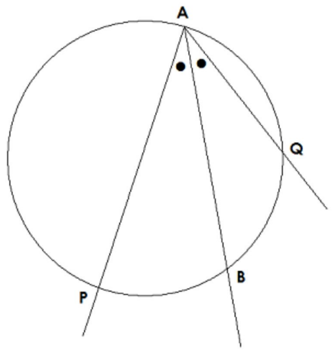
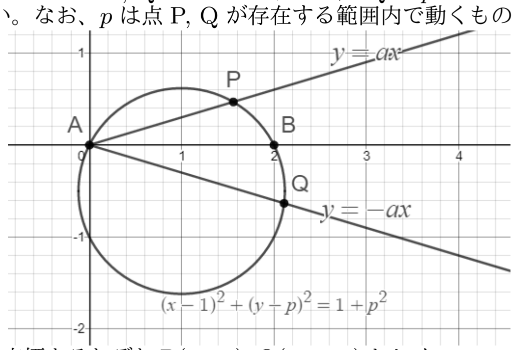
Q.075 ★?

$\angle$A の二等分線上に点 B を決め、線分 AB を弦とする任意の円を描く。このとき、AP+AQ の長さは円の大きさによらず一定となることを示せ。



座標平面上で点 A を原点にとり、$a > 0$ なる定数 a をおき、座標平面上の 2 直線 $y = ax$ と $y = -ax$ をとる。ただし双方とも $x \geq 0$ の範囲内のみ考える。すると x 軸 ($x \geq 0$ の部分) は $\angle$A の 2 等分線になるから、この上に点 B を決める。ここで B$(2, 0)$ として一般性を失わない。線分 AB を弦とするような任意の円は、$(x-1)^2 + (y-p)^2 = 1 + p^2$ によってあらわされる。このとき、この円と $y = \pm ax$ との $x > 0$ における交点がそれぞれ P, Q となるから、AP+AQ が p によらないことを示せばよい。なお、p は点 P, Q が存在する範囲内で動くものとする。



点 P, Q の座標をそれぞれ P(p, ap), Q$(q, -aq)$ とおく。ここで $p, q > 0$。すると、

$$\mathrm{AP} + \mathrm{AQ} = \sqrt{p^2 + (ap)^2} + \sqrt{q^2 + (-aq)^2} = (p+q)\sqrt{1+a^2}$$

である。直線 $y = \pm ax$ と円 $(x-1)^2 + (y-p)^2 = 1 + p^2$ の交点のうち原点でないものの x 座標は、

$$(x-1)^2 + (\pm ax - p)^2 = 1 + p^2$$

を $x \neq 0$ のもとで解いて、$x = \dfrac{2(1 \pm ap)}{1+a^2}$。したがって

$$\mathrm{AP} + \mathrm{AQ} = (p+q)\sqrt{1+a^2} = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}}$$

となって p によらないから、題意は示された。