから $p^2 + q^2 = 505$ を満たすべきである。そこで, p, q として $p = x_0$, $q = y_0$ を取ろう。

この $\mathrm{A}(0, 0)$ と $\mathrm{X}(x_0, y_0)$ から条件を満たすように B, C を取ろう。B の座標を (a, b) とする。AB の垂直二等分線上に外心 X が

*68 $(21, 8, \frac{1}{2})$ でも OK。

あるように点 B を取るべきであるが, その垂直二等分線の方程式は

$$ax + by = \frac{1}{2}$$

である。よって, a, b は $a^2 + b^2 = 1$ かつ $12a + 19b = \frac{1}{2}$ を満たすように取ればよく, これを解いて

$$a = \frac{6}{505} \pm \frac{19\sqrt{2019}}{1010}, \quad b = \frac{19}{1010} \mp \frac{6\sqrt{2019}}{505} \quad (\text{複合同順})$$

を得るので, そのうちの一つとして

$$B = \left(\frac{6}{505} - \frac{19\sqrt{2019}}{1010}, \frac{19}{1010} + \frac{6\sqrt{2019}}{505}\right)$$

を選ぶ。$\mathrm{XA} = \mathrm{XB}$ を満たすように取ったから, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 505$ 上に A, B が存在する。C は, この円の弧 AB のうち, 長いほうから任意にとればよい。なぜなら, その弧に対する円周角 ($\angle\mathrm{ACB}$) は鋭角であり, 正弦定理より $\sin\angle\mathrm{ACB} = \frac{1}{2\sqrt{505}} = \frac{1}{\sqrt{2020}}$ であるから, $\angle\mathrm{ACB} = \theta$ が満たされる。たとえば, C として $(0, 2y_0) = (0, 38)$ を取る。この点は, X を通る直線 $y = y_0$ より上にある。一方で, A, B は下にあるので, この C は弧 AB のうち長いほうに属することも明らかである。以上より, A, B, C の一例として

$$\mathrm{A}(0,0), \mathrm{B}\left(\frac{6}{505} - \frac{19\sqrt{2019}}{1010}, \frac{19}{1010} + \frac{6\sqrt{2019}}{505}\right), \mathrm{C}(0,38)$$

を与えることが出来る。

(余談)

一般化すると次が成り立つ。

> **補題 252.1**
> $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ を満たす定数 θ に対して, 次は同値である。
>
> (1) (条件) を満たす三角形 ABC が存在する。
>
> **(2)** $\sin\theta$ は有理数である。または, $4k+3$ 型素数の約数と平方因子を持たない自然数 n と, (正の) 有理数 r を用いて $\sin\theta = r\sqrt{n}$ と表すことが出来る。

この証明のためには, (2) の条件にあるような n に関して $x^2 + y^2 = nz^2$ が非自明な整数解を持ち, 逆に平方因子を含まず $4k+3$ 型素数の約数を持てば非自明な整数解を持たないことを示す必要があり, それは「二平方和定理」より従う。このことを事実として認めれば, (2) (a) と同じ方法によって, (1)⇒ (2) が従う。(2)⇒(1) は (2) (b) と同じような構成で分かる。また, θ を鈍角にしてもよい (C を取るときに短い方の弧 AB から取ればよい)。

> Q.253 ★3 自作
>
> $n,\ n+2,\ n+4$ の最小公倍数を求めよ.

自然数 N が素数 p で割り切れる回数を $v_p(N)$ とおく. 求める最小公倍数を L_n とする. 一般に, $p_1, p_2, \ldots$ を素数の小さい順に並べた列だとして, n 個の (素因数分解表示された) 自然数

$$p_1^{e_{1j}} \cdot p_2^{e_{2j}} \cdot \ldots \quad (j = 1, 2, \ldots, n, \quad e_{ij} \geqq 0)$$

の最小公倍数は,

$$p_1^{\max_j e_{1j}} \cdot p_2^{\max_j e_{2j}} \cdot \ldots$$

で計算できる.
まず, $n, n+2, n+4$ のどの二つを見ても, その差は 2 か 4 である. よってユークリッドの互除法を考えれば, たとえば n と $n+2$ は共通の奇素因数を持たない. $n+2, n+4$ と $n, n+4$ についても同様のことが従う. よって, 奇素数 $p \geqq 3$ に対して次が正しい.

$$\max\{\, v_p(n), v_p(n+2), v_p(n+4) \,\} = v_p(n(n+2)(n+4)).$$

つまり, **奇素因数に限って言えば,** L_n は $n(n+2)(n+4)$ と同じ素因数分解を持っている. よって

$$\frac{n(n+2)(n+4)}{L_n} = 2^{v_2(n(n+2)(n+4)) - \max\{\, v_2(n), v_2(n+2), v_2(n+4) \,\}}$$

である. よってこの右辺の指数を $e(n)$ とすれば, $L_n = \frac{n(n+2)(n+4)}{2^{e(n)}}$ として求まる.
Step 1. (n が奇数のとき)　$n, n+2, n+4$ は奇数だから $v_2(n)$ などはみな 0 である. よって $e(n) = 0$ なので $L_n = n(n+2)(n+4)$.
Step 2. (n が偶数だが 4 で割れないとき)
このとき $n+2$ のみが 4 の倍数で, $v_2(n) = v_2(n+4) = 1$ である. よって $v_2(n(n+2)(n+4)) = 2 + v_2(n+2)$ なので

$$e(n) = \{2 + v_2(n+2)\} - v_2(n+2) = 2$$

なので

$$L_n = \frac{n(n+2)(n+4)}{4}$$

Step 3. (n が 4 の倍数のとき)　もし n が 8 の倍数ではないなら, $v_2(n) = 2,\ v_2(n+2) = 1,\ v_2(n+4) \geqq 3$ である. その場合は

$$e(n) = (3 + v_2(n+4)) - v_2(n+4) = 3$$

である. もし n が 8 の倍数であるなら, $v_2(n) \geqq 3,\ v_2(n+2) = 1,\ v_2(n+4) = 2$ なのでこの場合も $e(n) = 3$. よって

$$L_n = \frac{n(n+2)(n+4)}{8}$$

Q.254 ★8 京府医 3 (2021)

a は $a>1$ を満たす実数とする。1 辺の長さ a の正方形である面を 1 つ、3 辺の長さが $a,1,1$ の二等辺三角形である面を 1 つ、4 辺の長さが $a,1,1,1$ の台形である面を 2 つ用意し、これらを組み合わせて 5 つの面で囲まれた立体 F ができたとする。

(1) 立体 F において、正方形の面に平行な長さ 1 の辺がある。その辺上の点から正方形の面に引いた垂線の長さ h を a で表せ。

(2) 立体 F において、正方形の面と台形の面のなす角を θ_1 とし、正方形の面と二等辺三角形の面のなす角を θ_2 とするとき、$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$ となる a の値を求めよ。

(3) (2) で求めた a の場合を考える。1 辺の長さが a の立方体にいくつかの F を正方形の面でうまくはり合わせると正十二面体ができる。この事実を利用して 1 辺の長さが 1 の正十二面体の体積を求めよ。

ここに解答を記述。

Q.255 ★6 早稲田大 (2010)

表の出る確率が p、裏の出る確率が $1-p$ の硬貨 1 枚を $2n$ 回投げ、表が $n+1$ 回以上でる確率を P_n とする。

(1) $P_{n+1}-P_n=p^{n+1}(1-p)^n(ap+b)$ となる a,b を n で表せ。

(2) $p=\dfrac{7}{16}$ では P_n はどの n で最大か。

ここに解答を記述。

Q.256 ★6 cot の部分分数分解

$\tau\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ として、次を示したい。

$$\frac{1}{\tau}+\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau-d}+\frac{1}{\tau+d}\right)=\pi\cos\pi\tau$$

(1) 左辺は $\mathbb{C}-\mathbb{Z}$ で絶対収束することを示せ。

(2) 十分大きい $N\in\mathbb{N}$ として $R=N+\dfrac{1}{2}$ とする。$\pm R\pm Ri$ を 4 頂点とする正方形経路 C を用いて次を示せ。

$$(\text{右辺})-(\text{左辺})=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{\pi\cos\pi\zeta}{\zeta-\tau}\,d\zeta$$

(3) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_C\frac{\pi\cos\pi\zeta}{\zeta}\,d\zeta=0$ を利用して与式を示せ。

ここに解答を記述。

Q.257 ★? EGMO 2021 Problem1.

2021 は”素晴らしい数”である．正の正数 m に対して集合 $\{m,2m+1,3m\}$ のある要素が素晴らしいならばそのすべての要素も素晴らしい．このとき 2021^{2021} は素晴らしいか.

ある自然数 n が素晴らしいとする.

(1) もし $n\equiv 0\pmod 3$ なら, $n/3\in\mathbb{Z}$ も素晴らしい.

(2) もし $n\equiv 1\pmod 3$ なら, $2n+1$ が素晴らしい 3 の倍数なので $(2n+1)/3\in\mathbb{Z}$ も素晴らしい.

(3) もし $n\equiv 2\pmod 3$ なら, $3n$ が素晴らしく, $6n+1$ が素晴らしく, $12n+3$ が素晴らしく, $(12n+3)/3=4n+1$ が素晴らしく, $(4n+1)/3\in\mathbb{Z}$ が素晴らしい. そして, $2\cdot\dfrac{2n-1}{3}+1$ だから $(2n-1)/3\in\mathbb{Z}$ は素晴らしい.

そしてこれの「逆導出」が可能であることに注意せよ. つまり, $n\equiv 0\pmod 3$ のとき, $n/3\in\mathbb{Z}$ が素晴らしいならば n も素晴らしい. その他についても同様である. つまり, 自然数 n に対して次は同値である.

- n は素晴らしい.
- $n/3,(2n+1)/3,(2n-1)/3$ のどれかが素晴らしい.

よってここから従うことは「任意の自然数 n に対して, $(2n+1)/3$ 以下のある自然数 n' が存在して, n が素晴らしいことと n' が素晴らしいことは同値」ということである. この n' に対しても $(2n'+1)/3$ 以下のある自然数 n'' が存在して「n' が素晴らしい $\iff$ n'' が素晴らしい」 ということも分かる. さて, このように $n\to n'\to n''\to\cdots$ という対応を続けると, ある所からは 1 がずっと並ばざるを得ない (問: これはなぜか?). よって, n が素晴らしいことと 1 が素晴らしいことは同値である. これは任意の自然数に対して言えているから, $n=2021$ とすることで 1 は素晴らしい. よって $n=2021^{2021}$ とすることで 2021^{2021} も素晴らしい. □

Q.258　2021 新歓ビラ

m,n を自然数とする.

(1) 2018^m-1897^n が平方数となるような m,n をすべて求めよ. (★2)

(2) 2018^m-1897^n が立方数となることはあるか? (★10)

(1)

$n=1$ のとき, $2018-1897=121=11^2$ なのでよい。

$n\geqq 2$ とする。このとき, 2018^n は 4 の倍数であり, $1897\equiv 1\pmod 4$ なので

$$2018^n-1897^m\equiv -1\pmod 4$$

となる。これは平方剰余ではないから, 平方数にはならない。よって $n=1$ のみ。

(2)

$1897=7\times 271$ である。$2018^n-1897^m=N^3$ であるとしよう。mod7 を取ると, $2018\equiv 2 \pmod 7$ だから

$$N^3\equiv 2^n \pmod 7$$

である。ここで, $N^3 \bmod 7=\pm1,0$ と, $2^n \bmod 7=2,4,1$ により, 上の両辺は $1 \bmod 7$ で等しくなければならない。よって $2^n\equiv 1 \pmod 7$ なので n は 3 の倍数である。$n=3a$ とおくと,

$$2018^{3a}-N^3=1897^m$$

である。左辺は $(2018^a-N)(2018^{2a}+2018^aN+N^2)$ である。ここで, 仮に p が二つの因数を割りきる素数であるとすると, p は 1897 の素因数でもあるので, $p\in\{7,271\}$ である。一方で,

$$2018^a\equiv N,\quad 2018^{2a}+2018^aN+N^2\equiv 0 \pmod p$$

であるため, $3N^2\equiv 0 \pmod 0$ が得られる。3 は p の倍数ではないので,N が p で割れることになり, $2018^a\equiv 0 \pmod p$ なので, p で割れることになる。これは $p\in\{2,1009\}$ ということになり, 矛盾である。よって, 二つの因数は共通の素因数を持たないため互いに素である。よって, $0<2018^m-N<2018^{2a}+2018^aN+N^2$ に注意すると次の二つのパターンが考えられる:

Type I: $2018^a-N=7^m,\quad 2018^{2a}+2018^aN+N^2=271^m$

Type II: $2018^a-N=1,\quad 2018^{2a}+2018^aN+N^2=1897^m$

Type I

$N=2018^a-7^m$ を代入することで

$$\begin{aligned}&2018^{2a}+2018^a(2018^a-7^m)+(2018^a-7^m)^2\\&=3\cdot 2018^{2a}-3\cdot 2018^a\cdot 7^m+7^{2m}=271^m\end{aligned}$$

整理すると,

$$3\cdot 2018^a(2018^a-7^m)=271^m-49^m \tag{13}$$

mod7 を取ると

$$3\cdot(2018^a)^2\equiv 5^m \pmod 7$$

であり, 3 は mod7 で平方非剰余なので左辺は平方非剰余である。よって 5^m も平方非剰余であるから, 特に m は偶数になってはならない。よって m は奇数である[*69]。そして m が奇数であることから

$$271^m-49^m\equiv(-1)^m-1^m\equiv 2 \pmod 4$$

であり, 271^m-49^m は 4 で割り切れない偶数である。
(eq. (13)) の左辺が 4 で割り切れないためには $a=1$ でなければならない。これを代入して整理すれば

$$3\cdot 2018^2=271^m+6054\cdot 7^m-49^m$$

を得る。これの自然数解 m が存在しないことは簡単に確かめられる。たとえば, 最も短く済む方法は以下の通りである:
以下, mod5 で考える。m が奇数であったことに注意。よって, $2018^2\equiv -1$, $49^m\equiv -1$, $6054\equiv -1$ なので,

$$-3\equiv 1+(-1)\cdot 7^m-(-1)$$

これを整理すると $7^m\equiv 0$ となるので解はない。

Type II

N を消去すると

$$3\cdot 2018^a(2018^a-1)=1897^m-1$$

を得る. 左辺は 2 で a 回割れる。一方で奇数 r, 非負整数 t を用いて $m=2^tr$ と書くと,

$$1897^m-1=(1897^r-1)\prod_{j=0}^{t-1}(1897^{2^jr}+1)$$

である (ただし $t=0$ なら積の部分は 1 とする)。r が奇数なので, 1897^r-1 は

$$1897^r-1\equiv 9^r-1\equiv 8 \pmod{16}\quad (\because 1897=1600+160+128+9)$$

より 2 で 3 回しか割れない。$1897\equiv 1 \pmod 4$ だから $1897^{2^jr}+1$ $(0\leqq j\leqq t-1)$ は 4 で割れない偶数であり, 1897^m-1 は $t+3$ 回だけ 2 で割れることが分かる。よって, $a=t+3$ であり, $a\geqq 3$ である。よって,

$$\boldsymbol{3\cdot 2018^a(2018^a-1)=1897^{2^{a-3}r}-1,\quad a\geqq 3,\quad r:\text{奇数}} \tag{14}$$

の解を調べるとよい。少々の**腕力**により, $a=3,4,5,6$ の可能性は否定できる:

[*69] 5 は平方非剰余なので 5^m は平方非剰余である。よって, この両辺を比較することはこれ以上はできない。

(1) $a=5,6$ のとき, 右辺の指数の $2^{a-3}r$ は 4 の倍数なので, $4b$ と書ける。$1897^{4b}-1$ は 5 の倍数であるが, 2018^a-1 は $a=5,6$ で 5 の倍数ではなく, 左辺は 5 の倍数ではないから不適。

(2) $a=4$ のとき, 2018^4-1 は 5 の倍数だが, () の右辺の mod5 は $2^{2r}-1$ であり, r が奇数だから これは 0 と合同ではない。よって不適。

(3) $a=3,6$ のとき, 2018^a-1 は 7 の倍数であることが容易に分かる ($2018 \equiv 2 \pmod 7$)。しかし, 右辺は 7 の倍数から 1 を引いたものだから 7 の倍数ではない。

以降 $a \geqq 7$ とする。(2) の式を次のように評価する。

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &\leqq 3\cdot 2018^{2a}-1\\
&< 6^a\left(\frac{1897}{2018}\right)^{2a}2018^{2a}-1\\
&= 6^a\cdot 1897^{2a}-1\\
&< 1897^{\frac{9}{4}a}-1\\
(\text{右辺}) &\geqq 1897^{2^{a-3}}-1
\end{aligned}$$

よって,

$$1897^{2^{a-3}}-1 < 1897^{\frac{9}{4}a}-1$$

だから $2^{a-3}<\frac{9}{4}a$ が成り立たなければならない。しかしこれが $a \geqq 7$ で成り立たないことは容易である。(たとえば, $a=7$ では不等式は $16<\frac{63}{4}$ となりおかしい。)

以上より立方数にはならない。

(補足 1.)

正直, (2) はかなり面倒な問題であるが, それでも私はこの解き方が典型から外れたものであるとは思わない.

一般的に x^m-y^m の形の式を見たら, 何かの素数で割り切れる回数を求めるのはかなり典型的な方針である (典型的とは言っても, 数オリレベルの話である). というのも, 次のような **LTE の補題**が知られているからだ.

LTE の補題 (Lifting The Exponent lemma)

x,y を異なる整数, n を自然数, p を素数で $x-y$ が p で割り切れ, x,y が p で割れないとする. 0 でない整数 N に対して, N の素因数分解に現れる p の指数を $v_p(N)$ と書くとき, 次が成立する.

(1) p が奇素数の場合,

$$v_p(x^n-y^n)=v_p(x-y)+v_p(n)$$

(2) $p=2$ のとき, もし $4|x-y$ であるなら

$$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(n)$$

もし $4 \nmid x-y$ であるなら

$$v_2(x^n-y^n)=v_2(x-y)+v_2(x+y)+v_2(n)-1$$

今回の解答は「LTE の補題より」という文言こそ使わなかったものの, アイデアとしては実質 LTE の補題をもとにしている.

LTE の補題を使ったあと, x^m-y^m の指数 m に関する「非常に強い制約」が生まれることが多い. たとえば今回の解答の場合分けの 2 つめにおいては, $m=2^tr$ と置いて割り切れる回数を評価すると $t=a-3$ という式が得られた. ここから $m \geqq 2^{t-3}$ という簡易的な評価ができるので, m が t の指数関数で下から抑えられる. このような状況は非常によく起こることであり, ここまで来ればおおざっぱな評価で必要条件が大きく絞れることも多い (ただし今回の問題は $a=3,4,5,6$ など, かなり絞りづらい問題だった).

(別解 (by すむーずぷりん))

次を満たす自然数の組 (x,y,z) は存在しないことを示せ:

$$\alpha^x-\beta^y=z^3,\quad \alpha=2018,\quad \beta=1897 \qquad (*)$$

解答

存在すると仮定して矛盾を導く. mod 7 を考えると $\alpha \equiv 2$, $\beta \equiv 0$ なので, $(*)$ より

$$2^x \equiv z^3$$

が得られる. 2^x が mod 7 で立方剰余となるのは x が 3 の倍数

のときのみである．そこで $x=3\xi$ とおく．$(*)$ に代入して整理すると

$$\beta^y=\alpha^{3\xi}-z^3=(\alpha^\xi-z)(\alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2)$$

となる．ここで $\alpha^\xi-z$ と $\alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2$ は互いに素である．実際, もし互いに素でないならばある共通素因数 p を持つので

$$\alpha^\xi-z=kp,\quad \alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2=\ell p$$

となる自然数 k,ℓ が取れる．ふたつの式から z を消去して整理すると

$$3\alpha^{2\xi}=(3k\alpha^\xi-k^2p+\ell)p$$

となり, 一方で $(*)$ から

$$\beta^y=k\ell p^2$$

となる．よって p は 3α と β の公約数だが, 3α と β は互いに素なので矛盾である．$\alpha^\xi-z$ と $\alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2$ は互いに素であることから, 次の二通りを考えれば十分である：

CaseA $\alpha^\xi-z=1,\quad \alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2=\beta^y$
CaseB $\alpha^\xi-z=7^y,\quad \alpha^{2\xi}+\alpha^\xi z+z^2=271^y$

いずれの場合でも y が 504 の倍数であることを示す.

CaseA $z=\alpha^\xi+1$ を $(*)$ に代入して整理すると

$$\alpha^{3\xi}-\beta^y=(\alpha^\xi-1)^3 \iff 3\alpha^\xi(\alpha^\xi-1)=\beta^y-1$$

が得られる．mod 1009 を考えると $\alpha\equiv 0$ であることから

$$\beta^y\equiv 1$$

となる．これを満たすのは y が 504 の倍数のときのみである．

CaseB $z=\alpha^\xi+7^y$ を $(*)$ に代入して整理すると

$$\alpha^{3\xi}-\beta^y=(\alpha^\xi-7^y)^3 \iff 3\alpha^\xi(\alpha^\xi-7^y)=271^y-49^y$$

が得られる．mod 1009 を考えると $\alpha\equiv 0$ であることから

$$271^y\equiv 49^y \iff 335^y\equiv 1$$

となる．これを満たすのは y が 504 の倍数のときのみである．

$y=504\eta$ とおく．$(*)$ より

$$\alpha^{3\xi}-\beta^{504\eta}=z^3 \iff (\beta^{168\eta})^3+z^3=(\alpha^\xi)^3$$

となる．ところが Fermat の最終定理よりこの等式は成立しない．

(補足 2.)

本問は私の初代ビラ問題のリスペクトでした．

初代ビラ問題

京都大学は 1897 年に創立された．自然数 a,b,c の組であって,

$$1=8^a-9^b\cdot 7^c$$

を満たすようなものをすべて求めよ．

こちらは今回の問題よりは易しめなので, ぜひ解いてください．京大作サー初期メンバーは全員, 私のこの問題に釘付けにされたため, 3 年という節目を迎えて生まれたこのビラ問題に涙を流さなかった初期メンバーはいないらしい．

Q.259 ★6 京大院試 H28 基礎科目 II

複素関数 $f(z)$ は $z=0$ の近傍で正則な関数で $f(z)e^{f(z)}=z$ を満たすとする．以下の問に答えよ．

(1) 非負整数 n と十分小さい正数 ϵ に対して, 次の式が成り立つことを示せ．

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon}\frac{1+u}{e^{nu}u^n}du$$

ここで成分路 C_ϵ は円周 $C_\epsilon=\{u\in\mathbb{C}\mid |u|=\epsilon\}$ を正の向きに一周するものとする．

(2) $f(z)$ の $z=0$ における冪級数展開を求め, その収束半径を求めよ．

ここに解答を記述。

Q.260 ★? H23 京大院試 数理解析系 II

すべての $x\in\mathbb{R}$ に対して $\phi(\phi(x))=-x$ を満たす実数値連続関数 ϕ は存在しないことを示せ．

条件より $-\phi(x)=\phi(\phi(\phi(x)))=\phi(-x)$ なので $\phi(0)=0$ を得る．写像 $\mathbb{R}\to\mathbb{R};x\mapsto -x$ が全単射なので条件より ϕ は全単射．よって $\phi(-1)\neq\phi(1)$ である．$\phi(-1),\phi(1)$ が同じ符号であることはない (全単射性と中間値の定理で分かる)．ここでは $\phi(-1)<0<\phi(1)$ の場合を考える ($\phi(1)>0>\phi(-1)$ の場合も同様である)．

Step 1. ($[-1,1]$ での増加性)　すべての $-1\leqq a<b\leqq 1$ に対し $\phi(a)<\phi(b)$ を示す．いま単射性より $\phi(a)\neq\phi(b)$ なので, もし $\phi(a)<\phi(b)$ でないなら, $\phi(a)>\phi(b)$ である．すると, $\phi(b)<p<\phi(b)$ なる任意の実数 p に対し, 二つのグラフ $y=p$ と $y=\phi(x)$ は, $-1<x<a$ と $a<x<b$ で交わっていることが分かる (中間値の定理)．よって単射性に反するので, 矛盾．よって ϕ が $[-1,1]$ で増加関数であることが分かる．

Step 2. (矛盾を導く)　$\phi(0)=0$ と連続性より, 十分小さい $1>\epsilon>0$ が存在して, $x\in[-\epsilon,\epsilon]$ なる x では常に $\phi(x)\in[-1,1]$

が成り立つようにできる．いま, $-\epsilon \leqq x \leqq \epsilon$ の中で x を増加させると, $\phi(x)$ は $[-1,1]$ の中で増加する．ϕ は $[-1,1]$ で増加するのであったから, $\phi(\phi(x))$ も増加するはずである．しかし関数 $-x$ は減少しているから, 矛盾である． □

Q.261 ★? H25 RIMS 院試基礎

実数 $x>0$ に対して,

$$f(x)=\int_0^1 \frac{\cos \pi y}{x+y}\,dy$$

とおく．

(i)

(ii) $g(x)=f(x)-\dfrac{2}{\pi^2 x(x+1)}$ とおくとき, すべての $x>2$ に対して,

$$|g(x)| \leqq \frac{C}{x^3}$$

となる定数 C が存在することを証明せよ．

(iii) 極限値

$$\lim_{x\to+\infty} x\sum_{k=1}^{\infty} f(x+k)$$

を求めよ．

ここに解答を記述。

Q.262 ★? 2009 ガロア祭

私たちは, たて, 横, 高さのある, 3 次元の世界に住んでいます．もし私たちが百万次元の世界に住む生き物だったとしたら, この 3 次元の世界とどんなに違うおもしろい体験をするでしょう．百万次元の対角線の長さは長いだろうか短いだろうか, その長さがどんな不便を生むだろうか．その世界では恋人と何個の目で見つめ合い何本の手を握り合うだろうか．などなど, 数学的に考察してください．

回答募集中．

Q.263 ★?

10 進法の有限列を任意に与える．このとき, 2^n の 10 進表記がその列から始まるような自然数 n が存在することを示せ．

10 進法の任意の有限列 $a_1a_2\ldots a_r$ $(1 \leqq a_i \leqq 9,\ a_1 \neq 0)$ を考える．2^n の 10 進表記がこの列から始まるための必要十分条件は, n に対してある自然数 $m(n)$ が存在して

$$10^{m(n)} \times \overline{a_1a_2\ldots a_r} \leqq 2^n < 10^{m(n)} \times (\overline{a_1\ldots a_r}+1)$$

となることである．ただし上線はこの列を数字とみなす記号である．この式は

$$\overline{a_1\ldots a_r} \leqq 2^n \cdot 10^{-m(n)} < (\overline{a_1\ldots a_r}+1)$$

と同値で, $\log_{10}(\cdot)$ を取り

$$\log_{10}(\overline{a_1\ldots a_r}) \leqq n\log_{10}2 - m(n) < \log_{10}(\overline{a_1\ldots a_r}+1)$$

である．$a=\log_{10}(\overline{a_1\ldots a_r})$, $b=\log_{10}(\overline{a_1\ldots a_r}+1)$ として, 示すべきことは, ある自然数 m,n が存在して

$$a \leqq n\log_{10}2 - m < b$$

を満たすということである．ここで $b-a>0$ であるが, $0<\delta<b-a$ を満たすような正数 δ を一つ取る．このとき, $\log_2 10$ が無理数であるから, Kronecker の稠密定理によって, ある自然数 k が存在して $k\log_{10}2$ の小数部分は δ 未満である．つまり, $l=[k\log_{10}2]$ としたときに $0<k\log_{10}2-l<\delta$ を満たす．$\epsilon = k\log_{10}2 - l$ とおく．このとき ϵ の整数倍全体の集合 $S := \{\, N\epsilon \mid N\in\mathbb{Z} \,\}$ は, 数直線上で幅 ϵ を空けながら並ぶので, 幅 $\delta(>\epsilon)$ である開区間 (a,b) 上には必ず S の点が少なくとも一つ含まれる．それを $N_0\epsilon$ とすれば, $N_0\epsilon\in(a,b)$ である．すなわち,

$$a < N_0k\log_{10}2 - N_0 l < b$$

である．よって $n=N_0k$, $m=N_0 l$ を構成すればよい． □