Математика в техническом университете

Выпуск XII

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

БИБЛИОТЕКА
КОЛОХЗА
ОСКОРКА

Комплекс учебников из 20 выпусков

Под редакцией В. С. Зарубина и А. П. Крищенко

I. Введение в анализ
II. Дифференциальное исчисление функций одного переменного
III. Аналитическая геометрия
IV. Линейная алгебра
V. Дифференциальное исчисление функций многих переменных
VI. Интегральное исчисление функций одного переменного
VII. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля
VIII. Дифференциальные уравнения
IX. Ряды
X. Теория функций комплексного переменного
XI. Интегральные преобразования и операционное исчисление
XII. Дифференциальные уравнения математической физики
XIII. Приближенные методы математической физики
XIV. Методы оптимизации
XV. Вариационное исчисление и оптимальное управление
XVI. Теория вероятностей
XVII. Математическая статистика
XVIII. Случайные процессы
XIX. Дискретная математика
XX. Исследование операций

Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

2-е издание

Под редакцией
д-ра техн. наук, профессора В.С. Зарубина
и д-ра физ.-мат. наук, профессора А.П. Крищенко

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебника для студентов
высших технических учебных заведений

Москва
Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана
2002

УДК 517.946(075.8)
ББК 22.311
М29

Рецензенты: Ю.А. Дубинский, Э.М. Карташов

М29 **Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.** Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII).

ISBN 5-7038-1911-3 (Вып. XII)
ISBN 5-7038-1270-4

Рассмотрены различные постановки задач математической физики для дифференциальных уравнений в частных производных и основные аналитические методы их решения, проанализированы свойства полученных решений. Изложено большое число линейных и нелинейных задач, к решению которых приводит исследование математических моделей различных процессов в физике, химии, биологии, экологии и др.

Содержание учебника соответствует курсу лекций, который авторы читают в МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Для студентов технических университетов. Может быть полезен преподавателям, аспирантам и инженерам.

Ил. 57. Табл. 1. Библиогр. 29 назв.

Выпуск книги финансировал
Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

УДК 517.946(075.8)
ББК 22.311

© Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов, 1996

© Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, 1996

© Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана, 1996

ISBN 5-7038-1911-3 (Вып. XII)
ISBN 5-7038-1270-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый учебник — один из выпусков серии "Математика в техническом университете", ориентированной на студентов технических университетов. Введение, раздел I и приложения книги написаны авторами совместно, разделы II и III – Л.К. Мартинсоном.

Объем знаний, необходимый для понимания содержания книги, не выходит за рамки стандартов по математической подготовке в технических вузах и университетах и предполагает уверенное владение материалом таких разделов математики, как векторный анализ и элементы теории поля, ряды Фурье, теория функций комплексного переменного, обыкновенные дифференциальные уравнения, интегральные преобразования. Для проверки готовности читателя к изучению данного выпуска рекомендуется выполнить задания, приведенные в начале книги.

Расположение материала в трех разделах учебника соответствует трем уровням сложности. Изучение каждого последующего раздела предполагает проработку предыдущего. В полном объеме материал может быть использован для подготовки студентов высшего уровня инженерной квалификации и студентов по специальности "Прикладная математика".

Каждая глава учебнике заканчивается вопросами и задачами, которые рекомендуется решить самостоятельно для закрепления теоретического материала. В полном объеме работу на семинарах по курсу можно проводить с использованием пособия Б.М. Будака, А.А. Самарского, А.Н. Тихонова "Сборник задач по математической физике" (М., 1972).

Ссылки на другие выпуски серии "Математика в техническом университетек" в книге даны римскими цифрами. Список рекомендуемой литературы не претендует на полноту и может быть полезен для дальнейшего изучения проблем, затронутых в настоящей книге.

Авторы выражают свою благодарность проф. В.С. Зарубину за редакторскую работу и ценные замечания по структуре книги, которые были учтены в окончательной редакции.

Задания для самопроверки

1. Найдите производную функции $y(x) = \int\limits_0^x \sin\frac{x-\xi}{a}\,d\xi$. [VII]

2. Для функции $u = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, найдите вектор $\operatorname{grad} u$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. [VII]

3. Для заданных скалярной функции $\varphi(x, y, z)$ и векторного поля $\vec{a}(x, y, z)$ запишите следующие операции векторной алгебры: $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{a})$, $\operatorname{rot}(\varphi\,\vec{a})$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$. [VII]

4. Применяя формулу Остроградского, найдите поток вектора $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$. [VII]

5. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения первого порядка $y' + y = f(x)$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = y_0$. [VIII]

6. Найдите решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + y = f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y_1^0$ и $y'(0) = y_2^0$. [VIII]

7. Найдите решение дифференциального уравнения $y'' - a^2y = 0$, удовлетворяющее граничным условиям $y(0) = 0$ и $y(1) = 1$. [VIII]

8. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$ в тригонометрический ряд Фурье по косинусам. [IX]

9. Найдите коэффициенты разложения функции $u(x) = 1$ на отрезке $[0, 1]$ в тригонометрический ряд Фурье по синусам. [IX]

10. Является ли функция комплексного переменного $f(z) = z^*$, где символом $*$ обозначено комплексное сопряжение, аналитической функцией? [X]

11. Восстановите функцию $u(t)$, если ее изображение по Лапласу имеет вид $\tilde{u}(p) = \frac{e^{-p\tau}}{p^2+1}$, $\tau = \text{const}$. [XI]

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Геометрические объекты и функциональные пространства

$\mathfrak{R}^N$ — евклидово пространство размерности N **1.1**

$\mathfrak{L}_2(\Omega)$ — пространство функций, квадратично интегрируемых с некоторым весом **П2**

M — точка пространства $\mathfrak{R}^N$ **В1**

r_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0 **3.2**

V, Ω — области в пространстве $\mathfrak{R}^3$ (в большинстве случаев ограниченные) **1.3**

Σ, $\partial\Omega$ — границы областей в пространстве $\mathfrak{R}^3$ **2.1**

D, Q — области в пространстве $\mathfrak{R}^2$ **3.3**

C, Γ — границы областей в $\mathfrak{R}^2$ **3.3**

$u(M, t)$ — искомая функция, решение уравнения (задачи) математической физики **В1**

$||u||$ — норма функции u **В1**

x, y, z — декартовы координаты **В1**

r — радиальная координата **3.2**

t — временная переменная **В1**

Символы обозначения производных

$y' \equiv \dfrac{dy}{dx}$, $y'' \equiv \dfrac{d^2y}{dx^2}$ — производные функции $y(x)$ **1.6**

$u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$ — частные производные функции $u(x, t)$ **В1**

$L[u]$ — дифференциальный оператор **П2**

$\widehat{\mathrm{A}}$ — оператор физической величины в квантовой механике **7.4**

Δ — оператор Лапласа **В1**

Δ_2 — двумерный оператор Лапласа **6.1**

$\Delta_{\theta,\varphi}$ — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах **7.3**

$\Box$ — оператор Даламбера **6.4**

Обозначения специальных функций

$\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера **8.3**

$B(x, y)$ — бета-функция **8.4**

$\mathcal{J}_n(x)$ — функция Бесселя n-го порядка **5.2**

$N_n(x)$ — функция Неймана n-го порядка **5.2**

$P_n(x)$ — полином Лежандра **4.3**

$P_l^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра **7.3**

$H_n(x)$ — полином Чебышева – Эрмита **7.2**

$L_p^s(x)$ — обобщенный полином Чебышева – Лагерра **7.3**

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ — сферическая функция **7.3**

$\delta(x)$ — обобщенная дельта-функция **1.4**

$\delta_N(M, M_0)$ — двумерная или трехмерная дельта-функция **3.2**

Физические константы

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл — элементарный электрический заряд

$c = 2{,}99 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме

$\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — рационализированная постоянная Планка

$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная

$\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м — магнитная постоянная

ВВЕДЕНИЕ

В1. Задачи математической физики

Исторически большинство математических моделей, в основе которых лежат дифференциальные уравнения в частных производных, были разработаны для решения задач, описывающих физические процессы прежде всего в гидродинамике, аэромеханике и электродинамике. Как удачно пошутил по этому поводу Дж. Литлвуд, объектами прикладной математики являются "вода, газ и электричество". Именно поэтому в приложениях дифференциальные уравнения в частных производных получили название уравнений математической физики.

В настоящее время с помощью таких уравнений моделируют процессы различной природы: физические, химические, биологические, экологические, экономические и др. Широкое применение методы математической физики находят и при решении инженерных задач.

Такая информационная емкость, или, как говорил А.Д. Сахаров, "всесилие", уравнений математической физики обусловлена тем, что в их основе лежат фундаментальные законы природы, такие, например, как законы сохранения, связанные с симметрией пространства и времени. Именно благодаря этому такие, на первый взгляд, различные процессы, как распространение теплоты в сплошной среде, диффузия химических компонентов, проникновение магнитного поля в хорошо проводящую среду и распространение волн эпидемий, можно описать одинаковыми по форме уравнениями.

Трудно даже сначала представить, что, например, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$, занимающее в типографской строчке меньше места, чем знаменитое $2 \times 2 = 4$, позволяет теоретически описать практически все многообразие электростатических полей в природе и исследованию методов решения только этого уравнения математической физики посвящены многие монографии.

Дифференциальные уравнения отражают внутренние механизмы процессов, которые могут протекать в бесчисленном разнообразии окружающих нас тел, имеющих различные форму, размеры и свойства. Поэтому любое уравнение математической физики имеет бесчисленное множество решений. Особенности же конкретного процесса устанавливают заданием (описанием) дополнительных условий, выделяющих конкретный процесс из всех остальных.

Прежде всего в задаче математической физики, или математического моделирования, выделяют область, в которой следует решить уравнение. Эта область отражает геометрические размеры и форму тела, в котором протекает исследуемый процесс.

Кроме того, на границе области выставляют некоторые ***граничные условия*** на искомую функцию, которые учитывают взаимодействие (связь) процесса в выделенном теле (системе) с аналогичным процессом в окружающих телах. В силу разнообразия форм связи этих процессов на границе области могут быть заданы различные граничные условия. Принятая классификация граничных условий обычно связана с порядком производных искомой функции, которые присутствуют в граничном условии и выражают различные условия связи.

Так, однородные граничные условия первого и второго рода соответствуют равенству нулю искомой функции или ее нормальной производной на границе области, а условия третьего рода задают связь между функцией и ее нормальной производной на границе. Встречаются задачи с "косой" производной, когда в граничном условии фигурирует производная по направлению, не совпадающему с направлением нормали к границе.

Задачи, в которых учитывают граничные условия, называют ***краевыми*** задачами. Если на различных участках границы заданы граничные условия различных типов, то задачу называют ***смешанной*** краевой задачей. Иногда, отвлекаясь от влияния на исследуемый процесс формы и размеров тел, задачу решают в безграничном пространстве. Для эволюционных процессов такие задачи называют задачами Коши.

В линейных задачах математической физики не только дифференциальные уравнения являются линейными, но и граничные условия содержат лишь линейные соотношения между искомой функцией и ее производными. В современной математической физике при моделировании широкого класса явлений и процессов приходится решать задачи, в которых уравнения или краевые условия являются нелинейными. Нарушение принципа суперпозиции делает нелинейные задачи значительно более сложными для решения, чем линейные.

Как в краевых задачах, так и в задачах Коши для уравнений, содержащих временную переменную, необходимо задавать также ***начальные*** условия на искомую функцию и ее производные по времени. Начальные условия описывают состояние системы в момент времени, выбираемый за начало исследуемого процесса. При этом с помощью уравнения мы можем определять состояние системы и в более поздние моменты времени, т.е. изучать эволюцию системы из ее начального состояния.

В специальных случаях могут рассматриваться задачи без начальных условий, когда характер эволюции системы постулируется при постановке задачи. Типичным примером таких задач являются задачи об установившихся процессах колебательного типа.

Итак, формулировка задачи математической физики в общем случае включает в себя задание дифференциального уравнения в частных производных, описывающего изучаемый процесс, а также граничных и начальных условий, выделяющих единственным образом конкретный процесс из бесчисленного множества аналогичных ему.

Ж. Адамаром было введено понятие корректной постановки задачи математической физики. Задача для уравнения в частных производных в рассматриваемой области поставлена корректно, если решение этой задачи существует, единственно и устойчиво к малым изменениям исходных данных.

Рассмотрим более подробно каждое из перечисленных условий корректности постановки задачи математической физики.

Существование и единственность решения задачи есть очевидное требование однозначности интерпретации решения при описании детерминированных процессов. Следует, однако, отметить, что вопрос о существовании и единственности решения предметен только при выборе и указании класса функций, которые могут считаться решением задачи. Одна и та же задача может не иметь решения в одном классе и может иметь единственное решение в другом классе функций.

Принято выделять строгое, или ***классическое***, решение задачи, гладкость которого согласована с дифференциальным уравнением, граничными и начальными условиями. Такое решение содержит все производные, предписываемые дифференциальным уравнением, вплоть до границы и гладко примыкает к начальным данным. Для существования классического решения на функции, фигурирующие в начальных и граничных условиях, а также на саму границу области должны быть наложены достаточно жесткие условия гладкости, которые сформулированы в соответствующих теоремах существования и единственности, доказываемых в теории уравнений в частных производных. Проверка дифференциальных свойств классических решений, записанных часто в виде бесконечных функциональных рядов, также представляет собой во многих случаях технически сложную задачу.

В современной математической физике с использованием результатов теории обобщенных функций в качестве решений задач часто рассматриваются неклассические, или ***обобщенные***, решения. Такие решения в некоторых точках области вообще могут не иметь производных в обычном смысле. В таких точках области следует говорить лишь об обобщенных производных.

Кроме того, в таких задачах при записи граничных и начальных условий можно использовать недифференцируемые, разрывные и даже особые "странные" функции сосредоточенного и мгновенного воздействия, понимая сходимость решений к таким функциям не как равномерную поточечную сходимость, а как сходимость в среднем, или слабую сходимость.

В частности, в нашем курсе мы будем широко использовать обобщенную функцию, которая была введена в математическую физику П. Дираком и получила название дельта-функции. С помощью такой функции мы будем описывать сосредоточенную передачу импульса в задачах о колебаниях тел, мгновенное сосредоточенное воздействие локального теплового источника в теории теплопроводности или распределение электрической плотности точечного заряда в теории электромагнитного поля. В Приложении 1 приведены основные свойства дельта-функции Дирака как обобщенной функции сосредоточенного влияния.

Устойчивость решения к малым изменениям исходных данных для корректности задачи по Адамару означает, что в такой задаче малые возмущения начального состояния могут приводить лишь к малым изменениям последующих состояний. Иначе говоря, решение задачи должно непрерывно зависеть от начальных данных, т.е. если $||u_1(0)-u_2(0)|| \leqslant \varepsilon$, то $||u_1(t)-u_2(t)|| \leqslant K\varepsilon$ для всех $t \in [0,\, t_0]$. При этом для выражения близости элементов по нормам следует выбрать метрические пространства исходных данных ($\mathfrak{F}$) и решений ($\mathfrak{U}$). Одна и та же задача может оказаться корректной по постановке на одной паре метрических пространств $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{U}$ и некорректной на другой паре.

Требование устойчивости решения соответствует очевидному факту, что определение начального состояния системы всегда связано с процессом измерения, который имеет некоторую погрешность. Поэтому физически разумной следует признать только такую постановку задачи, когда достаточно малая погрешность в определении начального состояния системы не приводит к слишком большим ошибкам в прогнозе последующих состояний.

Долгое время в математической физике считалось, что любая задача должна быть поставлена корректно. Однако многие практически важные задачи являются некорректными по постановке. В частности, некорректными оказываются обратные задачи определения характеристик явлений по результатам измерений. К таким обратным задачам относится задача определения теплофизических характеристик материала по результатам измерения температуры в некоторых точках, а также

задача гравиметрии по определению формы и размера аномалии плотности на основании данных измерения силы тяжести на поверхности Земли.

Школой акад. А.Н. Тихонова были разработаны специальные методы регуляризации, позволяющие решать некорректно поставленные задачи и получать из их решения важную информацию. Изложение этих методов можно найти в специальной литературе.

Из всего сказанного выше, безусловно, вытекает и такой вывод: неполно, неправильно или неграмотно поставленную задачу не смогут "спасти" ни обобщенные функции, ни методы регуляризации. Поэтому одной из целей предлагаемого курса является развитие навыков правильной постановки задач математической физики.

B2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

Большое число различных физических задач приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые представляют собой соотношения между искомой функцией u, ее частными производными и независимыми переменными. Наиболее часто в математической физике встречаются дифференциальные уравнения второго порядка. Для двух независимых переменных x и y такое дифференциальное уравнение представляют в общем случае соотношением

$$F(x,\, y,\, u,\, u_x,\, u_y,\, u_{xx},\, u_{xy},\, u_{yy}) = 0. \qquad \text{(B1)}$$

Если дифференциальное уравнение линейно относительно старших производных, то его называют квазилинейным уравнением и записывают в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x,\, y,\, u,\, u_x,\, u_y) = 0, \qquad \text{(B2)}$$

где a_{11}, a_{12} и a_{22} – некоторые функции независимых переменных.

Дифференциальное уравнение называют линейным, если оно линейно как относительно искомой функции, так и относительно ее частных производных. Такое уравнение записывают в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \quad (B3)$$

Если коэффициенты уравнения (B3) не зависят от переменных x и y, то уравнение (B3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.

Уравнениям (B2) и (B3) можно поставить в соответствие квадратичную форм

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$$

и по аналогии с кривыми второго порядка дать классификацию типов уравнений по знаку дискриминанта.

Выделим три типа уравнений в форме (B2) или (B3), назвав их уравнениями ***гиперболического*** типа, если в некоторой точке M (или области G) $D > 0$, ***параболического*** типа, если в точке M $D = 0$, и ***эллиптического*** типа, если в точке M $D < 0$. Здесь $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ – дискримининат уравнения.

Принадлежность уравнения к одному из этих типов определяет некоторые общие свойства его решений и позволяет выбрать методы решения задач для такого уравнения.

Уравнения с переменными коэффициентами могут изменять свой тип в различных точках. Примером такого уравнения смешанного типа является уравнение Трикоми

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0,$$

представляющее интерес для газовой динамики. Так как дискриминант этого уравнения $D = -x$, то уравнение Трикоми является эллиптическим при $x > 0$ и гиперболическим при $x < 0$.

В уравнении (B2) можно произвести замену независимых переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y) \tag{B4}$$

с якобианом преобразования

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

допускающим обратное преобразование. Тогда в новых переменных уравнение (B2) примет вид

$$A_{11}u_{\xi\xi} + 2A_{12}u_{\xi\eta} + A_{22}u_{\eta\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0. \tag{B5}$$

Здесь

$$A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2;$$

$$A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y;$$

$$A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2.$$

Так как $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\, I^2(x, y)$, то рассматриваемое преобразование независимых переменных не меняет тип уравнения. Однако функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ можно выбрать такими, чтобы в новых переменных часть коэффициентов обратилась в нуль, а уравнение (B5) приняло наиболее простой вид, который называют ***канонической формой*** уравнения.

Переход к *канонической форме* можно осуществить с помощью общих интегралов дифференциального уравнения

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dx\,dy + a_{22}(dx)^2 = 0, \tag{B6}$$

которое называют характеристическим для уравнений (B2) и (B3), а его интегралы – характеристическими кривыми, или ***характеристиками.***

Если $\varphi(x, y) = C$ – общий интеграл характеристического уравнения (B6), то вдоль характеристической кривой имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}, \qquad \text{или} \qquad dy = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\,dx. \tag{B7}$$

Подставляя уравнение (В7) в (В6), делаем вывод о том, что функция $z = \varphi(x, y)$ является решением дифференциального уравнения первого порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{B8}$$

Если в некоторой области G уравнение (В2) является уравнением *гиперболического типа* ($D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$), то в этой области характеристическое уравнение распадается на два уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}, \tag{B9}$$

которые имеют два семейства характеристик: $\varphi_1(x, y) = C_1$ и $\varphi_2(x, y) = C_2$. Тогда с помощью преобразования независимых переменных

$$\xi = \varphi_1(x, y); \qquad \eta = \varphi_2(x, y)$$

приходим к уравнению (В5), в котором с учетом (В8) $A_{11} = 0$ и $A_{22} = 0$. Поэтому, разделив полученное выражение на $2A_{12} \neq 0$, приводим уравнение (В5) к канонической форме для уравнений гиперболического типа:

$$u_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{B10}$$

Замечание В1. Если новые переменные ξ и η имеют вид

$$\xi = \frac{\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)}{2}; \qquad \eta = \frac{\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)}{2},$$

то для уравнения гиперболического типа можно записать вторую каноническую форму

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = \Phi_1^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{B11}$$

Если в области G уравнение (В2) принадлежит к уравнению *параболического типа* ($D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$), то в этой области характеристическое уравнение (В6) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

имеет только одно семейство характеристик: $\varphi(x, y) = C$.

Тогда, полагая $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$, где ψ – произвольная функция, линейно независимая с функцией φ, приходим к преобразованному уравнению (B5), в котором $A_{11} = 0$. Но так как для уравнения параболического типа $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = 0$, то, следовательно, и $A_{12} = 0$. Поэтому после перехода к новым независимым переменным уравнение (B5) примет каноническую форму для уравнений параболического типа:

$$u_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \qquad \Phi_2 = -\Phi/A_{22}. \tag{B12}$$

Если уравнение (B2) в области G является уравнением *эллиптического типа* ($D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$), то характеристическое уравнение (B6) приводит к двум уравнениям в комплексной форме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm i\,\frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}}, \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$$

Эти уравнения имеют два комплексно-сопряженных интеграла $\rho_1(x, y) = C_1$ и $\rho_2(x, y) = C_2$, где $\rho_1(x, y) = \varphi(x, y) + i\,\psi(x, y)$, а $\rho_2(x, y) = \varphi(x, y) - i\,\psi(x, y)$, причем функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ являются действительными функциями своих аргументов.

Функции $z_1 = \rho_1(x, y)$ и $z_2 = \rho_2(x, y)$ являются решениями уравнения (B8) в комплексной области. Поэтому, подставляя их в уравнение (B8), получим тождество

$$[(a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2) - (a_{11}\psi_x^2 + 2a_{12}\psi_x\psi_y + a_{22}\psi_y^2)] + \\ + 2i\,[a_{11}\varphi_x\psi_x + a_{12}(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + a_{22}\varphi_y\psi_y] = 0,$$

из которого следует, что после преобразования переменных $\xi = \varphi(x, y)$ и $\eta = \psi(x, y)$ в уравнении (B5) $A_{11} = A_{22}$, а $A_{12} = 0$. Поэтому после преобразования уравнение (B5) можно записать в канонической форме для эллиптического уравнения:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = \Phi_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \qquad \Phi_3 = -\Phi/A_{11}. \tag{B13}$$

Линейное уравнение (В3) с постоянными коэффициентами имеет одинаковый тип в любой области G. Такому уравнению соответствует характеристическое уравнение (В6) также с постоянными коэффициентами. Поэтому *характеристиками* линейного уравнения с постоянными коэффициентами являются прямые

$$y = kx + b,$$

где $k = \dfrac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}$; $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

С помощью указанных выше преобразований переменных уравнение (В3) гиперболического типа ($D > 0$) приводится к одной из следующих форм:

$$u_{\xi\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0$$

или

$$u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0.$$

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами параболического ($D = 0$) и эллиптического ($D < 0$) типов имеют соответственно канонические формы:

$$u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0;$$

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1 u_\xi + b_2 u_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0.$$

Если теперь ввести новую неизвестную функцию $v(\xi, \eta)$ по правилу

$$u(\xi, \eta) = e^{\mu\xi + \nu\eta} v(\xi, \eta),$$

где μ и ν – некоторые постоянные, то с помощью подбора значений этих постоянных канонические формы для линейных уравнений с постоянными коэффициентами можно привести к виду

$$v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1(\xi, \eta) = 0;$$

$$v_{\eta\eta} + b v_\xi + f_1(\xi, \eta) = 0;$$

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1(\xi, \eta) = 0$$

для гиперболического, параболического и эллиптического типов уравнения соответственно.

Аналогичным образом может быть дана классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для случая более двух независимых переменных. Обычно в задачах математической физики число независимых переменных не превышает четырех, причем одно из них – время, а три других – пространственные переменные. Поэтому в достаточно общем случае линейные дифференциальные уравнения второго порядка гиперболического, параболического и эллиптического типов с постоянными коэффициентами можно свести к следующим каноническим формам соответственно:

$$\Delta u - u_{tt} + pu = f(x_1, x_2, x_3, t); \tag{B14}$$

$$\Delta u - u_t = f(x_1, x_2, x_3, t); \tag{B15}$$

$$\Delta u + pu = f(x_1, x_2, x_3). \tag{B16}$$

Здесь $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Лапласа по пространственным переменным.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1.1. Уравнение колебаний струны

Рассмотрим процесс колебаний тонкой упругой нити, которая может свободно изгибаться, не оказывая сопротивления изменению ее формы. В этом случае напряжения (силы натяжения), возникающие в упругой нити, направлены по касательной к ее мгновенному профилю. Такую нить в дальнейшем будем называть струной.

Пусть в положении равновесия струна расположена вдоль оси Ox. Будем рассматривать только поперечные колебания струны, считая, что перемещение частиц струны происходит в одной плоскости и все точки струны движутся перпендикулярно оси Ox.

Обозначим через $u(x, t)$ отклонение от положения равновесия точки струны с абсциссой x в момент времени t. При фиксированном значении t график функции $u(x, t)$ представляет собой форму струны в момент времени t (рис. 1.1).

Далее будем рассматривать только малые поперечные колебания струны, когда смещения u и производные $\partial u/\partial x$ столь малы, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с значениями самих величин. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha; \qquad 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \approx 1;$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} \approx 1.$$

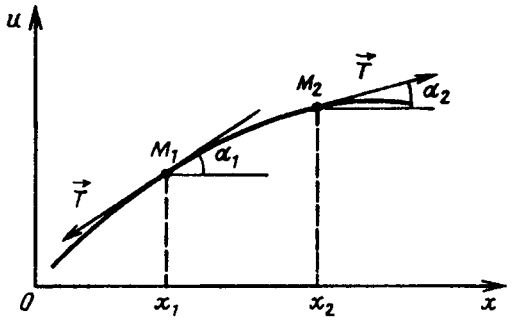


Рис. 1.1

Из предположения о малости колебаний следует, что длина выделенного участка струны в любой момент времени равна:

$$\pounds' = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = \pounds.$$

Это означает, что в процессе малых колебаний удлинением участков струны можно пренебречь. В этом случае, согласно закону Гука, натяжение T в каждой точке струны не будет изменяться.

Покажем, что натяжение T можно считать не зависящим от точки приложения x. Действительно, для поперечных колебаний струны сумма проекций на ось Ox сил натяжения, действующих на концах участка струны M_1M_2, равна нулю:

$$-T(x_1)\cos\alpha(x_1) + T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

где $\alpha(x)$ – угол между касательной к струне и осью Ox в некоторый момент времени.

Так как для малых колебаний $\cos\alpha(x_1) \approx \cos\alpha(x_2) = 1$, то $T(x_1) = T(x_2)$. Таким образом, можно считать, что $T = T_0 = \text{const}$ для всех значений x и t.

В случае вынужденных колебаний на струну действует внешняя распределенная сила $\mathcal{F}(x, t)$, направление которой будем считать перпендикулярным оси Ox.

Распределение масс в струне будем характеризовать линейной плотностью $\rho(x)$, которая в общем случае изменяется вдоль струны. Для однородной струны постоянного сечения $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

Перейдем к построению математической модели процесса малых поперечных колебаний струны. В основе этой модели лежит закон динамики поступательного движения (закон Ньютона), который для механической системы имеет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}, \tag{1.1}$$

где $\vec{P}$ – импульс системы, равный сумме импульсов всех ее частиц; $\vec{F}$ – результирующая внешняя сила.

В качестве такой механической системы рассмотрим выделенный участок струны $x_1 < x < x_2$. Учитывая, что движение этой системы происходит в направлении, перпендикулярном оси Ox, запишем уравнение (1.1) в проекции на ось Ou:

$$\frac{dP}{dt} = F. \tag{1.2}$$

Так как проекция суммарного импульса системы

$$P = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx,$$

то

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx.$$

Проекция внешних сил состоит из двух слагаемых. Одно из них учитывает действие сил натяжения на концах выделенного участка струны, а другое – суммарную вынуждающую силу,

действующую на частицы этого участка струны. Эти проекции определяются (см. рис. 1.1) следующими соотношениями:

$$F_1 = T_0 \sin\alpha_2 - T_0 \sin\alpha_1 \approx T_0 \left(\frac{u}{x}\bigg|_{x=x_2} - \frac{u}{x}\bigg|_{x=x_1} \right) = T_0 \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, dx;$$

$$F_2 = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x,\, t)\, dx.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (1.2), запишем ее в виде следующего интегрального равенства:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \left\{ \rho(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mathcal{F}(x,\, t) \right\} dx = 0. \tag{1.3}$$

В силу произвольности выбора отрезка $[x_1,\, x_2]$ из уравнения (1.3) следует, что в любой точке струны в любой момент времени t подынтегральное выражение должно обращаться в нуль, т.е.

$$\rho(x)\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{F}(x,\, t). \tag{1.4}$$

Полученное соотношение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно искомой функции $u(x,\, t)$. Оно описывает процесс малых поперечных колебаний струны, и его называют неоднородным одномерным ***волновым уравнением***, или уравнением плоских волн. Это уравнение гиперболического типа.

В случае постоянной линейной плотности $\rho = \rho_0 = \text{const}$ уравнение колебаний однородной струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\, t), \tag{1.5}$$

где $a = \sqrt{T_0/\rho_0}$; $f(x,\, t) = \mathcal{F}(x,\, t)/\rho_0$.

Если $f(x, t) \equiv 0$, то однородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.6}$$

описывает свободные колебания струны без воздействия вынуждающей силы.

Уравнения вида (1.4) – (1.6) описывают не только колебания струны, но и ряд других физических процессов, которые называют волновыми. К ним, в частности, относят следующие:

1. Продольные или крутильные колебания стержня постоянного поперечного сечения (рис. 1.2). Для продольных колебаний $u(x, t)$ – продольное смещение в момент времени t элемента стержня с координатой x от своего положения равновесия, а $a = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга материала стержня, ρ – плотность.

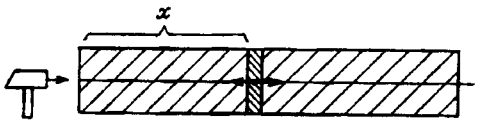


Рис. 1.2

Для крутильных колебаний $u(x, t)$ – угол поворота поперечного сечения стержня с координатой x в момент времени t, а $a = \sqrt{C/I}$. Здесь C – крутильная жесткость стержня, а I – момент инерции единицы длины стержня относительно его продольной оси. Для стержня кругового сечения радиуса R их можно рассчитать по формулам $C = G\frac{\pi R^4}{2}$; $I = \rho\frac{\pi R^4}{2}$. Поэтому $a = \sqrt{G/\rho}$, где G – модуль сдвига материала.

2. Плоские акустические (звуковые) волны в жидкостях и газах (рис. 1.3). В этом процессе волновому уравнению подчиняются возмущения давления p и плотности ρ среды или потенциал скорости. Для изэнтропических (адиабатических) течений сред с уравнением состояния $p = f(\rho)$ скорость a распространения возмущений (скорость звука) определяется выражением $a^2 = \frac{dp}{d\rho}|_{\rho=\rho_0} = f'(\rho_0)$. В частности, если $p =$

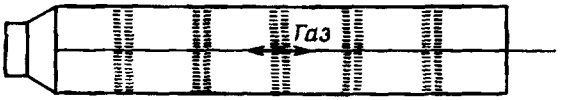


Рис. 1.3

$= p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$, где $\gamma = c_p/c_V$ – показатель адиабаты газа, то $a = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, где p_0 и ρ_0 – невозмущенные значения давления и плотности среды.

3. Распространение электрических возмущений в линии (рис. 1.4) при отсутствии потерь. Для такого процесса $u(x, t)$ – напряжение или сила тока в момент времени t на элементах проводов, имеющих координату x. Если L и C – распределенные индуктивность и емкость проводов на единицу длины, то $a = \sqrt{1/(LC)}$.

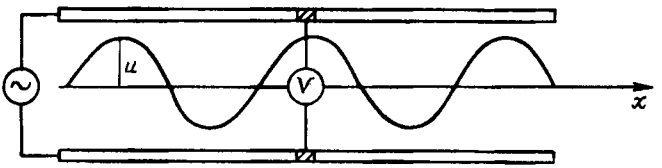


Рис. 1.4

4. Плоские электромагнитные волны в непроводящих средах (рис. 1.5). Здесь $u(x, t)$ – напряженность электрического (E) или магнитного (H) полей; $a = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где c – скорость света в вакууме, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно.

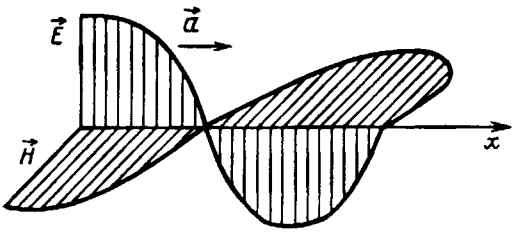


Рис. 1.5

1.2. Задача Коши для гиперболического уравнения

Формула Даламбера. Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т.е. достаточно длинной струны, влиянием концов которой на процесс колебаний можно пренебречь.

Причинами, вызывающими такие колебания, могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения или сообщенный струне начальный импульс, обусловливающий некоторое распределение скоростей частиц струны. Поэтому, описывая свободные колебания бесконечной струны, мы должны решить однородное уравнение свободных колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \tag{1.7}$$

при начальных условиях

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \tag{1.8}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси.

Начальные условия (1.8) вполне однозначно определяют колебания бесконечной струны. При этом задачу (1.7), (1.8) называют ***задачей с начальными условиями,*** или ***задачей Коши.***

Решение этой задачи проведем ***методом Даламбера.*** Для этого введем новые независимые переменные

$$\xi = x - at; \qquad \eta = x + at.$$

Преобразуя производные к новым переменным, находим:

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -a\, u_\xi + a\, u_\eta = a\,(u_\eta - u_\xi);$$
$$u_{tt} = a\,(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t - u_{\xi\xi}\xi_t - u_{\xi\eta}\eta_t) = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta});$$
$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta;$$
$$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.$$

Уравнение (1.7) в новых переменных запишется в виде следующего дифференциального уравнения для функции $u(\xi, \eta)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Непосредственной проверкой можно установить, что этому уравнению удовлетворяет функция вида

$$u(\xi, \eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta),$$

где $u_1(\xi)$ и $u_2(\eta)$ – произвольные дважды дифференцируемые функции. Следовательно, функция

$$u(x, t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \tag{1.9}$$

удовлетворяет уравнению (1.7).

Определим теперь u_1 и u_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (1.8). Тогда

$$u(x, 0) = u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \tag{1.10}$$

$$u_t(x, 0) = -au_1'(x) + au_2'(x) = \psi(x). \tag{1.11}$$

Интегрируя второе равенство в пределах от x_0 до x, получаем

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\, d\theta + C, \tag{1.12}$$

где x_0 и C – постоянные.

Из системы уравнений (1.10) и (1.12) имеем

$$u_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\, d\theta - \frac{C}{2};$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\, d\theta + \frac{C}{2}.$$

Подставляя теперь функции u_1 и u_2 в уравнение (1.9), находим

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\,\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at}\psi(\theta)\,d\theta +$$

$$+\frac{1}{2}\,\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at}\psi(\theta)\,d\theta,$$

или

$$u(x,\,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\theta)\,d\theta. \qquad (1.13)$$

Если функция $\varphi(x)$ имеет производные до второго порядка включительно, а функция $\psi(x)$ – до первого порядка, то формула (1.13) определяет решение задачи Коши (1.7), (1.8). При этом соотношение (1.13) называют ***формулой Даламбера.***

Из формулы Даламбера следует, что задача Коши (1.7), (1.8) для волнового уравнения имеет единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий, т.е. если $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta_1$ и $|\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta_2$, то $|u_1(x,\,t)-u_2(x,\,t)|<\varepsilon$, причем $\varepsilon\to 0$ при $\delta_{1,2}\to 0$. Это свойство непрерывной зависимости решения от начальных условий обеспечивает корректность постановки задачи Коши для гиперболического уравнения, являющуюся следствием физической детерминированности описываемого волнового процесса.

Распространение волн отклонения. Пусть в задаче Коши (1.7), (1.8) $\psi(x)\equiv 0$, т.е. струна колеблется только в результате ее начального отклонения, форма которого определяется функцией $\varphi(x)$. Решение (1.13) принимает в этом случае простой вид:

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\,[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]. \qquad (1.14)$$

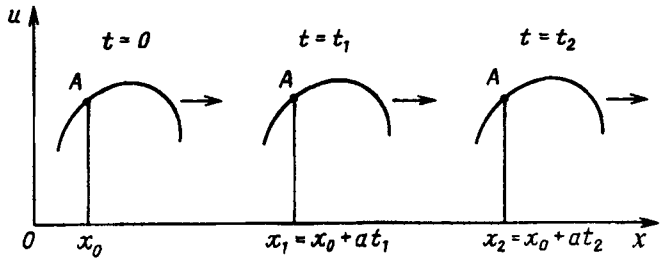


Рис. 1.6

Дадим физическую интерпретацию каждого слагаемого в этой формуле. Для этогорассмотрим сначала функцию

$$u_1(x, t) = f(x - at).$$

Изобразим график этой функции в различные моменты времени $t=0$, $t=t_1$ и $t=t_2$ $(t_2>t_1)$ (рис. 1.6).

Видно, что функция $u_1(x, t)$ представляет собой неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо в положительном направлении оси Ox с конечной скоростью, равной a. При этом отклонение в точке x_2 повторяет отклонение в точке x_1 лишь со сдвигом по времени на время запаздывания $\tau=(x_2-x_1)/a$.

В подвижной системе координат, движущейся вправо со скоростью a, наблюдатель будет видеть все время один и тот же как бы "застывший" профиль струны.

Такой процесс распространения отклонений (возмущений) в струне представляет собой волновой процесс. При этом волну, бегущую с постоянной скоростью a вправо вдоль оси Ox, назовем прямой бегущей волной.

Наглядное изображение такого волнового процесса можно получить, вводя плоскость состояний (x, t) и описывая исследуемый процесс в верхней полуплоскости $t>0$ (рис. 1.7).

Функция $u_1(x, t)$ сохраняет постоянные значения на линиях $x-at=\text{const}$ плоскости (x, t), которые являются характеристиками волнового уравнения (1.7).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ отлична от нуля лишь в интервале $x_1<x<x_2$ и равна нулю вне этого интервала.

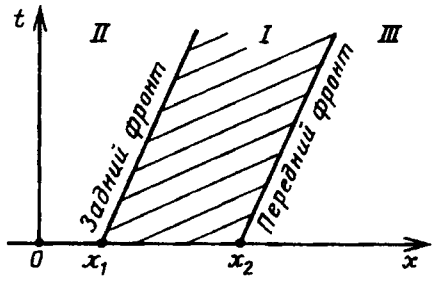


Рис. 1.7

Функцию такого вида называют ***финитной***, а отрезок $[x_1, x_2]$ – ***носителем*** этой финитной функции.

Для этого случая на плоскости состояний проведем через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ характеристики $x-at=x_1$ и $x-at=x_2$ (см. рис. 1.7). Они разбивают полуплоскость $t>0$ на три области. В области I функция $u_1(x, t)=f(x-at)$ отлична от нуля, причем характеристики $x-at=x_1$ и $x-at=x_2$ выделяют передний и задний фронты распространяющейся направо волны, так как на плоскости состояний они отделяют область возмущений I от невозмущенных областей II и III, где функция $u_1(x, t)$ равна нулю.

Замечание 1.1. Функция $f(x-at)$ не только является решением волнового уравнения (1.7), но и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial f}{\partial t}+a\,\frac{\partial f}{\partial x}=0,$$

выделяющему прямые бегущие волны в волновых процессах. #

Очевидно, что функция $u_2(x, t)=f(x+at)$ представляет собой волну, распространяющуюся с постоянной скоростью a влево в отрицательном направлении оси Ox. Такую волну назовем обратной бегущей волной.

На плоскости состояний процесс распространения обратной волны для финитной функции $f(x)$ можно проиллюстрировать с помощью рис. 1.8. Функция $u_2(x, t)=f(x+at)$ постоянна

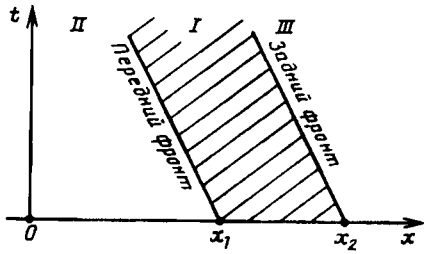


Рис. 1.8

вдоль характеристик из семейства, описываемого уравнением $x+at = \text{const}$. Две характеристики $x+at = x_1$ и $x+at = x_2$, проходящие через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, выделяют фронты обратной волны.

Таким образом, решение (1.14) задачи о распространении волн отклонения представляет собой суперпозицию (наложение) прямой и обратной бегущих волн, профиль которых с точностью до множителя, равного $1/2$, совпадает с профилем начального распределения отклонений струны.

Распространение волн импульса. Пусть теперь в задаче Коши (1.7), (1.8) $\varphi(x) \equiv 0$, а струна колеблется в результате сообщения ее частицам в начальный момент времени импульса (скорости).

Решение Даламбера (1.13) в этом случае запишется в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\, d\theta. \tag{1.15}$$

Покажем, что и это решение представляет собой суперпозицию двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях со скоростью a. Для этого введем функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{a} \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\, d\theta,$$

являющуюся с точностью до постоянного множителя первообразной для начального распределения скоростей $\psi(x)$.

Тогда формуле (1.15) можно придать вид

$$u(x,\,t) = \frac{1}{2}\,[\Psi(x+at) - \Psi(x-at)].$$

Такая форма решения показывает, что и в случае сообщения частицам струны начального импульса колебания распространяются в виде прямых и обратных бегущих волн.

Метод характеристик. Каким образом рассчитать возмущение $u(x_0, t_0)$ в некоторой точке струны с координатой x_0 в момент времени t_0 в общем случае распространения волн отклонения и волн импульса?

Для этого на плоскости состояний $(x,\,t)$ построим треугольник (рис. 1.9), проведя через точку $M_0(x_0,\,t_0)$ две характеристики $x \pm at = \text{const}$, которые пересекут ось Ox в точках M_1 и M_2 с абсциссами $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$. Такой треугольник $M_1M_0M_2$ назовем характеристическим треугольником.

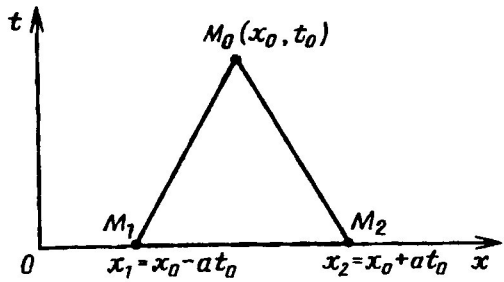


Рис. 1.9

Из формулы Даламбера (1.13) следует, что возмущение точки струны с координатой x_0 в момент времени t_0 определяется только значениями начального отклонения в вершинах M_1 и M_2 характеристического треугольника и значениями начальной скорости частиц струны, расположенных на основании M_1M_2 этого треугольника.

Действительно, формула (1.13) при $x = x_0$ и $t = t_0$ дает

$$u(M_0) = \frac{1}{2}\,[\varphi(M_1) + \varphi(M_2)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{M_1}^{M_2} \psi(\theta)\,d\theta.$$

БИБЛИОТЕКА КОЛОХЗА
ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

Это свойство решения задачи Коши (1.7), (1.8) обусловлено конечной скоростью распространения возмущений в процессах, описываемых волновым уравнением гиперболического типа.

1.3. Обобщенные решения

Формула Даламбера (1.13) определяет единственное решение задачи Коши и в том случае, когда начальный профиль струны задается кусочно-гладкой функцией $\varphi(x)$, а начальные скорости частиц струны описываются кусочно-непрерывной функцией $\psi(x)$.

Такое решение уже не будет классическим решением, так как формально функция $u(x, t)$ из уравнения (1.13) при этом может не удовлетворять уравнению (1.7) в некоторых точках плоскости состояний (x, t), где соответствующие частные производные функции $u(x, t)$ не определены.

Такое решение задачи математической физики, которое в некоторых точках не имеет всех производных, предписываемых дифференциальным уравнением, называют ***обобщенным*** решением.

Определение 1.1. Функцию $u(x, t)$ назовем *обобщенным* решением задачи Коши (1.7), (1.8), если существует последовательность $u_1(x, t)$, $u_2(x, t), \ldots, u_n(x, t), \ldots$ гладких классических решений этой задачи, такая, что $||u_n - u|| \to 0$ при $n \to \infty$. #

Предельная функция u для последовательности $\{u_n\}$ уже не обязательно всюду дифференцируема (рис. 1.10, *а*), а может быть даже разрывной (рис. 1.10, *б*).

Поэтому предельный переход последовательности гладких функций $u_n(x, t)$ можно рассматривать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле сходимости по норме в некотором классе функций.

Например, в качестве нормы $||u_n - u||$ может быть выбрана норма в классе функций, интегрируемых с квадратом, т.е.

$$||u_n - u|| = \left(\max_t \int_{-\infty}^{+\infty} (u_n - u)^2\, dx\right)^{1/2}.$$

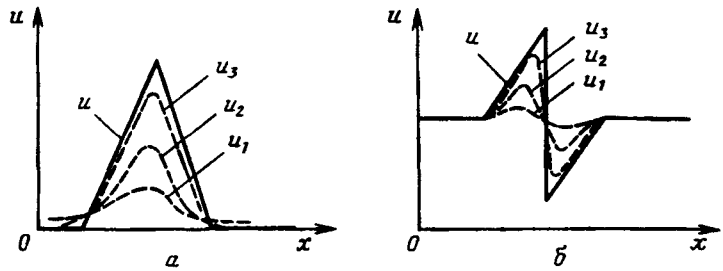


Рис. 1.10

В этом случае сходимость последовательности функций u_n к u следует понимать как сходимость в среднем.

Поэтому, определяя *обобщенное* решение задачи математической физики, мы должны указать класс функций, для которых вводится такое решение.

С.Л. Соболев дал другое определение обобщенного решения дифференциального уравнения, которое не прибегает к помощи предельного перехода в последовательности классических решений, а использует понятие обобщенных производных функций различных классов.

Рассмотрим, например, в некоторой области $\Omega \subset \mathfrak{R}^2$ волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (x, t) \in \Omega. \tag{1.16}$$

Введем в рассмотрение класс так называемых ***пробных*** функций. Функция $\eta(x, t)$ из этого класса имеет в области Ω непрерывные производные, по крайней мере, до второго порядка включительно. Кроме того, пробная функция обращается в нуль вне некоторой внутренней части σ области Ω.

Если уравнение (1.16) умножить на пробную функцию $\eta(x, t)$ и проинтегрировать по области Ω, то можно записать следующее интегральное равенство:

$$\iint\limits_{\Omega} \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx\, dt = 0. \tag{1.17}$$

Дифференциальное уравнение (1.16) и интегральное равенство (1.17) эквивалентны в классе функций, имеющих непрерывные производные до второго порядка включительно. Это значит, что если функция $u(x, t)$ является классическим решением дифференциального уравнения (1.16), то для нее выполняется интегральное равенство (1.17), и, наоборот, если для любой пробной функции $\eta(x, t)$ выполнено интегральное равенство (1.17), то это возможно только для функции $u(x, t)$, являющейся решением дифференциального уравнения (1.16).

Преобразуем уравнение (1.17) двукратным интегрированием по частям по переменным x и t. Так как пробная функция η и ее производные обращаются в нуль вне области σ, то внеинтегральные члены при интегрировании обратятся в нуль и в результате получим еще одно интегральное равенство

$$\iint\limits_{\Omega} u\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right) dx\,dt = 0. \tag{1.18}$$

Назовем обобщенным решением дифференциального уравнения (1.16) в области Ω функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую интегральному равенству (1.18) для любой функции $\eta(x, t)$ из класса пробных функций.

Так как в процессе преобразования выражения (1.17) в (1.18) производные от функции u "перешли" к пробной функции η, в качестве обобщенного решения дифференциального уравнения (1.16) теперь можно рассматривать также и такие функции, которые не имеют во всех точках области Ω производных, предписываемых дифференциальным уравнением (1.16).

Обобщенные решения дифференциальных уравнений широко применяются при решении задач для уравнений в частных производных, тем самым расширяется класс функций, используемых в современной математической физике.

Отметим, что введенное с помощью интегрального равенства (1.18) обобщенное решение дифференциального уравнения в частных производных тесно связано с понятием ***обобщенной производной***, которое распространяет классическое по-

нятие производной на некоторые классы недифференцируемых в обычном смысле функций.

Пусть $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$ – конечная область N-мерного евклидова пространства. Рассмотрим две бесконечно дифференцируемые в области Ω функции $u(x) = u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ и $v(x) = v(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Пусть при этом функция $v(x)$ финитна в Ω, т.е. эта функция равна нулю как на границе области Ω, так и в некоторой узкой приграничной полосе достаточно малой ширины $\delta > 0$. Тогда с помощью интегрирования по частям приходим к равенству

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j} v(x)\, dV = -\int\limits_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dV,$$

где $dV = dx_1\, dx_2 \cdots dx_N$ – элемент объема пространства $\mathfrak{R}^N$.

Полученное интегральное соотношение можно использовать для определения *обобщенной производной* функции $u(x)$ даже в том случае, если эта функция не дифференцируема в обычном классическом смысле. Следуя С.Л. Соболеву, рассмотрим интегрируемую в Ω функцию $u(x)$ и определим обобщенную частную производную этой функции в области Ω как такую функцию

$$u'_j(x) \equiv \frac{\partial u}{\partial x_j}, \qquad x \in \Omega,$$

для которой справедливо тождество

$$\int\limits_{\Omega} u'_j(x)\, v(x)\, dV = -\int\limits_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dV,$$

если в качестве функции $v(x)$ взять любую финитную бесконечно дифференцируемую в Ω функцию.

Замечание 1.2. Определяя обобщенную производную функции $u(x)$ k-го порядка, финитную функцию $v(x)$ можно считать непрерывно дифференцируемой в Ω лишь k раз. #

Можно показать, что если функция $u(x)$ непрерывна в Ω вместе со своими производными (обычными классическими)

до k-го порядка включительно, то существуют и ее обобщенные производные k-го порядка, которые совпадают при этом с обычными.

Однако в общем случае из существования у функции $u(x)$ обобщенных производных k-го порядка не следует существование у этой функции обобщенных производных более низкого порядка.

Обобщенная производная в отличие от классической производной имеет некий "интегральный характер," так как в ее определение входит область Ω. Правда, если $u'_j(x)$ есть обобщенная производная функции $u(x)$ в области Ω, то $u'_j(x)$ является также обобщенной производной функции $u(x)$ в любой подобласти Ω' области Ω.

В качестве примера нахождения обобщенной производной покажем, что на интервале $(-1, +1)$ функция $u(x) = |x|$ имеет обобщенную производную $u'(x) = \operatorname{sgn} x$.

Действительно, пусть $v(x)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-1, +1]$ функция, причем $v(-1) = v(+1) = 0$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} |x| \frac{dv}{dx}\, dx = -\int_{-1}^{0} x \frac{dv}{dx}\, dx + \int_{0}^{+1} x \frac{dv}{dx}\, dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{-1}^{0} x \frac{dv}{dx}\, dx = -\int_{-1}^{0} v(x)\, dx; \qquad \int_{0}^{+1} x \frac{dv}{dx}\, dx = -\int_{0}^{+1} v(x)\, dx.$$

Поэтому

$$\int_{-1}^{+1} |x| \frac{dv}{dx}\, dx = \int_{-1}^{0} v(x)\, dx - \int_{0}^{+1} v(x)\, dx.$$

Это соотношение можно записать как интегральное равенство

$$\int_{-1}^{+1} |x| \frac{dv}{dx}\, dx = -\int_{-1}^{+1} \operatorname{sgn} x \cdot v(x)\, dx,$$

из которого следует, что обобщенной производной функции $u(x) = |x|$ на интервале $(-1, +1)$ является функция $u'(x) = \operatorname{sgn} x$. В этом примере интервал $(-1, +1)$ включает в себя точку $x = 0$, в которой функция $u(x) = |x|$ не имеет обычной классической производной.

1.4. Колебания полуограниченной струны

Если при описании процесса колебаний струны учесть влияние одного из ее концов ($x = 0$), то можно проанализировать колебания в полуограниченной струне, вызванные граничным возмущением, и изучить процесс отражения волн от конца струны.

Сформулируем следующую начально-краевую задачу для полуограниченной прямой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad x > 0$$

– уравнение,

$$u(0, t) = \mu(t), \qquad t \geqslant 0$$

– граничное условие и (1.19)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \geqslant 0;$$
$$u_t(x, 0) = \psi(x), \qquad x \geqslant 0$$

– начальные условия.

Здесь заданная функция $\mu(t)$ описывает закон движения конца струны. В частном случае она может быть периодической функцией времени.

Учитывая линейность задачи (1.19), найдем ее решение в виде суммы $u = w + v$ решений двух вспомогательных задач,

одна из которых соответствует нулевым начальным данным, а другая – однородному граничному условию:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ w(0,\, t) = \mu(t); \\ w(x,\, 0) = 0; \\ w_t(x,\, 0) = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \\ v(0,\, t) = 0; \\ v(x,\, 0) = \varphi(x); \\ v_t(x,\, 0) = \psi(x). \end{cases} \tag{1.20}$$

Решение первой задачи (1.20) найдем с помощью применения преобразования Лапласа [XI] по временной переменной $t \geqslant 0$. После такого преобразования $w(x,\, t) \doteqdot \widetilde{w}(x,\, p)$, $\mu(t) \doteqdot \widetilde{\mu}(p)$ и первая из задач (1.20) сводится к простой задаче для нахождения изображения

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{d^2 \widetilde{w}}{dx^2} = p^2 \widetilde{w}, \qquad x > 0; \\ \widetilde{w}(0,\, p) = \widetilde{\mu}(p). \end{cases} \tag{1.21}$$

Общее решение уравнения (1.21) имеет вид

$$\widetilde{w}(x,\, p) = C_1 e^{-\frac{p}{a}x} + C_2 e^{+\frac{p}{a}x}. \tag{1.22}$$

Константу C_2 следует положить равной нулю, чтобы для $\mathrm{Re}\, p > 0$ исключить неограниченно растущие при $x \to +\infty$ решения.

Выполняя граничное условие в точке $x = 0$, получаем

$$\widetilde{w}(0,\, p) = C_1 = \widetilde{\mu}(p). \tag{1.23}$$

Тогда решение (1.22) примет вид

$$\widetilde{w}(x,\, p) = \widetilde{\mu}(p)\, e^{-\frac{p}{a}x}. \tag{1.24}$$

Из выражения (1.24) по теореме запаздывания [XI] можно найти оригинал

$$w(x,\, t) = \begin{cases} \mu(t - x/a), & x < at; \\ 0, & x > at, \end{cases} \tag{1.25}$$

который и является решением первой задачи (1.20).

Такое решение имеет простой физический смысл. Так как возмущения в струне распространяются в виде волн с конечной скоростью, равной a, то колебания в точке с абсциссой x повторяют колебания струны в точке $x = 0$ с запаздыванием по времени на величину $\tau = x/a$. Кроме того, в любой момент времени $t > 0$ существует область $x > at$, куда возмущения от конца струны еще не дошли.

Решение второй задачи (1.20) проведем методом распространяющихся волн с продолжением начальных данных на всю прямую $-\infty < x < +\infty$. Для этого докажем сначала, что если в задаче (1.7), (1.8) о колебаниях на неограниченной прямой начальные данные являются нечетными функциями относительно точки $x = 0$, то в этой точке в любой момент времени решение равно нулю.

Действительно, если в задаче (1.7), (1.8) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ и $\psi(-x) = -\psi(x)$, то по формуле Даламбера (1.13) получим

$$u(0,\, t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{+at} \psi(\theta)\, d\theta = 0,$$

поскольку интеграл от нечетной функции в симметричных относительно начала координат пределах равен нулю.

Доказанное свойство задачи Коши (1.7), (1.8) позволяет утверждать, что если во второй задаче (1.20) начальные данные продолжить нечетным образом на область $x < 0$ и рассмотреть получившуюся для функции $v(x,\, t)$ задачу Коши на неограниченной прямой с начальными данными

$$\begin{aligned} v(x,\, 0) &= \varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \\ v_t(x,\, 0) &= \psi^*(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0; \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.26}$$

то ее решение, найденное по формуле Даламбера,

$$v(x,\, t) = \frac{\varphi^*(x - at) + \varphi^*(x + at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi^*(\theta)\, d\theta \tag{1.27}$$

для всех $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$ является также решением второй задачи (1.20).

Действительно, эта функция, являющаяся решением волнового уравнения, равна нулю в точке $x = 0$ в любой момент времени $t \geqslant 0$ из-за нечетности начальных данных (1.26), а при $t = 0$ и $x > 0$ удовлетворяет начальным условиям второй задачи (1.20)

$$v(x, 0) = \varphi^*(x > 0) = \varphi(x), \quad x > 0;$$
$$v_t(x, 0) = \psi^*(x > 0) = \psi(x), \quad x > 0.$$

Таким образом, с учетом начальных данных (1.26) решение (1.27) второй задачи (1.20) можно окончательно записать в виде

$$v(x, t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\, d\theta, \\ \qquad\qquad x > 0, \quad t < x/a; \\ \dfrac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{at-x}^{at+x} \psi(\theta)\, d\theta, \\ \qquad\qquad x > 0, \quad t > x/a. \end{cases} \tag{1.28}$$

Проанализируем полученное решение. В области $x > at$ влияние границы не сказывается и решение (1.28) здесь полностью совпадает с решением для бесконечной струны (1.13). В области $x < at$ волна, пришедшая из вспомогательной области $x < 0$, реально описывает воздействие волны, отраженной от закрепленного конца $x = 0$. Из решения (1.28) следует, что при отражении волны от закрепленного конца знак отклонения струны изменяется на противоположный.

Замечание 1.3. Вторую задачу (1.20) можно решить и для случая свободного (незакрепленного) конца, когда граничное условие имеет вид $v_x(0, t) = 0$. При решении такой задачи начальные данные следует продолжить в область $x < 0$ четным образом. В такой задаче отражение волны от свободного конца будет происходить без изменения знака отклонения. #

Как уже указывалось, решение задачи (1.19) можно записать в виде суммы решений (1.25) и (1.28) вспомогательных задач (1.20):

$$u(x,\,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\theta)\,d\theta,\\ \qquad\qquad x>0,\quad t<x/a;\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right)+\dfrac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\\ +\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{at+x}\psi(\theta)\,d\theta,\quad x>0,\quad t>x/a.\end{cases}\tag{1.29}$$

1.5. Краевые задачи для гиперболического уравнения

Математическое описание процессов поперечных колебаний струны или продольных колебаний стержня конечной длины должно быть дополнено помимо начальных условий также граничными условиями. Эти условия показывают, что происходит на концах струны или стержня в любой момент времени.

Опишем задание различных граничных режимов на концах струны или стержня, расположенных в точках $x=0$ и $x=l$. При этом для описания выделим один из концов, например $x=l$.

Если задан закон движения $\mu(t)$ этого конца, то решение задачи о колебаниях должно удовлетворять при $x=l$ граничному условию первого рода

$$u(x,\,t)|_{x=l}=\mu(t).\tag{1.30}$$

В частности, однородное условие ($\mu(t)=0$) задают в случае жесткого закрепления конца струны или стержня.

Если задан закон изменения силы $\mathcal{F}(t)$, приложенной к концу стержня $x=l$, то эта сила вызовет упругие напряжения в

стержне, причем по закону Гука упругая сила на конце стержня с площадью поперечного сечения S пропорциональна относительному удлинению $\partial u/\partial x$ и равна $ES\dfrac{\partial u}{\partial x}$, где E – модуль Юнга материала. Следовательно, на конце стержня $x = l$ должно выполняться граничное условие второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \gamma(t), \tag{1.31}$$

где $\gamma(t) = \mathcal{F}(t)/(ES)$. Если $\gamma(t) = 0$, то конец стержня является свободным.

Пусть теперь к концу стержня при $x = l$ прикреплена пружина, действующая на стержень с силой, пропорциональной смещению стержня $u(x, t)$ при $x = l$. Эта упругая сила $\mathcal{F} = -k\,u(l, t)$, где k – коэффициент жесткости пружины, будет играть роль внешней силы. Поэтому в таком случае на конце стержня должно выполняться граничное условие третьего рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -h\,u(l, t), \qquad \text{или} \qquad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = 0, \tag{1.32}$$

где $h = k/(ES)$ – некоторая постоянная.

Естественным обобщением (1.32) является условие

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\right|_{x=l} = g(t). \tag{1.33}$$

Задачи отыскания решений уравнений колебаний с учетом начальных и граничных условий будем называть начально-краевыми, или просто краевыми, задачами для волнового уравнения.

Краевые задачи, когда в граничных точках заданы условия первого, второго или третьего рода, назовем соответственно первой, второй или третьей краевыми задачами. Можно рассматривать и смешанные краевые задачи, если в граничных точках заданы условия различного типа.

Метод разделения переменных, или ***метод Фурье***, является одним из основных методов решения задач математической физики в ограниченных областях. Изложим этот метод для задачи о свободных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами, которая формулируется следующим образом: найти решение однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t > 0, \qquad 0 < x < l, \tag{1.34}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{1.35}$$

и однородным граничным условиям

$$u|_{x=0} = 0, \qquad u|_{x=l} = 0, \qquad t \geqslant 0. \tag{1.36}$$

Идея метода Фурье основана на линейности и однородности уравнения и граничных условий. В этом случае справедлив принцип суперпозиции для любых частных решений u_1 и u_2 уравнения (1.34), удовлетворяющих условиям (1.36), т.е. функция $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$, где $C_{1,2} = \text{const}$, также удовлетворяет уравнению (1.34) и граничным условиям (1.36). Оказывается, что с помощью суперпозиции линейно независимых частных решений можно выполнить также и начальные условия (1.35).

Будем искать нетривиальное решение уравнения (1.34) в виде произведения двух функций

$$u(x, t) = X(x)\,T(t), \tag{1.37}$$

одна из которых зависит только от переменного x, а другая – только от t.

Дифференцируя дважды выражение (1.37) по x и по t, после подстановки его в уравнение (1.34) получим

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\,T(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.38}$$

Равенство (1.38) должно соблюдаться при всех значениях $x \in (0,\, l)$ и $t > 0$. Особенностью равенства (1.38) является разделение переменных в нем, т.е. его левая часть зависит только от t, а правая – только от x. Поэтому, если, например, зафиксировать x, правая часть, а вместе с ней и левая должны сохранять постоянное значение при различных значениях t. Аналогично левая часть, а следовательно, и правая часть равенства при фиксированном t не должны изменяться при изменении x. Но тогда однозначно вытекает вывод о том, что равенство (1.38) будет справедливо лишь в том случае, если обе его части вообще не зависят ни от x, ни от t, т.е. являются постоянной величиной. Обозначив эту постоянную разделения буквой λ со знаком минус, запишем (1.38) в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{1.39}$$

Отсюда следует, что функции $T(t)$ и $X(x)$ можно определить из решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$T''(t) + \lambda\, a^2 T(t) = 0; \qquad X''(x) + \lambda\, X(x) = 0.$$

Чтобы такие частные решения вида (1.37) удовлетворяли граничным условиям (1.36) для любого $t \geqslant 0$, необходимо потребовать выполнения условий $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$.

Таким образом, для отыскания координатной функции $X(x)$ приходим к следующей задаче. Найти такие решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, \qquad 0 < x < l, \tag{1.40}$$

которые в граничных точках $x = 0$ и $x = l$ удовлетворяют условиям

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{1.41}$$

При любом $\lambda = \text{const}$ эта задача имеет тривиальное решение $X(x) \equiv 0$. Однако ниже будет показано, что при некоторых положительных значениях постоянной λ задача (1.40), (1.41) имеет и нетривиальные решения. Такие "особенные" значения λ называют ***собственными значениями***, а соответствующие им нетривиальные решения $X(x)$ – ***собственными функциями*** задачи (1.40), (1.41). Задачу отыскания собственных значений и собственных функций называют ***задачей Штурма – Лиувилля.*** Общая постановка такой задачи дана в Приложении 2.

Возвращаясь к задаче (1.40) и (1.41), рассмотрим отдельно случаи, когда константа разделения λ равна нулю, отрицательна или положительна.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (1.40) есть линейная функция $X(x) = C_1 + C_2 x$, которая может удовлетворить обоим условиям (1.41) лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Таким образом, при $\lambda = 0$ задача (1.40), (1.41) имеет только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

Если $\lambda < 0$, то общее решение уравнения (1.40)

$$X(x) = C_1 \mathrm{ch}(\sqrt{|\lambda|}\, x) + C_2 \mathrm{sh}(\sqrt{|\lambda|}\, x)$$

при подстановке в граничные условия (1.41) дает

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0;$$
$$C_1 \mathrm{ch}(\sqrt{|\lambda|}\, l) + C_2 \mathrm{sh}(\sqrt{|\lambda|}\, l) = 0.$$

Так как определитель этой однородной системы $D = \mathrm{sh}(\sqrt{|\lambda|}\, l)$ при любом значении $\lambda < 0$ не равен нулю, то единственным ее решением является решение $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, у задачи (1.40), (1.41) нет неположительных *собственных значений.*

Остается рассмотреть случай $\lambda > 0$, когда общее решение уравнения (1.40)

$$X(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\, x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\, x)$$

может удовлетворить граничным условиям

$$\begin{aligned} &X(0) = C_1 + C_2\,0 = 0; \\ &X(l) = C_1\cos(\sqrt{\lambda}\,l) + C_2\sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

при $C_1 = 0$, но $C_2 = C \neq 0$, если определитель системы (1.42) $D = \sin(\sqrt{\lambda}\,l) = 0$, что выполняется при $\sqrt{\lambda}\,l = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, только при собственных значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.43}$$

задача (1.40), (1.41) имеет в качестве нетривиальных решений систему *собственных функций*

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{1.44}$$

ортогональных на отрезке $[0, l]$.

Каждому собственному значению λ_n будет соответствовать функция $T_n(t)$, которую находим из решения уравнения

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = a_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right), \tag{1.45}$$

где a_n и b_n – произвольные постоянные.

Подставив выражения (1.44) и (1.45) в формулу (1.37), найдем частные решения уравнения (1.34), удовлетворяющие граничным условиям (1.36). При этом каждому $n = 1, 2, \ldots$ будет отвечать решение

$$u_n(x, t) = \left[a_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.46}$$

Суперпозиция всех решений вида (1.46)

$$u(x,\,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (1.47)$$

будет также решением (1.34), удовлетворяющим граничным условиям (1.36), если ряд (1.47) для любого $x\in(0,\,l)$ при $t\geqslant 0$ является сходящимся рядом и его можно дважды почленно дифференцировать.

В этом случае можно подобрать постоянные a_n и b_n в уравнении (1.47) так, чтобы функция, представленная рядом (1.47), удовлетворяла начальным условиям (1.35). Для этого продифференцируем почленно ряд (1.47) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\left[-a_n\sin\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi a}{l}\,t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}$$

и при $t=0$ удовлетворим начальным условиям

$$\begin{aligned} &u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l;\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}\,b_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant l. \end{aligned} \qquad (1.48)$$

Равенства (1.48) представляют собой разложение заданных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье [IX] по ортогональной в интервале $(0,\,l)$ системе тригонометрических функций $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Поэтому коэффициенты a_n и $\dfrac{n\pi a}{l}\,b_n$ этих разложений являются коэффициентами Фурье φ_n и ψ_n функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Определяя эти коэффициенты по формулам Эйлера – Фурье, получаем

$$\begin{aligned} &a_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx;\\ &b_n=\frac{l}{n\pi a}\,\psi_n=\frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l\psi(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \end{aligned} \qquad (1.49)$$

Таким образом, ряд (1.47) с коэффициентами a_n и b_n, вычисленными по формулам (1.49), окончательно определяет решение исходной краевой задачи (1.34) – (1.36).

Решение (1.47) можно преобразовать к следующему виду:

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(\omega_n t - \delta_n)\,\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (1.50)$$

где $\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$; $\omega_n = n\pi a/l$; $\operatorname{tg}\delta_n = b_n/a_n$.

Каждое из слагаемых $u_n(x,\,t)$ в уравнении (1.50) описывает движение струны в виде ***стоячей волны***, которая образуется в результате наложения прямой и обратной бегущих волн при отражении их от концов струны. Эти стоячие волны называют *простыми тонами*, или *гармониками*.

В стоячей волне все частицы струны колеблются с одинаковой частотой

$$\omega_n = n\omega_1, \qquad \omega_1 = \frac{\pi a}{l} = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \qquad (1.51)$$

Эти частоты ω_n, $n = 1,\,2,\ldots$, называют собственными частотами колебаний ограниченной струны. Самая низкая частота ω_1 соответствует основному тону струны, а более высокие частоты, кратные ω_1, соответствуют обертонам. Изменяя длину струны или силу ее натяжения T_0, можно изменять частоты колебаний ω_n.

Для n-й стоячей волны точки струны с координатами $x_m = ml/n$, $m = 0,\,1,\,\ldots,\,n$, в которых $\sin(n\pi x_m/l) = 0$, остаются все время неподвижными. Их называют узлами стоячей волны (рис. 1.11, темные точки). Точки струны с координатами $x_m = \dfrac{2m-1}{2}\dfrac{l}{n}$, $m = 1,\,2,\ldots\,n$, совершают колебания с максимальной амплитудой, равной α_n. Такие точки носят названия пучностей стоячей волны (рис. 1.11, светлые точки).

Установим теперь ограничения на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, при выполнении которых возможно двукратное почленное дифференцирование ряда (1.47) для функции $u(x,\,t)$.

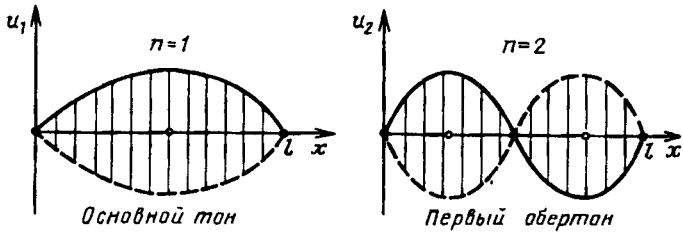


Рис. 1.11

1. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно, а третья производная кусочно-непрерывна на отрезке $[0, l]$ и, кроме того, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$.

Заметим, что эти требования предполагают, в частности, согласование начальных и граничных условий, когда и начальное распределение отклонений в струне учитывает отсутствие смещений закрепленных концов струны.

2. Функция $\psi(x)$ непрерывна вместе со своей первой производной и имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, кроме того, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Тогда при выполнении этих условий из теории рядов Фурье, согласно формулам (1.49), следует, что коэффициенты a_n и b_n имеют порядок малости $O(1/n^4)$ по индексу n. Поэтому числовой ряд

$$A\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|a_n| + |b_n|)$$

сходится и с некоторой константой A является мажорантным рядом для функциональных рядов

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Следовательно, эти ряды при $t \geqslant 0$ и $x \in [0, l]$ равномерно сходятся и ряд (1.47) с коэффициентами (1.49) при выполнении условий 1 и 2 определяет классическое решение краевой задачи (1.34) – (1.36).

Условия 1 и 2 могут быть ослаблены. В этом случае ряд (1.47) является обобщенным решением краевой задачи и сходимость ряда и его производных следует понимать в более широком смысле, например как сходимость в среднем или слабую сходимость.

Решения задач о свободных колебаниях ограниченной струны или стержня с однородными граничными условиями второго или третьего рода могут быть также построены в виде бесконечных функциональных рядов аналогичной структуры, отличающихся лишь собственными значениями и собственными функциями соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. В Приложении 2 приведены примеры решения задач на собственные значения для уравнения (1.40) с различными условиями в граничных точках $x = 0$ и $x = l$.

1.6. Краевые задачи для неоднородного уравнения

Вынужденные колебания струны. Изложенный выше метод Фурье (разделения переменных) позволяет также решать краевые задачи для неоднородного волнового уравнения.

Сформулируем, например, задачу о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на концах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \tag{1.52}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{1.53}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \tag{1.54}$$

Рассматривая в искомом решении $u(x, t)$ этой задачи переменное t как неотрицательный параметр, будем искать это

решение в форме разложения в ряд Фурье по ортогональной на отрезке $[0, l]$ системе собственных функций $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{\infty}$, найденных в задаче о свободных колебаниях ограниченной струны и удовлетворяющих граничным условиям (1.54). Тогда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.55}$$

где коэффициенты разложения $V_n(t)$ следует определять как функции времени t так, чтобы ряд (1.55) удовлетворял уравнению (1.52) и начальным условиям (1.53). Для этого представим функции $f(x, t)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в виде следующих тригонометрических рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
&f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad f_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi;\\
&\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi;\\
&\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Подставив ряды (1.55) и (1.56) в уравнение (1.52) и начальные условия (1.53), получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left[V_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 V_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l};\\
&\sum_{n=1}^{\infty} V_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\\
&\sum_{n=1}^{\infty} V_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

С учетом полноты ортогональной системы собственных функций (см. Приложение 2) приравняем в разложениях (1.57) коэффициенты при одинаковых собственных функциях. Тогда получим следующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$V_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 V_n(t) = f_n(t); \tag{1.58}$$

$$V_n(0) = \varphi_n, \qquad V_n'(0) = \psi_n. \tag{1.59}$$

Общее решение уравнения (1.58) может быть найдено методом Лагранжа вариации постоянных [VIII]. Удовлетворяя начальным условиям (1.59), представим решение задачи (1.58), (1.59) в виде

$$V_n(t) = \varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \\ + \frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\,(t-\tau)}{l}\,d\tau. \tag{1.60}$$

Тогда, подставив найденное выражение для $V_n(t)$ в ряд (1.55), получим решение исходной задачи (1.52) – (1.54) в следующей форме:

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + \frac{l}{n\pi a}\psi_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\left[\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\,(t-\tau)}{l}\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.61}$$

Функция источника. При нулевых начальных условиях, когда $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$, первое слагаемое в (1.61) равно нулю. В этом случае функция

$$u_1(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\left[\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a\,(t-\tau)}{l}\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{1.62}$$

описывает вынужденные колебания ограниченной струны, которые совершаются только под действием внешней распределенной по струне вынуждающей силы при отсутствии начальных возмущений струны.

Преобразуем формулу (1.62), заменяя в ней $f_n(\tau)$ выражением из (1.56) и меняя порядок суммирования и интегрирования. После этих преобразований получим

$$u_1(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau)\, f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{1.63}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \\ = \frac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l} \sin\frac{n\pi a\,(t-\tau)}{l}. \tag{1.64}$$

Выясним смысл функции G. Для этого положим функцию $f(x, t)$ равной

$$f(x, t) = \delta(x - x_0)\, \delta(t - t_0), \quad x_0 \in (0, l), \quad t_0 > 0,$$

где $\delta(\xi - \xi_0)$ – обобщенная ***дельта-функция***, описывающая сосредоточенное воздействие при $\xi = \xi_0$ (см. Приложение 1).

Такая неоднородность в уравнении (1.52) соответствует заданию сосредоточенной в точке x_0 внешней возбуждающей силы, мгновенно действующей в момент времени t_0. Такая сила мгновенно передает струне сосредоточенный импульс, численно равный линейной плотности струны ρ_0.

Используя свойства дельта-функции (см. Приложение 1), с помощью формулы (1.63) находим закон колебаний струны в таком режиме возбуждения в виде

$$\widetilde{u}_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad t < t_0; \\ G(x, x_0, t - t_0), & \text{если} \quad t > t_0. \end{cases}$$

Естественно поэтому функцию $G(x, \xi, t-\tau)$, определенную формулой (1.64), назвать ***функцией источника***, или функцией влияния мгновенного сосредоточенного импульса на ограниченном отрезке $[0, l]$. Формула же (1.63) при этом показывает, что действие любой непрерывно распределенной вынуждающей силы, зависящей от времени, можно представить в виде суммы (интеграла) импульсных воздействий, и для нахождения закона колебания струны под действием произвольной распределенной силы $\mathcal{F}(x, t) = \rho_0 f(x, t)$ достаточно знать воздействие мгновенной сосредоточенной силы.

Первая краевая задача в общей постановке. Рассмотрим общую постановку задачи о вынужденных колебаниях струны с заданными законами колебаний ее концов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \tag{1.65}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{1.66}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.67}$$

Для решения этой задачи введем вспомогательную функцию $W(x, t)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям (1.67), т.е.

$$W(0, t) = \mu(t), \qquad W(l, t) = \nu(t).$$

В качестве одной из таких функций можно выбрать

$$W(x, t) = \mu(t) + \frac{x}{l}\,[\nu(t) - \mu(t)], \qquad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Тогда с помощью подстановки

$$u(x, t) = W(x, t) + v(x, t)$$

для новой неизвестной функции $v(x, t)$ получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \tag{1.68}$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{1.69}$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{1.70}$$

где новые функции $f_1(x, t)$, $\varphi_1(x)$ и $\psi_1(x)$ определены формулами

$$f_1(x, t) = f(x, t) - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = f(x, t) - \left\{\mu''(t) + \frac{x}{l}\left[\nu''(t) - \mu''(t)\right]\right\};$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - W(x, 0) = \varphi(x) - \left\{\mu(0) + \frac{x}{l}\left[\nu(0) - \mu(0)\right]\right\},$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) - \left\{\mu'(0) + \frac{x}{l}\left[\nu'(0) - \mu'(0)\right]\right\}.$$

Таким образом, первая краевая задача для неоднородного уравнения в общей постановке сведена к изученной ранее задаче вида (1.52) – (1.54) о вынужденных колебаниях ограниченной струны с закрепленными концами.

Можно выделить класс задач со стационарными неоднородностями, когда вынуждающая сила и условия закрепления концов струны не зависят от времени:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \\ &u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x); \\ &u(0, t) = H_1, \quad u(l, t) = H_2. \end{aligned} \tag{1.71}$$

Здесь H_1 и H_2 – некоторые заданные константы.

Решение задачи (1.71) можно найти, выделяя стационарную часть решения:

$$u(x, t) = u_c(x) + v(x, t).$$

В модели струны функция $u_c(x)$ описывает стационарный профиль, соответствующий статическому прогибу струны под действием распределенной силы $f(x)$.

Стационарное решение $u_c(x)$ находим из решения задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{d^2 u_c}{dx^2} + f(x) = 0; \\ u_c(0) = H_1, \quad u_c(l) = H_2. \end{cases} \tag{1.72}$$

Интегрируя уравнение (1.72) и выполняя граничные условия, получаем

$$u_c(x) = H_1 + (H_2 - H_1)\frac{x}{l} + \\ + \frac{x}{la^2}\int_0^l d\xi \int_0^\xi f(\eta)\,d\eta - \frac{1}{a^2}\int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\eta)\,d\eta. \quad (1.73)$$

С учетом соотношений (1.71) и (1.72) находим, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

с начальными условиями

$$v(x, 0) = \varphi(x) - u_c(x);$$
$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Поэтому эту функцию можно найти по формулам (1.47) и (1.49), заменив в формуле (1.49) $\varphi(x)$ на $\varphi(x) - u_c(x)$.

Вопросы и задачи

1.1. Привести уравнение $u_{xx} + y\,u_{yy} + \frac{1}{2}u_y = 0$ к канонической форме в области его гиперболичности.

Ответ: В области $y < 0$ уравнение приводится к виду $u_{\xi\eta} = 0$.

1.2. Найти продольные смещения частиц полуограниченного стержня со свободным концом $x = 0$, если в начальный момент времени частицам стержня сообщается скорость, заданная функцией $\psi(x)$.

Ответ:

$$u(x, t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\,d\theta, & x > at; \\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^{at-x} \psi(\theta)\,d\theta + \dfrac{1}{2a}\int_{at-x}^{at+x} \psi(\theta)\,d\theta, & x < at. \end{cases}$$

1.3. Решить задачу о свободных колебаниях ограниченной струны длиной l с закрепленными концами, если в начальный момент времени частицам струны, находящимся в интервале $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, сообщается постоянная скорость v_0. Начальное отклонение струны равно нулю. Рассмотреть предельный случай, когда $\varepsilon \to 0$, а $2\rho_0 v_0 \varepsilon = I_0 = \text{const}$, где I_0 – переданный струне импульс.

Ответ: $u(x, t) = \dfrac{4v_0 l}{\pi^2 a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

1.4. Решить предыдущую задачу в предельном случае $\varepsilon \to 0$, используя дельта-функцию сосредоточенного влияния, т.е. считая $\psi(x) = \dfrac{I_0}{\rho_0}\,\delta(x)$.

Ответ: $u(x, t) = \dfrac{2I_0}{\pi\rho_0 a} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

1.5. Закрепленная на концах струна оттянута в точке $x = x_0$ на величину H. Считая профиль струны слева и справа от точки $x = x_0$ линейным, найти колебания струны, вызванные таким начальным отклонением. Начальная скорость равна нулю.

Ответ: $u(x, t) = \dfrac{2Hl^2}{\pi^2 x_0 (l - x_0)} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi a t}{l} \sin \frac{n\pi x_0}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}$.

1.6. Решить задачу о продольных колебаниях стержня длиной l, один конец $x = 0$ которого жестко закреплен, если стержень был подвергнут растяжению действием постоянной силы F_0, приложенной к концу $x = l$. В начальный момент времени действие силы F_0 мгновенно прекращается и конец стержня $x = l$ остается свободным. Модуль Юнга стержня равен E, а площадь поперечного сечения – S.

Ответ: $u(x, t) = \dfrac{8F_0 l}{\pi^2 ES} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\,\pi a t}{2l} \sin \frac{(2n-1)\,\pi x}{2l}$.

1.7. Горизонтальная струна длиной l с закрепленными концами находится в поле силы тяжести. В начальный момент времени струну отпускают, не сообщая скорости ее частицам. Описать закон колебаний струны под действием силы тяжести. Скорость распространения возмущений в струне равна a. Определить статический прогиб струны.

Ответ: $u(x, t) = -\dfrac{g}{2a^2}\, x\,(l - x) +$

$$+ \frac{4gl^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \cos \frac{(2n-1)\,\pi a t}{l} \sin \frac{(2n-1)\,\pi x}{l}.$$

2. УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

2.1. Одномерный нестационарный процесс распространения теплоты

Уравнение теплопроводности. Процесс передачи теплоты от более нагретых частей тела к менее нагретым связан с изменением температуры u в различных частях тела. Поэтому описание такого процесса в макроскопической теории в общем случае сводится к определению нестационарного температурного поля в теле.

Рассмотрим одномерный процесс передачи теплоты теплопроводностью в плоском слое изотропного материала (рис. 2.1), считая, что температура $u = u(x, t)$ является функцией лишь одного пространственного переменного x.

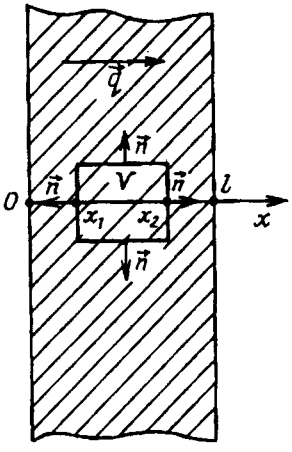


Рис. 2.1

Плотность ρ материала, его удельную массовую теплоемкость c и коэффициент теплопроводности k в общем случае неоднородной среды будем считать также зависящими только от одной пространственной координаты x.

При построении математической модели процесса будем предполагать, что среда неподвижна, а изменение объема материала, связанное с изменением температуры, пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что процесс теплопроводности не связан с совершением механической работы.

В рассматриваемом слое материала в качестве некоторой термодинамической системы выделим объем V в виде цилиндра с площадью основания ΔS и осью, параллельной координатной оси Ox (см. рис. 2.1).

Из первого закона термодинамики, записанного для выделенного объема V, следует, что

$$\frac{dU}{dt} = -Q_1 + Q_2, \tag{2.1}$$

где U – внутренняя энергия системы, которая может быть найдена интегрированием объемной плотности внутренней энергии $\varepsilon(x, t)$ по объему цилиндра, т.е.

$$U = \iiint\limits_V \varepsilon\, dV = \Delta S \int\limits_{x_1}^{x_2} \varepsilon\, dx.$$

Поэтому изменение внутренней энергии системы за единицу времени

$$\frac{dU}{dt} = \Delta S \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\, dx. \tag{2.2}$$

Тепловой поток Q_1 через всю замкнутую поверхность Σ выделенного цилиндра, т.е. количество теплоты, отдаваемое через эту поверхность за единицу времени, можно найти, интегрируя по поверхности Σ нормальную составляющую плотности теплового потока $\vec{q}$. Поэтому

$$Q_1 = \oiint\limits_{\Sigma} \vec{q}\, \vec{n}\, dS,$$

где $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к Σ.

Согласно физическому закону Фурье, при передаче теплоты теплопроводностью $\vec{q} = -k \operatorname{grad} u$. Так как в рассматриваемом случае вектор плотности теплового потока $\vec{q}$ имеет лишь одну составляющую $q_x = -k\dfrac{\partial u}{\partial x}$, то тепловой поток от выделенного объема проходит лишь через основания цилиндра, причем

$$Q_1 = \Delta S \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_1} - \Delta S \left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=x_2} =$$

$$= -\Delta S \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx. \tag{2.3}$$

Внутри выделенного объема вследствие протекания эндо- или экзотермических реакций, прохождения электрического тока, испарения влаги в пористом материале и других причин может выделяться или поглощаться теплота. Если под $\mathcal{F}(x, t)$ понимать объемную плотность (удельную мощность) тепловых источников, то за единицу времени в рассматриваемом объеме выделится ($\mathcal{F} > 0$) или поглотится ($\mathcal{F} < 0$) количество теплоты

$$Q_2 = \iiint\limits_V \mathcal{F}\, dV = \Delta S \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}(x, t)\, dx. \tag{2.4}$$

Подставив выражения (2.2) – (2.4) в уравнение (2.1), получим

$$\Delta S \int\limits_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mathcal{F}(x, t) \right] dx = 0. \tag{2.5}$$

В силу произвольности выбора координат x_1 и x_2 оснований цилиндра равенство нулю интеграла в уравнении (2.5) возможно лишь при равенстве нулю подынтегральной функции.

Таким образом, в описываемом процессе передачи теплоты локально, т.е. в каждой точке пространства, должно выполняться следующее дифференциальное соотношение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mathcal{F}(x, t). \tag{2.6}$$

Заметим, что объемная плотность внутренней энергии рассматриваемой несжимаемой среды $\varepsilon = \varepsilon(u)$ зависит от температуры, а производная $\frac{d\varepsilon}{du} = \widetilde{c}$, определяет объемную теплоемкость $\widetilde{c} = \rho c$ материала. Поэтому

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{d\varepsilon}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Тогда из выражения (2.6) получаем дифференциальное уравнение

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mathcal{F}(x, t). \tag{2.7}$$

Для однородного материала с независящими от температуры теплофизическими характеристиками ρ, c и k уравнение (2.7) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \tag{2.8}$$

где $a^2 = k/(\rho c)$ – постоянная, которую называют коэффициентом температуропроводности материала; $f(x, t) = \frac{1}{\rho c}\mathcal{F}(x, t)$.

Уравнения (2.7) и (2.8) являются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа. Они лежат в основе математических моделей, описывающих процесс передачи теплоты в неоднородных и однородных телах с одномерным температурным полем. Будем называть эти уравнения уравнениями ***теплопроводности***.

Замечание 2.1. Уравнения (2.7) и (2.8) описывают эволюцию температурного поля в стержне постоянного поперечного сечения, выполненном из неоднородного или однородного материала, если боковая поверхность стержня теплоизолирована, площадь поперечного сечения достаточно мала и можно пренебречь распределением температуры по сечению, считая ее зависящей только от осевой координаты. #

Уравнения вида (2.7) и (2.8) описывают не только процесс теплопроводности, но и ряд других физических процессов диффузионного типа. К ним, в частности, относятся следующие.

1. Диффузионный процесс переноса массы. В таком процессе функция $u(x, t)$ описывает нестационарное поле объемной концентрации диффундирующего вещества в неподвижной среде, c – коэффициент пористости, а k – коэффициент диффузии. Параметр ρ в этом случае следует формально считать равным единице.

2. Диффузия частиц (например, нейтронов) в веществе. При описании такого процесса $u(x, t)$ – концентрация частиц в точке среды с координатой x в момент времени t, k – коэффициент диффузии частиц, а $\rho c = 1$. Для такого процесса удельная мощность источников $\mathcal{F}$ обычно зависит от концентрации ча-

стиц, причем $\mathcal{F}(u) = \alpha u - \beta u$, где α – коэффициент размножения частиц, а β – коэффициент поглощения.

3. Проникновение (диффузия) магнитного поля в проводящую среду, когда можно пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Для такого процесса $u(x, t)$ – напряженность магнитного поля, $a^2 = (\sigma\mu\mu_0)^{-1}$, σ – удельная электропроводность материала, μ – его магнитная проницаемость, μ_0 – магнитная постоянная в СИ.

Начальные и граничные условия. Чтобы с помощью уравнения теплопроводности описать эволюцию температурного поля в теле, необходимо знать распределение температуры в начальный момент времени, т.е. задать начальное условие. Для рассматриваемого одномерного процесса начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.9}$$

задается в виде известной зависимости $\varphi(x)$.

Кроме того, требуется знать тепловой режим на поверхности тела S, т.е. задать граничные условия во всех точках поверхности тела в любой момент времени. В одномерном процессе соответствующие граничные условия задаются на граничных поверхностях слоя $x = 0$ и $x = l$.

Граничные условия в задачах теплопроводности могут быть заданы различными способами.

1. Граничное условие первого рода, когда в каждой точке поверхности тела задают температуру

$$u|_S = \psi(P, t), \qquad P \in S, \quad t > 0. \tag{2.10}$$

Здесь $\psi(P, t)$ – известная функция точки P поверхности S и времени t.

2. Граничное условие второго рода, когда на поверхности S тела задают тепловой поток $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n}$, где $\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока, а $\vec{n}$ – единичная внешняя нормаль к поверхности S. По закону Фурье $q_n = -k\,(\operatorname{grad} u \cdot \vec{n}) = -k\,\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

Следовательно, граничное условие второго рода задает на поверхности S нормальную производную температуры и может быть записано в виде

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \Theta(P, t), \quad P \in S, \quad t > 0, \tag{2.11}$$

где $\Theta(P, t) = -q_n/k$ – известная функция.

В случае теплоизолированной поверхности $\Theta(P, t) \equiv 0$ и мы имеем однородное условие $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на всей поверхности S.

3. Граничное условие третьего рода описывает тепловой режим на поверхности тела, соответствующий конвективному теплообмену по закону Ньютона с окружающей внешней средой, имеющей температуру $u^*(P, t)$. По закону Ньютона плотность теплового потока на границе тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, т.е. $q_n = \vec{q} \cdot \vec{n} = \alpha_{\text{т}}(u - u^*)$.

Коэффициент теплообмена (теплоотдачи) $\alpha_{\text{т}}$ зависит от свойств среды, а в общем случае и от разности температур $(u - u^*)$. В большинстве задач, однако, мы будем считать коэффициент $\alpha_{\text{т}}$ постоянным, не зависящим от температуры и одинаковым на всей поверхности тела.

Итак, граничное условие третьего рода дает связь между температурой u и ее нормальной производной $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ в любой точке поверхности тела

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = hu^*(P, t), \quad P \in S, \quad t > 0, \tag{2.12}$$

где $h = \alpha_{\text{т}}/k$.

Замечание 2.2. Условия первого, второго и третьего рода можно формально объединить в виде обобщенного граничного условия

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \gamma(P, t), \quad P \in S, \quad t > 0, \tag{2.13}$$

где α и β – некоторые константы; $\gamma(P, t)$ – заданная на поверхности тела функция. #

Полагая в условии (2.13) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, а $\gamma(P, t) = \psi(P, t)$, получим условие первого рода (2.10). Если же $\alpha = 1$, $\beta = 0$, а $\gamma(P, t) = \Theta(P, t)$, то условие (2.13) переходит в условие второго рода (2.11). И наконец, полагая $\alpha = 1$, $\beta = h$, а $\gamma(P, t) = hu^*(P, t)$, имеем граничное условие третьего рода (2.12).

4. Нелинейное граничное условие. Если основным механизмом уноса энергии с поверхности тела является излучение, то по закону Стефана – Больцмана

$$-k\frac{\partial u}{\partial n} = \epsilon_0\sigma_0 u^4, \quad P \in S, \quad t > 0. \tag{2.14}$$

Здесь ϵ_0 – степень черноты материала, которая в общем случае зависит от температуры; σ_0 – постоянная Стефана – Больцмана.

Правая часть условия (2.14) степенным образом, т.е. нелинейно, зависит от температуры.

5. При описании температурных полей в многослойных телах и оболочках на поверхности контакта двух тел используют граничные условия сопряжения, или, как их иногда называют, граничные условия четвертого рода.

Для идеального теплового контакта эти условия

$$\begin{gathered} u_1(P, t) = u_2(P, t), \quad P \in \Sigma, \quad t > 0; \\ k_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad P \in \Sigma, \quad t > 0, \end{gathered} \tag{2.15}$$

означают равенство температур и тепловых потоков на контактной поверхности Σ.

Для неидеального теплового контакта с термическим сопротивлением R на поверхности контакта тел имеет место равенство тепловых потоков, но появляется пропорциональная им разность температур тел, т.е. выполняется условие

$$\frac{1}{R}(u_2 - u_1) = k_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = k_2\frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad P \in \Sigma, \quad t > 0, \tag{2.16}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль относительно первого тела к контактной поверхности Σ.

2.2. Краевые задачи для уравнения теплопроводности

Решение краевых задач методом Фурье. Сформулируем задачу об отыскании нестационарного температурного поля $u(x, t)$ в плоском слое конечной толщины l, имеющем в начальный момент времени температуру $\varphi(x)$, если на поверхностях $x = 0$ и $x = l$ этого слоя происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру. Требуется найти решение линейного однородного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{2.17}$$

удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.18}$$

и однородным граничным условиям третьего рода

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Bigg|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0; \\ &\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Bigg|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Следуя методу Фурье разделения переменных, нетривиальные решения уравнения (2.17), удовлетворяющие граничным условиям (2.19), будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t) \not\equiv 0. \tag{2.20}$$

Подставив предполагаемую форму решения (2.20) в уравнение (2.17) и разделив переменные, получим

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \text{const}.$$

Поэтому функции $T(t)$ и $X(x)$ должны быть определены как решения дифференциальных уравнений

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0; \tag{2.21}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{2.22}$$

Граничные условия (2.19) с учетом (2.20) дают условия для функции $X(x)$ в виде

$$\begin{aligned} -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0; \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Как показано в Приложении 2, задача Штурма – Лиувилля (2.22), (2.23) имеет нетривиальные решения только при определенных, собственных значениях $\lambda_n = \left(\dfrac{\mu_n}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, которые можно выразить через неотрицательные корни μ_n трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^2 - \beta_1\beta_2 l^2}{(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)\mu}, \tag{2.24}$$

а соответствующие им собственные функции $X_n(x)$ имеют вид

$$X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n), \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1\sqrt{\lambda_n}}{\beta_1}.$$

Квадраты норм этих функций

$$\|X_n\|^2 = \frac{l}{2}\left\{1 + \frac{(\alpha_1\alpha_2\mu_n^2 + \beta_1\beta_2 l^2)\,(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)}{(\alpha_1^2\mu_n^2 + \beta_1^2 l^2)\,(\alpha_2^2\mu_n^2 + \beta_2^2 l^2)}\right\}.$$

При $\lambda = \lambda_n$ для выражения (2.21) запишем общее решение

$$T_n(t) = C_n\, e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad C_n = \text{const}. \tag{2.25}$$

Подставив найденные функции $X_n(x)$ и $T_n(t)$ в выражение (2.20), получим частные решения уравнения (2.17), удовлетворяющие граничным условиям (2.19):

$$u_n(x, t) = T_n(t)\, X_n(x) = C_n\, e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n).$$

Составим формально ряд, членами которого являются функции $u_n(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n). \tag{2.26}$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничным условиям (2.19), так как этим условиям удовлетворяет каждый член ряда (2.26).

Определим коэффициенты C_n так, чтобы выполнялось начальное условие. Подставляя ряд (2.26) в (2.18), получаем

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n) = \varphi(x). \tag{2.27}$$

Это соотношение по теореме Стеклова (см. Приложение 2) представляет собой разложение функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе ортогональных на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ собственных функций $X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, а коэффициенты C_n являются коэффициентами Фурье и определяются по формуле

$$C_n = \frac{1}{||X_n||^2} \int_0^l \varphi(x)\, X_n(x)\, dx. \tag{2.28}$$

Покажем, что если функция $\varphi(x)$ кусочно-непрерывная на отрезке $[0, l]$, то ряд (2.26) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (2.28), удовлетворяет уравнению (2.17) в области $0 < x < l$, $t > 0$, т.е. этот ряд сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t. Для этого достаточно установить, что ряды

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^2 C_n \lambda_n\, e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n); \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n \lambda_n\, e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n) \end{aligned} \tag{2.29}$$

сходятся равномерно на отрезке $[0, l]$ при $t \geqslant T > 0$.

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\, \lambda_n\, e^{-\lambda_n a^2 T}, \quad M = \text{const}, \tag{2.30}$$

который согласно признаку Даламбера сходится. Так как для ограниченной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$ коэффициенты Фурье ограничены по модулю, то для общих членов рядов (2.29) справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < a^2|C_n|\,\lambda_n\,e^{-\lambda_n a^2 t} < M_1\lambda_n\,e^{-\lambda_n a^2 T}, \quad t \geqslant T > 0;$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < |C_n|\,\lambda_n\,e^{-\lambda_n a^2 t} < M_2\lambda_n\,e^{-\lambda_n a^2 T}, \quad t \geqslant T > 0.$$

Это означает, что при $M > M_1$, $M > M_2$ ряд (2.30) является мажорантным для рядов (2.29). Поэтому эти ряды сходятся равномерно при $t \geqslant T > 0$. Так как T – произвольное число, то равномерная сходимость рядов (2.29) имеет место при любом $t > 0$.

Таким образом, на основании принципа суперпозиции частных решений $u_n(x, t)$ заключаем, что функция $u(x, t)$, определяемая рядом (2.26), удовлетворяет уравнению (2.17) в области $0 < x < l$, $t > 0$.

Рассмотрим теперь частные случаи задачи (2.17) – (2.19).

1. При значениях параметров $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$ граничные условия принимают вид

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{2.31}$$

и краевая задача (2.17), (2.18), (2.31) описывает процесс остывания плоского слоя конечной толщиной l (или стержня конечной длиной l с идеально теплоизолированной боковой поверхностью), с температурным профилем $\varphi(x)$ в начальный момент времени, если граничные плоскости $x = 0$ и $x = l$ (торцы стержня) поддерживаются при постоянной нулевой температуре.

В этом случае собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, а соответствующие собственные функции

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \|X_n\|^2 = l/2.$$

Поэтому решение первой краевой задачи (2.17), (2.18), (2.31) принимает вид

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.32}$$

где

$$C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{2.33}$$

Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0,\,l]$ и имеет кусочно-непрерывную производную. Кроме того, пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, т.е. имеет место согласование начальных и граничных условий. Тогда коэффициенты C_n тригонометрического ряда Фурье, определяемые выражением (2.33), имеют порядок малости $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. В этом случае числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |C_n|$ сходится и является мажорантным для ряда (2.32) при $t \geqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant l$. Следовательно, ряд (2.32) сходится к функции $u(x,\,t)$ равномерно при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, и из непрерывности членов этого ряда вытекает непрерывность суммы $u(x,\,t)$.

2. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, а $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то граничные условия (2.19) принимают вид однородных условий второго рода

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2.34}$$

Краевая задача (2.17), (2.18), (2.34) описывает процесс выравнивания температуры в плоском слое (стержне), в котором в начальный момент времени задан температурный профиль $\varphi(x)$, а граничные плоскости $x = 0$ и $x = l$ (торцы стержня) идеально теплоизолированы.

Для этого случая

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0,\,1,\,2,\ldots; \quad X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l};$$

$$||X_n||^2 = \begin{cases} l, & n = 0 \\ l/2, & n \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому решение второй краевой задачи имеет вид

$$u(x,\,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.35}$$

где

$$C_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx; \quad C_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx. \tag{2.36}$$

Отметим, что при $t \to \infty$ температура всех слоев выравнивается и стремится к стационарному распределению $u_s(x) = C_0 = \text{const}$.

3. Пусть $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_2 = h > 0$. В этом случае получаем граничные условия

$$u(0,\,t) = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = 0. \tag{2.37}$$

Смешанная краевая задача (2.17), (2.18), (2.37) описывает эволюцию температурного поля в плоском слое $0 \leqslant x \leqslant l$ материала, начальное распределение температуры в котором задано функцией $\varphi(x)$, если на поверхности $x = 0$ слоя поддерживается постоянная нулевая температура, а на другой поверхности $x = l$ происходит конвективный теплообмен с окружающей средой, имеющей нулевую температуру.

Для этого случая находим собственные функции в виде

$$X_n(x) = \sin\frac{\mu_n x}{l},$$

квадрат нормы которых

$$||X_n||^2 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{hl}{\mu_n^2 + h^2 l^2}\right).$$

При этом значения μ_n являются действительными положительными корнями трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\mu = -\mu/(hl)$. Это

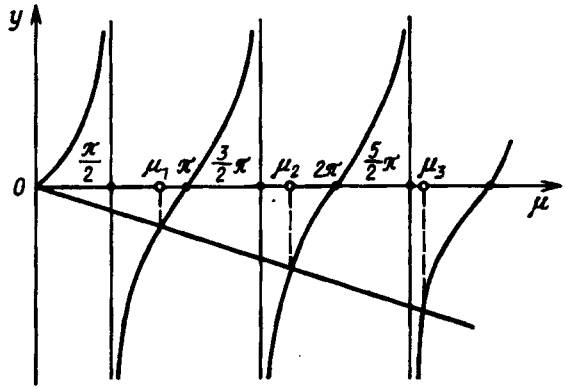


Рис. 2.2

уравнение имеет бесчисленное множество вещественных положительных корней, в чем нетрудно убедиться, построив графики кривых $y = \operatorname{tg}\mu$ и $y = -\mu/p$, где $p = hl$ (рис. 2.2). На рисунке видно, что положительные корни μ_n лежат в интервалах $[(2n-1)\pi/2,\ n\pi]$, $n = 1, 2, \ldots$, и при возрастании n приближаются к значениям, равным $(2n-1)\pi/2$.

Таким образом, решение смешанной краевой задачи (2.17), (2.18), (2.37) можно представить в виде

$$u(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\, e^{-\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\mu_n x}{l}, \tag{2.38}$$

где

$$C_n = \frac{2\,(\mu_n^2 + p^2)}{l\,[\mu_n^2 + p\,(p+1)]} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\mu_n \xi}{l}\, d\xi. \tag{2.39}$$

Функция источника. Преобразуем полученное решение (2.26) задачи (2.17) - (2.19), заменив в нем коэффициенты C_n по формуле (2.28):

$$u(x,\,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{||X_n||^2} \int\limits_0^l \varphi(\xi) \sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi + \theta_n)\, d\xi \right] e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi + \theta_n).$$

Изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^l \Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_n\|^2}\, e^{-\lambda_n a^2 t} \times$$

$$\times \sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi + \theta_n)\, \sin(\sqrt{\lambda_n}\,x + \theta_n)\Bigg]\, \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (2.40)$$

Такая операция справедлива, так как ряд в квадратных скобках при фиксированном x сходится равномерно в области $t \geqslant T > 0$, $0 \leqslant \xi \leqslant l$. Действительно, числовой сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M\, e^{-\lambda_n a^2 T}$ является мажорантным для ряда, стоящего в квадратных скобках в формуле (2.40).

Обозначим сумму этого ряда через

$$G(x,\,\xi,\,t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|X_n\|^2}\, e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi + \theta_n) \sin(\sqrt{\lambda_n}\,x + \theta_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi)\, X_n(x)}{\|X_n\|^2}\, e^{-\lambda_n a^2 t}. \qquad (2.41)$$

Тогда решение задачи (2.17) – (2.19) можно представить в виде

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^l G(x,\,\xi,\,t)\, \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (2.42)$$

Выясним физический смысл функции $G(x,\,\xi,\,t)$. Пусть начальное распределение температуры $\varphi(x)$ создано сосредоточенным тепловым источником, т.е.

$$\varphi(x) = \frac{Q_0}{\rho c}\, \delta(x - x_0), \quad x_0 \in (0,\,l).$$

В этом случае по свойству дельта-функции из формулы (2.42) следует

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{\rho c} \int_0^l G(x, \xi, t)\, \delta(\xi - x_0)\, d\xi = \frac{Q_0}{\rho c} G(x, x_0, t).$$

Это означает, что функция $G(x, \xi, t)$ определяет температуру в любой точке x в момент времени t, вызванную действием сосредоточенного в плоскости $x = \xi$ теплового источника, выделяющего в начальный момент времени мгновенно количество теплоты на единицу площади, равное $Q_0 = \rho c$. Поэтому функцию $G(x, \xi, t)$, определяемую формулой (2.41), называют функцией мгновенного сосредоточенного источника (функцией источника) для общей задачи (2.17) – (2.19).

В частных случаях для первой и второй краевых задач функции источника соответственно имеют вид

$$G_1(x, \xi, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi \xi}{l}; \tag{2.43}$$

$$G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{n\pi x}{l} \cos\frac{n\pi \xi}{l}. \tag{2.44}$$

Решения этих задач с помощью функций источника $G_1(x, \xi, t)$ и $G_2(x, \xi, t)$ также можно представить в виде (2.42).

2.3. Свойства решений краевых задач для уравнения теплопроводности

Принцип максимального значения. Пусть $\overline{Q}_T = \{(x, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ – прямоугольная область на плоскости состояний (x, t) (рис. 2.3). Обозначим через Γ_1, Γ_2, Γ_3 и Γ_4 участки границы этой области и выделим часть границы $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$.

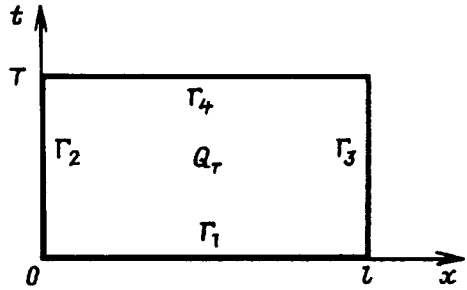


Рис. 2.3

Теорема 2.1. Если функция $u(x, t)$ определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{Q}_T$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.45}$$

в точках области $Q_T \bigcup \Gamma_4$, то максимальное (минимальное) значение фукция $u(x, t)$ принимает на Γ, т.е. в начальный момент времени, или в граничных точках $x = 0$ и $x = l$.

◀ Пусть M_Γ – наибольшее значение функции $u(x, t)$ на участке Γ границы области $\overline{Q}_T$, а μ – наибольшее значение функции $u(x, t)$ в области $\overline{Q}_T$. Очевидно, что $M_\Gamma \leqslant \mu$. Утверждение теоремы состоит в том, что $M_\Gamma = \mu$. Допустим противное: пусть $M_\Gamma < \mu$, причем $\mu = M_\Gamma + \varepsilon$, где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Построим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2T}(T - t).$$

Эта функция непрерывна в замкнутой области $\overline{Q}_T$, поэтому она в этой области достигает наибольшего значения в некоторой точке $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$. Покажем, что эта точка не может принадлежать Γ. Действительно,

$$v(x, 0) = u(x, 0) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \mu;$$

$$v(0, t) = u(0, t) + \frac{\varepsilon}{2T}(T - t) \leqslant M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \mu;$$

$$v(l, t) = u(l, t) + \frac{\varepsilon}{2T}(T - t) \leqslant M_\Gamma + \frac{\varepsilon}{2} < \mu,$$

но $v(x_0, t_0) \geqslant \mu$, так как в $\overline{Q}_T$ справедливо очевидное неравенство $v(x, t) \geqslant u(x, t)$.

Отсюда следует, что точка (x_0, t_0) либо является точкой области Q_T, либо лежит на участке границы $\Gamma_4 = \{(x, t) : 0 < x < l, t = T\}$.

В точке (x_0, t_0) должны выполняться необходимые условия максимума функции $v(x, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} \geqslant 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leqslant 0,$$

причем знак неравенства при оценке производной функции v по времени учитывает возможность нахождения точки (x_0, t_0) на участке границы Γ_4, где $t = T$.

Замечая, что $v_t = u_t - \varepsilon/(2T)$, а $v_{xx} = u_{xx}$, получаем следующие оценки для производных в точке (x_0, t_0):

$$u_t(x_0, t_0) = v_t(x_0, t_0) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0,$$

$$u_{xx}(x_0, t_0) = v_{xx}(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u_t(x_0, t_0) - a^2 u_{xx}(x_0, t_0) > 0,$$

т.е. функция $u(x, t)$ в точке (x_0, t_0) не удовлетворяет уравнению (2.45). Это противоречие позволяет утверждать, что $M_\Gamma = \mu$. Это утверждение называют ***принципом максимума для уравнения теплопроводности.*** ▶

Аналогично может быть доказана вторая часть теоремы о минимальном значении функции $u(x, t)$, так как если функция $u(x, t)$, указанная в условиях теоремы, в некоторой точке достигает минимума, то в этой точке достигает максимума функция $-u(x, t)$, также удовлетворяющая условиям теоремы.

Согласно физическим законам термодинамики принцип максимума для уравнения теплопроводности соответствует свойству самопроизвольной передачи теплоты лишь от более

нагретых частей тела к менее нагретым. Поэтому при отсутствии объемных тепловых источников увеличить температуру в любой точке внутри тела можно, только обеспечив бо́льшую температуру на поверхности тела.

Единственность решения первой краевой задачи. Доказанный принцип максимума позволяет доказать единственность классического решения первой краевой задачи для *уравнения теплопроводности.*

Теорема 2.2. Решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l; \\ u(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.46}$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{Q}_T = \{(x, t)\colon\ 0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, единственно.

◀ Для доказательства теоремы рассмотрим две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, определенные и непрерывные в $\overline{Q}_T$ и являющиеся решениями задачи (2.46). Пусть $w(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$. Функция w как разность непрерывных функций непрерывна в $\overline{Q}_T$. Кроме того, эта функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

и однородным начальному и граничным условиям

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l;$$

$$w(0, t) = w(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0.$$

В силу принципа максимума как наибольшее, так и наименьшее значения функции $w(x, t)$ равны нулю. В таком случае $w(x, t) \equiv 0$ и оба решения задачи (2.46) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ совпадают. ▶

2.4. Неоднородное уравнение теплопроводности

Рассмотрим задачу для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{2.47}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2.48}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} &\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u\right)\Big|_{x=0} = 0; \\ &\left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u\right)\Big|_{x=l} = 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Решение этой задачи будем искать в виде ряда Фурье по системе собственных функций $X_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n)$ задачи на собственные значения (2.22), (2.23), т.е. в форме разложения

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)\, X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n), \tag{2.50}$$

считая при этом t параметром.

Ряд (2.50) удовлетворяет граничным условиям (2.49). Поэтому функции $V_n(t)$ следует определить так, чтобы ряд (2.50) удовлетворял уравнению (2.47) и начальному условию (2.48).

Учитывая полноту системы собственных функций, представим функции $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ в виде следующих рядов Фурье:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\, X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n), \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n), \end{aligned} \tag{2.51}$$

где $f_n(t)$ и φ_n – коэффициенты Фурье, определяемые по формулам

$$
\begin{aligned}
f_n(t) &= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f(x,\,t)\,X_n(x)\,dx = \\
&= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f(x,\,t)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x+\theta_n)\,dx; \\
\varphi_n &= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(x)\,X_n(x)\,dx = \\
&= \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \varphi(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x+\theta_n)\,dx.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Подставляя предполагаемую форму решения (2.50) и разложение (2.51) для функции $f(x,\,t)$ в уравнение (2.47) и заменяя при этом $X_n''(x)$ на $-\lambda_n X_n(x)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}[V_n'(t)+\lambda_n a^2 V_n(t)-f_n(t)]\,X_n(x)=0.$$

Это соотношение, а значит, и уравнение (2.47) будут удовлетворены, если все коэффициенты разложения равны нулю, т.е.

$$V_n'(t)+\lambda_n a^2 V_n(t)=f_n(t). \tag{2.53}$$

Из начального условия (2.48) с учетом (2.50) и (2.51) находим

$$u(x,\,0)=\sum_{n=1}^{\infty}V_n(0)\,X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n X_n(x),\quad 0<x<l,$$

откуда

$$V_n(0)=\varphi_n. \tag{2.54}$$

Таким образом, для нахождения искомой функции $V_n(t)$ приходим к задаче Коши (2.53), (2.54) для обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Решение этой задачи может быть найдено методом Лагранжа вариации постоянной [VIII]. Оно имеет вид

$$V_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}\, d\tau.$$

Подставляя функции $V_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, в разложение (2.50), находим решение исходной задачи (2.47) - (2.49) в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(x,\, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} X_n(x) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}\, d\tau \right] X_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t f_n(\tau)\, e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)}\, d\tau \right] \sin(\sqrt{\lambda_n}\, x + \theta_n), \end{aligned} \tag{2.55}$$

где φ_n и $f_n(\tau)$ определены формулами (2.52).

Первое слагаемое в выражении (2.55) представляет собой решение краевой задачи для однородного уравнения [$f(x,\, t) \equiv \equiv 0$]. Как было показано выше [см. формулу (2.42)], его можно представить в виде

$$u_1(x,\, t) = \int_0^l G(x,\, \xi,\, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{2.56}$$

где функция источника $G(x,\, \xi,\, t)$ определена формулой (2.41).

Второе слагаемое в формуле (2.55)

$$u_2(x,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\int_0^t f_n(\tau)\,e^{-\lambda_n a^2(t-\tau)}\,d\tau\right\}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x+\theta_n) \quad (2.57)$$

представляет собой решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием $\varphi(x) \equiv 0$.

Преобразовав (2.57), подставим вместо $f_n(\tau)$ их значения (2.52) и изменим в уравнении (2.57) порядок суммирования и интегрирования. В результате получим

$$u_2(x,\,t) = \int_0^t\int_0^l\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\|X_n\|^2}\,e^{-\lambda_n a^2(t-\tau)}\sin(\sqrt{\lambda_n}\,x+\theta_n)\times\right.$$

$$\left.\times\sin(\sqrt{\lambda_n}\,\xi+\theta_n)\right]f(\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Это решение с помощью функции источника можно записать в виде

$$u_2(x,\,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,f(\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Таким образом, окончательно решение краевой задачи (2.47) - (2.49) для неоднородного уравнения теплопроводности можно записать с помощью функции источника как

$$u(x,\,t) = \int_0^l G(x,\,\xi,\,t)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,f(\xi,\,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

При решении задачи (2.47) - (2.49) со стационарной неоднородностью в уравнении, когда функция $f = f(x)$ не зависит от времени, рекомендуется сначала найти стационарное решение, т.е. такую функцию $u_s(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$a^2\frac{d^2u_s}{dx^2} + f(x) = 0$$

и граничным условиям (2.49). Тогда, представив решение искомой задачи (2.47) – (2.49) в виде

$$u(x,\, t) = u_s(x) + v(x,\, t),$$

для функции $v(x,\, t)$ получим краевую задачу для однородного уравнения вида (2.17) – (2.19) с начальным условием

$$v(x,\, 0) = \varphi(x) - u_s(x).$$

Эта задача была решена в 2.2.

2.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Задача о влиянии мгновенного сосредоточенного источника. Пусть в безграничной теплопроводящей среде в плоскости $x = 0$ в начальный момент времени $t = 0$ мгновенно выделяется количество теплоты Q_0 на единицу площади. Задача о нахождении нестационарного температурного поля $u(x,\, t)$ во всем пространстве от такого источника имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty; \tag{2.58}$$

$$u(x,\, 0) = Q\,\delta(x), \tag{2.59}$$

где $Q = Q_0/(\rho c)$; $\delta(x)$ – дельта-функция, описывающая влияние сосредоточенного источника теплоты.

Из физической постановки задачи следует, что на достаточно большом удалении от теплового источника температура и тепловой поток будут пренебрежимо малы, т.е.

$$u \to 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{2.60}$$

Интегрируя уравнение (2.58) по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, с учетом (2.60) получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, t)\, dx = a^2 \left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=+\infty} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-\infty} \right) = 0.$$

Отсюда для любого $t \geqslant 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, t)\, dx = Q. \tag{2.61}$$

так как при $t = 0$ постоянная интегрирования из начального условия (2.59) равна Q. Формула (2.61) определяет закон сохранения тепловой (внутренней) энергии среды в любой момент времени, и решение задачи (2.58), (2.59) должно удовлетворять условию (2.61).

Введем безразмерную переменную $\eta = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 t}}$ и в соответствии с теорией размерности (см. Приложение 3) будем искать решение задачи (2.58), (2.59) в следующей форме:

$$u(x,\, t) = \frac{Q}{\sqrt{a^2 t}}\, \Theta(\eta), \tag{2.62}$$

где $\Theta(\eta)$ – новая неизвестная функция, такая, что $\Theta(\eta) \to 0$ и $d\Theta/d\eta \to 0$ при $|\eta| \to \infty$. Из (2.62) находим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{Q}{\sqrt{a^2 t^3}} \left[\frac{\Theta(\eta)}{2} + \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\, \frac{d\Theta}{d\eta}\right] = -\frac{Q}{\sqrt{a^2 t^3}} \left[\frac{\Theta(\eta)}{2} + \frac{\eta}{2}\, \frac{d\Theta}{d\eta}\right];$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{Q}{a^2 \sqrt{a^2 t^3}}\, \frac{d^2\Theta}{d\eta^2}.$$

Подставив найденные значения производных в уравнение (2.58), получим для функции $\Theta(\eta)$ линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \frac{\eta}{2}\, \frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{1}{2}\, \Theta = 0,$$

или

$$\frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\eta}{2}\, \Theta\right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{d\Theta}{d\eta} + \frac{\eta}{2}\Theta = 0. \tag{2.63}$$

При этом постоянную интегрирования полагаем равной нулю в силу условий (2.60).

Общее решение уравнения (2.63) имеет вид

$$\Theta(\eta) = A\,e^{-\frac{\eta^2}{4}}. \tag{2.64}$$

Подставляя решение (2.64) в уравнение (2.62) и переходя к переменным x и t, получаем

$$u(x,\,t) = A\,\frac{Q}{\sqrt{a^2 t}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

Постоянную A найдем из интегрального условия (2.61), которое приводит к соотношению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\,t)\,dx = A\,\frac{Q}{\sqrt{a^2 t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,dx = Q. \tag{2.65}$$

Сделаем замену переменного $\xi = \dfrac{x}{2\sqrt{a^2 t}}$, $dx = 2\sqrt{a^2 t}\,d\xi$. Тогда (2.65) примет вид

$$2A\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = 1.$$

Отсюда с учетом значения интеграла Пуассона

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi = \sqrt{\pi}$$

находим $A = 1/(2\sqrt{\pi}\,)$.

Таким образом, функция

$$u(x,\,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{2.66}$$

является решением уравнения (2.58) при $t > 0$ и $-\infty < x < +\infty$.

Кроме того, $u(x,\,0) = Q\,\delta(x)$ при $t = 0$, так как, устремляя t к нулю по последовательности $t_n = \frac{1}{4a^2 n^2}$, получаем последовательность функций $u_n(x) = Q\,\frac{n}{\sqrt{\pi}}\, e^{-n^2 x}$, слабо сходящуюся (см. Приложение 1) к функции $Q\,\delta(x)$.

Опишем теперь свойства решения (2.66) задачи (2.58), (2.59) о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника.

1. График функции $u(x,\,t)$ при любом фиксированном $t > 0$ соответствует кривой Гаусса. Он симметричен относительно прямой $x = 0$ (рис. 2.4) и при $x = 0$ достигает максимума, равного $\frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}}$.

2. Площадь под кривыми $u(x,\,t_k)$ одинакова и равна Q.

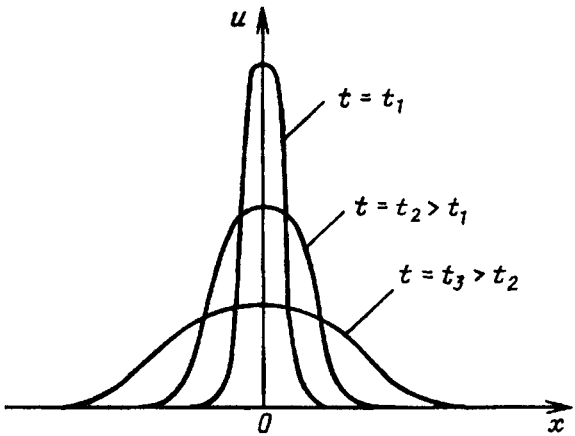


Рис. 2.4

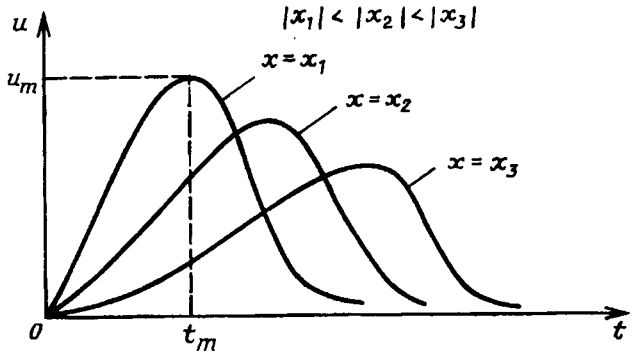


Рис. 2.5

3. В каждой фиксированной точке $x \neq 0$ функция $u(x, t)$ как функция времени сначала возрастает от нуля при $t = 0$ до значения $u_m = (\sqrt{2\pi e}\,|x|)^{-1}$ при $t = t_m = x^2/(2a^2)$, а затем монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \to +\infty$ (рис. 2.5).

Фундаментальное решение. Фундаментальным решением $G(x, x_0, t)$ уравнения теплопроводности на бесконечной прямой назовем решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ G(x, x_0, 0) = \delta(x - x_0). \end{cases} \tag{2.67}$$

С учетом формулы (2.66) решение задачи (2.67) запишем в виде

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}. \tag{2.68}$$

Эту функцию называют также ***функцией Грина*** для одномерного уравнения теплопроводности. Отметим следующие свой-

ства этой функции:

$$G(x, \xi, t) = G(\xi, x, t);$$
$$G(x, \xi, 0) = \delta(x - \xi);$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x, \xi, t)\, dx = 1;$$
$$G, \frac{\partial G}{\partial x} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty;$$
$$G, \frac{\partial G}{\partial \xi} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty.$$

Формула Пуассона. Рассмотрим ***задачу Коши*** для однородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \tag{2.69}$$
$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathfrak{R}^1. \tag{2.70}$$

Покажем, что для любой ограниченной функции $\varphi(x)$ решение задачи (2.69), (2.70) с помощью функции Грина представимо в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, t)\, d\xi. \tag{2.71}$$

Сначала установим, что несобственный интеграл в формуле (2.71) сходится. Пусть $|\varphi(x)| \leqslant M$. Произведем в интеграле (2.71) замену переменного интегрирования $z = \dfrac{\xi - x}{2\sqrt{a^2 t}}$, $dz = \dfrac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}}$. Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\sqrt{a^2 t}\, z)\, e^{-z^2}\, dz.$$

Отсюда

$$|u(x,\,t)| \leqslant \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\,dz = M.$$

Таким образом, интеграл (2.71) сходится, притом равномерно для $t > 0$ и $-\infty < x < +\infty$. При $t = 0$ функция $u(x,\,t)$, определяемая соотношением (2.71), удовлетворяет начальному условию (2.70). Действительно,

$$u(x,\,0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,G(x,\,\xi,\,0)\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,\delta(\xi - x)\,d\xi = \varphi(x).$$

При выводе формулы (2.71) заменим в задаче Коши (2.69), (2.70) переменные x и t на ξ и τ и введем в рассмотрение функцию $G^* = G(x,\,\xi,\,t-\tau)$. Тогда функции $u(\xi,\,\tau)$ и G^* будут удовлетворять уравнениям в частных производных

$$\begin{aligned} &u_\tau = a^2 u_{\xi\xi}, \quad \tau > 0, \quad \xi \in \mathfrak{R}^1;\\ &G^*_\tau = -a^2 G^*_{\xi\xi}, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \quad \xi \in \mathfrak{R}^1. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на G^*, а второе на u и сложим их. Получим равенство

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,(uG^*) = a^2\left(G^*\,\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} - u\,\frac{\partial^2 G^*}{\partial\xi^2}\right).$$

Проинтегрируем это равенство по ξ в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и по τ в пределах от 0 до t. Тогда после интегрирования по частям получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (uG^*)\big|_{\tau=0}^{\tau=t}\,d\xi = \int\limits_0^t \left(G^*\,\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\,\frac{\partial G^*}{\partial\xi}\right)\Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} d\tau. \qquad (2.72)$$

Если предполагать, что функция $u(\xi, \tau)$ и ее производная $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ ограничены при $|\xi| \to \infty$, то в силу свойств функции Грина интеграл в правой части равен нулю. Отсюда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t)\, G(x, \xi, 0)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, 0)\, G(x, \xi, t)\, d\xi. \qquad (2.73)$$

Заменив в (2.73) $G(x, \xi, 0) = G(\xi, x, 0)$ на $\delta(\xi - x)$, а $u(\xi, 0)$ на $\varphi(\xi)$, получим соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t)\, \delta(\xi - x)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, t)\, d\xi,$$

или

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, G(x, \xi, t)\, d\xi.$$

Формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, d\xi, \qquad (2.74)$$

определяющую решение задачи Коши (2.69), (2,70) для уравнения теплопроводности, называют ***формулой (интегралом) Пуассона***.

Из формулы Пуассона, в частности, следует, что если функция $\varphi(x)$ финитна, т.е. равна нулю вне некоторого отрезка $[a, b]$, что соответствует локализованному тепловому возмущению в начальный момент времени, то в любой сколь угодно отдаленной от отрезка $[a, b]$ точке с координатой x функция u будет отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Этот вывод линейной теории теплопроводности следует интерпретировать как бесконечную скорость распространения тепловых (температурных) возмущений.

Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ u(x, 0) = 0, \end{cases} \tag{2.75}$$

считая функцию $f(x, t)$ при $t > 0$ абсолютно интегрируемой в интервале $-\infty < x < +\infty$.

Применим к $u(x, t)$ и $f(x, t)$ преобразование Фурье [XI]:

$$\begin{aligned} u(x, t) \doteqdot \widetilde{u}(\lambda, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi; \\ f(x, t) \doteqdot \widetilde{f}(\lambda, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, t)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Тогда с учетом того, что $u_{xx}(x, t) \doteqdot -\lambda^2 \widetilde{u}(\lambda, t)$, из уравнения (2.75) для изображения $\widetilde{u}(\lambda, t)$ получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{d\widetilde{u}(\lambda, t)}{dt} + \lambda^2 a^2 \widetilde{u}(\lambda, t) = \widetilde{f}(\lambda, t); \\ \widetilde{u}(\lambda, 0) = 0, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$\widetilde{u}(\lambda, t) = \int\limits_0^t \widetilde{f}(\lambda, \tau)\, e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\, d\tau.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$u(x, t) = \int\limits_0^t d\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\lambda, \tau)\, e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\, e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

Подставим вместо функции $\widetilde{f}(\lambda, \tau)$ ее выражение из (2.76). Тогда

$$u(x, t) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\, e^{i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda. \quad (2.77)$$

На основании формулы Эйлера

$$e^{i\lambda(x-\xi)} = \cos\lambda(x-\xi) + i\sin\lambda(x-\xi)$$

соотношение (2.77) можно представить в виде

$$u(x, t) = \operatorname{Re} u(x\, t) + i \operatorname{Im} u(x, t).$$

Так как решение задачи (2.75) мы ищем в классе вещественных функций, то $\operatorname{Im} u(x, t) \equiv 0$, и уравнение (2.77) принимает вид

$$u(x, t) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau)\, d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda(x-\xi)\, d\lambda. \quad (2.78)$$

Вычислим внутренний интеграл в выражении (2.78). Для этого рассмотрим функцию $I(\alpha, \beta)$ для двух параметров α и β, определив ее как

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda\, d\lambda.$$

Дифференцируя этот несобственный интеграл по параметру β, получаем

$$\frac{dI}{d\beta} = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, e^{-\alpha^2\lambda^2} \sin\beta\lambda\, d\lambda,$$

или

$$\frac{dI}{d\beta} = \frac{1}{2\alpha^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\beta\lambda \, d\left(e^{-\alpha^2\lambda^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\alpha^2}\left(\sin\beta\lambda \, e^{-\alpha^2\lambda^2}\right)\Bigg|_{\lambda=-\infty}^{\lambda=+\infty} - \frac{\beta}{2\alpha^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda =$$

$$= -\frac{\beta}{2\alpha^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\alpha, \beta).$$

Таким образом, для функции $I(\alpha, \beta)$ получено дифференциальное соотношение

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I. \tag{2.79}$$

Кроме того, функция $I(\alpha, \beta)$ удовлетворяет условию

$$I(\alpha, 0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \, d\lambda = \sqrt{\pi}/\alpha. \tag{2.80}$$

Интегрируя уравнение (2.79) с учетом условия (2.80), получаем

$$I(\alpha, \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos\beta\lambda \, d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)} \cos\lambda(x-\xi) \, d\lambda =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a^2(t-\tau)}} \, e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} = 2\pi \, G(x, \xi, t-\tau).$$

Подставляя значение этого интеграла в формулу (2.78), получаем решение задачи в виде

$$u(x,\,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\,\tau)\,G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (2.81)$$

Используя свойство линейности, теперь можно утверждать, что суперпозиция решений (2.71) и (2.81)

$$u(x,\,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,G(x,\,\xi,\,t)\,d\xi + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\,\tau)\,G(x,\,\xi,\,t-\tau)\,d\xi\,d\tau \qquad (2.82)$$

является решением задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородным начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,\,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ u(x,\,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathfrak{R}^1. \end{cases} \qquad (2.83)$$

Вопросы и задачи

2.1. Привести к канонической форме уравнение с постоянными коэффициентами

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c\,\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0.$$

Ответ: $\dfrac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \dfrac{c}{a}\,\dfrac{\partial v}{\partial \xi}$, $\xi = y - x$, $\eta = x$, $u(\xi,\,\eta) = e^{\xi/c}\,v(\xi,\,\eta)$.

2.2. Найти иестационариое распределение температуры в слое $0 < x < l$, первоначально нагретом до температуры $U_0 = \mathrm{const}$, если начиная с момента времени $t = 0$ температура граничных поверхностей $x = 0$ и $x = l$ поддерживается равной нулю.

Ответ: $u(x,\,t) = \dfrac{4U_0}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{2k+1}\exp\left\{-\dfrac{(2k+1)^2\pi^2a^2t}{l^2}\right\}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}$.

2.3. Описать процесс выравнивания концентрации вещества в растворе, заключенном в плоскую кювету, ограниченную плоскостями $x = 0$ и $x = l$, непроницаемыми для вещества. В начальный момент времени все вещество равномерно распределено в слое $0 < x < h$, $h < l$ с концентрацией $C_0 = \text{const}$. Коэффициент диффузии вещества равен D.

Ответ: $u(x,\,t) = C_0\left[\dfrac{h}{l} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{n\pi h}{l}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 Dt}\cos\dfrac{n\pi x}{l}\right]$.

2.4. Найти нестационарное температурное поле в плоском слое конечной толщиной l, если начальное распределение температуры в слое описывается функцией

$$u(x,\,0) = \begin{cases} U_1 = \text{const}, & 0 < x < h; \\ U_2 = \text{const}, & h < x < l. \end{cases}$$

Рассмотреть два случая граничных условий: а) граничные плоскости $x = 0$ и $x = l$ при $t > 0$ поддерживаются при нулевой температуре; б) граничные плоскости теплоизолированы.

Ответ:

а) $u(x,\,t) =$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{\left[U_1 - (-1)^n U_2\right] - (U_1 - U_2)\cos\dfrac{n\pi h}{l}\right\}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l};$$

б) $u(x,\,t) =$

$$= U_2 + (U_1 - U_2)\frac{h}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(U_2 - U_1)\sin\dfrac{n\pi h}{l}}{n}e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t}\cos\frac{n\pi x}{l}.$$

2.5. Дан тонкий однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью длиной l, начальная температура которого равна $u(x,\,0) = Ax/l$ для $0 < x < l$. На конце стержня $x = 0$ температура поддерживается равной нулю, а температура конца стержня $x = l$ изменяется по закону $u(l,\,t) = Ae^{-t}$, $A = \text{const}$. Найти нестационарное распределение температуры в стержне.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{Ax}{l}e^{-t} + \dfrac{2Al^2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\left[e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} - e^{-t}\right]}{n(n^2\pi^2a^2 - l^2)}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$.

2.6. Описать процесс разогрева неограниченной пластины толщиной $2l$ одинаковыми постоянными тепловыми потоками, поступающими через граничные поверхности $x = -l$ и $x = +l$. Начальную температуру пластины принять равной нулю.

Указание. Учитывая симметрию задачи, рассмотреть ее в области $0 \leqslant x \leqslant l$, записав условие отсутствия теплового потока через плоскость $x = 0$.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{qa^2t}{kl} + \frac{ql}{k}\left[\frac{3x^2 - l^2}{6l^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2a^2t}{l^2}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}\right],$$

где k – коэффициент теплопроводности материала; q – плотность тепловых потоков на граничных поверхностях.

2.7. Неограниченная пластина толщиной l нагревается постоянным тепловым потоком плотностью q, поступающим через плоскость $x = l$. Плоскость $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре. Найти нестационарное температурное поле в пластине.

Ответ:

$$u(x,t) = \frac{qx}{k} - \frac{8ql}{k\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2t}{4l^2}\right]\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

2.8. Поверхность неограниченного тонкого стержня теплоизолирована. В начальный момент времени температура стержня отлична от нуля лишь в области $-l < x < +l$, где она постоянна и равна $U_0 = \text{const}$. Найти распределение температуры в стержне в любой момент времени $t > 0$.

Ответ: $u(x,t) = \dfrac{U_0}{2}\left[\Phi\left(\dfrac{x+l}{2\sqrt{a^2t}}\right) - \Phi\left(\dfrac{x-l}{2\sqrt{a^2t}}\right)\right]$, где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\xi^2}\,d\xi$ – интеграл ошибок.

3. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

3.1. Задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа

Потенциальное движение несжимаемой жидкости. Пусть жидкость движется со скоростью $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$. Рассмотрим некоторый произвольный фиксированный объем V жидкости, ограниченный поверхностью S. Масса m жидкости, заключенной в этом объеме, связана с плотностью $\rho(x, y, z, t)$ соотношением

$$m = \iiint\limits_V \rho(x, y, z, t)\, dV. \tag{3.1}$$

Эта масса может изменяться за счет потока жидкости через поверхность S, причем

$$\frac{dm}{dt} = -\oiint\limits_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS, \tag{3.2}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к S. Тогда из уравнений (3.1) и (3.2) получаем

$$\iiint\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV = -\oiint\limits_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS. \tag{3.3}$$

Преобразуя поверхностный интеграл по формуле Остроградского, запишем формулу (3.3) в виде

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0.$$

Отсюда в силу произвольности выделенного объема V следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \cdot \vec{v} = 0.$$

Это уравнение называют уравнением неразрывности сплошной среды. Для несжимаемой жидкости плотность $\rho = \mathrm{const}$, и из уравнения неразрывности следует, что

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим установившееся течение несжимаемой жидкости, для которого $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z)$. Если это течение безвихревое, то существует потенциал скоростей $u(x, y, z)$, такой, что

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} u. \tag{3.5}$$

Подставив выражение (3.5) в (3.4), получим

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0,$$

или

$$\Delta u = 0.$$

т.е. потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа.

Уравнение потенциала электростатического поля. Электрическое поле в среде с диэлектрической проницаемостью характеризуют напряженностью этого поля $\vec{E}(x, y, z)$. Запишем теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oiint\limits_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_V \rho\, dV. \tag{3.6}$$

Здесь ε_0 – электрическая постоянная в системе СИ; $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность электрических зарядов; V – некоторый объем пространства, ограниченный замкнутой поверхностью S. С помощью теоремы Остроградского соотношение (3.6) преобразуем к дифференциальной форме

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\varepsilon_0. \tag{3.7}$$

Учитывая связь $\vec{E} = -\operatorname{grad} u$ напряженности поля с потенциалом $u(x, y, z)$ этого поля, из (3.7) получим уравнение для потенциала электростатического поля

$$\Delta u = -f, \quad f = f(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \tag{3.8}$$

Неоднородное уравнение (3.8), где $f(x, y, z)$ – заданная функция, называют ***уравнением Пуассона.***

Уравнение магнитостатического поля. Если в среде с постоянной магнитной проницаемостью напряженность $\vec{H}(x, y, z)$ магнитного поля не зависит от времени, то для этого поля имеют место следующие уравнения магнитостатики:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \vec{H} = 0; \\ &\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $\vec{j}(x, y, z)$ – плотность тока проводимости.

Введем векторный потенциал $\vec{A}(x, y, z)$, связанный с напряженностью $\vec{H}(x, y, z)$ соотношением $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ с дополнительным условием калибровки векторного потенциала $\operatorname{div} \vec{A} = 0$. В этом случае первое из уравнений (3.9) выполняется тождественно, так как $\operatorname{div} \vec{H} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} \equiv 0$, а из второго находим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{j}. \tag{3.10}$$

По известной формуле векторного анализа $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$ [VII] с учетом условия $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ из (3.10) получаем уравнение для векторного потенциала

$$\Delta \vec{A} = -\vec{j}, \quad \text{или} \quad \begin{aligned} &\Delta A_x - -j_x(x, y, z); \\ &\Delta A_y = -j_y(x, y, z); \\ &\Delta A_z = -j_z(x, y, z). \end{aligned}$$

Таким образом, компоненты вектора $\vec{A}(A_x, A_y, A_z)$ удовлетворяют уравнениям Пуассона, где $j_x(x, y, z)$, $j_y(x, y, z)$, $j_z(x, y, z)$ – заданные функции.

Уравнение Лапласа и уравнение Пуассона являются дифференциальными уравнениями в частных производных второго порядка и принадлежат к уравнениям эллиптического типа.

К таким уравнениям приводят также задачи о стационарных тепловых состояниях однородных тел, об установившихся диффузионных процессах, о потенциале поля тяготения и др.

3.2. Фундаментальные решения уравнения Лапласа

Рассмотрим ***уравнение Лапласа***

$$\Delta u = 0,$$

где ***оператор Лапласа*** в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат определяется соответственно

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{3.11}$$

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \tag{3.12}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{3.13}$$

Важную роль при решении задач для уравнений Лапласа и Пуассона представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией.

Найдем решение уравнения Лапласа, удовлетворяющее условию сферической симметрии, когда функция u зависит только от расстояния $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ точки $M(x, y, z)$ до

начала координат. В этом случае уравнение Лапласа в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right)=0. \tag{3.14}$$

Интегрируя уравнение (3.14), получим

$$r^2\frac{du}{dr}=C_1,\quad \frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r^2},\quad u(r)=C_2-\frac{C_1}{r}.$$

При $C_1=-1$ и $C_2=0$ получаем функцию

$$u(r)=1/r, \tag{3.15}$$

которая удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $r=0$, где она обращается в бесконечность. Такую функцию называют ***фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.***

В задаче с осевой симметрией, когда функция u в цилиндрической системе координат не зависит от φ и z, уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)=0. \tag{3.16}$$

Интегрируя уравнение (3.16), находим

$$r\frac{du}{dr}=C_1,\quad \frac{du}{dr}=\frac{C_1}{r},\quad u(r)=C_1\ln r+C_2.$$

Полагая $C_1=-1$ и $C_2=0$, будем иметь

$$u(r)=\ln\frac{1}{r},\quad r\neq 0. \tag{3.17}$$

Эту функцию называют ***фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости.***

Дадим физическую интерпретацию фундаментальных решений уравнения Лапласа.

С точки зрения электростатической аналогии решение (3.15) описывает распределение потенциала поля в вакууме, создаваемое точечным зарядом, помещенным в начало координат. Действительно, если точечный заряд $q = 4\pi\varepsilon_0$ поместить в пространстве в начало координат, то потенциал электростатического поля будет определяться формулой

$$u(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{r}. \tag{3.18}$$

В такой физической модели плотность ρ точечного сосредоточенного заряда должна описываться дельта-функцией в пространстве: $\rho = q\delta_3(M)$ (см. Приложение 1). Тогда из уравнения (3.8) для потенциала электростатического поля следует, что

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) \equiv -4\pi\delta_3(M).$$

Таким образом, фундаментальное решение $u = 1/r$ уравнения Лапласа в пространстве $r > 0$ является ***обобщенным решением*** уравнения Пуассона

$$\Delta u = -4\pi\delta_3(M) \tag{3.19}$$

во всем пространстве $r \geqslant 0$.

Аналогично фундаментальное решение (3.17) описывает распределение потенциала электростатического поля в вакууме, создаваемого равномерно заряженной бесконечно протяженной нитью с линейной плотностью электрического заряда $\lambda = 2\pi\varepsilon_0$. Следовательно, функция $u = \ln(1/r)$ является *обобщенным решением* уравнения Пуассона

$$\Delta_2 u = -2\pi\delta_2(M), \quad r \geqslant 0.$$

Замечание 3.1. Непосредственной проверкой можно установить, что функция

$$u(r) = \frac{1}{r_{M_0M}}, \quad r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой она обращается в бесконечность. Но тогда эту функцию следует считать *обобщенным решением* уравнения

$$\Delta u = -4\pi\,\delta_3(M, M_0) \tag{3.20}$$

во всем пространстве. #

3.3. Интегральная формула Грина

Применим формулу Остроградского

$$\oiint\limits_{\Sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\vec{a}\,dV \tag{3.21}$$

к векторному полю

$$\vec{a}\,(x,\,y,\,z) = u\,\operatorname{grad} v - v\,\operatorname{grad} u, \tag{3.22}$$

где $u(x,\,y,\,z)$и $v(x,\,y,\,z)$ – функции, непрерывные вместе со своими частными производными до второго порядка в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

В этом случае

$$\vec{a}\cdot\vec{n} = u\,(\operatorname{grad} v\cdot\vec{n}) - v\,(\operatorname{grad} u\cdot\vec{n}) = u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{3.23}$$

Используя формулу векторного анализа $\operatorname{div}(\varphi\,\vec{A}) = \varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\operatorname{grad}\varphi$ [VII], находим, что

$$\operatorname{div}\vec{a} = \operatorname{div}(u\operatorname{grad} v - v\operatorname{grad} u) = u\operatorname{div}\operatorname{grad} v + \\ + \operatorname{grad} u\operatorname{grad} v - v\operatorname{div}\operatorname{grad} u - \operatorname{grad} v\operatorname{grad} u = u\Delta v - v\Delta u. \tag{3.24}$$

Подставив соотношения (3.23) и (3.24) в формулу (3.21), получим выражение

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} - v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS = \iiint\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)\,dV, \tag{3.25}$$

которое называют формулой Грина.

Пусть теперь функция u есть решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = -f(M), \quad M(x, y, z) \in \Omega, \tag{3.26}$$

а функция $v = 1/r_{M_0M}$ – фундаментальное решение уравнения Лапласа, являющееся обобщенным решением уравнения

$$\Delta v = -4\pi\delta_3(M, M_0),$$

где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – некоторая точка, принадлежащая области Ω.

Тогда из формулы Грина (3.25) получаем

$$\oiint\limits_{\Sigma}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0P}}\right) - \frac{1}{r_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega}\left[-4\pi\, u(M)\,\delta_3(M, M_0) + \frac{f(M)}{r_{M_0M}}\right]dV,$$

$$P(x, y, z) \in \Sigma, \quad M(x, y, z) \in \Omega.$$

Используя свойство дельта-функции (см. Приложение 1)

$$\iiint\limits_{\Omega} u(M)\,\delta_3(M, M_0)\,dV = u(M_0),$$

преобразуем полученное соотношение к следующему виду:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{f(M)}{r_{M_0M}}\,dV +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{r_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0P}}\right)\right]dS. \tag{3.27}$$

Соотношение (3.27) устанавливает связь между значением функции u в любой точке $M_0 \in \Omega$ и значениями функции u

и ее нормальной производной $\partial u/\partial n$ на поверхности Σ. Это соотношение называют ***интегральной формулой Грина.***

Если обозначить через $\nu(P)$ и $\mu(P)$ значения u и $\partial u/\partial n$ на поверхности Σ, то интегральной формуле Грина можно придать вид суммы трех слагаемых:

$$u(M_0) = \varphi(M_0) + \varphi_1(M_0) + \varphi_2(M_0). \tag{3.28}$$

Здесь

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(M)}{r_{M_0M}}\, dV;$$

$$\varphi_1(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \frac{\mu(P)}{r_{M_0P}}\, dS;$$

$$\varphi_2(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \nu(P)\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{M_0P}}\right) dS.$$

Функции $\varphi(M_0), \varphi_1(M_0), \varphi_2(M_0)$ называют соответственно ***объемным потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя.***

Аналогично для решения уравнения Пуассона на плоскости в области D, ограниченной контуром C, имеет место интегральная формула Грина

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D} f(M)\, \ln\frac{1}{r_{M_0M}}\, dS + \\ + \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C} \left[\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\, \frac{\partial u}{\partial n} - u\, \frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r_{M_0P}}\right)\right] dl, \tag{3.29}$$

в которой функцию

$$\varphi(M_0) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{D} f(M) \ln\frac{1}{r_{M_0M}}\, dS \tag{3.30}$$

называют ***логарифмическим потенциалом.***

3.4. Свойства объемного потенциала

Пусть функция $f(Q)$ определена в области Ω, ограниченной замкнутой поверхностью Σ. Рассмотрим объемный потенциал (3.28) с плотностью $f(Q)$:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV_Q, \tag{3.31}$$

где $M(x, y, z)$ может означать любую точку пространства; $Q(\xi, \eta, \zeta)$ – внутренняя точка области Ω; $r_{MQ} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$. Если точка M принадлежит области Ω, то интеграл в формуле (3.31) является несобственным, так как подынтегральная функция имеет особенность при $Q = M$.

Определение 3.1. Пусть функция $g(Q, M)$ непрерывна всюду в области Ω за исключением точки $Q = M$, где она обращается в бесконечность. Будем называть несобственный интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} g(Q, M)\, dV_Q$$

равномерно сходящимся в δ-окрестности точки M_0, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всякой области $\omega_\delta \subset \Omega$, содержащей точку M_0 и имеющей диаметр $d \leqslant \delta$, справедливо неравенство

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} g(Q, M)\, dV_Q \right| < \varepsilon$$

для всех точек M, отстоящих от точки M_0 на расстоянии $r_{M_0 M} < \delta$. #

Рассмотрим простейшие свойства объемного потенциала.

1. Если $f(Q)$ непрерывна и ограничена в Ω, то объемный потенциал $\varphi(M)$ непрерывен во всем пространстве.

В случае, когда точка M_0 не принадлежит области Ω, интеграл $\varphi(M_0)$ не является несобственным, и непрерывность $\varphi(M)$ в точке M_0 вытекает из непрерывности в этой точке подынтегральной функции.

Пусть теперь точка $M_0 \in \Omega$. Обозначим через ω_δ окрестность точки M_0, а через Ω_δ – шаровую область с центром в точке M_0 радиуса δ, целиком содержащую область ω_δ. Для непрерывности $\varphi(M)$ в точке M_0 достаточно установить в ней равномерную сходимость интеграла

$$\iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV_Q. \tag{3.32}$$

Так как функция $f(Q)$ ограничена в Ω, т.е. $|f(Q)| \leqslant A$, то справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV_Q \right| \leqslant \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{|f(Q)|}{r_{MQ}}\, dV_Q \leqslant$$

$$\leqslant A \iiint\limits_{\Omega_\delta} \frac{dV_Q}{r_{MQ}} < A \iiint\limits_{Ш_{2\delta}} \frac{dV_Q}{r_{MQ}},$$

где $Ш_{2\delta}$ – шар радиуса 2δ с центром в точке M. Перейдем в последнем интеграле к сферическим координатам с центром в точке M, полагая при этом $r_{MQ} = r$:

$$\iiint\limits_{Ш_{2\delta}} \frac{dV_Q}{r} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\delta} r\, dr = 8\pi\delta^2.$$

Поэтому

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV_Q \right| < 8\pi\delta^2 A.$$

Таким образом, при $\delta < \sqrt{\varepsilon/(8\pi A)}$

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV_Q \right| < \varepsilon,$$

т.е. интеграл (3.32) сходится равномерно.

2. Если $f(Q)$ непрерывна и ограничена в Ω, то объемный потенциал $\varphi(M)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка во всем пространстве.

Продифференцируем формально интеграл (3.31) по переменным x, y, z под знаком интеграла:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\xi - x}{r_{MQ}^3}\, f(Q)\, dV_Q;\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\eta - y}{r_{MQ}^3}\, f(Q)\, dV_Q;\\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\zeta - z}{r_{MQ}^3}\, f(Q)\, dV_Q.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Если точка M_0 не принадлежит области Ω, то интеграл $\varphi(M_0)$ не является несобственным. В этом случае подынтегральная функция в уравнении (3.31) как функция точки $M(x, y, z)$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные первого порядка. Поэтому интеграл $\varphi(M)$ также имеет в точке M_0 непрерывные частные производные первого порядка, причем эти производные вычисляются путем дифференцирования под знаком интеграла.

В случае, когда точка $M_0 \in \Omega$, требуется доказать равномерную сходимость несобственных интегралов в правых частях формул (3.33) в окрестности точки M_0.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{(\xi - x)\, f(Q)}{r_{MQ}^3}\, dV_Q. \tag{3.34}$$

В силу того, что $|f(Q)| \leqslant A$, $|\xi - x| \leqslant r_{MQ}$, справедлива оценка

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{(\xi - x)\, f(Q)}{r_{MQ}^3}\, dV_Q \right| \leqslant A \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{|\xi - x|}{r_{MQ}^3}\, dV_Q \leqslant$$

$$\leqslant A \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{dV_Q}{r_{MQ}^2} < A \iiint\limits_{Ш_{2\delta}} \frac{dV_Q}{r_{MQ}^2} =$$

$$= A \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\delta} dr = 8\pi A\delta.$$

Отсюда при $\delta < (\varepsilon/8\pi A)$

$$\left| \iiint\limits_{\omega_\delta} \frac{(\xi - x)\, f(Q)}{r_{MQ}^3}\, dV_Q \right| < \varepsilon,$$

т.е. интеграл (3.34) сходится равномерно в окрестности точки M_0 и, следовательно, существует непрерывная производная $\partial\varphi/\partial x$ в точке M_0.

Аналогично можно доказать непрерывность производных $\partial\varphi/\partial y$ и $\partial\varphi/\partial z$.

3. Если $f(Q)$ непрерывна и ограничена в области Ω, то вне области Ω объемный потенциал (3.31) удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi(M) = 0,$$

а внутри области Ω – уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi(M) = -f(M).$$

Действительно, формально находим

$$\Delta\varphi(M) = \Delta\left(\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} \frac{f(Q)}{r_{MQ}}\, dV \right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\Omega} f(Q)\, \Delta\left(\frac{1}{r_{MQ}} \right) dV_Q. \quad (3.35)$$

Если $M \notin \Omega$, то интеграл (3.31) не является несобственным, но тогда при $Q \neq M$

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MQ}}\right) = 0.$$

Следовательно, из уравнения (3.35) вытекает

$$\Delta\varphi(M) = 0, \quad M(x, y, z) \notin \Omega. \tag{3.36}$$

Если $M \in \Omega$, то при $Q = M$ интеграл (3.31) имеет особенность. Но согласно (3.20) в этом случае

$$\Delta\left(\frac{1}{r_{MQ}}\right) = -4\pi\delta_3(Q, M).$$

Поэтому из формулы (3.35) получаем .

$$\Delta\varphi(M) = -\iiint\limits_{\Omega} f(Q)\,\delta_3(Q, M)\,dV_Q.$$

Отсюда в силу свойств дельта-функции следует

$$\Delta\varphi(M) = -f(M), \quad M(x, y, z) \in \Omega. \tag{3.37}$$

Замечание 3.2. В любой внутренней точке области Ω объемный потенциал (3.31) является частным решением уравнения (3.37). #

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f(M), \quad M \in \Omega. \tag{3.38}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(M)$, такую, что

$$u = \varphi + v,$$

где $\varphi(M)$ – объемный потенциал (3.31). Тогда функция $v(M)$ должна удовлетворять в области Ω уравнению Лапласа

$$\Delta v = 0.$$

Следовательно, решение краевой задачи для неоднородного уравнения (3.38) можно свести к решению аналогичной задачи для уравнения Лапласа.

Аналогично можно установить, что если функция $f(x, y)$ непрерывна и ограничена в области D, то логарифмический потенциал (3.30) с плотностью $f(x, y)$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_D f(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}} \, d\xi \, d\eta \qquad (3.39)$$

удовлетворяет внутри области D уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -f(x, y),$$

а вне области D – уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

3.5. Свойства гармонических функций

Функцию, непрерывную в некоторой области вместе со своими частными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющую уравнению Лапласа, называют ***гармонической.***

На основе интегральных формул Грина установим некоторые свойства *гармонических функций.*

1. Если функция $u(x, y, z)$ – гармоническая в области Ω, то

$$\oiint\limits_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial n} \, dS = 0, \qquad (3.40)$$

где Σ – замкнутая поверхность, ограничивающая область Ω; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Σ.

Действительно, так как u гармоническая в Ω, то $\Delta u = 0$. Пусть функция $v \equiv 1$. Тогда из формулы Грина (3.25) следует утверждение (3.40).

2. Формула среднего значения. Запишем интегральную формулу Грина (3.27) для гармонической в области Ω функции $u(x, y, z)$. Полагая в уравнении (3.27) $f = 0$, получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{r_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{M_0P}} \right) \right] dS. \tag{3.41}$$

Пусть поверхность $\Sigma = \Sigma_R$ представляет собой поверхность шара Ω_R радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Введем сферическую систему координат с центром в точке M_0 и положим $r_{M_0M} = r$. Тогда на сфере будем иметь

$$r = R, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R} = -\frac{1}{R^2}.$$

В этом случае формула (3.41) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \oiint\limits_{\Sigma_R} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\Sigma_R} u(P)\, dS.$$

Отсюда с учетом свойства (3.40) для гармонической функции получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\Sigma_R} u(P)\, dS. \tag{3.42}$$

Правая часть формулы (3.42) представляет собой среднее значение функции $u(x, y, z)$ на сфере Σ_R. Из формулы (3.42) следует, что это среднее значение равно значению гармонической функции в центре шаровой области Ω_R.

Формулу (3.42) называют формулой среднего значения гармонической функции.

3. Принцип максимального значения. Если функция $u(x, y, z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$ и гармоническая внутри Ω, то она достигает своего наибольшего (наименьшего) значения на поверхности Σ. В случае, когда $u = \text{const}$, это утверждение очевидно.

Пусть теперь u не равна тождественно постоянной. В силу свойств непрерывных функций в замкнутой области функция u достигает своего наибольшего значения внутри области Ω либо на поверхности Σ.

Предположим противное утверждение, а именно, что наибольшего значения m эта функция достигает во внутренней точке области Ω. Обозначим через через ω множество всех точек области Ω, для которых $u = m$. Так как $u \neq \text{const}$, то множество ω не совпадает с Ω и , следовательно, в ω существует граничная точка M_0, являющаяся внутренней для Ω. Тогда из непрерывности функции u следует, что $u(M_0) = m$.

Построим сферу Σ_a с центром в точке M_0 радиуса a, такую, чтобы на этой сфере имелась хотя бы одна точка P, не принадлежащая множеству ω. Поэтому $u(P) < u(M_0) = m$, а из непрерывности функции u следует, что существует часть сферы Σ_a, в точках которой $u < m$. Но тогда, с одной стороны,

$$\oiint\limits_{\Sigma_a} u(P)\,dS < \oiint\limits_{\Sigma_a} m\,dS = 4\pi a^2 m, \tag{3.43}$$

а с другой – для гармонической функции из формулы (3.42) имеем

$$\oiint\limits_{\Sigma_a} u(P)\,dS = 4\pi a^2 u(M_0) = 4\pi a^2 m,$$

что противоречит (3.43), откуда вытекает справедливость принципа максимального значения.

Доказательство этого принципа для наименьшего значения следует из того, что гармоническая функция $-u$ достигает своего наибольшего значения там, где функция u достигает своего наименьшего значения.

Отсюда вытекают еще три свойства гармонической функции.

4. Если гармоническая в области Ω функция u удовлетворяет на границе области условию $A \leqslant u \leqslant B$, то она удовлетворяет этому условию и внутри области Ω.

5. Если гармоническая в области Ω функция u принимает на границе области постоянное значение, то она постоянна и во всей области Ω. В частности, если $u|_\Sigma = 0$, то $u \equiv 0$ в Ω.

6. Если функции u и v гармоничны в области Ω, то выполнимость на границе области неравенства $u \leqslant v$, влечет за собой выполнимость этого неравенства и внутри области Ω.

3.6. Краевые задачи для уравнения Лапласа

Как было показано ранее, различные физические процессы описываются уравнениями Лапласа и Пуассона. В каждой задаче, связанной с этими уравнениями, искомое решение должно удовлетворять уравнению в области Ω, а также некоторому дополнительному условию на границе Σ области Ω.

В зависимости от вида граничного условия будем различать следующие основные виды граничных задач:

$$u|_\Sigma = \mathcal{F}(P) \qquad \text{– первая краевая задача;}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = g(P) \qquad \text{– вторая краевая задача;}$$

$$\left.\left(\alpha\frac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\right|_\Sigma = \gamma(P) \text{ – третья краевая задача.}$$

Здесь $\mathcal{F}(P)$, $g(P)$ и $\gamma(P)$ – определенные на поверхности Σ функции; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к Σ; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Если решение задачи ищут в области Ω, внутренней (внешней) по отношению к поверхности Σ, то соответствующую задачу называют внутренней (внешней) краевой задачей.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа называют ***задачей Дирихле***, вторую – ***задачей Неймана.***

Пусть дана область Ω, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, на которой задана непрерывная функция $\mathcal{F}(P)$. Сформулируем внутреннюю задачу Дирихле.

Найти такую функцию $u(M)$, которая непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$, удовлетворяет в области Ω уравнению Лапласа и принимает на поверхности Σ заданные значе-

ния $\mathcal{F}(P)$, т.е.

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0, \quad M(x, y, z) \in \Omega; \\ &u|_{\Sigma} = \mathcal{F}(P), \quad P(x, y, z) \in \Sigma. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Теорема 3.1. Решение внутренней задачи Дирихле (3.44), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$, единственно.

◀ Пусть две функции u_1 и u_2 являются решением этой задачи. Тогда их разность $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области Ω, а на границе Σ принимает значение, равное нулю. В силу свойства 5 гармонической функции имеем, что $v \equiv 0$ всюду в Ω. ▶

Внутренняя задача Неймана формулируется следующим образом: найти внутри области Ω решение $u(M)$ уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad M(x, y, z) \in \Omega, \tag{3.45}$$

непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$ и удовлетворяющее на поверхности Σ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma} = g(P), \quad P(x, y, z) \in \Sigma. \tag{3.46}$$

Покажем, что решение задачи (3.45), (3.46) определяется с точностью до произвольной постоянной. Доказательство проведем при дополнительном условии непрерывности производных функции u первого порядка в области Ω.

Пусть две непрерывно дифференцируемые функции u_1 и u_2 в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Sigma$ удовлетворяют уравнению (3.45) в области Ω и условию (3.46) на Σ. Тогда для функции $v = u_1 - u_2$ будем иметь

$$\Delta v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Sigma} = 0. \tag{3.47}$$

Положим в формуле Остроградского (3.21) $\vec{a} = v \operatorname{grad} v$. Так как $\vec{a} \cdot \vec{n} = v(\operatorname{grad} v \cdot \vec{n}) = v(\partial v/\partial n)$, $\operatorname{div}(v \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} v)^2 + v\Delta v$, то эта формула примет вид

$$\iiint\limits_{\Omega} [(\operatorname{grad} v)^2 + v\,\Delta v]\, dV = \oiint\limits_{\Sigma} v\,\frac{\partial v}{\partial n}\, dS. \tag{3.48}$$

Учитывая теперь (3.47), из уравнения (3.48) находим

$$\iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} v)^2 \, dV = 0.$$

Отсюда $\operatorname{grad} v = 0$ всюду в Ω. Но тогда в силу непрерывности функции v и ее частных производных следует, что

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

т.е. $v = u_1 - u_2 = \text{const}$.

Замечание 3.3. Задача Неймана может иметь решение не при всякой непрерывной функции $g(P)$. Из свойства 1 для гармонической функции и граничного условия (3.46) вытекает условие разрешимости задачи Неймана

$$\oiint\limits_{\Sigma} g(P) \, dS = 0. \tag{3.49}$$

Для единственности внешних краевых задач необходимо потребовать дополнительного условия его поведения на бесконечности, а именно $u(M)$ равномерно стремится к нулю при $M \to \infty$. #

3.7. Метод функции Грина

Функцией Грина для задачи Дирихле (3.44) назовем функцию $G(M, M_0)$, которая является обобщенным решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta G = -4\pi\delta_3(M, M_0), \quad M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega; \\ G|_{\Sigma} = 0. \end{cases} \tag{3.50}$$

Так как функция Грина $G(M, M_0)$ имеет особенность вида $\dfrac{1}{r_{M_0 M}}$, то ее можно представить в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{r_{M_0 M}} + v(M),$$

где $v(M)$ – гармоническая функция, являющаяся решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad M(x, y, z) \in \Omega; \\ v|_{\Sigma} = -\dfrac{1}{r_{M_0 P}}, \quad P(x, y, z) \in \Sigma. \end{cases}$$

Запишем формулу Грина (3.25), в которой функция u есть искомое решение задачи Дирихле (3.44), а функция $v = G(M, M_0)$:

$$\oiint\limits_{\Sigma} \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS = \iiint\limits_{\Omega} (u \Delta G - G \Delta u)\, dV. \qquad (3.51)$$

Учитывая, что $G|_{\Sigma} = 0$, $u|_{\Sigma} = \mathcal{F}(P)$, а в области Ω $\Delta u = 0$ и $\Delta G = -4\pi\delta_3(M, M_0)$, из формулы (3.51) получаем

$$\oiint\limits_{\Sigma} \mathcal{F}(P) \frac{\partial G}{\partial n}\, dS = -4\pi \iiint\limits_{\Omega} u(M)\, \delta_3(M, M_0)\, dV.$$

Отсюда, используя свойство дельта-функции, находим

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \oiint\limits_{\Sigma} \mathcal{F}(P) \frac{\partial G}{\partial n}\, dS. \qquad (3.52)$$

Эта формула дает решение задачи Дирихле (3.34) в любой точке $M_0 \in \Omega$, если известна функция Грина $G(M, M_0)$ для этой задачи.

Используя определение функции Грина (3.50), дадим следующую электростатическую интерпретацию функции Грина для задачи Дирихле.

Пусть точечный заряд q помещен в точку M_0 внутри проводящей заземленной поверхности Σ (рис. 3.1). Функцию Грина $G(M, M_0)$ можно интерпретировать как потенциал поля, создаваемого точечным зарядом $q = 4\pi\varepsilon_0$, помещенным в точку M_0 внутри поверхности Σ. Потенциал этого поля складывается из потенциала поля точечного заряда q и потенциала поля,

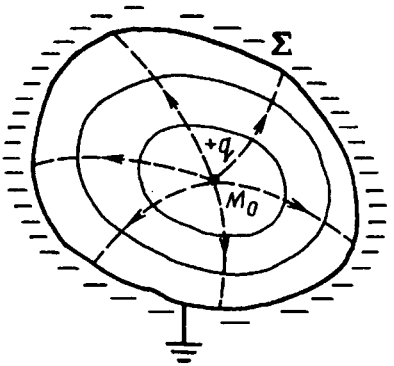


Рис. 3.1

создаваемого индуцированными (наведенными) на поверхности Σ зарядами противоположного знака. Такая электростатическая аналогия позволяет построить функцию Грина для областей простой формы (полупространство, шар, слой), используя решение задач электростатики.

Приведем примеры решения задачи Дирихле ***методом функции Грина.***

Задача Дирихле для полупространства. Найти решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad -\infty < x,\, y < +\infty, \quad z > 0; \\ u(x,\, y,\, 0) = \mathcal{F}(x,\, y), \quad -\infty < x,\, y < +\infty. \end{cases} \tag{3.53}$$

В этой задаче поверхность Σ представляет собой плоскость $z = 0$, которую можно замкнуть в бесконечности. Для нахождения функции Грина воспользуемся электростатической аналогией. Если вблизи заземленной проводящей плоскости $z = 0$ расположен заряд q, то потенциал электростатического поля в области $z > 0$ можно найти, поместив в точку $M_0^*(x_0,\, y_0,\, -z_0)$ отрицательный заряд $-q$. Поскольку потенциал искомого поля будет равен сумме потенциалов, создаваемых этими двумя зарядами, функцию Грина определим как

$$G(M,\, M_0) = 1/r - 1/r_1, \tag{3.54}$$

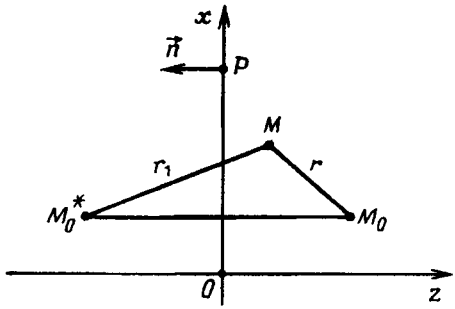


Рис. 3.2

где $r = r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$; $r_1 = r_{M_0^*M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$. Очевидно, что $r_1 = r$ на поверхности Σ, а поэтому $G|_\Sigma = 0$.

Найдем производную функции $G(M, M_0)$ по внешней нормали к поверхности Σ (рис. 3.2.):

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma = -\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{2z_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}.$$

Тогда согласно (3.52) решение задачи Дирихле для полупространства примет вид

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{z_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{F}(x, y)\,dx\,dy}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2]^{3/2}}. \quad (3.55)$$

Интеграл в правой части уравнения (3.55) называют ***интегралом Пуассона для полупространства.***

Задача Дирихле для шара. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad M \in \Omega_a; \\ u|_{\Sigma_a} = \mathcal{F}(P), \quad P \in \Sigma_a. \end{cases} \quad (3.56)$$

Здесь Ω_a – шар радиуса a с центром в начале координат; Σ_a – поверхность этого шара.

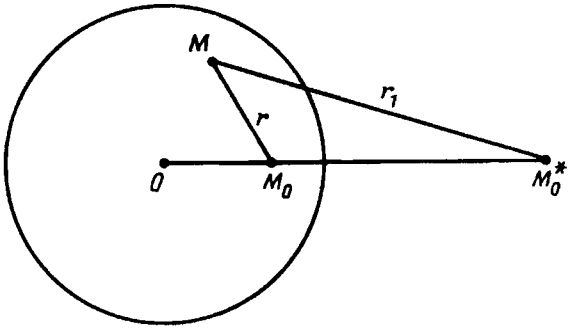


Рис. 3.3

Для построения функции Грина воспользуемся известным решением задачи электростатики о потенциале поля, созданном точечным зарядом q, помещенным внутрь заземленной проводящей сферической оболочки в точке M_0 (рис. 3.3), находящейся на расстоянии ρ_0 от центра шара. Для вычисления потенциала внутри проводящей сферы с центром в начале координат поместим в сопряженную точку M_0^*, находящуюся на расстоянии ρ_0^* от центра шара ($\rho_0\rho_0^* = a^2$), отрицательный заряд $q^* = -\dfrac{qa}{\rho_0}$. Такие два заряда q и q^* создают электростатическое поле, потенциал которого на поверхности Σ_a равен нулю. Поэтому функцию Грина в этой задаче следует представить в виде

$$G(M,\, M_0) = \frac{1}{r} - \frac{a}{\rho_0}\,\frac{1}{r_1}, \tag{3.57}$$

где $r = r_{M_0M}$; $r_1 = r_{M_0^*M}$.

Совместим теперь точку M с точкой P на поверхности сферы (рис. 3.4). Так как на поверхности сферы $G(P,\, M_0) = 0$, то для точки P справедливо равенство $r_1 = \dfrac{a}{\rho_0}\, r$.

Найдем производную функции G по внешней нормали к поверхности Σ_a:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{a}{\rho_0}\,\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

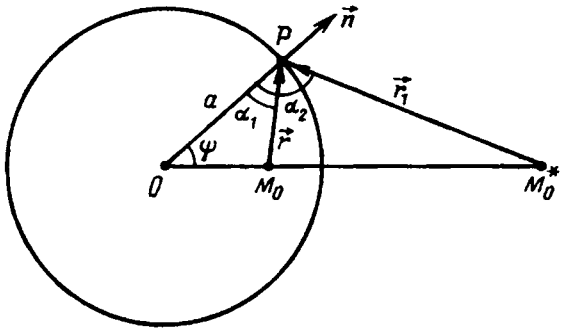


Рис. 3.4

Далее определим

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) = \operatorname{grad}\frac{1}{r}\cdot\vec{n} = -\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3},$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right) = \operatorname{grad}\frac{1}{r_1}\cdot\vec{n} = -\frac{\vec{r_1}\cdot\vec{n}}{r_1^3}.$$

Поэтому

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma_a} = -\frac{\vec{r}\cdot\vec{n}}{r^3} + \frac{a}{\rho_0}\,\frac{\vec{r_1}\cdot\vec{n}}{r_1^3} = -\frac{\cos\alpha_1}{r^2} + \frac{a}{\rho_0}\,\frac{\cos\alpha_2}{r_1^2},$$

где $\alpha_1 = (\widehat{\vec{r},\,\vec{n}})$; $\alpha_2 = (\widehat{\vec{r_1},\,\vec{n}})$.

По теореме косинусов из треугольников OM_0P и OM_0^*P вычисляем

$$\cos\alpha_1 = \frac{a^2 + r^2 - \rho_0^2}{2ar}; \quad \cos\alpha_2 = \frac{a^2 + r_1^2 - \rho_0^{*2}}{2ar_1}.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma_a} = -\frac{a^2 + r^2 - \rho_0^2}{2ar^3} + \frac{a}{\rho_0}\,\frac{a^2 + r_1^2 - \rho_0^{*2}}{2ar_1^3}.$$

Так как $r_1 = \dfrac{ar}{\rho_0}$, $\rho_0^* = \dfrac{a^2}{\rho_0}$, $r = \sqrt{a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos\psi}$, то

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma_a} = \frac{\rho_0^2 - a^2}{ar^3} = \frac{\rho_0^2 - a^2}{a\left(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos\psi\right)^{3/2}}.$$

Окончательно в соответствии с формулой (3.52) получаем решение задачи Дирихле (3.56) в виде

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a} \oiint\limits_{\Sigma_a} \mathcal{F}(P)\, \frac{a^2 - \rho_0^2}{\left(a^2 + \rho_0^2 - 2a\rho_0 \cos\psi\right)^{3/2}}\, dS. \qquad (3.58)$$

Введем сферическую систему координат:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi; \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi; \quad z = \rho \cos\theta.$$

Тогда $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, а на сфере Σ_a будем иметь

$$P = P(a, \theta, \varphi); \quad \mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(\theta, \varphi); \quad dS = a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Выразим $\cos\psi$ через сферические координаты точек M_0 и P:

$$\frac{\overrightarrow{OM_0}}{|\overrightarrow{OM_0}|} = \left(\frac{x_0}{\rho_0}, \frac{y_0}{\rho_0}, \frac{z_0}{\rho_0}\right) = (\sin\theta_0 \cos\varphi_0, \sin\theta_0 \sin\varphi_0, \cos\theta_0),$$

$$\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} = \left(\frac{x_P}{a}, \frac{y_P}{a}, \frac{z_P}{a}\right) = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta),$$

$$\cos\psi = \cos(\widehat{\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OP}}) = \frac{\overrightarrow{OM_0}}{|\overrightarrow{OM_0}|} \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} =$$

$$= \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta_0 \cos\theta.$$

Итак, после преобразования координат решение (3.58) задачи Дирихле для шара будет иметь вид

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\mathcal{F}(\theta, \varphi)\left(a^2 - \rho_0^2\right) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\left(\rho_0^2 + a^2 - 2a\rho_0 \cos\psi\right)^{3/2}}. \qquad (3.59)$$

Интеграл в правой части формулы (3.59) называют ***интегралом Пуассона для шара.***

3.8. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом разделения переменных

Третья краевая задача. Рассмотрим внутреннюю *краевую задачу* для уравнения Лапласа с граничным условием третьего рода

$$\begin{cases} \Delta_2 u = 0, \quad M \in D; \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u\right)\Big|_C = \gamma(P), \quad P \in C, \end{cases} \tag{3.60}$$

где α, $\beta = \text{const} > 0$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Пусть область D представляет собой круг радиуса a, ограниченный окружностью C. Тогда задача (3.60) в полярных координатах будет иметь вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \ 0 \leqslant r < a, \ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; & (3.61) \\ \left(\alpha \dfrac{\partial u}{\partial r} + \beta u\right)\Big|_{r=a} = \gamma(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. & (3.62) \end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать методом разделения переменных в виде

$$u(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi) \not\equiv 0. \tag{3.63}$$

Подставляя предполагаемую форму решения (3.63) в уравнение (3.61) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{r\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{const}.$$

Отсюда следует, что функция $R(r)$ должна быть найдена из решения уравнения

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R(r) = 0, \tag{3.64}$$

а для функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\,\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \tag{3.65}$$

Здесь условие периодичности функции $\Phi(\varphi)$ является следствием периодичности искомого решения $u(r, \varphi)$ по угловой переменной с периодом 2π.

Задача (3.65) имеет нетривиальные периодические решения только при $\lambda = \lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Эти решения имеют вид

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \tag{3.66}$$

где A_n и B_n – произвольные постоянные.

Из (3.64) для функции $R(r)$ при $\lambda = n^2$ получаем уравнение

$$r^2 \frac{d^2R}{dr^2} + r\,\frac{dR}{dr} - n^2R = 0. \tag{3.67}$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде степенной функции $R(r) = r^k$, $k = \text{const}$. Подставив эту функцию в уравнение (3.67):

$$r^2k\,(k-1)\,r^{k-2} + rk\,r^{k-1} - n^2r^k = 0,$$

устанавливаем, что показатель степени k определяется из уравнения $k^2 - n^2 = 0$, т.е. $k = \pm n$.

Следовательно, уравнение (3.67) имеет следующие два линейно независимых решения: r^n и r^{-n}.

Решение внутренней задачи Дирихле должно быть ограничено в центре круга при $r = 0$. Поэтому из двух найденных решений следует взять лишь $R_n(r) = r^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, согласно (3.63) частные решения уравнения (3.61) можно записать так:

$$u_n(r, \varphi) = r^n\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В силу линейности и однородности уравнения (3.61) суперпозиция частных решений

$$u(r,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \qquad (3.68)$$

также будет удовлетворять этому уравнению.

Выполняя граничные условия (3.62), получаем

$$\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n\,a^{n-1}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ + \beta \sum_{n=0}^{\infty} a^n\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \gamma(\varphi)$$

или

$$\frac{2\beta A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha\,n\,a^{n-1} + \beta\,a^n) \times \\ \times\,(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = \gamma(\varphi). \qquad (3.69)$$

Разложим функцию $\gamma(\varphi)$ в интервале $(0,\,2\pi)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$\gamma(\varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi);$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)\,\cos n\varphi\,d\varphi, \quad n = 0,\,1,\,2,\,\ldots; \qquad (3.70)$$

$$d_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)\,\sin n\varphi\,d\varphi, \quad n = 1,\,2,\,\ldots$$

Приравняв коэффициенты в рядах Фурье (3.69) и (3.70), находим

$$A_0 = \frac{c_0}{2\beta}; \quad A_n = \frac{c_n}{\alpha\,n\,a^{n-1} + \beta\,a^n}; \\ B_n = \frac{d_n}{\alpha\,n\,a^{n-1} + \beta\,a^n}. \qquad (3.71)$$

Таким образом, решение третьей краевой задачи для уравнения Лапласа в круге представимо в виде ряда (3.68) с коэффициентами, определяемыми формулами (3.71).

Задачи Дирихле и Неймана в круге. Из найденного решения третьей краевой задачи могут быть получены решения задач Дирихле и Неймана.

Если положить $\alpha = 0$, а $\beta = 1$, то краевая задача (3.60) переходит в задачу Дирихле, а ее решение представимо рядом (3.68) с коэффициентами

$$A_0 = \frac{c_0}{2}; \quad A_n = \frac{c_n}{a^n}; \quad B_n = \frac{d_n}{a^n}.$$

Это решение можно записать в форме

$$u(r, \varphi) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi), \quad \rho = \frac{r}{a} < 1. \quad (3.72)$$

Если же в задаче (3.60) положить $\alpha = 1$, $\beta = 0$, то получим задачу Неймана для круга. В этом случае

$$A_n = \frac{c_n}{n\, a^{n-1}}; \quad B_n = \frac{d_n}{n\, a^{n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а формула (3.71) для коэффициента A_0 устанавливает условие (3.49) разрешимости задачи Неймана

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Поэтому решение задачи Неймана имеет вид

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} \rho^n (c_n \cos n\varphi + d_n \sin n\varphi) + \text{const}. \quad (3.73)$$

Замечание 3.4. Если в формулах (3.72) и (3.73) значение ρ считать равным a/r, то они будут определять решения внешних для круга задач Дирихле и Неймана. #

Интеграл Пуассона. Получим иную форму записи решения задачи Дирихле для круга. Для этого преобразуем решение (3.72), подставляя в него значения коэффициентов c_n и d_n,

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \gamma(\varphi)\left[\frac{1}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left(\cos n\varphi\cos n\psi+\sin n\varphi\sin n\psi\right)\right]d\psi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\gamma(\psi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\varphi-\psi)\right]d\psi. \quad (3.74)$$

Замечая, что

$$\cos n(\varphi-\psi) = \frac{1}{2}\left[e^{in(\varphi-\psi)}+e^{-in(\varphi-\psi)}\right],$$

находим

$$I \equiv \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\varphi-\psi) =$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\left[e^{in(\varphi-\psi)}+e^{-in(\varphi-\psi)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho\, e^{i(\varphi-\psi)}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\rho\, e^{-i(\varphi-\psi)}\right)^n\right].$$

Так как $|\rho\, e^{\pm i(\varphi-\psi)}| = \rho < 1$, то, вычислив суммы геометрических прогрессий, получим

$$I = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\rho\, e^{i(\varphi-\psi)}}{1-\rho\, e^{i(\varphi-\psi)}}+\frac{\rho\, e^{-i(\varphi-\psi)}}{1-\rho\, e^{-i(\varphi-\psi)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\varphi-\psi)+\rho^2} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\psi)+r^2}.$$

Подставляя найденное значение I в уравнение (3.74), получаем решение задачи Дирихле для круга в форме

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma(\psi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi. \qquad (3.75)$$

Интеграл в правой части формулы (3.75) называют ***интегралом Пуассона для круга.***

Задача Дирихле в кольце. Приведем теперь решение задачи Дирихле в кольце, внутренняя граница которого есть окружность радиуса a, а внешняя – окружность радиуса b. Эту задачу можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \; a < r < b, \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \quad (3.76)$$

$$u(a, \varphi) = \mathcal{F}_1(\varphi), \quad u(b, \varphi) = \mathcal{F}_2(\varphi), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \quad (3.77)$$

Представляя решение уравнения (3.76) в форме (3.63), придем к задаче на собственные значения (3.65) для функции $\Phi(\varphi)$ и к решению в интервале $a < r < b$ уравнения (3.67).

Общее решение уравнения (3.67) имеет вид

$$\begin{cases} R_0(r) = \overline{A}_0 + \overline{B}_0 \ln r & \text{при} \quad n = 0, \\ R_n(r) = \overline{A}_n r^n + \overline{B}_n r^{-n} & \text{при} \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (3.78)$$

Здесь в отличие от задачи для круга нужно сохранить оба слагаемых, так как точка $r = 0$ находится вне кольца.

Поэтому с учетом формул (3.66) и (3.78) частные решения уравнения (3.76) можно записать в виде

$$\begin{cases} u_0(r, \varphi) = R_0(r)\,\Phi_0(\varphi) = A_0^+ + B_0^+ \ln r, \quad n = 0; \\ u_n(r, \varphi) = R_n(r)\,\Phi_n(\varphi) = \\ \quad = (A_n^+ r^n + B_n^+ r^{-n}) \cos n\varphi + \\ \qquad\qquad + (A_n^- r^n + B_n^- r^{-n}) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Здесь $A_n^+ = \overline{A}_n A_n$; $B_n^+ = \overline{B}_n A_n$; $A_n^- = \overline{A}_n B_n$; $B_n^- = \overline{B}_n B_n$ – произвольные постоянные.

Функция $u(r, \varphi)$, определенная как суперпозиция этих частных решений:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2}\left(A_0^+ + B_0^+ \ln r\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^+ r^n + B_n^+ r^{-n}\right)\cos n\varphi + \right.$$
$$\left. + \left(A_n^- r^n + B_n^- r^{-n}\right)\sin n\varphi\right], \quad (3.79)$$

будет удовлетворять линейному однородному уравнению (3.76).

Подставив (3.79) в граничные условия (3.77), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(A_0^+ + B_0^+ \ln a\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^+ a^n + B_n^+ a^{-n}\right)\cos n\varphi + \right.\\
&\qquad \left. + \left(A_n^- a^n + B_n^- a^{-n}\right)\sin n\varphi\right] = \mathcal{F}_1(\varphi);\\
&\frac{1}{2}\left(A_0^+ + B_0^+ \ln b\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^+ b^n + B_n^+ b^{-n}\right)\cos n\varphi + \right.\\
&\qquad \left. + \left(A_n^- b^n + B_n^- b^{-n}\right)\sin n\varphi\right] = \mathcal{F}_2(\varphi);
\end{aligned} \quad (3.80)$$

Эти соотношения представляют собой разложения заданных функций $\mathcal{F}_1(\varphi)$ и $\mathcal{F}_2(\varphi)$ в тригонометрические ряды Фурье Вычислим коэффициенты Фурье этих функций:

$$c_n^{(1,2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{1,2}(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$d_n^{(1,2)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathcal{F}_{1,2}(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда из уравнений (3.80) находим

$$\begin{cases} A_0^+ + B_0^+ \ln a = c_0^{(1)}; \\ A_0^+ + B_0^+ \ln b = c_0^{(2)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n^+ a^n + B_n^+ a^{-n} = c_n^{(1)}; \\ A_n^+ b^n + B_n^+ b^{-n} = c_n^{(2)}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n^- a^n + B_n^- a^{-n} = d_n^{(1)}; \\ A_n^- b^n + B_n^- b^{-n} = d_n^{(2)}. \end{cases}$$

Так как $\ln b - \ln a \neq 0$ и $(a/b)^n - (b/a)^n \neq 0$, то эти системы однозначно разрешимы:

$$A_0^+ = \frac{c_0^{(1)} \ln b - c_0^{(2)} \ln a}{\ln \frac{b}{a}}; \qquad B_0^+ = \frac{c_0^{(2)} - c_0^{(1)}}{\ln \frac{b}{a}};$$

$$A_n^+ = \frac{c_n^{(1)} a^n - c_n^{(2)} b^n}{a^{2n} - b^{2n}}; \qquad B_n^+ = \frac{a^n b^n \left(c_n^{(2)} a^n - c_n^{(1)} b^n\right)}{a^{2n} - b^{2n}};$$

$$A_n^- = \frac{d_n^{(1)} a^n - d_n^{(2)} b^n}{a^{2n} - b^{2n}}; \qquad B_n^- = \frac{a^n b^n \left(d_n^{(2)} a^n - d_n^{(1)} b^n\right)}{a^{2n} - b^{2n}}.$$

Подставляя значения этих коэффициентов в уравнение (3.79), получаем решение задачи Дирихле в кольце.

Вопросы и задачи

3.1. В области эллиптичности привести уравнение

$$u_{xx} + x\,y\,u_{yy} = 0$$

к канонической форме.

Ответ: $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{3\xi} u_\xi - \dfrac{1}{\eta} u_\eta = 0.$

3.2. Внутри круга $0 \leqslant r < a$ найти гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, принимающую на границе круга значения $2\sin^2\varphi + \sin 2\varphi$.

Ответ: $u(r, \varphi) = 1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)$.

3.3. Найти ограниченное решение внешней задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad a < r < \infty, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \\ u(a, \varphi) = \sin\dfrac{\varphi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Ответ: $u(r, \varphi) = \dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a}{r}\right)^n \dfrac{\cos n\varphi}{4n^2 - 1}\right]$.

3.4. Найти значение параметра α, при котором разрешима внутренняя задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = \dfrac{\varphi - \alpha}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

и решить эту задачу.

Ответ: $u(r, \varphi) = \text{const} - a\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\varphi}{n^2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n$.

3.5. Решить третью краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 0 \leqslant r < a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \\ \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + u\right)\right|_{r=a} = \dfrac{1}{\pi^2}\varphi(2\pi - \varphi). \end{cases}$$

Ответ: $u(r, \varphi) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{4a}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{r}{a}\right)^n \dfrac{\cos n\varphi}{n^2(n+a)}$.

3.6. Решить задачу Дирихле в кольце $a < r < b$, если искомая функция $u(r, \varphi)$ на внутренней границе равна нулю, а на внешней принимает значения $1 + \cos\varphi$.

Ответ: $u(r, \varphi) = \dfrac{ab}{b^2 - a^2}\left(\dfrac{r}{a} - \dfrac{a}{r}\right)\cos\varphi + \dfrac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$.

3.7. Найти стационарную температуру $u(x_0, y_0, z_0)$ в однородном полупространстве $z > 0$, если на границе $z = 0$ полупространства распределение температуры равно

$$\mathcal{F}(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| < l, \quad -\infty < y < \infty; \\ 0, & |x| > l, \quad -\infty < y < \infty. \end{cases}$$

Ответ: $u = \dfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{l - x_0}{z_0} + \operatorname{arctg}\dfrac{l + x_0}{z_0}\right)$.

3.8. Поверхность бесконечного цилиндра радиуса a имеет потенциал

$$U(\varphi) = \begin{cases} 1 & 0 < \varphi < \pi; \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Найти поле потенциала внутри и вне цилиндра.

Ответ: $u(r, \varphi) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho^{2n-1}\dfrac{\sin(2n-1)\varphi}{2n-1}$, где $\rho = r/a$, если $0 \leqslant r < a$, и $\rho = a/r$, если $a < r < \infty$.

3.9. Найти потенциал скоростей жидкости, обтекающей неподвижный бесконечный цилиндр радиуса a, если на бесконечности скорость жидкости равна V_0.

Указание. Сделать подстановку $u = u_0 + v$, где $u_0 = -V_0 x$ – потенциал однородного потока жидкости, движущейся вдоль оси Ox.

Ответ: $u(r, \varphi) = -V_0\,(r + a^2/r)\cos\varphi$.

2. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

4. УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА И ЛАПЛАСА КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

4.1. Применение конформных отображений для решения задач электростатики

Как было показано в 3.1, потенциал φ электростатического поля в вакууме удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -f, \quad f = f(x, y, z) = \frac{\rho(x, y, z)}{\varepsilon_0}. \tag{4.1}$$

Поэтому расчет электростатического поля в общем случае приводит к решению задач для уравнения (4.1).

В отсутствие объемно распределенных электрических зарядов, т.е. при $\rho \equiv 0$, расчет электростатического поля сводится к решению задач для уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0. \tag{4.2}$$

При этом одной из основных задач электростатики является задача отыскания поля, создаваемого системой заряженных проводников, на поверхности которых задано значение потенциала, одинаковое по всей поверхности проводника.

Такую задачу для уравнения Лапласа на плоскости можно эффективно решить с помощью методов теории функции комплексного переменного [X].

Обозначим через $z = x + i\,y$ комплексное независимое переменное, где x и y – соответственно его действительная и мнимая

части. Область изменения этого переменного – вся координатная плоскость (x, y), которую кратко будем называть плоскостью z.

Пусть $w = f(z) = \psi + i\varphi$ – некоторая функция комплексного переменного z. Как действительная, так и мнимая части комплексного числа w являются вещественными функциями переменных x и y, т.е.

$$\psi = \psi(x, y); \qquad \varphi = \varphi(x, y).$$

Комплексное число w можно представить точкой на некоторой плоскости w с координатными осями ψ и φ.

Таким образом, зависимость $w = f(z)$ устанавливает связь между точками плоскости z и точками плоскости w, т.е. отображает одну плоскость (или ее часть) на другую. В дальнейшем будем рассматривать только такие преобразования, для которых функция $w = f(z)$ однозначна и дифференцируема в некоторой области. В теории функций комплексного переменного такую функцию, для которой во всех точках некоторой области существует производная $dw/dz = f'(z)$, называют аналитической в этой области функцией. При этом необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $w = f(z)$ являются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}. \tag{4.3}$$

Покажем, что действительная и мнимая части любой аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа на плоскости. Учитывая, что для аналитической функции ее действительная $\psi(x, y)$ и мнимая $\varphi(x, y)$ части имеют непрерывные производные второго порядка по x и по y, продифференцируем первое условие (4.3) по x, а второе – по y. Тогда, сложив полученные выражения, найдем

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Аналогично, изменив порядок дифференцирования, из условий (4.3) получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Такие гармонические функции $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, удовлетворяющие условиям (4.3), называют сопряженными гармоническими функциями.

Пусть аналитическая функция $w = f(z)$ взаимно однозначно отображает область П плоскости z на область $\widetilde{\Pi}$ плоскости w, причем $f'(z) \neq 0$ всюду в области П. Такое отображение сохраняет подобие малых геометрических фигур, и его называют ***конформным.***

При конформном отображении пересекающиеся на плоскости z кривые после отображения пересекаются на плоскости w под таким же углом, а элементарный треугольник с вершиной в точке z_0 отображается в подобный треугольник с вершиной в точке $w_0 = f(z_0)$. Рассмотрим преобразования

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(x, y), \quad \varphi = \varphi(x, y);\\ x &= x(\psi, \varphi), \quad y = y(\psi, \varphi),\end{aligned} \tag{4.4}$$

связанные с конформным отображением области П плоскости (x, y) на область $\widetilde{\Pi}$ плоскости (ψ, φ), которое осуществляется аналитической функцией $w = f(z)$.

Пусть $W(x, y)$ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $\widetilde{W}(\psi, \varphi) = W[x(\psi, \varphi), y(\psi, \varphi)]$ – соответствующая функция, полученная с помощью ***конформных преобразований*** (4.4). Запишем выражения для производных:

$$W_x = \widetilde{W}_\psi\psi_x + \widetilde{W}_\varphi\varphi_x; \quad W_y = \widetilde{W}_\psi\psi_y + \widetilde{W}_\varphi\varphi_y;$$
$$W_{xx} = \widetilde{W}_{\psi\psi}\psi_x^2 + \widetilde{W}_{\varphi\varphi}\varphi_x^2 + 2\widetilde{W}_{\psi\varphi}\psi_x\varphi_x + \widetilde{W}_\psi\psi_{xx} + \widetilde{W}_\varphi\varphi_{xx};$$
$$W_{yy} = \widetilde{W}_{\psi\psi}\psi_y^2 + \widetilde{W}_{\varphi\varphi}\varphi_y^2 + 2\widetilde{W}_{\psi\varphi}\psi_y\varphi_y + \widetilde{W}_\psi\psi_{yy} + \widetilde{W}_\varphi\varphi_{yy}.$$

Отсюда получаем

$$W_{xx} + W_{yy} = \widetilde{W}_{\psi\psi}(\psi_x^2 + \psi_y^2) + \widetilde{W}_{\varphi\varphi}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) +$$
$$+ 2\widetilde{W}_{\psi\varphi}(\psi_x\varphi_x + \psi_y\varphi_y) + \widetilde{W}_\psi(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \widetilde{W}_\varphi(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}). \tag{4.5}$$

Так как функции $\psi(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ являются сопряженными гармоническими, то из условий Коши – Римана легко получить следующие соотношения:

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = \psi_x^2 + \varphi_x^2 = \varphi_y^2 + \varphi_x^2 = |f'(z)|^2;$$
$$\psi_x\varphi_x + \psi_y\varphi_y = 0,$$

где $f'(z) = \psi_x + i\,\varphi_x$, причем $|f'(z)| \neq 0$.

Поэтому формула (4.5) принимает вид

$$W_{xx} + W_{yy} = (\widetilde{W}_{\psi\psi} + \widetilde{W}_{\varphi\varphi})\,|f'(z)|^2.$$

Отсюда, в частности, следует, что если функция $W(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в области П, то в результате конформного преобразования $w = f(z)$ функция $\widetilde{W}(\psi, \varphi)$ будет также удовлетворять уравнению Лапласа в области $\widetilde{\Pi}$. Поэтому с помощью конформного отображения простое по структуре плоское электростатическое поле, например поле плоского или цилиндрического конденсатора, можно преобразовать в сложное по структуре электростатическое поле, получив при этом аналитическое выражение для распределения потенциала.

Действительно, пусть требуется определить потенциал $\varphi = \varphi(x, y)$ плоского электростатического поля, создаваемого системой двух бесконечно протяженных проводников (электродов), перпендикулярных плоскости (x, y) и имеющих потенциалы φ_1 и φ_2. На плоскости (x, y) электродам соответствуют две эквипотенциальные линии C_1 и C_2 (рис. 4.1, *а*), уравнения которых $\varphi(x, y) = \varphi_1 = \text{const}$ и $\varphi(x, y) = \varphi_2 = \text{const}$.

Если найти такое конформное преобразование $f(z) = \psi(x, y) + i\,\varphi(x, y)$, при котором линии C_1 и C_2 на плоскости (x, y) перейдут в прямые линии $\widetilde{C_1}(\varphi = \varphi_1)$ и $\widetilde{C_2}(\varphi = \varphi_2)$ на плоскости (ψ, φ) (рис. 4.1, б), то распределение потенциала в плоскости (x, y) можно записать так:

$$\varphi = \varphi(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \tag{4.6}$$

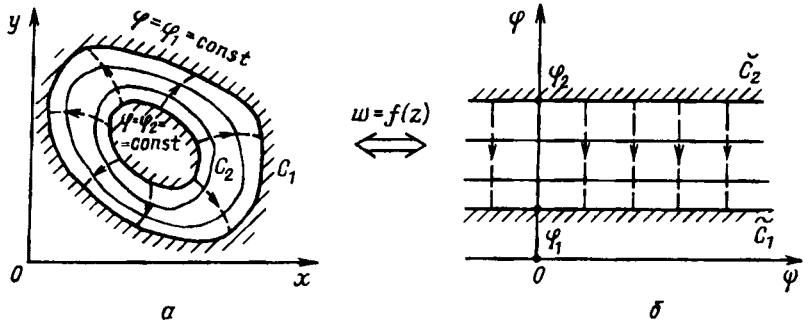


Рис. 4.1

При этом семейство эквипонтециальных линий на плоскости (x, y) можно задать уравнениями $\varphi(x, y) = A$, где $\varphi_1 < A < \varphi_2$ – некоторая константа, принимающая различные значения для различных эквипотенциальных линий.

Зная потенциал, можно определить вектор напряженности $\vec{E}\{E_x, E_y\}$ электростатического поля с компонентами

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

и модулем

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \\ = \left|\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right| = |f'(z)|.$$

При этом уравнение силовой линии на плоскости (x, y) имеет вид

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{\varphi_x} = \frac{dy}{\varphi_y}.$$

Так как из условий Коши – Римана $\varphi_x = -\psi_y$, а $\varphi_y = \psi_x$, то вдоль силовой линии $\psi_x\,dx + \psi_y\,dy = d\psi = 0$. Следовательно, на плоскости (x, y) линии, удовлетворяющие условию

$\psi(x, y) = \text{const}$, ортогональны эквипотенциалям и являются силовыми линиями электростатического поля. На рисунках электростатических полей эти линии изображаются штриховыми линиями.

Комплексную функцию

$$f(z) = \psi(x, y) + i\,\varphi(x, y),$$

позволяющую аналитически описать электростатическое поле на плоскости (x, y), называют комплексным потенциалом.

Можно отметить, что комплексный потенциал описывает также сопряженное электростатическое поле, для которого уравнение эквипотенциальных линий имеет вид $\psi(x, y) = \text{const}$, а уравнение силовых линий $\varphi(x, y) = \text{const}$.

Используя комплексный потенциал, можно определить плотность σ электрических зарядов на электродах, так как по формуле электростатики

$$|\sigma| = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} = \varepsilon_0\,|f'(z)|\Big|_{z\in C_{1,2}} \tag{4.7}$$

Так же просто можно рассчитать заряд q на электроде между двумя точками a и b. Так как на электроде $\varphi = \text{const}$, то вдоль электрода изменяется только действительная часть ψ комплексного потенциала $f(z)$. Поэтому на электроде

$$|f'(z)| = \partial\psi/\partial l,$$

где $\vec{l}$ – единичный орт в направлении касательной к линии C_1 (или C_2) в сторону возрастания ψ. Поэтому

$$q = \int_a^b |\sigma|\,dl = \varepsilon_0 \int_a^b |f'(z)|\,dl =$$

$$= \varepsilon_0 \int_a^b \frac{\partial\psi}{\partial l}\,dl = \varepsilon_0\,[\psi(b) - \psi(a)]. \tag{4.8}$$

Пример 4.1. Исследуем конформное преобразование

$$w = \operatorname{arch}\frac{z}{k}, \quad \text{или} \quad z = k \operatorname{ch} w, \tag{4.9}$$

где $k > 0$ – некоторая постоянная.

Представив это преобразование через действительные и мнимые части

$$x + i\,y = k \operatorname{ch}(\psi + i\,\varphi)$$

и воспользовавшись формулой

$$\operatorname{ch}(\psi + i\,\varphi) = \operatorname{ch}\psi\,\cos\varphi + i \operatorname{sh}\psi\,\sin\varphi,$$

находим

$$x = k \operatorname{ch}\psi\,\cos\varphi; \quad y = k \operatorname{sh}\psi\,\sin\varphi. \tag{4.10}$$

Отсюда

$$\cos\varphi = \frac{x}{k \operatorname{ch}\psi}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{k \operatorname{sh}\psi}.$$

Возведя эти выражения в квадрат и сложив полученные выражения, приходим к уравнению для силовой линии электростатического поля в плоскости $(x,\, y)$:

$$\frac{x^2}{k^2 \operatorname{ch}^2\psi} + \frac{y^2}{k^2 \operatorname{sh}^2\psi} = 1.$$

Это уравнение есть уравнение эллипса с фокусным расстоянием

$$f = \sqrt{k^2 \operatorname{ch}^2\psi - k^2 \operatorname{sh}^2\psi} = k.$$

Различным значениям ψ соответствует система конфокальных эллипсов.

Разрешая выражения (4.10) относительно $\operatorname{sh}\psi$ и $\operatorname{ch}\psi$:

$$\operatorname{sh}\psi = \frac{y}{k\,\sin\varphi}; \quad \operatorname{ch}\psi = \frac{x}{k\,\cos\varphi},$$

получаем после возведения в квадрат и вычитания уравнение для эквипотенциальных линий в плоскости $(x,\, y)$:

$$\frac{x^2}{k^2\,\cos^2\varphi} - \frac{y^2}{k^2\,\sin^2\varphi} = 1.$$

Это уравнение для различных значений φ описывает семейство конфокальных гипербол. #

Таким образом, с помощью конформного отображения (4.9) можно аналитически описать следующие электростатические поля:

а) поле двух разноименно заряженных проводящих полуплоскостей, лежащих в одной плоскости и отстоящих одна от другой на некотором расстоянии (рис. 4.2). Такая конфигурация электродов представляет собой простейшую модель электростатической линзы;

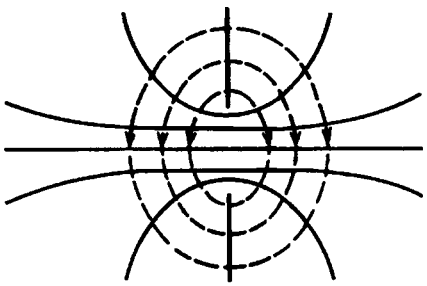


Рис. 4.2

б) поле бесконечно протяженной заряженной проводящей ленты (рис. 4.3). Для такого сопряженного электростатического поля можно считать, что второй цилиндрический электрод, имеющий нулевой потенциал, находится на достаточно большом расстоянии.

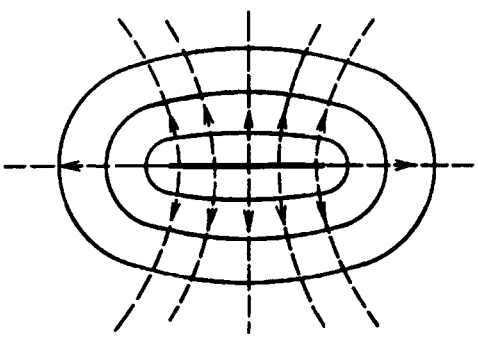


Рис. 4.3

Пример 4.2. Рассчитаем поле вблизи края полубесконечного конденсатора, пластины которого (электроды), имеющие потенциалы $\pm V$, представляют собой две полуплоскости, расположенные одна над другой на расстоянии $2d$ (рис. 4.4, *а*).

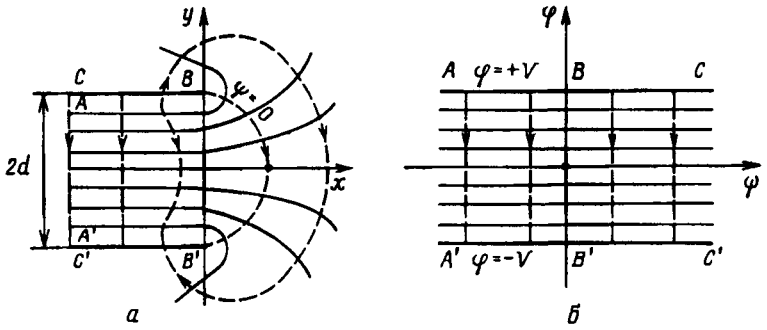


Рис. 4.4

Для этого покажем, что конформное преобразование $w = f(z)$, задаваемое неявной зависимостью

$$z = \frac{d}{\pi}\left(e^{\frac{\pi w}{V}} + \frac{\pi w}{V} + 1\right), \tag{4.11}$$

отображает полубесконечные электроды в плоскости (x, y) на прямые линии $\varphi = +V$ и $\varphi = -V$ плоскости (ψ, φ), преобразуя при этом поле полуограниченного конденсатора в однородное поле неограниченного плоского конденсатора (рис. 4.4, *б*).

Действительно, полагая $z = x + iy$ и $w = \psi + i\varphi$, из уравнения (4.11) находим

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{\pi}\left(e^{\frac{\pi\psi}{V}}\cos\frac{\pi\varphi}{V} + \frac{\pi\psi}{V} + 1\right); \\ y &= \frac{d}{\pi}\left(e^{\frac{\pi\psi}{V}}\sin\frac{\pi\varphi}{V} + \frac{\pi\varphi}{V}\right). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Так как при $\varphi = +V$

$$x = \frac{d}{\pi}\left(-e^{\frac{\pi\psi}{V}} + \frac{\pi\psi}{V} + 1\right), \quad \text{а} \quad y = +d,$$

то, двигаясь на плоскости (ψ, φ) по прямой $\varphi = +V$ в сторону возрастания ψ от $-\infty$ до $+\infty$, на плоскости (x, y) мы дважды пройдем луч $\{x \leqslant 0,\ y = +d\}$: сначала от A к B, а затем в противоположном направлении от B к C (см. рис. 4.4).

Аналогично, прямая $\varphi = -V$ на плоскости (ψ, φ) отображается в луч $\{x \leqslant 0,\ y = -d\}$ на плоскости (x, y). #

С помощью зависимостей (4.11) и (4.12) перейдем к исследованию поля полуограниченного плоского конденсатора. В частности, из соотношений (4.12) следует, что при достаточно больших отрицательных значениях ψ, когда $\psi \to -\infty$, $x \approx \dfrac{\pi}{V}\psi$, и поэтому силовые линии $\psi = \mathrm{const}$ на плоскости (x, y) внутри конденсатора вдали от края представляют собой прямые линии $x = \mathrm{const}$, перпендикулярные электродам. Физически это означает, что внутри конденсатора вдали от края электрическое поле является однородным.

Для достаточно больших положительных значений ψ, когда $\psi \to +\infty$, т.е. вне конденсатора вдали от его края, из (4.12) получаем

$$x \approx \frac{d}{\pi} e^{\frac{\pi\psi}{V}} \cos\frac{\varphi\pi}{V};$$

$$y \approx \frac{d}{\pi} e^{\frac{\pi\psi}{V}} \sin\frac{\varphi\pi}{V}.$$

Из этих соотношений следует, что

$$x^2 + y^2 = \frac{d^2}{\pi^2} e^{\frac{2\pi\psi}{V}},$$

т.е. вне конденсатора на достаточно большом расстоянии от края силовые линии ($\psi = \mathrm{const}$) по форме близки к окружностям с центром в точке (0, 0) на плоскости (x, y).

Для исследования напряженности электрического поля E найдем производную

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-1} = \frac{d}{\pi}\left(\frac{\pi}{V} e^{\frac{\pi w}{V}} + \frac{\pi}{V}\right) = \frac{d}{V}\left(e^{\frac{\pi w}{V}} + 1\right).$$

Отсюда

$$E = \left|\frac{dw}{dz}\right| = \frac{V}{d}\frac{1}{\left|e^{\frac{\pi w}{V}} + 1\right|}.$$

На оси конденсатора $\varphi = 0$, поэтому $w = \psi$ и

$$E = \frac{E_0}{1 + e^{\frac{\pi\psi}{V}}}, \tag{4.13}$$

где $E_0 = V/d$ – напряженность поля неограниченного плоского конденсатора.

Проследим изменение напряженности поля $E = E(x)$, двигаясь вдоль оси конденсатора $y = 0$ (рис. 4.5). Из формулы (4.13) следует, что внутри конденсатора ($\pi\psi/V \ll -1$), т.е. далеко от края, $E = E_0$. Это также подтверждает вывод о том, что внутри конденсатора можно пренебречь краевым эффектом и считать поле однородным, как и для неограниченного конденсатора.

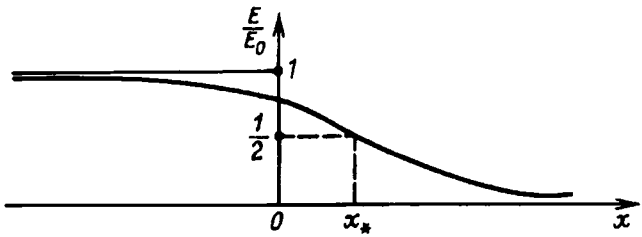


Рис. 4.5

Силовая линия $\psi = 0$ пересекает ось конденсатора $y = 0$ в точке $x = x_*$, где $x_* = \frac{2}{\pi}d \approx 0,64d$. В этой точке $E = 0,5E_0$, т.е. напряженность электрического поля убывает вдвое.

Вне конденсатора, там где ψ принимает большие положительные значения, из формул (4.12) можно найти связь между ψ и x для $y = 0$ ($\varphi = 0$) в виде

$$x \approx \frac{d}{\pi}e^{\frac{\pi\psi}{V}} \gg \frac{d}{\pi}.$$

С учетом этого из выражения (4.13) получаем

$$E = E_0 \frac{d}{\pi x}.$$

Это соотношение показывает, что вне конденсатора вдали от его края напряженность электрического поля по модулю убывает обратно пропорционально расстоянию до края конденсатора.

4.2. Мультипольное разложение потенциала

Пусть система неподвижных электрических зарядов, т.е. некоторое заряженное тело, занимает ограниченный объем в некоторой области пространства Ω, а распределение электрического заряда в теле задано объемной плотностью заряда $\rho(N)$, $N \in \Omega$. Введем систему координат с началом в точке O внутри Ω и обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор точки N, а через $\vec{R}$ радиус-вектор, определяющий положение некоторой точки M вне заряженного тела (рис. 4.6).

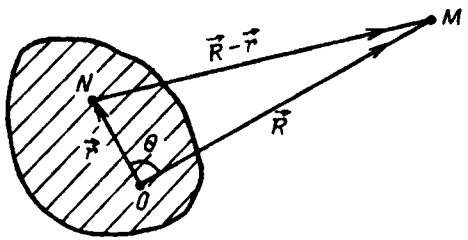


Рис. 4.6

Найдем потенциал электростатического поля в точке M, считая, что $R \gg r$, т.е. на достаточно большом расстоянии от заряженного тела.

Как было показано в 3.4, потенциал φ в точке M можно выразить в виде объемного потенциала:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|}\, dV. \qquad (4.14)$$

Учитывая, что точка M выбрана так, что $R \gg r$, представим $\varphi(M)$ в виде разложения по степеням $1/R$:

$$\varphi(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n)}}{R^{n+1}} = \frac{q^{(0)}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^{(1)}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{q^{(2)}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \ldots \quad (4.15)$$

Такое разложение потенциала назовем разложением по мультиполям, а каждый коэффициент $q^{(n)}$ этого разложения – электрическим моментом n-го порядка данной системы зарядов заряженного тела. Физически такое разложение соответствует возможности представления электрического поля любого заряженного тела на больших расстояниях от него в виде поля точечного заряда, описываемого первым членом в разложении (4.15).

Определим коэффициенты $q^{(n)}$ разложения (4.15). Для этого введем угол $\theta = (\widehat{\vec{r}, \vec{R}})$ между векторами $\vec{r}$ и $\vec{R}$ и малый параметр задачи $\delta = r/R$. Если обозначить $x = \cos\theta$, то по теореме косинусов можно записать

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = |R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta|^{-1/2} = R^{-1}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}.$$

Разложим выражение в круглых скобках в правой части этого равенства в степенной ряд по малому параметру δ:

$$(1 - \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\delta^n.$$

Коэффициенты этого ряда Тейлора определяются известным соотношением

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\delta^n}(1 + \delta^2 - 2\delta x)^{-1/2}\Big|_{\delta=0}.$$

Непосредственным вычислением устанавливаем, что $P_n(x)$ при $n = 0, 1, 2, \ldots$ являются полиномами n-й степени. В частности,

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \quad (4.16)$$

Таким образом,

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\delta^n = \frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta)\left(\frac{r}{R}\right)^n \qquad (4.17)$$

и, используя уравнения (4.14), для ***мультипольного разложения потенциала*** получаем

$$\varphi(M) = \frac{q^{(0)}}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q^{(1)}}{4\pi\varepsilon_0 R^2} + \frac{q^{(2)}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \cdots + \frac{q^{(n)}}{4\pi\varepsilon_0 R^{n+1}} + \cdots \qquad (4.18)$$

Здесь $q^{(0)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho\, dV$ – полный заряд системы; $q^{(1)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho r \cos\theta\, dV$ – дипольный момент системы зарядов; $q^{(2)} = \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho r^2}{2}(3\cos^2\theta - 1)\, dV$ – квадрупольный момент системы зарядов; $q^{(n)} = \iiint\limits_{\Omega} \rho r^n P_n(\cos\theta)\, dV$ – электрический момент n-го порядка.

Определим теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет полином $P_n(x)$. Для этого используем тот факт, что

$$\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|} = \frac{1}{r_{MN}}$$

является фундаментальным решением уравнения Лапласа, т.е.

$$\Delta_N\left(\frac{1}{|\vec{R}-\vec{r}|}\right) = 0, \quad M \neq N, \qquad (4.19)$$

где Δ_N – оператор Лапласа по координатам точки N.

Подставив выражение для $|\vec{R}-\vec{r}|^{-1}$ из уравнения (4.17) в (4.19), запишем полученное выражение в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{R^{n+1}}\,\Delta_N[P_n(\cos\theta)\, r^n] = 0. \qquad (4.20)$$

Так как это равенство справедливо для любых значений R, то из него следует

$$\Delta_N[P_n(\cos\theta)\, r^n] = 0. \tag{4.21}$$

Выбрав сферическую систему координат с центром в точке O и направив полярную ось в направлении $\vec{R}$, запишем уравнение (4.21) в этой системе координат

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr^n}{dr}\right)\right] P_n(\cos\theta) + \\ + \left[\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right] r^n = 0. \tag{4.22}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dr^n}{dr}\right) = n\,(n+1)\,r^{n-2},$$

преобразуем (4.22) к виду

$$r^{n-2}\left[n\,(n+1)\,P_n(\cos\theta) + \\ + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}\right)\right] = 0. \tag{4.23}$$

Это уравнение должно выполняться для любого $r \neq 0$. Поэтому, возвращаясь к обозначениям $x = \cos\theta$, $1 - x^2 = \sin^2\theta$, $dx = -\sin\theta\, d\theta$, запишем уравнение (4.23) для переменного $x \in (-1, +1)$ в дифференциальном виде

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\frac{dP_n(x)}{dx}\right] + n\,(n+1)\,P_n(x) = 0. \tag{4.24}$$

Это уравнение называют ***уравнением Лежандра***, а его решения $P_n(x)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ – полиномами Лежандра.

Для полиномов Лежандра справедлива рекуррентная формула

$$(n+1)\,P_{n+1}(x) - (2n+1)\,x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0,$$

которая связывает три последовательных полинома Лежандра. По этой формуле можно вычислить полином Лежандра любой степени по первым двум, которые определены формулами (4.16).

4.3. Расчет поля электростатического подвеса

Одним из возможных технических решений проблемы уменьшения трения в гироскопических системах является использование электростатического поля для компенсации силы тяжести. Такие системы называют гироскопами с электростатическим подвесом.

Простейшая модель такого гироскопа представляет собой проводящий шар радиуса r_1 (ротор гироскопа), который находится в поле двух полусферических электродов радиусов r_2, разделенных между собой узким промежутком и имеющих потенциалы $+V_0$ и $-V_0$ (рис. 4.7).

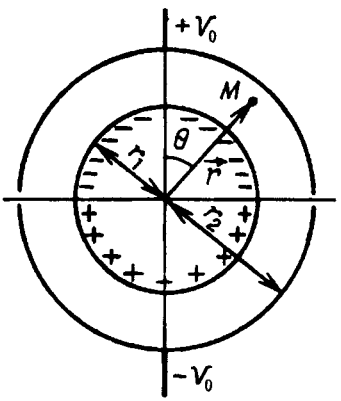


Рис. 4.7

Расчет электростатического поля в зазоре между шаром и электродами $r_1 < r < r_2$ проведем для случая, когда центры шара и электродов совпадают и потенциал шара равен нулю (незаряженный шар). В этом случае нахождение потенциала

$\varphi = \varphi(r, \theta)$ электростатического поля в зазоре сводится к решению краевой задачи для уравнения Лапласа, которая с учетом осевой симметрии поля может быть записана в следующем виде:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0, \qquad r_1 < r < r_2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi; \tag{4.25}$$

$$\varphi(r_1, \theta) = 0; \tag{4.26}$$

$$\varphi(r_2, \theta) = U(\theta) = \begin{cases} +V_0, & 0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}; \\ -V_0, & \dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi. \end{cases} \tag{4.27}$$

Используя метод разделения переменных, когда $\varphi(r, \theta) = R(r)\,\Phi(\theta)$, получаем

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R(r)} = -\frac{\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{d\Phi}{d\theta}\right)}{\Phi(\theta)} = \lambda = \text{const}. \tag{4.28}$$

Отсюда для нахождения функций $R(r)$ и $\Phi(\theta)$ получаем уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \lambda R = 0; \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Phi}{d\theta}\right) + \lambda\Phi = 0. \tag{4.30}$$

Если в уравнении (4.30) сделать замену переменного $\cos\theta = x$ и положить $\Phi(\theta) = X(x)$, то оно примет вид

$$-\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dX}{dx}\right] = \lambda X, \quad -1 < x < +1. \tag{4.31}$$

Задача отыскания ограниченного решения уравнения (4.31), удовлетворяющего условиям $|X(\pm 1)| < \infty$, соответствует *задаче Штурма - Лиувилля*, рассмотренной в Приложении 2. Эта

задача имеет нетривиальные решения $X_n(x)$ лишь при $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$. Эти решения (***собственные функции***) являются ***полиномами Лежандра*** n-го порядка, т.е. $X_n(x) = P_n(x)$ или $\Phi(\theta) = P_n(\cos\theta)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

Как собственные функции задачи Штурма – Лиувилля полиномы Лежандра удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta)\, P_m(\cos\theta)\, \sin\theta\, d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \dfrac{2}{2n+1}, & n = m. \end{cases} \tag{4.32}$$

При $\lambda = \lambda_n = n(n+1)$ из уравнения (4.29) находим

$$R(r) = a_n r^n + \frac{b_n}{r^{n+1}} \quad \text{или} \quad R(\rho) = A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^{n+1}},$$

где $\rho = r/r_1$; A_n, $B_n = \text{const}$.

Используя принцип суперпозиции решений для линейного уравнения (4.25), представим его решение рядом

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{n=o}^{\infty} \left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta), \qquad 1 < \rho < \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{4.33}$$

где $\rho = r/r_1$; $\gamma = r_2/r_1 > 1$.

Удовлетворяя при $\rho = 1$ граничному условию (4.26), получаем $A_n + B_n = 0$, т.е.

$$\varphi(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\rho^n - \frac{1}{\rho^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta). \tag{4.34}$$

Теперь с учетом граничного условия (4.27) получаем соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \Gamma_n\, P_n(\cos\theta) = U(\theta), \quad \Gamma_n = \frac{\gamma^{2n+1} - 1}{\gamma^{n+1}}. \tag{4.35}$$

Равенство (4.35) представляет собой разложение функции $U(\theta)$, заданной формулой (4.27), в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Возможность такого разложения по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля (4.31) следует из теоремы Стеклова (см. Приложение 2). С учетом условия ортогональности (4.32) находим коэффициенты этого разложения

$$A_n\Gamma_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_0^{\pi} U(\theta)\,P_n(\cos\theta)\,\sin\theta\,d\theta = \\ = \frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} \widetilde{U}(x)\,P_n(x)\,dx, \qquad (4.36)$$

где

$$\widetilde{U}(x) = \begin{cases} -V_0, & -1 < x < 0; \\ +V_0, & 0 < x < +1. \end{cases}$$

Учитывая правила изменения знака аргумента для полиномов Лежандра

$$P_n(-x) = (-1)^n\,P_n(x),$$

из (4.36) для искомых коэффициентов A_n разложения (4.33) получим формулы

$$A_n = 0 \quad \text{для} \quad n = 2k;$$

$$A_n = V_0\,\frac{2n+1}{\Gamma_n}\int\limits_0^1 P_n(x)\,dx \quad \text{для} \quad n = 2k+1.$$

Используя известные для полиномов Лежандра формулы

$$P_n(1) = 1; \quad P_{n+1}(0) = -\frac{n}{n+1}\,P_{n-1}(0);$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2n+1}\left[P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)\right],$$

можно вычислить квадратуру

$$\int\limits_0^1 P_n(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\,P_{n-1}(0).$$

Здесь

$$P_0(0) = 1; \quad P_{2k+1}(0) = 0;$$
$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}, \quad k \geqslant 1.$$

Таким образом, окончательно, решение краевой задачи (4.25) – (4.27), описывающее распределение потенциала в электростатическом подвесе, запишем в виде

$$\varphi(\rho, \theta) = V_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+3)\, P_{2k}(0)}{2\,(k+1)\,\Gamma_{2k+1}} \times \\ \times \left(\rho^{2k+1} - \frac{1}{\rho^{2k+2}}\right) P_{2k+1}(\cos\theta), \\ 1 \leqslant \rho = r/r_1 \leqslant \gamma, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{4.37}$$

Используя известную формулу электростатики

$$\sigma = \varepsilon_0 E_n = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\bigg|_{r=r_1} = -\frac{\varepsilon_0}{r_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)\bigg|_{\rho=1},$$

с помощью решения (4.37) можно определить распределение индуцированных зарядов на поверхности шара.

4.4. Электрическое поле в плазме

Рассмотрим полностью ионизированный газ, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре T. Такой газ состоит из положительно заряженных частиц (ионов) и отрицательно заряженных частиц (электронов). Ограничимся случаем однократной ионизации атомов. Тогда в отсутствие внешних силовых полей вследствие хаотического теплового движения частиц в любой точке пространства выполняется локальное условие нейтральности газа: $n_+ = n_- = n_0$, где n_0 – объемная концентрация заряженных частиц. При этом в случае однократной ионизации $q_+ = +q$, а $q_- = -q$, где $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – элементарный электрический заряд.

Внесем в такой ионизированный газ точечный положительный заряд Q, поместив его в точку M_0. Под действием поля этого заряда вблизи точки M_0 нарушается условие нейтральности газа, причем концентрация отрицательно заряженных частиц в некоторой области вблизи точки M_0 будет превышать концентрацию положительно заряженных частиц (рис. 4.8).

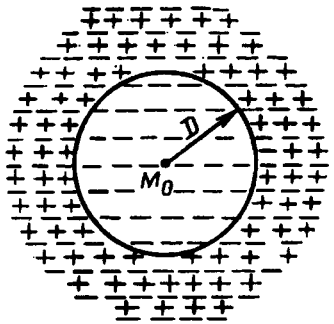


Рис. 4.8

Рассчитаем потенциал макроскопического электрического поля в ионизированном газе, обусловленный точечным зарядом Q. Для этого запишем для потенциала $\varphi(M)$ уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}, \quad M(x,\, y,\, z) \in \mathfrak{R}^3. \tag{4.38}$$

Здесь плотность электрического заряда

$$\rho(M) = Q\,\delta_3(M,\, M_0) + \rho_+(M) + \rho_-(M) \tag{4.39}$$

учитывает наличие точечного заряда Q и объемно распределенного заряда, обусловленного заряженными частицами ионизированного газа.

Уравнение (4.38) следует решать при условии, что на бесконечности искомый потенциал обращается в нуль, т.е.

$$\varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty. \tag{4.40}$$

Плотности электрических зарядов в ионизированном газе $\rho_+(M)$ и $\rho_-(M)$ в произвольной точке $M(x,\, y,\, z)$ выразим через концентрации заряженных частиц:

$$\rho_+(M) = +q\,n_+(M), \quad \rho_-(M) = -q\,n_-(M).$$

Концентрации $n_+(M)$ и $n_-(M)$ найдем, используя распределение Больцмана для концентрации частиц в силовом потенциальном поле:

$$n_\pm(M) = n_0\, e^{-W_\pm/(kT)}.$$

Здесь $W_+ = q\,\varphi(M)$, $W_- = -q\,\varphi(M)$ – потенциальные энергии соответственно ионов и электронов, находящихся вблизи точки M; k – постоянная Больцмана.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho_+(M) &= +q\,n_0\, e^{-\frac{q\varphi(M)}{kT}}; \\ \rho_-(M) &= -q\,n_0\, e^{+\frac{q\varphi(M)}{kT}}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Таким образом, задача отыскания потенциала $\varphi(M)$ электростатического поля в ионизированном газе принимает вид

$$\begin{cases} \Delta\varphi = -\dfrac{Q}{\varepsilon_0}\,\delta_3(M,\, M_0) + \dfrac{qn_0}{\varepsilon_0}\left[e^{\frac{q\varphi(M)}{kT}} - e^{-\frac{q\varphi(M)}{kT}}\right]; \\ \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty. \end{cases} \tag{4.42}$$

С учетом свойств дельта-функции $\delta_3(M,\, M_0)$ запишем задачу (4.42), исключив из рассмотрения точку $M = M_0$ пространства:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = \dfrac{2q\,n_0}{\varepsilon_0}\,\mathrm{sh}\,\dfrac{q\varphi(M)}{kT}, \quad M \neq M_0; \\ \varphi \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty. \end{cases} \tag{4.43}$$

Чтобы задача (4.43) была эквивалентна задаче (4.42), асимптотика решения задачи (4.43) при $r_{MM_0} \to 0$ должна иметь вид

$$\varphi \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Задача (4.43) нелинейна, так как правая часть уравнения нелинейно зависит от искомой функции $\varphi(M)$. Однако эту задачу можно линеаризовать, если ограничиться исследованием

случаев достаточно высоких температур, когда $kT \gg q\varphi$. Это условие означает, что кинетическая энергия теплового движения частиц ионизированного газа значительно больше их потенциальной энергии электростатического взаимодействия. В этом случае

$$\operatorname{sh}\frac{q\varphi(M)}{kT} \approx \frac{q\varphi(M)}{kT}$$

и линеаризованная задача (4.43) будет иметь вид

$$\Delta\varphi = \frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}\varphi(M), \quad M \neq M_0; \tag{4.44}$$

$$\varphi(M) \to 0 \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty; \tag{4.45}$$

$$\varphi(M) \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_{MM_0}} \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to 0. \tag{4.46}$$

Введем сферическую систему координат с центром в точке M_0. В силу центральной симметрии задачи искомый потенциал φ будет зависеть только от радиальной координаты $r = r_{MM_0}$. Тогда уравнение (4.44) перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\varphi(r)$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{1}{D^2}\varphi(r). \tag{4.47}$$

Параметр задачи

$$D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\, kT}{2q^2 n_0}}, \tag{4.48}$$

имеющий размерность длины, называют дебаевским радиусом экранирования, поскольку в 1923 г. П. Дебай впервые ввел такой параметр в теории электролитов, которую он разработал совместно с Э. Хюккелем.

Сделав замену искомой функции $\psi = r\varphi$, преобразуем уравнение (4.47) к виду

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{1}{D^2}\psi = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$\psi(r) = A\,e^{-r/D} + B\,e^{+r/D}$$

содержит две произвольные константы A и B.

Возвращаясь к функции $\varphi(r)$, находим общее решение уравнения (4.47)

$$\varphi(r) = \frac{A}{r}\,e^{-r/D} + \frac{B}{r}\,e^{+r/D}.$$

Из условия (4.46) убывания потенциала на бесконечности следует, что константа B равна нулю, а выражение для потенциала имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{A}{r}\,e^{-r/D}.$$

Разлагая экспоненту в ряд по степеням r/D, получаем

$$\varphi(r) = \frac{A}{r}\left[1 - \frac{r}{D} + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{D}\right)^2 + \ldots\right] =$$

$$= \frac{A}{r} - \frac{A}{D} + \frac{Ar}{2D^2} + \ldots = \frac{A}{r} + v(r). \quad (4.49)$$

Здесь $v(r)$ представляет собой потенциал поля, создаваемого заряженными частицами ионизированного газа в точке M, находящейся на расстоянии r от точечного заряда Q.

Учитывая асимптотику (4.46) функции $\varphi(r)$ при $r \to 0$, определяем константу

$$A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Таким образом, потенциал электрического поля точечного заряда Q, помещенного в ионизированный газ,

$$\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{-r/D}}{r}. \quad (4.50)$$

При $n_0 \to 0$, т.е. в отсутствие заряженных частиц ионизированного газа, из выражения (4.48) следует, что $D \to \infty$, и из формулы (4.50) получаем формулу потенциала поля точечного

заряда Q в вакууме

$$\varphi_0(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{4.51}$$

Зависимости (4.50) и (4.51) описывают качественно различные по характеру убывания потенциалы короткодействующего и дальнодействующего полей (рис. 4.9).

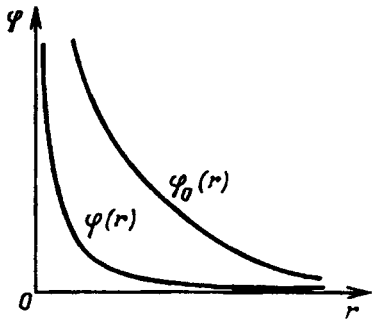


Рис. 4.9

Замечание 4.1. В теоретической физике потенциал (4.50) называют потенциалом Юкавы. С помощью такой зависимости Х. Юкава в 1935 г. описал короткодействующие ядерные силы между составными частицами ядра – нуклонами. #

Анализ решения (4.50) показывает, что электрическое поле заряда Q проникает в ионизированный газ лишь на расстояния порядка дебаевского радиуса экранирования D. Такой короткодействующий характер электрического поля в ионизированном газе вызван экранированием (компенсацией) поля положительного заряда Q "облаком" отрицательно заряженных частиц, окружающих этот заряд (см. рис.4.8).

Дебаевский радиус D характеризует также эффективный размер пространственной области, где нарушается локальное условие нейтральности, т.е. размер области нескомпенсированных объемных зарядов, где $n_- > n_+$.

Если нарушение нейтральности под действием электрического поля происходит в малой по размерам области пространства, то ионизированный газ называют плазмой. Это означает,

что для плазмы выполняется условие квазинейтральности

$$D \ll L = \sqrt[3]{V},$$

где L – характерный размер области, занятой плазмой; V – объем этой области.

Теперь с помощью полученных соотношений для электрического поля в плазме рассчитаем вклад во внутреннюю энергию плазмы энергии электрического взаимодействия заряженных частиц. Для этого будем считать, что каждая заряженная частица в плазме окружена дебаевским "облаком" частиц с противоположным знаком заряда. Тогда среднюю электрическую энергию заряженных частиц в единице объема однократно ионизированной плазмы можно рассчитать по формуле

$$\langle W_э \rangle = \frac{1}{2}\sum_i q_i\, v(i) = \frac{1}{2}\left[+q\, v(+)n_0 - q\, v(-)n_0\right]. \qquad (4.52)$$

Здесь суммирование проводится по всем заряженным частицам плазмы в единице объема, $v(i)$ – потенциал, создаваемый заряженными частицами дебаевского "облака" в точке, где находится заряд q_i. Из уравнения (4.49) находим

$$v(+) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}};$$

$$v(-) = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 D} = +\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 kT}}.$$

Теперь из формулы (4.52) получим выражение для энергии электрического взаимодействия заряженных частиц в единице объема плазмы:

$$\langle W_э \rangle = -\frac{n_0 q^3}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{2n_0}{\varepsilon_0 kT}}. \qquad (4.53)$$

Отрицательный знак этой энергии означает преобладание сил электрического притяжения между заряженными частицами плазмы, поскольку каждый заряд в плазме окружен "облаком" зарядов противоположного знака.

Вопросы и задачи

4.1. Покажите, что функция комплексного переменного

$$w = \frac{z - a}{z - a^*}$$

отображает верхнюю полуплоскость на круг. Чему равен радиус R этого круга?

Ответ: $R = 1$.

4.2. В какую область переходит единичный круг с центром в точке $z = 0$ при конформном отображении

$$w = \frac{z - a}{1 - a^* z}?$$

Ответ: В круг единичного радиуса.

4.3. Постройте семейство эквипотенциальных линий электростатического поля, задаваемого комплексным потенциалом $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Ответ: Это семейство окружностей с центрами на оси Oy, которые проходят через начало координат и касаются оси x.

4.4. Используя уравнение (4.24), вычислите норму полиномов Лежандра $P_n(x)$.

Ответ: $||P_n|| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$.

4.5. Оцените дебаевский радиус экранирования при температуре $T = 10^4$ К для однократно ионизированного газа с концентрацией заряженных частиц $n_0 = 10^{13}$ м$^{-3}$.

Ответ: $D = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

5.1. Моделирование диффузионных процессов переноса в движущихся средах

К диффузионным процессам переноса относятся такие процессы, в которых возникновение потоков энергии или массы не связано с макроскопическим движением среды, а обусловлено микроскопическим движением частиц (молекул), участвующих в тепловом хаотическом движении. К таким процессам, в частности, относятся диффузия, сопровождающаяся переносом массы, и теплопроводность, обусловливающая перенос энергии. В движущихся средах эти процессы следует рассматривать с учетом конвективного переноса энергии или массы.

В основе математических моделей диффузионных процессов переноса лежат фундаментальные законы сохранения энергии и массы, которые для произвольного неподвижного относительно выбранной системы координат объема V, окруженного замкнутой поверхностью S, можно записать в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V g\,dV = -\oiint\limits_S \vec{\Pi}\,\vec{dS} + \iiint\limits_V F(M,\,t)\,dV. \qquad (5.1)$$

Здесь g – объемная плотность энергии или массы; $\vec{\Pi}$ – плотность потока энергии или массы; $\vec{F}(M,\,t)$ – объемная плотность внутренних источников энергии или массы.

Соотношение (5.1) в математической форме утверждает, что причиной изменения интегральной энергии (массы) в объеме V являются потоки энергии (массы) через поверхность S, окружающую объем V, а также процессы генерации или поглощения энергии (массы) за счет источников внутри объема V.

Учитывая независимость области интегрирования в (5.1) от времени t, внесем производную по времени под знак интеграла. Кроме того, по формуле Остроградского преобразуем поверхностный интеграл в объемный, записав поток через по-

верхность S как

$$\oiint\limits_S \vec{\Pi}\, d\vec{S} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{\Pi}\, dV.$$

Тогда закон сохранения (5.1) примет вид

$$\iiint\limits_V \left\{ \frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} - F(M, t) \right\} dV = 0.$$

В силу произвольности выбранного объема V получаем закон сохранения энергии или массы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{\Pi} + F(M, t). \tag{5.2}$$

Если описывать диффузионный процесс переноса в движущейся среде, вектор скорости $\vec{v}(M, t)$ которой в каждой точке пространства считать известным, то плотность потока энергии (массы) $\vec{\Pi} = \vec{\Pi}_{\text{д}} + \vec{\Pi}_{\text{к}}$ будет содержать кроме диффузионной составляющей $\vec{\Pi}_{\text{д}}$ также и конвективную составляющую $\vec{\Pi}_{\text{к}} = g\vec{v}$, связанную с переносом энергии или массы вместе с движущейся средой. Тогда с учетом макроскопического движения среды уравнение (5.2) примет вид

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}(g\vec{v}) = -\operatorname{div} \vec{\Pi}_{\text{д}} + F(M, t). \tag{5.3}$$

Для несжимаемой среды вектор скорости $\vec{v}$ удовлетворяет условию $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Поэтому

$$\operatorname{div}(g\vec{v}) = g \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \operatorname{grad} g = \vec{v} \operatorname{grad} g,$$

а дифференциальный закон сохранения энергии или массы в движущейся несжимаемой среде можно записать в виде уравнения

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \vec{v} \operatorname{grad} g = -\operatorname{div} \vec{\Pi}_{\text{д}} + F(M, t). \tag{5.4}$$

Процесс теплопроводности. Пусть $u(M, t)$ – температура среды, $g = g(u)$ – объемная плотность внутренней энергии.

Тогда

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{dg}{du}\frac{\partial u}{\partial t} = \tilde{c}\frac{\partial u}{\partial t} = \rho c\frac{\partial u}{\partial t}$$

и

$$\operatorname{grad} g = \frac{dg}{du}\operatorname{grad} u = \tilde{c}\operatorname{grad} u = \rho c \operatorname{grad} u.$$

Здесь $\tilde{c}$ и c – соответственно объемная и массовая удельные теплоемкости среды; ρ – ее плотность.

Физический закон Фурье утверждает, что в изотропной среде с коэффициентом теплопроводности k тепловой поток пропорционален градиенту температуры, т.е.

$$\vec{\Pi}_{\text{д}} = -k \operatorname{grad} u.$$

Тогда уравнение (5.4) примет вид

$$\rho c\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{grad} u\right) = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u) + F(M, t). \qquad (5.5)$$

Для однородной среды с постоянными теплофизическими характеристиками ρ, c и k уравнение (5.5) запишется в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\operatorname{grad} u = a^2\Delta u + f(M, t), \qquad (5.6)$$

где $a^2 = k/(\rho c)$ – коэффициент температуропроводности среды; Δ – оператор Лапласа; $f(M, t) = (\rho c)^{-1} F(M, t)$.

Уравнения (5.5) и (5.6) называют дифференциальными уравнениями нестационарной теплопроводности в несжимаемых движущихся средах. Для неподвижной среды $\vec{v} = 0$, и из (5.6) получаем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f(M, t), \qquad (5.7)$$

которое обобщает уравнение (2.8) на случай трех пространственных переменных.

Процесс диффузии. Если $u(M, t)$ – абсолютная концентрация диффундирующего вещества, то $g = u$, а диффузионный поток массы определяется законом Фика: $\vec{\Pi}_{\text{д}} = -D \operatorname{grad} u$, где D – коэффициент диффузии.

Тогда из закона сохранения массы (5.4) получаем нестационарное уравнение диффузии в движущейся среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,u = \mathrm{div}\,(D\,\mathrm{grad}\,u) + F(M,\,t). \qquad (5.8)$$

Для постоянного коэффициента диффузии $D = \mathrm{const}$, уравнение (5.8) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,u = D\Delta u + F(M,\,t). \qquad (5.9)$$

Из выражения (5.9) следует, что в неподвижной среде ***процесс диффузии*** описывается ***уравнением***

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + F(M,\,t), \qquad (5.10)$$

аналогичным уравнению теплопроводности (5.7).

5.2. Краевые задачи остывания нагретых тел

Одним из важных классов нестационарных задач теплопроводности являются задачи остывания нагретых тел. В этих задачах изучают эволюцию температурного поля в ограниченном теле, занимающем некоторую область пространства $\Omega \subset \mathfrak{R}^3$, если в момент времени $t = 0$ задано начальное распределение температуры в теле, а температуру граничной поверхности тела Σ при $t \geqslant 0$ поддерживают постоянной. Без ограничения общности температуру поверхности тела можно выбрать равной нулю.

Из физической постановки такой задачи следует, что в отсутствие объемных тепловых источников будет происходить остывание тела, т.е. $u(M,\,t) \to 0$ при $t \to \infty$ в любой точке $M \in \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Sigma$. Характерное время остывания должно зависеть от формы тела, его размеров и теплофизических характеристик материала.

Математическая модель процесса остывания тела из однородного материала, основанная на уравнении теплопроводности (5.7) при $f \equiv 0$, может быть записана в виде следующей краевой задачи для нахождения температурного поля $u(M,\,t)$ в

остывающем теле:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad t > 0, \quad M \in \Omega; \tag{5.11}$$

$$u(M, 0) = U(M), \quad M \in \overline{\Omega}; \tag{5.12}$$

$$u(P, t) = 0, \quad P \in \Sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{5.13}$$

Задачу (5.11) – (5.13) можно решать методом Фурье (разделения переменных), представляя частное решение уравнения (5.11), удовлетворяющее граничному условию (5.13), в виде произведения

$$u(M, t) = v(M)\,T(t). \tag{5.14}$$

Подставляя (5.14) в уравнение (5.11), после разделения переменных получим

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{\Delta v}{v} = -\lambda = \text{const}. \tag{5.15}$$

Отсюда находим уравнение для функции $T(t)$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{5.16}$$

общее решение которого

$$T(t) = C\,e^{-\lambda a^2 t}, \quad C = \text{const}.$$

Для функции $v(M)$ из уравнения (5.15) с учетом однородного граничного условия (5.13) получим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & M \in \Omega; \\ v(P) = 0, & P \in \Sigma. \end{cases} \tag{5.17}$$

Как указано в Приложении 2, задача (5.17) имеет дискретный набор (спектр) собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ и собственных функций $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ В классе функций, обращающихся в нуль на Σ, система собственных функций $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную ортогональную систему функций.

Таким образом, можно построить набор частных решений вида (5.14)

$$u_n(M, t) = C_n v_n(M)\,e^{-\lambda_n a^2 t}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

суперпозиция которых образует ряд

$$u(M,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M)\, e^{-\lambda_n a^2 t}, \tag{5.18}$$

который представляет собой решение уравнения (5.11), удовлетворяющее граничному условию (5.13).

Выберем теперь постоянные C_n в (5.18) так, чтобы удовлетворить начальному условию (5.12). Полагая в (5.18) $t = 0$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n v_n(M) = U(M), \quad M \in \Omega. \tag{5.19}$$

В соответствии с теоремой Стеклова (см. Приложение 2), в этом разложении функции $\varphi(M)$ в ряд по собственным функциям задачи (5.17) коэффициенты C_n могут быть найдены по формулам

$$C_n = \frac{1}{||v_n||^2} \iiint\limits_{\Omega} U(M)\, v_n(M)\, dV, \tag{5.20}$$

где норма собственных функций

$$||v_n|| = \left[\iiint\limits_{\Omega} v_n^2(M)\, dV\right]^{1/2}.$$

Каждый член ряда (5.18) экспоненциально убывает со временем, причем для достаточно больших значений t первый член ряда преобладает над суммой остальных членов, так как собственные значения λ_n растут с увеличением номера n. Поэтому для остывающего тела через некоторое время устанавливается регулярный режим, который хорошо описывается первым членом разложения (5.18). При этом в качестве характерного времени остывания тела, характеризующего темп охлаждения, можно выбрать величину $\tau = (\lambda_1 a^2)^{-1}$, где λ_1 – первое минимальное собственное значение задачи (5.17).

Ниже рассмотрены примеры решения задач остывания тел правильной формы, когда задача (5.17) может быть решена точно в аналитическом виде. В этих задачах собственные значения и собственные функции зависят от нескольких целочисленных

параметров. Поэтому суммирование в формулах (5.18) и (5.19) следует понимать как суммирование по всем этим параметрам.

Пример 5.1. Пусть тело представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами l_1, l_2 и l_3, занимающий в пространстве область $\Omega = \{(x, y, z)\colon 0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < z < l_3\}$. Тогда задача (5.17) для функции $v(x, y, z)$ примет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0; \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} &v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l_1} = 0; \\ &v|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=l_2} = 0; \\ &v|_{z=0} = 0, \quad v|_{z=l_3} = 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Собственные функции этой задачи будем искать методом разделения переменных, представляя эти функции в виде произведения:

$$v(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z). \tag{5.23}$$

Подставляя (5.23) в уравнение (5.21), получаем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda = \text{const},$$

откуда с учетом граничных условий приходим к трем задачам Штурма – Лиувилля на собственные значения:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0; \\ X(0) = X(l_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' + \nu Y = 0; \\ Y(0) = Y(l_2) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} Z'' + \omega Z = 0; \\ Z(0) = Z(l_3) = 0. \end{cases}$$

Эти задачи имеют следующие нетривиальные решения:

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l_1}, \quad ||X_n||^2 = \frac{l_1}{2}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\nu_m = \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{l_2}, \quad ||Y_m||^2 = \frac{l_2}{2}, \quad m = 1, 2, \ldots;$$

$$\omega_k = \left(\frac{k\pi}{l_3}\right)^2, \quad Z_k(z) = \sin\frac{k\pi z}{l_3}, \quad ||Z_k||^2 = \frac{l_3}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В итоге для задачи (5.21), (5.22) находим собственные значения

$$\lambda = \lambda_{nmk} = \mu_n + \nu_m + \omega_k = \pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2} + \frac{k^2}{l_3^2}\right)$$

и соответствующие им собственные функции

$$v_{nmk}(x,\, y,\, z) = \sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}\,\sin\frac{k\pi z}{l_3}, \quad \|v_{nmk}\|^2 = \frac{l_1 l_2 l_3}{8}.$$

Поскольку собственные функции зависят от трех целочисленных параметров n, m и k, функция $u(x,\, y,\, z,\, t)$, записанная в виде тройного тригонометрического ряда

$$u(x,\, y,\, z,\, t) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} C_{nmk}\, e^{-\lambda_{nmk}a^2 t}\,\sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}\,\sin\frac{k\pi z}{l_3} \qquad (5.24)$$

с коэффициентами

$$C_{nmk} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2}\int_0^{l_3} U(x,\, y,\, z)\times \\ \times \sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}\,\sin\frac{k\pi z}{l_3}\,dx\,dy\,dz, \qquad (5.25)$$

в силу (5.18)–(5.20) является решением задачи остывания прямоугольного параллелепипеда (пластины) конечных размеров.

Пример 5.2. Рассмотрим задачу остывания цилиндра радиуса r_0 и высотой H, т.е. тела, занимающего область $\Omega = \{(r,\, \varphi,\, z)\colon\ 0 \leqslant r < r_0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 < z < H\}$. Предполагаем, что начальное распределение температуры $U(r,\, z)$ не зависит от угловой переменной φ. Тогда в любой момент времени $t > 0$ решение задачи $u(r,\, z,\, t)$ будет обладать осевой симметрией. Поэтому задача (5.17) на собственные значения примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v = 0, \\ \qquad 0 \leqslant r < r_0, \quad 0 < z < H; \\ |v(0,\, z)| < \infty, \quad v(r_0,\, z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant H; \\ v(r,\, 0) = 0, \quad v(r,\, H) = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0. \end{cases} \qquad (5.26)$$

Если искать ее решение в виде

$$v(r, z) = R(r)\,Z(z),$$

то для функции $Z(z)$ получим задачу Штурма – Лиувилля

$$\begin{cases} Z'' + \nu Z = 0, \quad 0 < z < H; \\ Z(0) = Z(H) = 0, \end{cases} \tag{5.27}$$

которая имеет дискретный набор собственных значений

$$\nu = \nu_n = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{5.28}$$

и собственных функций

$$Z_n(z) = \sin\frac{n\pi z}{H}, \quad ||Z_n||^2 = \frac{H}{2}. \tag{5.29}$$

Для функции $R(r)$ соответствующая задача на собственные значения примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{dR}{dr} + \omega R = 0, \quad 0 \leqslant r < r_0; \\ |R(0)| < \infty, \quad R(r_0) = 0. \end{cases} \tag{5.30}$$

Здесь $\omega = \lambda - \nu_n$ – некоторая пока еще неизвестная постоянная.

Если ввести новое переменное $x = \sqrt{\omega}\,r$ и обозначить $y(x) = R(x/\sqrt{\omega})$, то для определения функции $y(x)$ получим дифференциальное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + y = 0. \tag{5.31}$$

Его общее решение

$$y(x) = A\,\mathcal{J}_0(x) + B\,N_0(x) \tag{5.32}$$

содержит ***функции Бесселя*** $\mathcal{J}_0(x)$ и ***Неймана*** $N_0(x)$ нулевого порядка, представляющие собой фундаментальную систему линейно независимых решений уравнения Бесселя нулевого порядка. На рис. 5.1 приведены качественные графики этих функций.

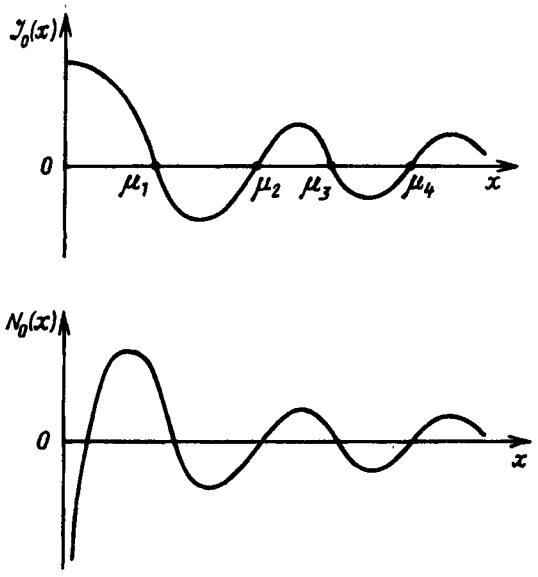


Рис. 5.1

Как следует из графиков, функция Бесселя ограничена при $x = 0$, точнее $\mathcal{J}_0(0) = 1$, а функция Неймана неограниченно растет по модулю при $x \to 0$.

Заменяя x на r, запишем общее решение уравнения (5.32) как

$$R(r) = A\,\mathcal{J}_0(\sqrt{\omega}\,r) + B\,N_0(\sqrt{\omega}\,r). \tag{5.33}$$

Условие ограниченности функции $R(r)$ при $r = 0$ дает $B = 0$. Полагая затем в уравнении (5.33) $r = r_0$, получаем

$$A\,\mathcal{J}_0(\mu) = 0, \quad \mu = \sqrt{\omega}\,r_0. \tag{5.34}$$

Это трансцендентное уравнение при $A \neq 0$ имеет счетное множество положительных корней $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \ldots$, которые являются нулями функции $\mathcal{J}_0(x)$ (см. рис. 5.1). Приведем несколько первых значений μ_m: $\mu_1 = 2,405$, $\mu_2 = 5,520$, $\mu_3 = 8,654$, $\mu_4 = 11,792$. Таблицы нулей функций Бесселя можно найти в справочной литературе.

Отметим, что с возрастанием номера m разность значений двух соседних корней $(\mu_{m+1} - \mu_m)$ стремится к π. Действительно, например, $\mu_7 - \mu_6 = 3,1405$. Это свойство корней функции Бесселя $\mathcal{J}_0(x)$ вытекает из асимптотической формулы

$$\mathcal{J}_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Таким образом, задача (5.30) имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\omega = \omega_m = \left(\frac{\mu_m}{r_0}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

которым соответствуют собственные функции

$$R_m(r) = \mathcal{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right).$$

Докажем, что эти функции ортогональны на отрезке $[0, r_0]$ с некоторым весом $\rho(r) = r$. Для этого запишем уравнения, которым удовлетворяют две собственные функции $R_m(r)$ и $R_k(r)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_m}{dr}\right) + \alpha_m^2 r R_m = 0, \quad \alpha_m^2 = \mu_m^2/r_0^2;$$
$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_k}{dr}\right) + \alpha_k^2 r R_k = 0, \quad \alpha_k^2 = \mu_k^2/r_0^2.$$

Умножим первое из уравнений на $R_k(r)$, а второе – на $R_m(r)$. Тогда после вычитания второго соотношения из первого получим

$$R_k \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_m}{dr}\right) - R_m \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_k}{dr}\right) + (\alpha_m^2 - \alpha_k^2)\, r R_m R_k = 0.$$

Интегрируя это равенство по r в пределах от 0 до r, будем иметь

$$\int_0^r r\, R_m R_k\, dr = r\left(\frac{R_k \dfrac{dR_m}{dr} - R_m \dfrac{dR_k}{dr}}{\alpha_k^2 - \alpha_m^2}\right).$$

Так как $R_k(r) = \mathcal{J}_0(\alpha_k r)$, а $R_m(r) = \mathcal{J}_0(\alpha_m r)$, то по свойству бесселевых функций

$$\frac{dR_k}{dr} = \alpha_k\, \mathcal{J}_0'(\alpha_k r) = -\alpha_k\, \mathcal{J}_1(\alpha_k r);$$
$$\frac{dR_m}{dr} = \alpha_m\, \mathcal{J}_0'(\alpha_m r) = -\alpha_m\, \mathcal{J}_1(\alpha_m r),$$

где $\mathcal{J}_1(x) = -\mathcal{J}_0'(x)$ – функция Бесселя первого порядка.

Следовательно,

$$\int_0^r r\, R_m R_k\, dr =$$
$$= r\left[\frac{\alpha_m\, \mathcal{J}_0(\alpha_k r)\, \mathcal{J}_1(\alpha_m r) - \alpha_k\, \mathcal{J}_0(\alpha_m r)\, \mathcal{J}_1(\alpha_k r)}{\alpha_m^2 - \alpha_k^2}\right]. \quad (5.35)$$

Если верхний предел интегрирования выбрать равным r_0, то, учитывая, что $\mathcal{J}_0(\alpha_k r_0) = \mathcal{J}_0(\alpha_m r_0) = 0$, из уравнения (5.35) при $\alpha_m \neq \alpha_k$ получаем условие ортогональности

$$\int_0^{r_0} r\, R_m(r)\, R_k(r)\, dr = 0, \quad m \neq k,$$

которое согласуется с выводами теории задачи Штурма – Лиувилля (см. Приложение 2).

Совершим теперь в уравнении (5.35) предельный переход $\alpha_m \to \alpha_k$. Правая часть равенства (5.35) при этом дает неопределенность 0/0. Раскрывая ее дифференцированием по α_m и последующей подстановкой $\alpha_k = \alpha_m$, получаем

$$\int_0^r r\, R_m^2(r)\, dr = \frac{r}{2\alpha_m}\Big[\mathcal{J}_0(\alpha_m r)\, \mathcal{J}_1(\alpha_m r) +$$
$$+ \alpha_m r\, \mathcal{J}_0(\alpha_m r)\, \mathcal{J}_1'(\alpha_m r) + \alpha_m r\, \mathcal{J}_1^2(\alpha_m r)\Big]. \quad (5.36)$$

Так как $\mathcal{J}_0(\alpha_m r_0) = 0$, то, положив в уравнении (5.36) $r = r_0$, получаем выражение для квадрата нормы

$$||R_m||^2 = \int\limits_0^{r_0} r\, R_m^2(r)\, dr = \frac{r_0^2}{2}\, \mathcal{J}_1^2(\alpha_m r_0) = \frac{r_0^2}{2}\, \mathcal{J}_1^2(\mu_m). \qquad (5.37)$$

Таким образом, доказано, что нетривиальные решения задачи (5.26) существуют только при

$$\lambda = \lambda_{nm} = \nu_n + \omega_m = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 + \frac{\mu_m^2}{r_0^2}, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

Этим собственым значениям соответствуют собственные функции

$$v_{nm}(r, z) = \mathcal{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right) \sin\frac{n\pi z}{H}, \quad ||v_{nm}||^2 = \frac{H r_0^2}{4}\, \mathcal{J}_1^2(\mu_m),$$
$$n = 1, 2, \ldots, \quad m = 1, 2, \ldots$$

В итоге с учетом соотношений (5.18) и (5.20) получим решение задачи об остывании ограниченного цилиндра в виде двойного ряда

$$u(r, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm}\, \mathcal{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right) \sin\frac{n\pi z}{H}\, e^{-\lambda_{nm} a^2 t} \qquad (5.38)$$

с коэффициентами

$$C_{nm} =$$
$$= \frac{4}{H r_0^2\, \mathcal{J}_1^2(\mu_m)} \int\limits_0^H \int\limits_0^{r_0} U(r, z)\, \mathcal{J}_0\left(\mu_m \frac{r}{r_0}\right) \sin\frac{n\pi z}{H}\, r\, dr\, dz, \qquad (5.39)$$

которые определяются заданным начальным распределением температуры.

Регулярный режим остывания для достаточно больших значений t описывается одним членом ряда (5.38):

$$u_1(r,\, z,\, t) = C_{11}\, \mathcal{J}_0\left(\mu_1 \frac{r}{r_0}\right) \sin\frac{\pi z}{H}\, e^{-t/\tau},$$

где $\tau = [a^2\lambda_{11}]^{-1} = [a^2(\pi^2/H^2 + \mu_1^2/r_0^2)]^{-1}$; $\mu_1 = 2{,}405$; a^2 – коэффициент температуропроводности материала, из которого выполнен цилиндр; H и r_0 – геометрические размеры цилиндра.

5.3. Распространение теплоты в неограниченном пространстве

Если отвлечься от влияния на температурное поле формы и размеров тела, то можно рассмотреть задачу об эволюции температурного поля в безграничном пространстве, заполненном однородным и изотропным материалом с известным коэффициентом температуропроводности a^2. Такой процесс можно описать математически, решая следующую ***задачу Коши для параболического уравнения теплопроводности***:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \quad M \in \mathfrak{R}^3; & (5.40) \\ u(M,\, 0) = \varphi(M), \quad M \in \mathfrak{R}^3. & (5.41) \end{cases}$$

Здесь $u(x,\, y,\, z,\, t)$ – температура в точке трехмерного евклидова пространства $M = M(x,\, y,\, z)$ в момент времени t; $\varphi(x,\, y,\, z)$ – заданное начальное распределение температуры во всем пространстве.

Решим сначала задачу о влиянии мгновенного точечного источника теплоты, действующего в точке $M_0(x_0,\, y_0,\, z_0)$ в начальный момент времени. Для такой задачи

$$\varphi(M) = Q\,\delta_3(M,\, M_0), \quad Q = Q_0/(\rho c), \tag{5.42}$$

где $\delta_3(M,\, M_0)$ – трехмерная дельта-функция, свойства которой описаны в Приложении 1; Q_0 – количество теплоты, мгновенно сообщенное среде в начальный момент времени в точке M_0; ρc – объемная теплоемкость материала.

Из физической постановки задачи для мгновенного точечного теплового источника следует, что точка M_0 в любой момент времени будет соответствовать центру симметрии. Поэтому удобно выбрать сферическую систему координат с центром в точке M_0 и записать уравнение (5.40) для функции $u = u(r, t)$ в виде

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad t > 0, \quad 0 \leqslant r < \infty. \tag{5.43}$$

В любой момент времени $t \geqslant 0$ тепловые возмущения от мгновенного точечного источника на бесконечном расстоянии от него будут пренебрежимо малы. Это значит, что

$$u \to 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial r} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5.44}$$

Кроме того, из закона сохранения энергии с учетом (5.42) можно записать следующее интегральное соотношение:

$$\int_0^\infty u(r, t)\, 4\pi r^2\, dr = Q. \tag{5.45}$$

Из определяющих параметров задачи Q и a^2, единицы измерения которых соответственно равны К·м^3 и м^2·с$^{-1}$, и переменных r и t можно составить единственную безразмерную комбинацию

$$\eta = \frac{r}{\sqrt{a^2 t}}$$

и характерную величину, имеющую размерность температуры:

$$T = \frac{Q}{(a^2 t)^{3/2}}.$$

Поэтому в соответствии с П-теоремой теории размерностей (см. Приложение 3) решение задачи о влиянии мгновенного точечного источника теплоты следует искать в виде

$$u(r, t) = \frac{Q}{(a^2 t)^{3/2}}\, \Theta(\eta), \tag{5.46}$$

где функция $\Theta(\eta)$ с учетом соотношения (5.45) удовлетворяет интегральному условию

$$4\pi \int\limits_0^\infty \Theta(\eta)\,\eta^2\,d\eta = 1. \tag{5.47}$$

Подставив (5.46) в уравнение (5.43), получим дифференциальное уравнение

$$-\frac{3}{2}\Theta - \frac{1}{2}\eta\frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{d^2\Theta}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{d\Theta}{d\eta},$$

которое можно преобразовать к виду

$$-\frac{3}{2}\left(\Theta + \frac{2}{\eta}\frac{d\Theta}{d\eta}\right) = \frac{\eta}{2}\frac{d}{d\eta}\left(\Theta + \frac{2}{\eta}\frac{d\Theta}{d\eta}\right). \tag{5.48}$$

Если обозначить $g = \Theta + \dfrac{2}{\eta}\dfrac{d\Theta}{d\eta}$, то уравнение (5.48) примет вид

$$-3g = \eta\frac{dg}{d\eta}. \tag{5.49}$$

Интегрируя (5.49), получаем $g = C\eta^{-3}$, $C = \text{const}$. Поэтому

$$\Theta + \frac{2}{\eta}\frac{d\Theta}{d\eta} = C\eta^{-3}. \tag{5.50}$$

Покажем, что константу C в уравнении (5.50) следует положить равной нулю. Действительно, так как из (5.44) следует, что $\Theta \to 0$ при $\eta \to \infty$, то из (5.50) при $C \neq 0$ для достаточно больших значений η получаем

$$\Theta \sim \frac{\text{const}}{\eta^3}.$$

Для функции $\Theta(\eta)$ с такой асимптотикой на бесконечности условие (5.47) не может быть выполнено, так как интеграл в левой части (5.47) расходится.

Полагая в уравнении (5.50) константу C равной нулю, получаем

$$\Theta + \frac{2}{\eta}\frac{d\Theta}{d\eta} = 0. \tag{5.51}$$

Разделив переменные и интегрируя, находим

$$\Theta = C_1\, e^{-\frac{\eta^2}{4}}, \quad C_1 = \text{const}. \tag{5.52}$$

Постоянную C_1 определим из условия (5.47), записав его в виде

$$C_1 \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{4}}\, \eta^2\, d\eta = \frac{1}{4\pi}. \tag{5.53}$$

Теперь, вычислив несобственный интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\eta^2}{4}}\, \eta^2\, d\eta = 8\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\, \xi^2\, d\xi = -4\int\limits_0^\infty \xi\, d\left(e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= -4\xi\, e^{-\xi^2}\Big|_0^\infty + 4\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = 4\int\limits_0^\infty e^{-\xi^2}\, d\xi = 4\,\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 2\sqrt{\pi},$$

из (5.53) получаем

$$C_1 = \frac{1}{8\pi\sqrt{\pi}} = \frac{1}{(2\sqrt{\pi})^3}. \tag{5.54}$$

Таким образом, с учетом формул (5.46), (5.52) и (5.54) можно записать решение задачи (5.40), (5.42) о влиянии мгновенного точечного теплового источника. Это решение имеет вид

$$u(r,\, t) = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi a^2 t})^3}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}. \tag{5.55}$$

Возвращаясь к переменным x, y, z и полагая $Q = 1$, из решения (5.55) получаем функцию температурного влияния мгновенного точечного источника теплоты, или фундаментальное решение

уравнения теплопроводности во всем пространстве

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \\ = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4a^2 t}}. \quad (5.56)$$

Эта функция описывает температурное поле в различных точках пространства в любой момент времени, если в начальный момент времени в точке $M'(x', y', z')$ мгновенно выделилось количество теплоты $Q_0 = \rho c$.

Функция (5.56) является фундаментальным решением, так как с помощью нее можно построить решения других задач для уравнения (5.40). В частности, решение задачи Коши (5.40), (5.41) с помощью функции G может быть записано в виде

$$u(x, y, z, t) = \\ = \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z', t)\, dx'\, dy'\, dz' = \\ = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\right)^3 \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', y', z') \times \\ \times e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4a^2 t}}\, dx'\, dy'\, dz'. \quad (5.57)$$

Действительно, чтобы при $t = 0$ мгновенно увеличить температуру в объеме $dx'\, dy'\, dz'$ вблизи точки M' от нуля до $\varphi(x', y', z')$, необходимо в этот объем подвести количество теплоты $dQ_0 = \rho c \varphi(x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$. По смыслу функции G такое тепловое воздействие создаст в точке $M(x, y, z)$ в момент времени $t > 0$ температурное возмущение

$$\frac{dQ_0}{\rho c} G(x, y, z, x', y', z', t) = \\ = \varphi(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'.$$

Суммируя в точке M воздействия от всех источников, связанных с начальным температурным полем, т.е. интегрируя по переменным x', y', z', получим для температуры в точке $M(x, y, z)$ в момент времени $t > 0$ выражение (5.57).

С помощью функции влияния мгновенного точечного источника можно также построить решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M, t), \quad t > 0, \quad M \in \mathfrak{R}^3; \\ u(M, 0) = 0, \quad M \in \mathfrak{R}^3. \end{cases} \tag{5.58}$$

В такой задаче количество теплоты, выделяющееся в момент времени $t = \tau$ в элементе объема $dx'\,dy'\,dz'$ за время $d\tau$ и равное

$$dQ = \rho c\, f(x', y', z', \tau)\, dx'\, dy'\, dz'\, d\tau,$$

вызовет в точке $M(x, y, z)$ в момент времени $t > \tau$ температурное возмущение

$$\frac{dQ}{\rho c} G(x, y, z, x', y', z', t - \tau) =$$
$$= f(x', y', z', \tau)\, G(x, y, z, x', y', z', t - \tau)\, dx'\, dy'\, dz'\, d\tau.$$

Суммируя возмущения, вызванные такими элементарными тепловыми источниками, расположенными в различных точках пространства, и действующие в различные моменты времени, получаем решение задачи (5.58) в виде

$$u(x, y, z, t) = \int\limits_0^t \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x', y', z', \tau) \times$$
$$\times\, G(x, y, z, x', y', z', t - \tau)\, dx'\, dy'\, dz'\, d\tau. \tag{5.59}$$

Суперпозиция решений (5.57) и (5.59)

$$u(x, y, z, t) =$$
$$= \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x', y', z')\, G(x, y, z, x', y', z', t)\, dx'\, dy', dz' +$$
$$+ \int\limits_0^t \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x', y', z', \tau)\, G(x, y, z, x', y', z', t - \tau)\, dx'\, dy'\, dz'\, d\tau$$

является решением задачи Коши для неоднородного уравнения в общей постановке:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(M, t), \quad t > 0, \quad M \in \mathfrak{R}^3; \\ u(M, 0) = \varphi(M), \quad M \in \mathfrak{R}^3. \end{cases} \tag{5.60}$$

С помощью фундаментального решения (5.56) можно определить температурное поле от непрерывно действующего точечного источника теплоты постоянной мощностью q, который начинает действовать в момент времени $t = 0$ и движется с постоянной скоростью v, например, в направлении оси Ox. Такое решение находит приложение в теории сварочных процессов.

Тепловое воздействие непрерывно действующего движущегося источника эквивалентно суммарному воздействию бесчисленного множества мгновенных точечных источников мощностью q, расположенных в тех точках пространства, где в текущий момент времени находился движущийся источник. Выделим один из таких элементарных тепловых источников, который действовал в течение промежутка времени от τ до $\tau + d\tau$, находясь в точке с координатами $x' = v\tau$, $y' = 0$, $z' = 0$. Этот источник выделил количество теплоты $dQ = q\,d\tau$ и вызвал температурное возмущение в точке $M(x, y, z)$ в момент времени $t > \tau$, которое можно рассчитать по формуле (5.55). Имеем

$$du = \frac{dQ}{\rho c(2\sqrt{\pi a^2(t-\tau)}\,)^3} \exp\left[-\frac{(x - v\tau)^2 + y^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)}\right], \quad t > \tau.$$

Суммируя возмущения от всех элементарных тепловых источников, получаем

$$u(x, y, z, t) = \\ = \frac{q}{\rho c(2\sqrt{\pi a^2})^3} \int\limits_0^t \frac{\exp\left[-\dfrac{(x - v\tau)^2 + y^2 + z^2}{4a^2(t-\tau)}\right]}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau. \tag{5.61}$$

При описании температурного поля в рассматриваемой задаче удобнее перейти в систему отсчета, связанную с движущимся источником, т.е. перейти к новым координатам $x_* = x - vt$, $y_* = y$, $z_* = z$. В новой системе координат рассматриваемая задача трансформируется в задачу о неподвижном непрерывно действующем с момента времени $t = 0$ точечном тепловом источнике, помещенном в движущуюся с постоянной скоростью v в отрицательном направлении оси Ox_* среду.

Переходя в систему координат x_*, y_*, z_*, запишем выражение (5.61) в следующем виде:

$$u(x_*, y_*, z_*, t) = \\ = \frac{q}{\rho c(2\sqrt{\pi a^2})^3} \int\limits_0^t \frac{\exp\left\{-\dfrac{[x_* + v(t-\tau)]^2 + y_*^2 + z_*^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau. \quad (5.62)$$

Обозначив $R^2 = x_*^2 + y_*^2 + z_*^2$ и сделав замену

$$\xi = \frac{R}{2a\sqrt{t-\tau}}, \quad d\xi = \frac{R\,d\tau}{4a\,(t-\tau)^{3/2}},$$

после преобразований (5.62) получим

$$u(x_*, y_*, z_*, t) = \\ = \frac{q}{2k\pi^{3/2}R} \exp\left\{-\frac{vx_*}{2a^2}\right\} \int\limits_{\frac{R}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} \exp\left(-\xi^2 - \frac{v^2R^2}{16a^4\xi^2}\right) d\xi. \quad (5.63)$$

Здесь $k = \rho c a^2$ – коэффициент теплопроводности среды.

При $t \to \infty$ интеграл в уравнении (5.63) можно вычислить точно:

$$\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\xi^2 - \frac{v^2R^2}{16a^4\xi^2}\right) d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(-\frac{vR}{2a^2}\right),$$

и мы приходим к формуле

$$\widetilde{u}(x_*,\, y_*,\, z_*) = \frac{q}{4\pi kR}\, \exp\left[-\frac{v(R+x_*)}{2a^2}\right], \qquad (5.64)$$

описывающей стационарное (в системе координат, движущейся вместе с тепловым источником) температурное поле вокруг источника постоянной мощности q, которое устанавливается по истечении достаточно большого промежутка времени. Качественный вид этого стационарного температурного поля представлен на рис. 5.2, где в плоскости $(x_*,\, y_*)$ по уравнению (5.64) при $z_* = 0$ построены изотермы $\widetilde{u}(x_*,\, y_*,\, 0) = \mathrm{const}$.

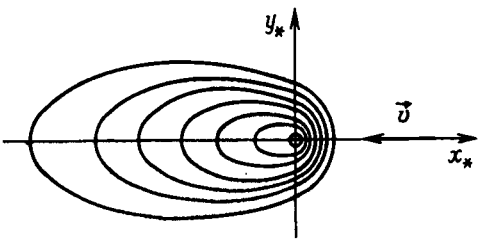


Рис. 5.2

Для неподвижного источника $v = 0$ и формула (5.63) упрощается:

$$u(x_*,\, y_*,\, z_*,\, t) = \frac{q}{4\pi kR}\left\{1 - \Phi\left(\frac{R}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right\} =$$

$$= \frac{q}{2\pi^{3/2} kR} \int\limits_{\frac{R}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} \exp(-\xi^2)\, d\xi. \qquad (5.65)$$

Здесь $\Phi(\xi)$ – специальная функция, которую называют ***интегралом ошибок***.

Из уравнения (5.65) при $t \to \infty$ приходим к простой формуле

$$\widetilde{u}(x_*,\, y_*, z_*) = \frac{q}{4\pi kR}, \quad R = \sqrt{x_*^2 + y_*^2 + z_*^2}, \qquad (5.66)$$

описывающей установившееся температурное поле вокруг неподвижного непрерывно действующего теплового источника. Этому температурному полю соответствуют сферические изотермические поверхности $R = \text{const}$.

Формула (5.66) с точностью до размерной постоянной соответствует фундаментальному решению уравнения Лапласа (см. 3.2). Этот результат является естественным следствием уравнения (5.7), из которого вытекает, что стационарное $\left(\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0\right)$ распределение температуры удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках пространства, где отсутствуют тепловые источники.

5.4. Диффузионный процесс в активной среде с размножением

Большой интерес представляют процессы, в которых возможна объемная генерация диффундирующего вещества (частиц) со скоростью, пропорциональной концентрации. В частности, такой процесс с размножением наблюдается при протекании реакции деления тяжелых ядер (^{235}U, ^{239}Pu и др.), когда при взаимодействии с нейтронами некоторые тяжелые ядра атомов могут испытывать деления на более легкие ядра с испусканием нескольких новых нейтронов и выделением значительной ядерной энергии. При наличии такого процесса количество нейтронов будет увеличиваться, и при некоторых условиях можно ожидать протекание процесса в виде цепной реакции взрывного типа. Большой вклад в развитие теории цепных реакций внесли работы Н.Н. Семенова, Я.Б. Зельдовича и Ю.Б. Харитона.

В диффузионном приближении процесс распространения нейтронов в активной среде описывается уравнением вида (5.10), в котором $u(M, t)$ – концентрация нейтронов, D – эффективный коэффициент диффузии нейтронов, $F = \alpha u - \beta u = \gamma u$, где α – коэффициент рождения, β – коэффициент поглощения, $\gamma = \alpha - \beta$ – коэффициент размножения нейтронов. Если $\gamma > 0$,

то процесс объемной генерации нейтронов преобладает над их поглощением, и именно в этом случае можно ожидать возникновения цепной реакции.

Таким образом, в основе математической модели цепной реакции лежит диффузионное уравнение.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \gamma u, \quad \gamma > 0. \tag{5.67}$$

Используя уравнение (5.67), опишем процесс эволюции нейтронов в активной среде ($\gamma \neq 0$), представляющей собой шар радиуса r_0, если начальное распределение нейтронов в этом шаре задано сферически симметричной функцией $u_0(r)$. Тогда для определения концентрации нейтронов $u(r, t)$ в любой момент времени получаем задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{D}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \gamma u, \quad t > 0, \quad 0 < r < r_0; & (5.68) \\ u(r, 0) = u_0(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0; & (5.69) \\ u(r_0, t) = 0, \quad t > 0. & (5.70) \end{cases}$$

Граничное условие (5.70) соответствует предположению о быстром уходе нейтронов, вылетевших с поверхности шара, что позволяет считать концентрацию нейтронов на этой поверхности практически равной нулю в любой момент времени.

Для решения задачи (5.68) – (5.70) сделаем подстановку

$$u(r, t) = v(r, t)\, e^{\gamma t}. \tag{5.71}$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} e^{\gamma t} + \gamma v\, e^{\gamma t},$$

после подстановки (5.71) в уравнения (5.68) – (5.70) получим краевую задачу для функции v:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}, \quad t > 0, \quad 0 < r < r_0; \\ v(r, 0) = u_0(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0; \\ v(r_0, t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{5.72}$$

Введем теперь в рассмотрение функцию $w = rv$. Замечая, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(v + r\,\frac{\partial v}{\partial r}\right) = r\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial v}{\partial r}\right),$$

запишем для определения функции $w(r,\,t)$ следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad t > 0, \quad 0 < r < r_0; \\ w(r,\,0) = r\,u_0(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant r_0; \\ w(0,\,t) = w(r_0,\,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{5.73}$$

Дополнительное краевое условие для функции w в точке $r = 0$ является следствием ограниченности функции v при $r = 0$.

Задача (5.73) уже была нами решена [см. (2.32)]. Ее решение имеет вид

$$w(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{-\left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 Dt}\, \sin\frac{n\pi r}{r_0}, \tag{5.74}$$

где

$$a_n = \frac{2}{r_0}\int\limits_0^{r_0} r\,u_0(r)\,\sin\frac{n\pi r}{r_0}\,dr. \tag{5.75}$$

Возвращаясь к функции u, запишем решение исходной задачи (5.68) – (5.70) в виде

$$u(r,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\left[\gamma - \left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 D\right] t}\, \frac{\sin\dfrac{n\pi r}{r_0}}{r}. \tag{5.76}$$

Анализ (5.76) показывает, что если $\gamma < \dfrac{\pi^2 D}{r_0^2}$, то при любом начальном распределении концентрации нейтронов в шаре $u_0(r)$ число нейтронов в любой точке будет уменьшаться, стремясь к нулю при $t \to \infty$. Цепная реакция в этом случае не протекает при любом начальном фоне нейтронов.

Однако для достаточно больших значений коэффициента размножения, когда $\gamma > \dfrac{\pi^2 D}{r_0^2}$, хотя бы один из показателей экспонент в разложении (5.76) становится положительным. Это означает, что концентрация нейтронов начинает очень быстро по экспоненциальному закону нарастать с течением времени, реализуя режим цепной реакции.

Следовательно, для заданных значений D и γ существуют критический радиус шара и соответствующая критическая масса активного вещества, которые можно рассчитать по формулам

$$r_{\text{кр}} = \pi\sqrt{\frac{D}{\gamma}}; \quad m_{\text{кр}} = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi r_{\text{кр}}^3. \tag{5.77}$$

В шаре из активной среды с размножением, масса которой меньше критической, цепная реакция не возникает. Если же масса активного вещества с размножением нейтронов превышает критическую, то самопроизвольно начинает развиваться процесс лавинообразного нарастания концентрации нейтронов и выделяется значительная энергия от деления тяжелых ядер. Происходит ядерный (атомный) взрыв.

Первые расчеты физиков с учетом экспериментальных данных для обогащенного урана ($\gamma = 10^6\ \text{с}^{-1}$, $D = 6,5 \cdot 10^2\ \text{м}^2/\text{с}$, $\rho = 18,7 \cdot 10^3\ \text{кг/м}^3$) дали значения $r_{\text{кр}} = 8 \cdot 10^{-2}$ м и $m_{\text{кр}} = 40$ кг.

Можно рекомендовать читателю самостоятельно решить задачу о цепной реакции в общем случае, когда активное вещество занимает некоторую произвольную по форме область Ω, ограниченную поверхностью Σ. Решение этой задачи может быть записано в виде

$$u(M,\,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\{\gamma - \lambda_n D\}t}\, v_n(M), \quad M \in \overline{\Omega},$$

где λ_n и $v_n(M)$ – соответственно собственные значения и собственные функции задачи (5.17).

Условие, определяющее протекание цепной реакции, в этом случае будет таким:

$$\gamma > \lambda_1 D, \tag{5.78}$$

где λ_1 – первое (минимальное) собственное значение задачи (5.17), определяемое формой и размером области Ω.

Согласно теории размерности (см. Приложение 3) из условия (5.78) следует формула для определения характерного критического размера области

$$L_{\text{кр}} = \delta\sqrt{D/\gamma},$$

где δ – некоторый числовой коэффициент, зависящий от формы области Ω.

5.5. Задача экологического прогнозирования

Расчет загрязнений среды продуктами деятельности промышленных предприятий является важной задачей охраны окружающей среды. Рассмотрим задачу экологического прогнозирования, в основе математической модели которой лежит уравнение диффузии в движущейся среде (5.9).

Пусть в некоторой области $\omega \subset \mathfrak{R}^2$ расположены источники вещества, загрязняющего окружающую среду. Мощность таких распределенных источников будем характеризовать для $M \in \omega$ и $t > 0$ заданной функцией $Q(M, t)$. В частном случае N локальных сосредоточенных источников, расположенных в точках $M_j = M_j(x_j, y_j)$, $j = 1, 2, \ldots N$, имеют мощность

$$Q(M, t) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(t)\, \delta_2(M, M_j),$$

где $\varphi_j(t)$ – мощность выброса загрязняющего вещества от j-го источника, заданная для $t > 0$ как функция времени; $\delta_2(M, M_j) = \delta(x - x_j)\,\delta(y - y_i)$ – двумерная дельта-функция, характеризующая влияние сосредоточенного источника загрязняющей субстанции (см. Приложение 1).

Будем считать, что перенос вещества в среде осуществляется как диффузией, так и конвективным механизмом переноса,

связанным с движением несжимаемой среды, скорость которой $\vec{v}\{v_1, v_2\}$ задана и не зависит от времени и пространственных координат, причем $v_1 = v_0 \cos\beta$, а $v_2 = v_0 \sin\beta$.

Введем в рассмотрение область экологического прогнозирования $\Omega = \{(x, y)\colon 0 < x < L,\ 0 < y < L\}$, такую, что $\omega \subset \Omega$. Будем при этом полагать, что размер L области Ω достаточно велик, и поэтому на ее границе $\partial\Omega$, удаленной от источников загрязнения, концентрацию загрязняющего вещества практически можно положить равной нулю.

В диффузионном приближении нестационарное распределение концентрации $u(M, t)$ загрязняющего вещества определим из решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{grad}\,u = D\Delta_2 u - pu + Q(M, t), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t > 0, \quad M \in \Omega; \\ u(M, 0) = 0, \quad M \in \Omega; \\ u(P, t) = 0, \quad P \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.79}$$

Здесь D – коэффициент турбулентной диффузии; $p > 0$ – некоторая константа, определяющая интенсивность поглощения вещества в процессе его распространения, обусловленного протеканием химических реакций, осаждением и уносом вещества в другие слои.

Полагая

$$u(M, t) = w(M, t)\, e^{\frac{v_1 x + v_2 y}{2D}}, \tag{5.80}$$

получим для функции $w(M, t)$ задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = D\Delta_2 w - kw + F(M, t), \quad t > 0, \quad M \in \Omega; \\ w(M, 0) = 0, \quad M \in \Omega; \\ w(P, t) = 0, \quad P \in \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{5.81}$$

где $k = p + v_0^2/(4D)$; $F(M, t) = Q(M, t)\, e^{-\frac{v_1 x + v_2 y}{2D}}$.

Теперь с помощью подстановки

$$w(M,\, t) = g(M,\, t)\, e^{-kt} \tag{5.82}$$

приходим к следующей задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial t} = D\Delta_2 g + f(M,\, t), \quad t > 0, \quad M \in \Omega; \\ g(M,\, 0) = 0, \quad M \in \Omega; \\ g(P,\, t) = 0, \quad P \in \partial\Omega, \quad t \geqslant 0, \end{cases} \tag{5.83}$$

где $f(M,\, t) = F(M,\, t)\, e^{kt}$.

Решение задачи (5.83) будем искать в форме разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье:

$$g(x,\, y,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} g_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}. \tag{5.84}$$

Подставляя (5.84) в уравнение (5.83) и разлагая функцию $f(M,\, t)$ в двойной ряд Фурье

$$f(x,\, y,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} f_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}$$

с коэффициентами

$$f_{nm}(t) = \frac{4}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x,\, y,\, t) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L}\, dx\, dy,$$

получаем уравнение для определения $g_{nm}(t)$:

$$\frac{dg_{nm}}{dt} + \alpha_{nm}\, g_{nm} = f_{nm}(t), \tag{5.85}$$

где $\alpha_{nm} = \dfrac{D\pi^2}{L^2}\,(n^2 + m^2)$.

Решение неоднородного уравнения (5.85) с учетом начального условия $g_{nm}(0) = 0$ можно записать в виде

$$g_{nm}(t) = \int\limits_0^t f_{nm}(\tau)\, e^{-\alpha_{nm}(t-\tau)}\, d\tau. \qquad (5.86)$$

В частном случае одиночного источника постоянной мощности, когда $Q(M, t) = Q_0\, \delta_2(M, M_0)$, где $Q_0 = \text{const} > 0$, а $M_0 = M_0(x_0, y_0)$, имеем

$$f_{nm}(t) = \frac{4Q_0}{L^2}\, e^{kt}\, e^{-\frac{v_1 x_0 + v_2 y_0}{2D}}\, \sin\frac{n\pi x_0}{L}\, \sin\frac{m\pi y_0}{L};$$

$$g_{nm}(t) = \frac{4Q_0}{L^2}\left(e^{kt} - e^{-\alpha_{nm} t}\right) \mathrm{e}^{-\frac{v_1 x_0 + v_2 y_0}{2D}}\, \frac{\sin\frac{n\pi x_0}{L}\, \sin\frac{m\pi y_0}{L}}{\lambda_{nm}},$$

где $\lambda_{nm} = \alpha_{nm} + k = \dfrac{D\pi^2}{L^2}\,(n^2 + m^2) + \dfrac{v_0^2}{4D} + p.$

Поэтому распределение концентрации загрязняющего вещества в движущейся среде вблизи такого активно действующего источника загрязнений можно представить в виде следующего двойного тригонометрического ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \frac{4Q_0}{L^2}\, e^{\frac{v_1(x-x_0)+v_2(y-y_0)}{2D}} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left(1 - e^{-\lambda_{nm} t}\right) \times$$

$$\times\, \frac{\sin\frac{n\pi x}{L}\, \sin\frac{n\pi x_0}{L}\, \sin\frac{m\pi y}{L}\, \sin\frac{m\pi y_0}{L}}{\lambda_{nm}}. \qquad (5.87)$$

В пределе $t \to \infty$ из формулы (5.87) можно найти стационарное поле концентрации вблизи постоянно действующего источника.

Вопросы и задачи

5.1. Начальная температура бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0 равна нулю. Найдите нестационарное температурное поле в цилиндре, если при $t > 0$ через его поверхность поступает постоянный тепловой поток плотностью q.

Ответ: $u(r,t) = \dfrac{q\,r_0}{k}\left[\dfrac{2a^2t}{r_0^2} - \dfrac{r_0^2 - 2r^2}{4r_0^2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2\,\mathcal{J}_0(\mu_n)}\, e^{-\frac{a^2\mu_n t}{r_0^2}}\right]$, где μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения $\mathcal{J}_1(\mu) = 0$.

5.2. Начальная температура шара радиуса r_0 равна нулю. Найдите нестационарное температурное поле в шаре, если при $t > 0$ через его поверхность поступает тепловой поток плотностью q.

Ответ: $u(r,t) = \dfrac{q\,r_0}{k}\left[\dfrac{3a^2t}{r_0^2} - \dfrac{3r_0^2 - 5r^2}{10\,r_0^2} - \dfrac{2r_0}{r}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\dfrac{\mu_n r}{r_0}}{\mu_n^2\cos\mu_n}\, e^{-\frac{a^2\mu_n t}{r_0^2}}\right]$, где μ_n – положительные корни уравнения $\operatorname{tg}\mu = \mu$.

5.3. Определите температуру бесконечного круглого цилиндра радиуса r_0, если его начальная температура

$$u(r,0) = U_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right),$$

а на поверхности поддерживается нулевая температура.

Ответ: $u(r,t) = 8U_0\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^3\,\mathcal{J}_1(\mu_n)}\, e^{-\frac{a^2\mu_n t}{r_0^2}}$, где μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения $\mathcal{J}_0(\mu) = 0$.

5.4. Определите критический размер куба из активного вещества, если коэффициент размножения $\gamma > 0$, а концентрация вещества на всех гранях поддерживается равной нулю.

Ответ: $l_{\text{кр}} = \pi\sqrt{\dfrac{3D}{\gamma}}$.

5.5. Определите критический размер бесконечного круглого цилиндра из активного вещества, если коэффициент размножения $\gamma > 0$, а концентрация вещества на поверхности поддерживается равной нулю.

Ответ: $R_{\text{кр}} = \mu_1\sqrt{\dfrac{D}{\gamma}}$, где $\mu_1 = 2,40$ – первый положительный корень уравнения $\mathcal{J}_0(\mu) = 0$.

6. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

6.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны

Рассмотрим задачу о малых поперечных колебаниях мембраны, которая является обобщением на двумерный случай задачи о колебаниях струны, рассмотренной в 1.1. Колеблющиеся мембраны являются основным типом излучателей акустических волн. Поэтому расчет колебаний мембран является важной задачей акустики.

В дальнейшем будем называть мембраной упругую пленку, не сопротивляющуюся изгибу или сдвигу. Рассмотрим такую мембрану, ограниченную контуром Г и находящуюся в равновесном состоянии в плоскости (x, y) (рис. 6.1). Мембрана жестко закреплена по контуру Г и находится в напряженном состоянии. Это означает, что если мысленно провести разрез по произвольной линии γ, то на края разреза перпендикулярно γ будет действовать распределенная сила натяжения, модуль которой на единицу длины линии равен T_0.

Выведем мембрану из положения равновесия, отклонив ее в вертикальном направлении. Обозначив через $u(x, y, t)$ вер-

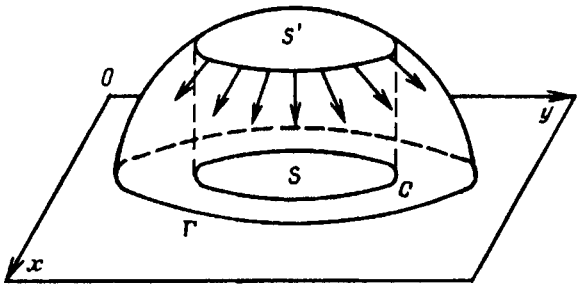


Рис. 6.1

тикальное смещение элемента мембраны с координатами x, y, будем считать поперечное перемещение элементов мембраны достаточно малым, так что можно пренебречь квадратами первых производных $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ по сравнению с единицей.

Малость поперечных перемещений элементов мембраны означает малость угла α между нормалью к поверхности мембраны и вертикальным направлением, перпендикулярным плоскости (x, y). Поэтому следует считать

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}} \simeq 1;$$

$$\sin\alpha \approx \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = |\operatorname{grad} u|;$$

$$S' = \iint\limits_S \frac{dx\,dy}{\cos\alpha} \approx \iint\limits_S dx\,dy = S.$$

Последнее соотношение означает, что площадь любого элемента мембраны при его поперечном перемещении не изменяется. Поэтому при малых поперечных колебаниях мембраны не происходит деформации ее материала, и по закону Гука модуль силы натяжения не изменяется со временем и всегда равен $T_0 = \text{const}$.

Опишем динамику движения мембраны. Для этого определим вертикальную составляющую результирующей силы, действующей на выделенный элемент S мембраны, ограниченный контуром C. Она будет складываться из вертикальной составляющей сил натяжения

$$F_1 = -\oint\limits_C T_0 \sin\alpha\, dl =$$

$$= -\oint\limits_C T_0 |\operatorname{grad} u|\, dl = \oint\limits_C T_0 (\operatorname{grad} u \cdot \vec{\nu})\, dl \qquad (6.1)$$

и результирующей поперечно действующей вынуждающей силы, распределенной по поверхности мембраны с некоторой поверхностной плотностью $\mathcal{F}(x, y, t)$,

$$F_2 = \iint\limits_S \mathcal{F}(x, y, t)\, dx\, dy. \tag{6.2}$$

Здесь $\vec{\nu}$ – единичная внешняя нормаль к контуру C.

С помощью формулы Остроградского для плоскости находим

$$F_1 = \oint\limits_C T_0(\operatorname{grad} u \cdot \vec{\nu})\, dl =$$
$$= \iint\limits_S T_0 \operatorname{div} \operatorname{grad} u\, dx\, dy = \iint\limits_S T_0 \Delta_2 u\, dx\, dy,$$

где $\Delta_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа.

Введя поверхностную плотность мембраны $\rho(x, y)$, запишем выражение для вертикальной проекции импульса движущегося участка (элемента) мембраны

$$P = \iint\limits_S \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy. \tag{6.3}$$

Теперь по закону Ньютона

$$\frac{dP}{dt} = F_1 + F_2$$

или

$$\frac{d}{dt} \iint\limits_S \rho \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy = \iint\limits_S T_0 \Delta_2 u\, dx\, dy + \iint\limits_S \mathcal{F}(x, y, t)\, dx\, dy. \tag{6.4}$$

Внося производную по времени под знак интеграла, получаем

$$\iint\limits_S \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx\, dy = \iint\limits_S [T_0 \Delta_2 u + \mathcal{F}(x, y, t)]\, dx\, dy,$$

или

$$\iint\limits_S \left[\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T_0 \Delta_2 u - \mathcal{F}(x, y, t)\right] dx\, dy = 0. \qquad (6.5)$$

В силу произвольности выбора элемента мембраны, т.е. произвольности области интегрирования S, из интегрального равенства (6.5) следует равенство нулю подынтегрального выражения. Таким образом, мы приходим к дифференциальному уравнению в частных производных гиперболического типа, которое описывает малые поперечные колебания мембраны,

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \Delta_2 u + \mathcal{F}(x, y, t). \qquad (6.6)$$

Для однородной мембраны уравнение (6.6) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta_2 u + f(x, y, t), \qquad (6.7)$$

где $a = \sqrt{T_0/\rho_0} = \text{const}$; $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $f(x, y, t) = \mathcal{F}(x, y, t)/\rho_0$ – плотность вынуждающей силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

Уравнение (6.7) называют двумерным *волновым уравнением*, поскольку ниже будет показано, что произвольное движение мембраны можно представить как совокупность распространяющихся по мембране колебаний, т.е. механических волн.

Законы механики сплошной среды (гидродинамики, аэромеханики и теории упругости) позволяют вывести уравнение, которому удовлетворяют малые по амплитуде возмущения $u(M, t)$, $M \in \mathfrak{R}^3$ в однородной среде. При наличии объемно распределенной вынуждающей силы это неоднородное уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M, t), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (6.8)$$

обобщает волновое уравнение на случай трех пространственных переменных. Оно описывает процесс распространения механических возмущений в сплошной среде, причем параметр a

в формуле (6.8) есть скорость распространения малых механических возмущений, т.е. скорость звука в среде.

Для жидкостей и газов функцию $u(M, t)$ можно интерпретировать как возмущение плотности или давления, а для твердого тела – как потенциал смещений отдельных частиц среды.

Уравнение (6.8) лежит в основе линейной акустики и, в частности, ультразвуковой технологии. С помощью этого уравнения решаются задачи о распространении звуковых возмущений в сплошной среде при различных условиях их возбуждения.

Отметим еще раз, что для процессов, описываемых уравнениями (6.7) и (6.8), имеет место конечная скорость распространения возмущений. Поэтому для этих уравнений в пространстве состояний (M, t) можно ввести в рассмотрение ***характеристический конус*** с вершиной в точке (M_0, t). Для двумерного волнового уравнения этот характеристический конус изображен на рис. 6.2.

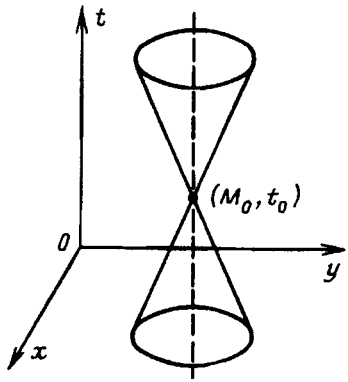


Рис. 6.2

Поверхность верхней полости конуса, определяемая уравнением $r_{M_0M} = a(t - t_0)$, $t > t_0$, соответствует точкам фазового пространства, в которые в момент времени $t > t_0$ приходит сигнал, испущенный в момент времени t_0 источником возмущений, расположенным в точке M_0. Каждое сечение этой поверхности плоскостью $t = \text{const}$ выделяет фронт волны возмущения

(окружность для $N = 2$ и сферу для $N = 3$) от источника в момент времени $t > t_0$. Поверхность нижней полости конуса $r_{M_0M} = a(t_0 - t)$, $t < t_0$ определяет геометрическое место точек, из которых сигналы приходят в точку M_0 пространства в момент времени t_0.

6.2. Колебания прямоугольной мембраны

Рассмотрим мембрану прямоугольной формы со сторонами l_1 и l_2, жестко закрепленную по периметру. Опишем процесс малых поперечных колебаний такой мембраны, инициированный начальным отклонением и начальной скоростью.

Математическая модель процесса свободных колебаний такой мембраны имеет вид краевой задачи для функции $u(x, y, t)$, характеризующей отклонения различных элементов мембраны от положения равновесия. Эта краевая задача включает в себя уравнение

$$\begin{gathered}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \Omega = \{(x, y)\colon\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2\},\end{gathered} \tag{6.9}$$

начальные условия возбуждения колебаний

$$u(x, y, 0) = h(x, y); \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y) \tag{6.11}$$

и граничные условия, заданные на контуре Γ в области Ω,

$$u(0, y, t) = 0, \quad u(l_1, y, t) = 0; \tag{6.12}$$

$$u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, l_2, t) = 0. \tag{6.13}$$

Решение задачи (6.9) – (6.13) будем искать методом разделения переменных, находя частные решения вида

$$u(x, y, t) = v(x, y)\,T(t). \tag{6.14}$$

Подставляя решения (6.14) в уравнение (6.9), получаем

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''}{T} = \frac{\Delta_2 v}{v} = -\lambda = \text{const}. \tag{6.15}$$

Отсюда следуют уравнение для функции $T(t)$

$$T''(t) + a^2\lambda T = 0 \tag{6.16}$$

и задача на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta_2 v + \lambda v = 0, & (x, y) \in \Omega; \\ v|_\Gamma = 0. \end{cases} \tag{6.17}$$

Полагая $v(x, y) = X(x)Y(y)$ и проведя еще раз разделение переменных, получим две идентичные *задачи Штурма – Лиувилля*

$$\begin{cases} X''(x) + \nu X(x) = 0; \\ X(0) = X(l_1) = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} Y'' + \mu Y(y) = 0; \\ Y(0) = Y(l_2) = 0, \end{cases} \tag{6.18}$$

где ν и μ – собственные значения, связанные с λ соотношением $\nu + \mu = \lambda$.

Для задач (6.18) наборы собственных значений и соответствующих им собственных функций имеют вид

$$\begin{aligned} &\nu_n = \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots; \\ &X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l_1} \\ &\text{и} \\ &\mu_m = \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2, \quad m = 1, 2, \ldots; \\ &Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{l_2}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Но тогда задача на собственные значения (6.17) имеет в качестве собственных чисел

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2, \qquad n,\, m = 1,\, 2, \ldots, \tag{6.20}$$

каждому из которых соответствует собственная функция

$$v_{nm}(x,\, y) = \sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}. \tag{6.21}$$

Теперь с учетом (6.16) находим частные решения уравнения (6.9), удовлетворяющие граничным условиям (6.12), (6.13):

$$u_{nm}(x,\, y,\, t) = (A_{nm}\,\cos\omega_{nm}t + \\ + B_{nm}\,\sin\omega_{nm}t)\,v_{nm}(x,\, y), \tag{6.22}$$

где $\omega_{nm} = a\sqrt{\lambda_{nm}} = a\pi\sqrt{\left(\frac{n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_2}\right)^2}$.

Окончательно искомое решение краевой задачи (6.9) –(6.13) представим в виде суперпозиции частных решений вида (6.22), т.е. в виде двойного ряда

$$u(x,\, y,\, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(A_{nm}\,\cos\omega_{nm}t + \\ + B_{nm}\,\sin\omega_{nm}t)\,\sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}. \tag{6.23}$$

Коэффициенты A_{nm} и B_{nm} найдем, выполняя начальные условия (6.10) и (6.11):

$$h(x,\, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\,\sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2};$$

$$g(x,\, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \omega_{nm}\,B_{nm}\,\sin\frac{n\pi x}{l_1}\,\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

Эти равенства следует рассматривать как разложения функций $h(x, y)$ и $g(x, y)$ в двойные тригонометрические ряды Фурье. Поэтому для коэффициентов A_{nm} и B_{nm} получаем

$$A_{nm} = \frac{4}{l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} h(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \, dx \, dy;$$
$$B_{nm} = \frac{4}{\omega_{nm} l_1 l_2} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \, dx \, dy. \tag{6.24}$$

Проведем анализ решения (6.23), преобразовав его к виду

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u_{nm}(x, y, t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{nm} \cos(\omega_{nm} t - \delta_{nm}) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \tag{6.25}$$

Здесь

$$\alpha_{nm} = \sqrt{A_{nm}^2 + B_{nm}^2}, \quad \operatorname{tg} \delta_{nm} = B_{nm}/A_{nm}. \tag{6.26}$$

Решение (6.25), (6.26), описывающее свободные колебания мембраны, представлено как сумма двумерных стоячих волн $u_{nm}(x, y, t)$ с амплитудами α_{nm} и собственными частотами ω_{nm}. Пространственные профили формы этих стоячих волн определяются собственными функциями $v_{nm}(x, y)$. При этом геометрическое место точек на мембране, в которых собственные функции обращаются в нуль, называют узловыми линиями собственных форм колебаний.

Из выражений (6.24) следует, что при специальной форме начальных возмущений $h(x, y)$ и $g(x, y)$, когда A_{nm} и B_{nm} не равны нулю только при $n = n_1$ и $m = m_1$, можно возбудить колебания в мембране в виде отдельной стоячей волны $\omega_{n_1 m_1}$.

В общем же случае возбуждается множество таких стоячих волн с разными частотами колебаний. Интерференция этих стоячих волн приводит к сложной картине колебаний мембраны.

6.3. Колебания круглой мембраны

Математическая модель свободных колебаний круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем имеет вид следующей *краевой задачи* для определения поперечного смещения $u(r, \varphi, t)$ мембраны:

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},\ t > 0,\ (r, \varphi) \in G; \quad (6.27)$$

$$u(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), \quad \frac{\partial u(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi), \quad (6.28)$$

$$u(r_0, \varphi, t) = 0, \quad u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t). \quad (6.29)$$

Здесь $G = \{(r, \varphi)\colon\ 0 \leqslant r < r_0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$; $h(r, \varphi)$ и $g(r, \varphi)$ – заданные смещения и скорость различных участков мембраны в начальный момент времени соответственно.

Так как точка $r = 0$ является особой точкой уравнения (6.27), то следует потребовать также ограниченности функции u в этой точке в любой момент времени.

Представляя частное решение уравнения (6.27) в виде

$$u(r, \varphi, t) = v(r, \varphi)T(t),$$

после разделения переменных получаем уравнение для функции $T(t)$

$$T''(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0 \quad (6.30)$$

и следующую задачу на собственные значения для функции $v(r, \varphi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0; \\ v(r_0, \varphi) = 0, \quad |v(0, \varphi)| < \infty; \\ v(r, \varphi) = v(r, \varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (6.31)$$

Представив $v(r, \varphi)$ в виде

$$v(r, \varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi),$$

приходим к *задаче Штурма – Лиувилля* с условием периодичности

$$\begin{cases} \Phi''(\varphi) + \nu^2\Phi(\varphi) = 0; \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), \end{cases}$$

которая имеет нетривиальное решение только при $\nu^2 = n^2$, где n – целое число. Этим собственным значениям соответствуют собственные функции вида

$$\Phi_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \tag{6.32}$$

Для определения функции $R(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\lambda - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \tag{6.33}$$

которое следует решать с граничными условиями

$$R(r_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty. \tag{6.34}$$

Если ввести новую переменную $x = \sqrt{\lambda}\, r$, то для функции $y(x) = R(x/\sqrt{\lambda})$ получим дифференциальное уравнение Бесселя n-го порядка

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0,$$

общее решение которого

$$y(x) = A\, \mathcal{J}_n(x) + B\, N_n(x) \tag{6.35}$$

содержит линейно независимые функции Бесселя $\mathcal{J}_n(x)$ и Неймана $N_n(x)$ n-го порядка. Так как функция Неймана $N_n(x)$ неограниченно возрастает по модулю при $x \to 0$, из условия ограниченности в нуле функции y константу B в решении (6.35) следует положить равной нулю.

Теперь, выполняя краевое условие $y(x_0) = 0$, где $x_0 = \sqrt{\lambda} r_0$, получаем трансцендентное уравнение

$$\mathcal{J}_n(\sqrt{\lambda} r_0) = 0$$

для определения собственных значений λ задачи (6.31).

Если через μ_{nm} обозначить m-й корень уравнения $\mathcal{J}_n(\mu) = 0$, то

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{r_0^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6.36}$$

Некоторые значения корней μ_{nm} уравнения $\mathcal{J}_n(\mu) = 0$ приведены в таблице.

Значения μ_{nm}

n	m					
	1	2	3	4	5	6
0	2,405	5,520	8,654	11,794	14,931	18,071
1	3,832	7,016	10,173	13,324	16,471	19,616
2	5,135	8,417	11,620	14,796	17,960	21,117
3	6,380	9,761	13,015	16,223	19,409	22,583

Каждому собственному значению λ_{nm} из (6.36) при $n > 0$ соответствуют две линейно независимые собственые функции задачи (6.31):

$$\tilde{v}_{nm}(r, \varphi) = \mathcal{J}_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\right) \cos n\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$\tilde{\tilde{v}}(r, \varphi) = \mathcal{J}_n\left(\frac{\mu_{nm} r}{r_0}\right) \sin n\varphi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для которых справедливы следующие условия ортогональности:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \widetilde{v}_{nm}(r,\,\varphi)\,\widetilde{v}_{n'm'}(r,\,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq n' \quad \text{или} \quad m \neq m'; \\ ||\widetilde{v}_{nm}||^2 & \text{при} \quad n = n' \quad \text{и} \quad m = m'; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\,\varphi)\,\widetilde{\widetilde{v}}_{n'm'}(r,\,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \neq n' \quad \text{или} \quad m \neq m'; \\ ||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}||^2 & \text{при} \quad n = n' \quad \text{и} \quad m = m'; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0} \widetilde{v}_{nm}(r,\,vf)\,\widetilde{\widetilde{v}}_{n'm'}(r,\,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi = 0.$$

Здесь

$$||\widetilde{v}_{nm}||^2 = \frac{r_0^2}{2}\,\pi\varepsilon_n\,[\mathcal{J}_n'(\mu_{nm})]^2, \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 2, & n = 0; \\ 1, & n > 0; \end{cases}$$

$$||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}^2||^2 = \frac{r_0^2}{2}\,\pi\,[\mathcal{J}_n'(\mu_{nm})]^2.$$

Определив спектр собственных значений λ_{nm}, запишем теперь общее решение уравнения (6.30):

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\,\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\,\sin\omega_{nm}t, \tag{6.37}$$

где $\omega_{nm} = a\sqrt{\lambda_{nm}} = \dfrac{a\mu_{nm}}{r_0}$ – собственные частоты колебаний круглой мембраны с закрепленным краем.

Таким образом, частные решения уравнения (6.27), удовлетворяющие условиям (6.29), имеют вид

$$u_{nm}(r,\,\varphi,\,t) = \widetilde{v}_{nm}(r,\,\varphi)\,(A_{nm}\,\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\,\sin\omega_{nm}t) + \\ + \widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\,\varphi)\,(C_{nm}\,\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\,\sin\omega_{nm}t).$$

Взяв суперпозицию таких решений:

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}u_{nm}(r,\varphi,t)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)\,(A_{nm}\cos\omega_{nm}t+B_{nm}\sin\omega_{nm}t)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)\,(C_{nm}\cos\omega_{nm}t+D_{nm}\sin\omega_{nm}t),\qquad(6.38)$$

выбором коэффициентов A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm} можно удовлетворить начальным условиям (6.28), которые примут форму равенств

$$h(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\{A_{nm}\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)+C_{nm}\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)\};\qquad(6.39)$$

$$g(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\omega_{nm}\{B_{nm}\,\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)+D_{nm}\,\widetilde{\widetilde{v}}(r,\varphi)\}.\qquad(6.40)$$

Умножив (6.39) и (6.40) на $\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)$ и $\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)$ и проинтегрировав полученные соотношения по области G, с учетом условий ортогональности для $\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)$ и $\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)$ получим:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}h(r,\varphi)\,\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=A_{nm}\,||\widetilde{v}_{nm}||^2;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}h(r,\varphi)\,\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=C_{nm}\,||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}||^2;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}g(r,\varphi)\,\widetilde{v}_{nm}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\omega_{nm}\,B_{nm}\,||\widetilde{v}_{nm}||^2;$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{r_0}g(r,\varphi)\,\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\omega_{nm}\,D_{nm}\,||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}||^2.$$

Отсюда находим значения коэффициентов

$$A_{nm} = \frac{1}{||\widetilde{v}_{nm}||^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} h(r,\, \varphi)\, \widetilde{v}_{nm}(r,\, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi;$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}\, ||\widetilde{v}_{nm}||^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} g(r,\, \varphi)\, \widetilde{v}_{nm}(r,\, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi;$$

$$C_{nm} = \frac{1}{||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}||^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} h(r,\, \varphi)\, \widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi;$$

$$D_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}\, ||\widetilde{\widetilde{v}}_{nm}||^2} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} g(r,\, \varphi)\, \widetilde{\widetilde{v}}_{nm}(r,\, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

при которых формула (6.38) определяет решение $u(r,\, \varphi,\, t)$ задачи (6.27) – (6.29) о колебаниях круглой мембраны с закрепленным краем.

6.4. Волновое уравнение для электромагнитных волн

Электромагнитное поле характеризуется напряженностями $\vec{E}(x,\, y,\, z,\, t)$ электрического и $\vec{H}(x,\, y,\, z,\, t)$ магнитного полей. В средах, обладающих дизлектрической ε и магнитной μ проницаемостями, для описания электромагнитного поля можно ввести также вектор электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ и вектор магнитной индукции $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Здесь ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные в единицах СИ.

Уравнения электромагнитного поля в проводящей среде, удельная электропроводность (проводимость) которой равна σ,

в отсутствие объемных электрических зарядов и сторонних токов соответствуют четырем ***уравнениям Максвелла***:

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\vec{D} = 0;\\ &\operatorname{div}\vec{B} = 0;\\ &\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\\ &\operatorname{rot}\vec{H} = \sigma\vec{E} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{6.41}$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением однородных сред с постоянными ε, μ и σ, причем вакуум будет соответствовать случаю $\varepsilon = \mu = 1$ и $\sigma = 0$.

Применив к третьему и четвертому уравнениям (6.41) операцию ротора, получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{H});\\ &\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \sigma\operatorname{rot}E + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{E}). \end{aligned} \tag{6.42}$$

Используя формулу векторного анализа $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$ [VII], из уравнений (6.42) с учетом уравнений (6.41) получаем

$$\begin{aligned} &\Delta\vec{E} = \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2};\\ &\Delta\vec{H} = \sigma\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Из выражений (6.43) следует, что каждая из шести компонент напряженностей электрического и магнитного полей удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.44}$$

где $a = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$; $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 3\cdot 10^8$ м/с; $b = \sigma\mu\mu_0$. Уравнение (6.44) называют многомерным телеграфным уравнением.

В непроводящей среде ($\sigma = 0$) формулы (6.43) принимают вид

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Box\, \vec{E} = 0;$$
$$\Delta \vec{H} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Box\, \vec{H} = 0, \tag{6.45}$$

где $\Box = \Delta - \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ – ***оператор Даламбера***.

Таким образом, для каждой компоненты электромагнитного поля в непроводящей среде получено волновое уравнение

$$\Delta u = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Box\, u = 0. \tag{6.46}$$

Как было показано в 1.2, в случае зависимости u от одной пространственной координаты x, уравнение (6.46) имеет решение в виде плоской монохроматической волны

$$u(x,\, t) = u_0 \cos(\omega t - kx), \quad \omega/k = a$$

или в комплексной форме ($u = \mathrm{Re}\,\widetilde{u}$)

$$\widetilde{u}(x,\, t) = \widetilde{u}_0\, e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Здесь величина $a = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ представляет собой фазовую скорость электромагнитной волны в идеальном изоляторе.

В проводящей среде ($\sigma \neq 0$) непосредственной проверкой можно убедиться, что уравнение (6.44) имеет решение в виде затухающей волны

$$\widetilde{u}(x,\, t) = \widetilde{u}_0\, e^{-\gamma x}\, e^{-i(\omega t - \beta x)}. \tag{6.47}$$

Подставляя решение (6.47) в уравнение (6.44), получаем

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{ba^2}{\omega}\right)^2}+1}{2a^2}}; \quad \gamma = \omega\sqrt{\frac{\sqrt{1+\left(\dfrac{ba^2}{\omega}\right)^2}-1}{2a^2}}. \tag{6.48}$$

Таким образом, проводимость среды приводит к затуханию электромагнитной волны и к изменению ее фазовой скорости распространения.

Исследуем два предельных случая.

1. Проводимость достаточно велика $\left(\dfrac{ba^2}{\omega} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \gg 1\right)$, и плотность тока проводимости $j = \sigma E$ много больше плотности тока смещения $j_{\text{см}} = \varepsilon\varepsilon_0 \dfrac{\partial E}{\partial t}$. Из формул (6.48) в этом приближении "хорошего проводника" имеем

$$\gamma = \beta \simeq \sqrt{\frac{\mu\mu_0\sigma\omega}{2}}.$$

Следовательно, электромагнитное поле проникает в среду с достаточно большой проводимостью лишь на глубину $\delta \approx \gamma^{-1}$. Расстояние δ называют скиновой глубиной проникновения электромагнитного поля в проводник. Оно зависит от частоты изменения электромагнитного поля, уменьшаясь с ростом ω.

Если полностью пренебречь плотностью тока смещения, уравнение (6.44) переходит в уравнение параболического типа

$$\Delta u = \sigma\mu\mu_0 \frac{\partial u}{\partial t}.$$

2. Плотность тока проводимости в среде значительно меньше плотности тока смещения $\left(\dfrac{ba^2}{\omega} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \ll 1\right)$. Из (6.48) находим

$$\gamma \simeq \frac{\sigma}{2}\sqrt{\mu\mu_0/(\varepsilon\varepsilon_0)},$$

$$\beta \simeq \frac{\omega}{a}\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2} \simeq \left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2\right]\frac{\omega}{a}.$$

Таким образом, электромагнитная волна слабо затухает при распространении, а ее фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{\beta} = a\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2\right]^{-1} \simeq a\left[1 - \frac{1}{8}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2\right]$$

несколько меньше, чем в идеальном изоляторе.

При полном пренебрежении током проводимости ($\sigma = 0$) уравнение (6.44) переходит в волновое уравнение (6.46).

Отметим, что параметр $p = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}$, входящий в критерий сравнения токов проводимости и токов смещения, содержит частоту электромагнитной волны. Следовательно, при низких частотах материал может вести себя как проводник, а при высоких – как изолятор. Именно так ведут себя слабопроводящие среды, такие, как почва ($\sigma \sim 10^{-3}$ См/м) или морская вода ($\sigma \sim 1$ См/м).

6.5. Потенциалы электромагнитного поля

Электромагнитное поле можно задавать не только напряженностями $\vec{E}$ и $\vec{H}$, но и двумя потенциалами. Векторный $\vec{A}$ и скалярный φ потенциалы электромагнитного поля вводятся формулами

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A};$$
$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{6.49}$$

с дополнительным условием связи

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mu\mu_0\sigma\varphi = 0, \tag{6.50}$$

которое называют ***условием калибровки Лоренца.***

С учетом (6.49) второе и третье уравнения (6.41) выполняются тождественно. Два других уравнения Максвелла, записанных для однородной среды,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \rho/(\varepsilon\varepsilon_0); \tag{6.51}$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\sigma\vec{E} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\vec{j}^{(c)} \tag{6.52}$$

в общем случае содержат в качестве заданных источников объемную плотность электрических зарядов $\rho(x, y, z, t)$ и плот-

ность тока $\overrightarrow{j^{(c)}}(x, y, z, t)$, обусловленную заданным распределением полей сторонних сил (источников ЭДС).

Чтобы удовлетворить этим двум уравнениям, подставим (6.49) в (6.51) и (6.52). Тогда с учетом формулы $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$ и условия Лоренца (6.50) после несложных преобразований получим уравнения для φ и $\vec{A}$:

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\varepsilon\varepsilon_0}; \\ &\Delta\vec{A} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\mu\mu_0\overrightarrow{j^{(c)}}. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Легко видеть, что скалярный потенциал и все три компоненты векторного потенциала удовлетворяют одинаковым дифференциальным уравнениям вида

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z, t). \tag{6.54}$$

В случае непроводящей среды ($\sigma = 0$) эти уравнения переходят в неоднородные волновые уравнения вида

$$\Delta u - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x, y, z, t) \tag{6.55}$$

или

$$\Box u = f(x, y, z, t).$$

Условие Лоренца (6.50) для такой среды будет таким:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0. \tag{6.56}$$

В некоторых задачах электродинамики, описывающих процесс распространения электромагнитных волн в непроводящих средах, удобно ввести ***поляризационный потенциал***

$\vec{\Pi} = \vec{\Pi}(x, y, z, t)$, который называют также вектором Герца, полагая

$$\vec{A} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}; \quad \varphi = -\operatorname{div}\vec{\Pi}. \tag{6.57}$$

Условие Лоренца (6.56) при этом выполняется тождественно, так как

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{\Pi} + \varphi) = 0.$$

Найдем уравнение для поляризационного потенциала $\vec{\Pi}$ в непроводящей среде при отсутствии сторонних зарядов и токов (распределенных источников ЭДС), т.е. когда уравнение (6.53) для векторного потенциала имеет вид волнового уравнения

$$\Delta\vec{A} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}.$$

Подставляя сюда $\vec{A}$ из (6.57), получаем

$$\Delta\left(\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}\right) - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \vec{\Pi}}{\partial t}\right) = 0, \text{ или } \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\vec{\Pi} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}\right) = 0.$$

Отсюда с точностью до постоянной составляющей, которую мы положим равной нулю, получаем

$$\Delta\vec{\Pi} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0, \tag{6.58}$$

или

$$\Box\,\vec{\Pi} = 0.$$

Таким образом, каждая из трех составляющих вектора $\vec{\Pi}$ удовлетворяет волновому уравнению.

Векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выражаются через поляризационный потенциал с помощью соотношений

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\Pi} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2} =$$

$$= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi} + \left(\Delta\vec{\Pi} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2}\right) = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}; \qquad (6.59)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\mu\mu_0 a^2}\operatorname{rot}\frac{\partial\vec{\Pi}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{\Pi}). \qquad (6.60)$$

Аналогичным образом можно записать магнитный вектор Герца $\vec{\Pi}_м$, считая, что

$$\vec{E} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}_м; \quad \vec{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}_м.$$

Подставив эти соотношения в уравнение Максвелла, можно показать, что в непроводящей среде, когда $\rho = \vec{j}^{(c)} = 0$, вектор $\vec{\Pi}_м$ также удовлетворяет волновому уравнению, аналогичному (6.58). Объединяя эти результаты, будем считать, что с помощью вектора Герца $\vec{\Pi}$, удовлетворяющего волновому уравнению

$$\Delta\vec{\Pi} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\vec{\Pi}}{\partial t^2} = 0,$$

можно получить различные решения уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}; \\ \vec{H} &= \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}, \end{aligned} \qquad (6.61\text{ а})$$

или

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}; \\ \vec{H} &= \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}. \end{aligned} \qquad (6.61\text{ б})$$

6.6. Электромагнитное излучение дипольного осциллятора

Перейдем к расчету электромагнитных волн, излучаемых диполем Герца, который представляет собой два небольших металлических шарика, периодически перезаряжающихся через соединяющий их проводник длиной l. Такой осциллятор представляет собой электрический диполь с периодически изменяющимся электрическим моментом

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t},$$

где $\vec{p}_0 = \dfrac{\mathcal{J}_0}{\omega}\vec{l}$; $\mathcal{J}_0$ – амплитуда тока в проводнике; ω – круговая частота колебаний; $\vec{l}$ – вектор, направленный вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному.

Проведем расчет электромагнитного поля в окружающем такой диполь пространстве, считая его заполненным однородной непроводящей средой, скорость распространения электромагнитных возмущений в которой близка к скорости света в вакууме. Выберем сферическую систему координат, направив полярную ось Oz вдоль оси диполя (рис. 6.3).

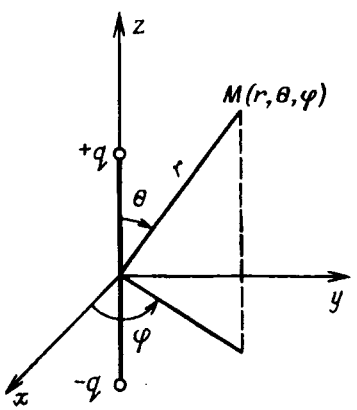


Рис. 6.3

Электромагнитное поле, излучаемое диполем, найдем из сферически симметричного решения волнового уравнения для вектора Герца

$$\Delta \vec{\Pi} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}. \tag{6.62}$$

Каждая компонента потенциала $\vec{\Pi}$ в сферически симметричном случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad t > 0. \tag{6.63}$$

Введем новую функцию $v = r\,u$. Тогда из уравнения (6.63) для функции v получим одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 \leqslant r < \infty, \quad t > 0,$$

общее решение которого [см. формулу (1.9)] имеет вид

$$v = f_1\left(t - \frac{r}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{r}{c}\right).$$

Следовательно, уравнение (6.63) имеет решения

$$u_1(r,\, t) = \frac{f_1\left(t - \dfrac{r}{c}\right)}{r} \quad \text{и} \quad u_2(r,\, t) = \frac{f_2\left(t + \dfrac{r}{c}\right)}{r},$$

которые называют соответственно расходящейся и сходящейся сферическими волнами.

По физическому смыслу рассматриваемой задачи об излучающем диполе следует выделить лишь расходящуюся сферическую волну, записав решение уравнения (6.63) в виде

$$u(r,\, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

или для монохроматической волны

$$u(r,\,t) = \frac{u_0\, e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}.$$

Такое решение соответствует запаздывающему потенциалу, когда возмущение в некоторой точке пространства, отстоящей от источника на расстоянии r, запаздывает на время $\tau = r/c$, необходимое для того, чтобы электромагнитные возмущения преодолели расстояние r.

Поэтому сферически симметричное решение уравнения (6.62) запишем в виде запаздывающего потенциала

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{p_0}}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}, \tag{6.64}$$

выбрав постоянный сомножитель из соображений размерности.

Если ввести обозначения $\vec{i_r}$, $\vec{i_\theta}$ и $\vec{i_\varphi}$ для единичных ортов сферической системы координат, то вектор $\vec{\Pi}$, параллельный вектору $\vec{p_0}$, может быть представлен в виде

$$\vec{\Pi} = \vec{i_r}\,\Pi_0\cos\theta - \vec{i_\theta}\Pi_0\sin\theta,$$

где $\Pi_0 = \Pi_0(r,\,t) = \dfrac{p_0}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}$.

Используя выражение дифференциального оператора $\operatorname{rot}\vec{M}$ в сферической системе координат

$$\operatorname{rot}\vec{M} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot M_\varphi) - \frac{\partial M_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{i_r} +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial M_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rM_\varphi)\right]\vec{i_\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rM_\theta) - \frac{\partial M_r}{\partial\theta}\right]\vec{i_\varphi},$$

получаем

$$\operatorname{rot}\vec{\Pi} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\,\Pi_\theta) - \frac{\partial\Pi_r}{\partial\theta}\right]\vec{i_\varphi} = \left(-\frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r}\right)\Pi_0\sin\theta\,\vec{i_\varphi}.$$

Из соотношений (6.59) и (6.60) следует, что

$$\vec{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi}; \quad \vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{\Pi}.$$

По этим формулам находим напряженности электрического и магнитного полей вокруг диполя:

$$\vec{E} = 2\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r}\right)\Pi_0\,\vec{i_r} + \\ + \sin\theta\left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0\,\vec{i_\theta}; \qquad (6.65)$$

$$\vec{H} = c\varepsilon_0\sin\theta\left(-\frac{ik}{r} - k^2\right)\Pi_0\,\vec{i_\varphi}.$$

Здесь $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ – волновое число.

Анализ полученных выражений показывает, что характер электромагнитного поля вокруг диполя качественно отличается на малых и больших расстояниях. Наибольший интерес представляет дальнее поле, которое наблюдается на больших расстояниях от излучателя диполя. Эту зону, где $kr \gg 1$ или $r \gg \lambda$, называют волновой зоной дипольного осциллятора. В этой зоне

$$E_r = E_\varphi = 0; \quad E_\theta = -k^2\Pi_0\sin\theta;$$
$$H_r = H_\theta = 0; \quad H_\varphi = -\varepsilon_0 c k^2\,\Pi_0\sin\theta.$$

Переходя от комплексных экспонент к тригонометрическим функциям, запишем окончательно электромагнитное поле в волновой зоне:

$$E_\theta = -\frac{\omega^2 p_0}{c^2 4\pi\varepsilon_0 r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right);$$
$$H_\varphi = -\frac{\omega^2 p_0}{c 4\pi r}\sin\theta\cos\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \qquad (6.66)$$

Найденное поле в волновой зоне имеет характерные признаки сферической волны:

1) векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны радиальному направлению распространения волны (поперечная волна) и ортогональны между собой;

2) волны электрического и магнитного полей имеют одинаковые фазы, амплитуды этих волн убывают обратно пропорционально расстоянию до источника, причем существует связь между амплитудами волн: $|\vec{E}| = z_c|\vec{H}|$, где $z_c = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = c\mu_0 = 120\pi$ Ом – волновое сопротивление свободного пространства.

Плотность потока энергии электромагнитного поля, переносимого в радиальном направлении, найдем, вычислив модуль вектора Пойнтинга

$$S = E_\theta H_\varphi = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right). \qquad (6.67)$$

Усреднив плотность потока энергии по времени, найдем интенсивность излучения сферической электромагнитной волны

$$I = \langle S\rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta.$$

Зависимость интенсивности от угла θ наглядно показывает диаграмма направленности (рис. 6.4), которую строят так, чтобы длина отрезка, отсекаемого на луче, проведенном из центра диполя, была пропорциональна интенсивности излучения I под углом θ.

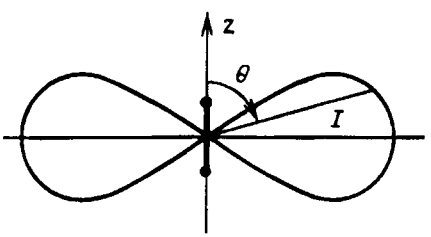


Рис. 6.4

Суммарную среднюю (за один период колебаний) мощность излучения дипольного излучателя определим, проинтегрировав интенсивность I по сфере достаточно большого радиуса ($r \gg \lambda$). Получим

$$P = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3}\,\frac{8\pi}{3} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}. \quad (6.68)$$

Преобразуем формулу мощности излучения, выразив дипольный момент излучателя p_0 через эффективное значение силы тока $\tilde{\jmath}$ в нем:

$$p_0 = \frac{\jmath_0 l}{\omega} = \frac{\sqrt{2}\,\tilde{\jmath}\, l}{\omega}.$$

Тогда из выражения (6.68) следует

$$P = \frac{\omega^2 \tilde{\jmath}^2 l^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} =$$

$$= \frac{4\pi}{6}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tilde{\jmath}^2 = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \tilde{\jmath}^2, \quad l \ll \lambda. \quad (6.69)$$

Формулу (6.69) можно использовать в инженерных расчетах мощности излучения антенн. Если (6.69) записать в стандартной форме $P = \tilde{\jmath}^2 R_{\text{изл}}$, то можно определить сопротивление излучения антенны

$$R_{\text{изл}} = 80\pi^2\left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (l \ll \lambda),$$

которое пропорционально квадрату отношения длины антенны к длине излучаемой волны.

6.7. Распространение электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе

В различных радиотехнических устройствах приходится решать задачу о передаче энергии с помощью ***электромагнитных СВЧ-волн***, распространяющихся в полых металлических трубах – волноводах.

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль цилиндрического волновода с идеально проводящими стенками, заполненного непроводящей средой, для которой $\varepsilon = \mu = 1$, т.е. $a = c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Введем следующие обозначения: z – направление вдоль волновода, Σ – поверхность волновода, S – поперечное сечение, Γ – контур, ограничивающий сечение.

Математическая теория распространения электромагнитных волн в волноводе может быть построена на решении волнового уравнения для поляризационного потенциала

$$\Delta \vec{\Pi} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \vec{\Pi}}{\partial t^2}. \tag{6.70}$$

Считая, что вектор Герца $\vec{\Pi}$ имеет только компоненту Π_z, преобразуем уравнение (6.70) для этой компоненты применительно к случаю монохроматической волны с частотой ω, т.е. когда

$$\Pi_z = \Pi(x, y, z)\, e^{-i\omega t}. \tag{6.71}$$

Подставляя (6.71) в уравнение (6.70), получаем

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0, \quad k = \omega / c,$$

или

$$\Delta_2 \Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi = 0, \tag{6.72}$$

где Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

Как отмечалось выше [см. формулы (6.61)], с помощью вектора Герца $\vec{\Pi}$ можно описать два типа электромагнитных волн.

Для электрической E-волны типа TM (поперечная магнитная) компоненты электромагнитного поля выражаются через $\vec{\Pi}$ по формулам (6.61 а). В такой волне отсутствует продольная составляющая магнитного поля ($H_z = 0$), т.е. магнитное поле поперечное (*англ.* transverse). Формулы (6.61 б) определяют компоненты электромагнитного поля в магнитной H-волне типа TE (поперечная электрическая), для которой отсутствует продольная составляющая электрического поля ($E_z = 0$). Электрическое поле в такой волне поперечно.

Ограничимся рассмотрением электромагнитных TM-волн в волноводе. Для волн такого типа условие отсутствия тангенциальной составляющей электрического поля на идеально проводящей поверхности волновода задают как условие равенства нулю продольной составляющей вектора $\vec{\Pi}$:

$$\Pi|_{\Sigma} = 0. \tag{6.73}$$

Решение уравнения (6.72) ищем в виде

$$\Pi(x,\, y,\, z) = U(x,\, y)\, f(z). \tag{6.74}$$

Подставляя (6.74) в уравнение (6.72), после разделения переменных получаем

$$-\frac{\Delta_2 U}{U} = \frac{\dfrac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f}{f} = \lambda = \text{const}. \tag{6.75}$$

Отсюда с учетом условия (6.73) получаем задачу на собственные значения

$$\begin{cases} \Delta_2 U + \lambda U = 0, & (x,\, y) \in S; \\ U|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{6.76}$$

Задача (6.76) аналогична задаче о собственных колебаниях упругой мембраны, закрепленной по контуру Г. Это позволяет использовать результаты ее решения для определения собственных значений, зависящих от двух целочисленных параметров n и m, и соответствующих им собственных функций $U_{nm}(x,\, y)$ задачи (6.76) для контуров правильной формы.

Например, для волновода прямоугольного сечения со сторонами l_1 и l_2

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{l_1^2} + \frac{m^2}{l_2^2}\right), \quad m = 1, 2, \ldots; \quad n = 1, 2, \ldots;$$
$$U_{nm}(x, y) = A \sin\frac{n\pi x}{l_1} \sin\frac{m\pi y}{l_2}, \quad A = \text{const}. \tag{6.77}$$

Для волновода круглого сечения радиуса r_0 при соответствующем выборе полярного угла φ

$$\lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{r_0^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots;$$
$$U_{nm}(r, \varphi) = A\, \mathcal{J}_n\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right) \cos n\varphi, \quad A = \text{const}. \tag{6.78}$$

Здесь μ_{nm} представляет собой m-й корень уравнения $\mathcal{J}_n(\mu) = 0$.

Формула (6.78) выделяет четные по углу φ электромагнитные возмущения. В общем случае эта формула может быть записана как суперпозиция четных ($\cos n\varphi$) и нечетных ($\sin n\varphi$) возмущений.

Теперь из формулы (6.75) для функции $f(z)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \gamma_{nm}^2 f = 0, \quad \gamma_{nm} = \sqrt{k^2 - \lambda_{nm}},$$

общее решение которого

$$f(z) = C\, e^{i\gamma_{nm} z} + D\, e^{-i\gamma_{nm} z}$$

соответствует двум волнам, бегущим в положительном или отрицательном направлениях оси Oz.

Выделяя для определенности волну, бегущую в положительном направлении оси Oz, запишем выражение для z-й составляющей вектора Герца

$$\Pi_z(x, y, z, t) = U_{nm}(x, y)\, e^{-i(\omega t - \gamma_{nm} z)}, \quad \omega > c\sqrt{\lambda_{nm}}. \tag{6.79}$$

Соотношение (6.79) соответствует бегущей электромагнитной TM_{nm}-волне с частотой ω, распространяющейся с фазовой скоростью $v_ф = \omega/\gamma_{nm}$ и имеющей длину волны $\Lambda = 2\pi/\gamma_{nm} = 2\pi c/\sqrt{\omega^2 - c^2\lambda_{nm}}$.

При $\omega < c\sqrt{\lambda_{nm}}$ $(k^2 < \lambda_{nm})$ величина $\gamma_{nm} = i\delta_{nm}$, где $\delta_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm} - k^2}$, становится чисто мнимой. Соответствующее решение

$$\Pi_z(x, y, z, t) = U_{nm}(x, y)\, e^{-\delta_{nm} z}\, e^{-i\omega t}$$

описывает затухающую волну.

Таким образом, бегущая TM_{nm}-волна, распространяющаяся в волноводе, не может иметь частоту, меньшую некоторой критической, равной $\omega^*_{nm} = c\sqrt{\lambda_{nm}}$. Так как первое собственное значение задачи (6.76) является минимальным собственным, в волноводе не могут распространяться электромагнитные волны с частотами, меньшими $\omega^* = c\sqrt{\lambda_{\min}}$. Для волноводов с прямоугольным и круглым сечениями критические частоты соответственно равны:

$$\omega^* = c\pi\sqrt{\frac{1}{l_1^2} + \frac{1}{l_2^2}};$$

$$\omega^* = c\,\frac{2,405}{r_0},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Из этих формул следует, что передавать энергию по волноводу, поперечный размер которого составляет несколько сантиметров, можно только с помощью электромагнитных волн высокой частоты (СВЧ-волны).

Выражение (6.79) для осевой составляющей вектора Герца позволяет с помощью формул (6.61 а) найти компоненты электрического и магнитных полей в волноводе при распространении в нем электромагнитной TM-волны. Так, для волновода с

круглым сечением, используя выражение для дифференциального оператора $\operatorname{rot}\vec{M}$ в цилиндрической системе координат

$$\operatorname{rot}\vec{M} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial M_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial z}\right)\vec{i_r} + \\ + \left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right)\vec{i_\varphi} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rM_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial M_r}{\partial\varphi}\right]\vec{i_z},$$

получаем

$$\operatorname{rot}\vec{\Pi} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Pi_z}{\partial\varphi}\vec{i_r} - \frac{\partial\Pi_z}{\partial r}\vec{i_\varphi};$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{\Pi} = \frac{\partial^2\Pi_z}{\partial z\partial r}\vec{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\varphi\partial z}\vec{i_\varphi} - \Delta_2\Pi_z\vec{i_z} = \\ = \frac{\partial^2\Pi_z}{\partial z\partial r}\vec{i_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial\varphi\partial z}\vec{i_\varphi} + \left(\frac{\partial^2\Pi_z}{\partial z^2} + k^2\Pi_z\right)\vec{i_z}.$$

Теперь с учетом (6.79) при помощи формул (6.61 а) находим:

$$E_r = A\frac{\mu_{nm}\gamma_{nm}}{r_0}\mathcal{J}_n'\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)\cos n\varphi\, e^{-i(\omega t-\gamma_{nm}z-\pi/2)};$$

$$E_\varphi = A\frac{n\gamma_{nm}}{r}\mathcal{J}_n\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)\sin n\varphi\, e^{-i(\omega t-\gamma_{nm}z+\pi/2)};$$

$$E_z = A\frac{\mu_{nm}^2}{r_0^2}\mathcal{J}_n\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)\cos n\varphi\, e^{-i(\omega t-\gamma_{nm}z)};$$

$$H_r = \varepsilon_0 A\frac{n\omega}{r}\mathcal{J}_n\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)\sin n\varphi\, e^{-i(\omega t-\gamma_{nm}z-\pi/2)};$$

$$H_\varphi = \varepsilon_0 A\frac{\mu_{nm}\omega}{r_0}\mathcal{J}_n'\left(\mu_{nm}\frac{r}{r_0}\right)\cos n\varphi\, e^{-i(\omega t-\gamma_{nm}z+\pi/2)};$$

$$H_z = 0.$$

Переход к действительным выражениям в этих формулах следует осуществлять с помощью замены комплексных экспонент вида $e^{-i\alpha}$ на $\cos\alpha$.

При расчетах частота волны задается частотой генератора, возбуждающего электромагнитную волну в волноводе, а

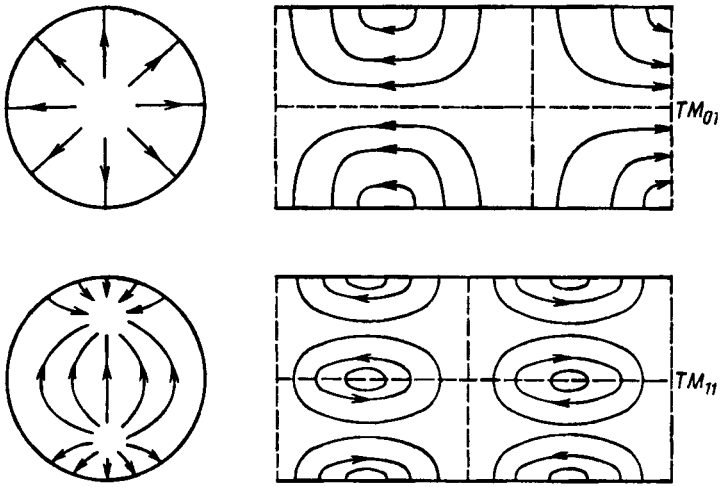


Рис. 6.5

постоянная A определяется передаваемой мощностью, которая пропорциональна A^2. Величину μ_{nm} находим как m-й нуль функции Бесселя n-го порядка.

Для наглядности на рис. 6.5 изображена пространственная структура силовых линий электрического поля для TM-волн двух типов в круглом волноводе.

Вопросы и задачи

6.1. Найдите поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные начальным отклонением

$$u(x, y, 0) = Axy\,(l_1 - x)\,(l_2 - y).$$

Ответ: $u(x, y, t) = \dfrac{64A}{l_1 l_2} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin \gamma_m x \sin \gamma_n y}{\gamma_m^3\, \gamma_n^3} \cos\left(at\sqrt{\gamma_m^2 + \gamma_n^2}\right)$, где $\gamma_m = \dfrac{(2m+1)\pi}{l_1}$, $\gamma_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{l_2}$.

6.2. Найдите поперечные колебания прямоугольной мембраны $0 \leqslant x \leqslant l_1$, $0 \leqslant y \leqslant l_2$ с закрепленным краем, вызванные сосредоточенным импульсом K, сообщенным мембране в точке (x_0, y_0).

Ответ:

$$u(x, y, t) = \frac{4K}{a\rho_0 l_1 l_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\delta_m x_0 \sin\delta_m x \sin\delta_n y_0 \sin\delta_n y}{\sqrt{\delta_m^2 + \delta_n^2}} \times$$

$$\times \sin(at\sqrt{\delta_m^2 + \delta_n^2}),$$

где $\delta_m = \dfrac{m\pi}{l_1}$; $\delta_n = \dfrac{n\pi}{l_2}$.

6.3. Найдите поперечные колебания круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем, вызванные равномерно распределенным давлением p_0, действующим на одну сторону мембраны с момента времени $t = 0$. Начальное отклонение мембраны считать равным нулю.

Ответ: $u(r, t) = \dfrac{p_0}{\rho_0 a^2}\left[\dfrac{r_0^2 - r^2}{4} - 2r_0^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\mu_n^2\, \mathcal{J}_1(\mu_n)} \cos\dfrac{a\mu_n t}{r_0}\right]$, где μ_n – положительные корни уравнения $\mathcal{J}_0(\mu) = 0$.

6.4. Опишите вынужденные колебания круглой мембраны радиуса r_0 с закрепленным краем, вызванные равномерно распределенным давлением $p = p_0 \sin\omega t$, действующим с момента времени $t = 0$ на одну сторону мембраны, в отсутствие резонанса. Начальное отклонение мембраны считать равным нулю.

Ответ:

$$u(r, t) = \frac{p_0}{\omega^2\rho_0}\left\{\frac{\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\omega r}{a}\right)}{\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\omega r_0}{a}\right)} - 1\right\} \sin\omega t +$$

$$+ \frac{2ap_0\omega r_0}{\rho_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathcal{J}_0\left(\dfrac{\mu_n r}{r_0}\right)}{\omega_n^2(\omega^2 - \omega_n^2)\, \mathcal{J}_1(\mu_n)} \sin\omega_n t,$$

где μ_n – положительные корни уравнения $\mathcal{J}_0(\mu) = 0$, а $\omega \neq \omega_n = \dfrac{a\mu_n}{r_0}$.

6.5. Определите критическую частоту волновода прямоугольного сечения со сторонами l_1 и l_2 для *TE*-волн, когда вместо условия (6.73) следует выполнить условие $\left.\dfrac{\partial\Pi}{\partial\nu}\right|_{\Sigma} = 0$.

Ответ: $\omega^* = \dfrac{c\pi}{l_m}$, где $l_m = \max\{l_1, l_2\}$.

7. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ОПИСАНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ЧАСТИЦ

7.1. Волновая функция

В нерелятивистской квантовой механике состояние частицы определяется заданием ***волновой функции*** $\Psi(x, y, z, t)$, зависящей от пространственных координат и времени. В общем случае ***волновая функция*** является комплексной функцией действительных аргументов, а ее квадрат модуля в любой момент времени определяет плотность вероятности $\omega = dP/dV$ нахождения частицы в данной точке пространства:

$$\frac{dP}{dV} = |\Psi(x, y, z, t)|^2. \tag{7.1}$$

Из этого определения следует, что вероятность P обнаружить частицу в некотором объеме пространства V в любой момент времени t можно рассчитать по формуле

$$P = \iiint\limits_V |\Psi(x, y, z, t)|^2 \, dV. \tag{7.2}$$

Учитывая, что $|\Psi|^2 = \Psi\,\Psi^*$, где Ψ^* – функция, комплексно сопряженная к Ψ, соотношение (7.2) можно записать так:

$$P = \iiint\limits_V \Psi\,\Psi^* \, dV.$$

Отсюда вытекает условие нормировки волновой функции

$$\iiint\limits_{V\to\infty} \Psi\,\Psi^* \, dV = 1. \tag{7.3}$$

Волновая функция должна удовлетворять некоторым условиям регулярности, вытекающим из ее физического смысла.

Она должна быть однозначной функцией своих переменных, непрерывной вместе со своими частными производными по пространственным переменным и квадратично интегрируемой в любой области пространства. Последнее условие, в частности, требует стремления волновой функции к нулю на бесконечности.

Эволюция во времени волновой функции, которая описывает квантовое состояние частицы массой m, движущейся в силовом поле $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U$, задаваемом потенциалом U, определяется дифференциальным ***уравнением Шредингера*** в частных производных

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi. \tag{7.4}$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; $\hbar = h/(2\pi)$ – рационализированная постоянная Планка; Δ – оператор Лапласа.

Вследствие наличия мнимой единицы в *уравнении Шредингера*, т.е. в связи с комплекснозначностью волновой функции, уравнение (7.4) фактически представляет собой систему двух уравнений для действительной и мнимой частей волновой функции.

В стационарных задачах квантовой механики, когда потенциал не зависит от времени и функция $U(x, y, z)$ определяет потенциальную энергию частицы в данной точке стационарного силового поля, полная энергия частицы E не изменяется со временем. В таких задачах волновая функция всегда имеет вид

$$\Psi(x, y, z, t) = e^{-\frac{iE}{\hbar}t}\,\psi(x, y, z). \tag{7.5}$$

При этом координатную часть волновой функции $\psi(x, y, z)$, которую в стационарных задачах часто называют волновой функцией, следует находить, решая уравнение Шредингера для стационарных состояний:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U(x, y, z)\,\psi = E\,\psi. \tag{7.6}$$

Это уравнение можно записать также в форме

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - U(x, y, z)\right]\psi = 0. \tag{7.7}$$

Волновая функция должна удовлетворять указанным выше условиям регулярности. Эти условия обычно выступают в качестве граничных условий при формулировке задач для уравнения Шредингера. Несколько примеров решения стационарных задач квантовой механики приведены ниже.

7.2. Задача о гармоническом осцилляторе в квантовой механике

Одномерным линейным гармоническим осциллятором назовем частицу массой m, на которую действует квазиупругая сила $F_x = -kx$, где $k = \text{const} > 0$ – коэффициент упругости (жесткости).

Потенциальная энергия частицы в таком силовом поле

$$U(x) = k\,x^2/2.$$

В классической механике осциллятор совершает гармонические колебания

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$.

Полная энергия E осциллятора в классической механике определяется амплитудой A колебаний и может принимать любые значения $E = k\,A^2/2$. Говорят, что спектр энергии классического осциллятора непрерывен.

В квантовой механике для определения квантовых состояний одномерного осциллятора необходимо решить уравнение Шредингера для стационарных состояний (7.7) в виде

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left[E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right]\psi = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{7.8}$$

Решение этого уравнения $\psi = \psi(x)$ будем искать в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$\psi \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{7.9}$$

Для решения уравнения (7.8) введем безразмерные величины ξ и ε, такие, что $\xi = x/x_0$, $x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$, $\varepsilon = 2E/(\hbar\omega)$. Тогда после элементарных преобразований для функции $\psi = \psi(\xi)$ получим уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\varepsilon - \xi^2)\,\psi = 0, \quad -\infty < \xi < +\infty. \tag{7.10}$$

Сделаем теперь подстановку

$$\psi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} f(\xi). \tag{7.11}$$

Подставив (7.11) в уравнение (7.10), приходим к уравнению для функции $f(\xi)$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi\,\frac{df}{d\xi} + 2nf = 0, \tag{7.12}$$

где $2n = \varepsilon - 1$.

Будем искать решение этого уравнения в виде ряда

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \tag{7.13}$$

Формально дифференцируя ряд (7.13), находим

$$\frac{df}{d\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, a_k \xi^{k-1};$$

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k\,(k-1)\, a_k \xi^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\,(k+1)\, a_{k+2} \xi^k.$$

Подставляя эти ряды в уравнение (7.12), получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)\,(k+2)\, a_{k+2} + 2(n-k)\, a_k]\, \xi^k = 0. \tag{7.14}$$

Для тождественного выполнения этого равенства необходимо, чтобы коэффициенты при ξ^k обращались в нуль. Отсюда получаем рекуррентное соотношение

$$a_{k+2} = -\frac{2(n-k)}{(k+1)(k+2)}\,a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.15}$$

которое связывает коэффициенты ряда (7.13) при степенях одинаковой четности.

Анализ показывает, что бесконечный ряд (7.13), коэффициенты которого удовлетворяют соотношению (7.15), при $\xi \to \infty$ ведет себя как экспоненциально растущая функция e^{ξ^2}.

Действительно, для достаточно больших значений k из соотношения (7.15) следует, что

$$a_{k+2}/a_k \simeq 2/k.$$

Но именно такая связь имеет место между коэффициентами разложения в степенной ряд Тейлора функции

$$e^{\xi^2} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\xi^{2s}}{s!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\xi^k.$$

Для этого разложения при больших значениях индекса k

$$a_{k+2} = \frac{2}{k+2}\,a_k \simeq \frac{2}{k}\,a_k.$$

Таким образом, с учетом подстановки (7.11) получен вывод о том, что условие (7.9) может быть выполнено только тогда, когда ряд (7.13) будет содержать конечное число членов. В таком случае ряд (7.13) как полином конечной степени будет иметь лишь степенной рост на бесконечности, и функция $\psi(\xi)$, определяемая формулой (7.11), будет обращаться в нуль при $|\xi| \to \infty$.

Ряд (7.13) становится полиномом конечной степени, если параметр задачи

$$n = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{2} = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$$

принимает только целые неотрицательные значения $n = 0, 1, 2, \ldots$ В этом случае из (7.15) следует, что для $k > n$ все $a_k = 0$, и ряд (7.13) представляет собой полином n-й степени. Отсюда получаем условие квантования энергии осциллятора

$$E_n = \hbar\omega\,(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{7.16}$$

Полученный вывод согласуется с теорией специальных функций, где показано, что уравнение

$$\frac{d^2 H_n}{d\xi^2} - 2\xi\,\frac{dH_n}{d\xi} + 2n\,H_n = 0 \tag{7.17}$$

имеет нетривиальные решения $H_n(\xi)$, обращающиеся в бесконечность не быстрее конечной степени, только при целых значениях параметра $n = 0, 1, 2, \ldots$ Эти решения, являющиеся собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля для самосопряженного дифференциального оператора (см. Приложение 2), называют ***полиномами Чебышева – Эрмита***.

Полиномы Чебышева – Эрмита можно находить из соотношения

$$H_n(\xi) = (-1)^n\, e^{\xi^2}\,\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}$$

или по рекуррентной формуле

$$H_{n+1}(\xi) - 2\xi\,H_n(\xi) + 2n\,H_{n-1}(\xi) = 0.$$

Эти полиномы удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,H_n(\xi)\,H_m(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n; \\ \|H_n\|^2 = 2^n\sqrt{\pi}\,n! & \text{при} \quad m = n. \end{cases}$$

Итак, решения уравнения (7.10), обращающиеся в нуль при $|\xi| \to \infty$, существуют лишь при $\varepsilon = 2n + 1$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ Их можно записать в виде

$$\psi_n(\xi) = c_n\,\frac{H_n(\xi)}{\|H_n\|}\,e^{-\frac{\xi^2}{2}}. \tag{7.18}$$

Коэффициенты c_n найдем из условия нормировки волновой функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\psi_n(x)|^2\, dx = 1,$$

которое после перехода к безразмерной координате $\xi = x/x_0$ примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(\xi)\, d\xi = 1/x_0, \quad x_0 = \sqrt{\hbar/(m\omega)}\,.$$

Подставляя сюда $\psi_n(\xi)$ в форме (7.18), находим

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{x_0}} = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/4}. \tag{7.19}$$

Пользуясь формулами (7.18) и (7.19), выпишем несколько нормированных волновых функций, описывающих состояния одномерного квантового осциллятора:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2x_0^2}};$$

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0\sqrt{\pi}}}\, \frac{2x}{x_0}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2x_0^2}};$$

$$\psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0\sqrt{\pi}}} \left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}.$$

Качественный вид этих волновых функций изображен на рис. 7.1.

Рассмотрим теперь трехмерный осциллятор, у которого собственные частоты ω_1, ω_2 и ω_3 в трех взаимно перпендикулярных направлениях различны. Потенциальная энергия частицы в такой задаче имеет вид

$$U(x, y, z) = \frac{m\omega_1^2}{2}\, x^2 + \frac{m\omega_2^2}{2}\, y^2 + \frac{m\omega_3^2}{2}\, z^2.$$

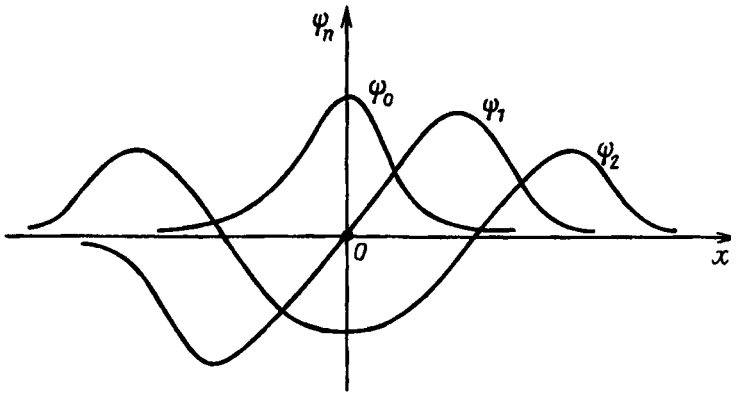


Рис. 7.1

Запишем уравнение Шредингера в такой стационарной задаче для волновой функции $\psi = \psi(x, y, z)$, описывающей квантовое состояние трехмерного осциллятора:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \\ + \frac{m}{2}\left(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2\right)\psi = E\psi. \quad (7.20)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит от одной координаты:

$$\psi(x, y, z) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\psi_3(z). \quad (7.21)$$

Подставляя (7.21) в уравнение (7.20) и разделяя переменные, получаем

$$\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E_i - \frac{m\omega_i^2 x_i^2}{2}\right)\psi_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.22)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $E = E_1 + E_2 + E_3$.

Сравнив уравнения (7.22) и (7.8), замечаем, что для каждого значения индекса $i = 1, 2, 3$ задача свелась к одномерной,

решенной выше. Поэтому с учетом (7.18) волновую функцию (7.21) можно записать в виде

$$\psi_{n_1,n_2,n_3}(x_1,\, x_2,\, x_3) = \\ = C\, e^{-\frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}{2}}\, H_{n_1}(\xi_1)\, H_{n_2}(\xi_2)\, H_{n_3}(\xi_3), \qquad (7.23)$$

где $\xi_i = \sqrt{\dfrac{m\omega_i}{\hbar}}\, x_i$. Три квантовых числа n_1, n_2, и n_3, каждое из которых может принимать любое значение из ряда целых неотрицательных чисел, определяют квантовое состояние трехмерного осциллятора.

Константу C в выражении (7.23) найдем из условия нормировки волновых функций

$$\iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi^2_{n_1,n_2,n_3}(x_1,\, x_2,\, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = 1. \qquad (7.24)$$

Подставив сюда волновую функцию из формулы (7.23), после несложных вычислений получим

$$C = \left(\frac{m^3\omega_1\omega_2\omega_3}{\hbar^3\pi^3}\right)^{1/4} \left(\frac{2^{-(n_1+n_2+n_3)}}{n_1!\, n_2!\, n_3!}\right)^{1/2}.$$

Полная энергия частицы в рассматриваемом квантовом состоянии

$$E = \hbar\omega_1\,(n_1 + 1/2) + \hbar\omega_2\,(n_2 + 1/2) + \hbar\omega_3\,(n_3 + 1/2). \qquad (7.25)$$

Эта формула определяет дискретный энергетический спектр трехмерного квантового осциллятора.

7.3. Квантовые состояния атома водорода

В атоме водорода отрицательно заряженный электрон массой μ движется в кулоновском поле положительно заряженного ядра протона. В таком электростатическом поле потенциаль-

ная энергия электрона зависит от расстояния r электрона от ядра (протона) и равна

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Предполагая ядро атома неподвижным, свяжем с ним центр сферической системы координат (r, θ, φ). Тогда уравнение Шредингера, описывающее квантовое состояние электрона в поле ядра, будет иметь вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}\psi + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\psi = 0. \qquad (7.26)$$

Здесь $\Delta_{\theta,\varphi}$ – угловая часть оператора Лапласа, определяемая соотношением

$$\Delta_{\theta,\varphi}\psi = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}.$$

Наша задача состоит в отыскании во всей области изменения переменных $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ таких однозначных и непрерывных решений $\psi = \psi(r, \theta, \varphi)$ уравнения (7.26), которые удовлетворяют условию нормировки

$$\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} |\psi(r, \theta, \varphi)|^2\, dV = 1, \qquad (7.27)$$

где $dV = r^2\, dr\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ – элемент объема в сферической системе координат.

Искомое решение определим методом разделения переменных, полагая

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)\, Y(\theta, \varphi).$$

После подстановки этого выражения в уравнение Шредингера (7.26) получим

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)r^2 = -\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y} = \lambda.$$

Отсюда вытекают следующие два уравнения:

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y + \lambda Y = 0; \tag{7.28}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)R - \lambda\frac{R}{r^2} = 0. \tag{7.29}$$

В теории специальных функций решение уравнения (7.28), удовлетворяющее условию ограниченности во всей области изменения угловых переменных и условию периодичности $Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi)$ по циклической переменной φ, называют сферическими или шаровыми функциями. Такие решения $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ существуют у уравнения (7.28) только при определенных собственных значениях параметра $\lambda = l(l+1)$, причем в квантовой теории атома водорода неотрицательное целое число $l = 0, 1, 2, \ldots$ называют азимутальным квантовым числом.

Каждому значению l соответствует $2l + 1$ сферических функций

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = C\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}, \tag{7.30}$$

каждая из которых определяется значением магнитного квантового числа $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$.

Входящий в выражение (7.30) для сферических функций сомножитель $P_l^{|m|}(\cos\theta)$ называют ***присоединенной функцией Лежандра*** m-го порядка. Эта специальная функция является ограниченным в точках $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ решением дифференциального уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m}{d\theta}\right) + \\ + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m(\cos\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \tag{7.31}$$

Здесь $l = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, \ldots, l$.

Если ввести новую переменную $x = \cos\theta$, то уравнение (7.31) можно записать для функции $P_l^m(x)$ в виде

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_l^m}{dx}\right]+ \\ +\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x)=0, \quad -1\leqslant x\leqslant 1. \quad (7.32)$$

Присоединенные функции Лежандра $P_l^m(x)$ выражаются через полиномы Лежандра $P_l(x)$ по формуле

$$P_l^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^mP_l(x)}{dx^m}, \quad m\leqslant l.$$

Отсюда, в частности, находим $P_l^0(x)=P_l(x)$.

Присоединенные функции Лежандра образуют ортогональную систему функций, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_l^m(x)\,P_n^m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad n\neq l;$$

$$\int\limits_{-1}^{+1}P_l^m(x)\,P_l^m(x)\,dx=\frac{2}{2l+1}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Коэффициент C в формуле (7.30) можно выбрать равным

$$C=\sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}},$$

чтобы ***сферические функции*** $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ были ортонормированы на поверхности шара, т.е. удовлетворяли условию

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}Y_{lm}^*(\theta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\theta,\,\varphi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi= \\ =\begin{cases}0 & \text{при} \quad l'\neq l \quad \text{или} \quad m'\neq m;\\ 1 & \text{при} \quad l'=l \quad \text{и} \quad m'=m.\end{cases}$$

Приведем явные формулы для нескольких первых нормированных сферических функций:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta; \quad Y_{1,\pm1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1); \quad Y_{2,\pm1} = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\,\cos\theta\, e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm i\,2\varphi}; \quad Y_{3,0} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}\cos\theta\,(5\cos^2\theta - 3),$$

Найдем теперь решение дифференциального уравнения для радиальной части $R(r)$ волновой функции. Полагая в уравнении (7.29) $\lambda = l\,(l+1)$, где $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, запишем его в виде

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)R - \frac{l\,(l+1)}{r^2}R = 0. \qquad (7.33)$$

Перейдем в уравнении (7.33) к безразмерным величинам

$$\rho = r/a, \quad \varepsilon = -E/W \ \ (\varepsilon > 0), \qquad (7.34)$$

выбрав в качестве характерного размера радиус первой боровской орбиты электрона

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2},$$

а в качестве характерной энергии – величину

$$W = \frac{1}{2}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} = \frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}. \qquad (7.35)$$

Тогда уравнение (7.33) примет вид

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho} + \left(\frac{2}{\rho} - \varepsilon - \frac{l\,(l+1)}{\rho^2}\right)R = 0. \qquad (7.36)$$

Решение уравнения (7.36) следует искать в форме произведения двух функций:

$$R(\rho) = e^{-\beta\rho}\,u(\rho), \quad \beta = \sqrt{\varepsilon}. \qquad (7.37)$$

Подставив $R(\rho)$ из (7.37) в уравнение (7.36), находим уравнение для новой искомой функции $u(\rho)$. После несложных вычислений получаем

$$\frac{d^2u}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{du}{d\rho}(1-\beta\rho) + \left[\frac{2(1-\beta)}{\rho} - \frac{l\,(l+1)}{\rho^2}\right]u = 0. \qquad (7.38)$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда

$$u(\rho) = \rho^l \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,\rho^{k+l}. \qquad (7.39)$$

Для нахождения коэффициентов ряда a_k подставим (7.39) в (7.38) и соберем члены с одинаковой степенью ρ. Такая подстановка дает

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{a_{k+1}[(k+l+2)\,(k+l+1) - l\,(l+1)] + \\ + a_k[2 - 2\beta\,(k+l+1)]\,\}\,\rho^k = 0. \qquad (7.40)$$

Чтобы ряд (7.39) был решением уравнения (7.38) для любого значения ρ, коэффициенты при каждой степени ρ в уравнении (7.40) должны быть равны нулю. Это дает следующее рекуррентное соотношение для коэффициентов ряда (7.39):

$$a_{k+1} = \frac{2\beta\,(k+l+1) - 2}{(k+l+2)\,(k+l+1) - l\,(l+1)}\,a_k, \qquad (7.41)$$
$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Однородность уравнения (7.38) позволяет первый коэффициент a_0 выбрать произвольным. Затем по формуле (7.41) вычислить a_1, по a_1 найти a_2 и т.д. Вычисляя таким образом все коэффициенты a_k, получаем искомое решение уравнения (7.38) в виде ряда (7.39) по степеням ρ.

Из (7.41) следует, что для достаточно больших значений k связь между коэффициентами ряда имеет вид $a_{k+1} \simeq \dfrac{2\beta}{k} a_k$. Но именно такая связь существует между коэффициентами ряда

$$e^{2\beta\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\beta)^k}{k!} \rho^k,$$

представляющего разложение в ряд Тейлора экспоненты $e^{2\beta\rho}$.

Следовательно, бесконечный ряд (7.39) с коэффициентами, удовлетворяющими рекуррентным соотношениям (7.41), при достаточно больших значениях ρ ведет себя как функция $e^{2\beta\rho}$. Но тогда из (7.37) следует, что функция $R(\rho)$ неограниченно растет при $\rho \to \infty$. Такое решение не может быть радиальной частью волновой функции, так как условие нормировки (7.27) для такой функции не выполнимо.

Однако функция $R(\rho)$ будет стремиться к нулю при $\rho \to \infty$, обеспечивая выполнение условия (7.27), если ряд (7.39) оборвется на каком-либо члене, т.е. будет многочленом конечной степени. Из соотношения (7.41) следует, что обрыв ряда (7.39) на номере n_r произойдет, если

$$2\beta\,(n_r + l + 1) - 2 = 0. \qquad (7.42)$$

Тогда все коэффициенты ряда (7.39) начиная с a_{n_r+1} будут равны нулю.

Таким образом, соотношение (7.42) представляет собой необходимое и достаточное условие, при выполнении которого функция $R(\rho)$, определяемая формулами (7.37) и (7.39), является радиальной частью волновой функции ψ электрона в атоме водорода.

Обозначим целое число $n_r + l + 1 = n$, назвав n_r радиальным квантовым числом, а n – главным квантовым числом. Очевидно, что $n \geqslant l + 1$, т.е. $l \leqslant n - 1$.

Условие (7.42) теперь примет вид $\beta n = 1$ или $\varepsilon = 1/n^2$. С учетом соотношений (7.34) его можно записать как условие квантования полной энергии электрона в атоме водорода

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (7.43)$$

Полная энергия связанного электрона отрицательна и определяется значением главного квантового числа n.

Найденный энергетический спектр электрона в атоме водорода позволяет найти частоты ω_{nm} оптического спектра водорода из соотношения

$$\hbar\omega_{nm} = E_n - E_m, \quad n > m.$$

С учетом соотношения (7.43) получаем формулу Бальмера

$$\omega_{nm} = \mathcal{R}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad \mathcal{R} = \frac{\mu e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^3}. \tag{7.44}$$

Итак, радиальная часть волновой функции электрона в атоме водорода может быть записана в виде

$$R_{nl}(\rho) = \text{const}\ \rho^l\, e^{-\frac{\rho}{n}} \sum_{k=0}^{n_r} a_k\, \rho^k, \tag{7.45}$$

где $n_r = n - (l+1), \quad n \geqslant l+1$.

Заметим, что выражение для $R_{nl}(\rho)$ может быть записано и в форме

$$R_{nl}(\rho) = A_{nl}\left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}}\, L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right), \tag{7.46}$$

где L_p^s – обобщенные ***полиномы Чебышева – Лагерра***, которые являются многочленами p-й степени и определяются формулой

$$L_p^s(x) = \frac{1}{p!}\, x^{-s}\, e^x\, \frac{d^p}{dx^p}\,(x^{p+s} e^{-x}).$$

В частности, $L_0^s(x) = 1$; $L_1^s(x) = 1 + s - x$.

Для обобщенных полиномов Чебышева – Лагерра с целыми индексами p и s справедливы следующие интегральные соотношения:

$$I_1(p,\, s) = \int\limits_0^\infty L_p^s(x)\, L_p^s(x)\, e^{-x}\, x^s\, dx = \frac{(p+s)!}{p!},$$

$$I_2(p,\, s) = \int\limits_0^s L_p^s(x)\, L_p^s(x)\, e^{-x}\, x^{s+1}\, dx = \frac{(p+s)!\,(2p+s+1)}{p!}.$$

Коэффициенты A_{nl} в формуле (7.46) определим из условия нормировки радиальной части волновой функции

$$\int_0^\infty R_{nl}^2(r)\, r^2\, dr = 1 \quad \text{или} \quad \int_0^\infty R_{nl}^2(\rho)\, \rho^2\, d\rho = \frac{1}{a^3}. \tag{7.47}$$

Подставляя выражение (7.46) в (7.47), получаем

$$A_{nl}^2 \left(\frac{n}{2}\right)^3 I_2(n-l-1,\, 2l+1) = \frac{1}{a^3}.$$

Отсюда

$$A_{nl} = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!\, 2n}}. \tag{7.48}$$

С учетом соотношений (7.46), (7.48) выпишем выражения для некоторых нормированных радиальных составляющих волновых функций:

$$R_{10}(\rho) = \sqrt{\frac{4}{a^3}}\, e^{-\rho};$$

$$R_{20}(\rho) = \sqrt{\frac{1}{2a^3}} \left(1 - \frac{\rho}{2}\right) e^{-\frac{\rho}{2}};$$

$$R_{21}(\rho) = \sqrt{\frac{1}{6a^3}}\, \frac{\rho}{2}\, e^{-\frac{\rho}{2}};$$

$$R_{30} = \frac{2}{3\sqrt{3a^3}} \left(1 - \frac{2}{3}\rho + \frac{2}{27}\rho^2\right) e^{-\frac{\rho}{3}};$$

$$R_{31} = \frac{8}{27\sqrt{6a^3}} \left(1 - \frac{\rho}{6}\right) \rho\, e^{-\frac{\rho}{3}};$$

$$R_{32} = \frac{4}{81\sqrt{30a^3}}\, \rho^2\, e^{-\frac{\rho}{3}}.$$

Итак, окончательно квантовое состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией, зависящей от трех

квантовых чисел n, l и m, которые принимают следующие значения: $n = 1, 2, \ldots$; $l = 0, 1, \ldots, (n-1)$; $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$. Эта нормированная волновая функция найдена из решения уравнения Шредингера (7.26) и имеет вид

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \\ = \sqrt{\frac{(2l+1)\,(l-|m|)!}{4\pi\,(l+|m|)!}}\, P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\varphi}\, R_{nl}(\rho). \quad (7.49)$$

Здесь

$$R_{nl}(\rho) = \sqrt{\left(\frac{2}{na}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{(n+l)!\,2n}}\left(\frac{2\rho}{n}\right)^l e^{-\frac{\rho}{n}}\, L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2\rho}{n}\right);$$

$$\rho = \frac{r}{a} \quad a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mu e^2} = 0,529 \cdot 10^{-10}\,\text{м}.$$

Энергия электрона в квантовом состоянии зависит от значения главного квантового числа n и определяется формулой (7.43), которую после подстановки значений физических констант можно записать в виде $E_n = -13,55/n^2$ эВ (1 эВ= =1,6·10^{-19} Дж). Каждому значению энергии E_n соответствует $\sum\limits_{l=0}^{n-1}(2l+1) = n^2$ различных квантовых состояний.

7.4. Операторы физических величин в квантовой механике

В квантовой механике каждой физической величине f ставится в соответствие линейный самосопряженный оператор $\widehat{F}$. Соотношения между квантово-механическими операторами формально имеют ту же структуру, что и соотношения между физическими величинами в классической механике.

Приведем выражения для операторов основных физических величин в квантовой механике, определяя операции, которые следует произвести над волновой функцией при действии на нее соответствующих операторов.

1. Операторы координат $\widehat{x} = x$, $\widehat{y} = y$, и $\widehat{z} = z$ являются операторами умножения на соответствующие координаты, т.е.

$$\widehat{x}\psi = x\psi; \quad \widehat{y}\psi = y\psi; \quad \widehat{z}\psi = z\psi.$$

Эти три оператора можно объединить, вводя векторный оператор $\widehat{\vec{r}}\{\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{z}\}$, имеющий в качестве компонент в декартовой системе координат операторы $\widehat{x}$, $\widehat{y}$ и $\widehat{z}$.

2. Операторы проекций импульса определяются с помощью дифференциальных операторов по правилам

$$\widehat{P}_x = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}; \quad \widehat{P}_y = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}; \quad \widehat{P}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Эти формулы можно объединить, вводя векторный оператор импульса

$$\widehat{\vec{P}} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad \nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

определенный с помощью оператора градиента $\nabla \equiv \mathrm{grad}$. Оператор квадрата импульса $\widehat{P}^2 = \widehat{P}_x\widehat{P}_x + \widehat{P}_y\widehat{P}_y + \widehat{P}_z\widehat{P}_z$ можно записать через оператор Лапласа

$$\widehat{P}^2 = -\hbar^2\,\Delta.$$

3. Векторный оператор момента импульса формально можно определить операторным соотношением $\widehat{\vec{L}} = [\widehat{\vec{r}}, \widehat{\vec{P}}]$. Отсюда получаем:

$$\widehat{L}_x = \widehat{y}\,\widehat{P}_z - \widehat{z}\,\widehat{P}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right);$$

$$\widehat{L}_y = \widehat{z}\,\widehat{P}_x - \widehat{x}\,\widehat{P}_z = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right);$$

$$\widehat{L}_z = \widehat{x}\,\widehat{P}_y - \widehat{y}\,\widehat{P}_x = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Оператор квадрата момента импульса можно построить по правилу

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x\widehat{L}_x + \widehat{L}_y\widehat{L}_y + \widehat{L}_z\widehat{L}_z.$$

Переходя от декартовой системы координат к сферической

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = r\,\cos\theta,$$

можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\widehat{L}_x &= \frac{\hbar}{i}\left(\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\,\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{L}_y &= \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}\theta\,\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\\
\widehat{L}_z &= \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial\varphi},\\
\widehat{L}^2 &=\\
&= -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \equiv -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}.
\end{aligned} \tag{7.50}$$

4. Если частица массой m находится в силовом поле с потенциалом $U(x, y, z)$, то оператор потенциальной энергии $\widehat{U}$ представляет собой оператор умножения на функцию U, т.е.

$$\widehat{U}\psi = U\psi.$$

Оператор кинетической энергии $\widehat{T}$ можно определить через оператор квадрата импульса по формуле $\widehat{T} = \widehat{P}^2/(2m)$. Отсюда

$$\widehat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta.$$

Оператор полной энергии (гамильтониан) $\widehat{H}$ можно записать как сумму операторов кинетической и потенциальной энергии:

$$\widehat{H} = \widehat{T} + \widehat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m}\,\Delta + U(x, y, z).$$

Замечание 7.1. С помощью гамильтониана $\widehat{H}$ временно́е уравнение Шредиигера (7.4) можно записать в комплексной форме

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H}\,\Psi.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний (7.6) также можно записать в операторной форме

$$\widehat{H}\,\psi = E\,\psi. \quad \#$$

Если два квантово-механических оператора $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ коммутируют, т.е.

$$\widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} = 0,$$

то соответствующие физические величины a и b могут быть одновременно точно измерены. Если же коммутатор операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$

$$\widehat{K} = \widehat{A}\widehat{B} - \widehat{B}\widehat{A} \neq 0,$$

то соответствующие физические величины не могут быть одновременно точно измерены.

В качестве примера некоммутирующих операторов можно привести операторы $\widehat{x}$ и $\widehat{P}_x$. Действительно,

$$\widehat{x}(\widehat{P}_x\psi) = -i\hbar x\,\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

$$\widehat{P}_x(\widehat{x}\psi) = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial x}\,(x\psi) = -i\hbar x\,\frac{\partial \psi}{\partial x} - i\hbar\psi.$$

Поэтому для таких операторов

$$\widehat{K} = \widehat{x}\widehat{P}_x - \widehat{P}_x\widehat{x} = i\hbar \neq 0.$$

Вытекающий отсюда вывод о невозможности одновременного точного измерения координаты частицы и соответствующей проекции ее импульса составляет существо одного из важных положений квантовой механики – соотношения неопределенностей, установленного в 1927 г. В. Гейзенбергом.

Один из постулатов квантовой механики утверждает, что результатом измерения физической величины f в квантово-

механической системе могут быть только собственные значения соответствующего оператора $\widehat{F}$. Именно поэтому проблема собственных значений эрмитовых операторов играет важную роль в математическом аппарате квантовой механики.

Для оператора $\widehat{F}$ его собственные значения и собственные функции находят как нетривиальные решения операторного уравнения

$$\widehat{F}\psi = f\psi,$$

удовлетворяющие условиям регулярности волновой функции.

Спектр собственных значений операторов в квантовой механике может быть как непрерывным, так и дискретным. Учитывая связь проблемы квантования физических величин с дискретностью спектров соответствующих им операторов, ограничимся ниже обсуждением случаев, когда существует счетное множество собственных значений f_n и собственных функций ψ_n, являющихся решением уравнения

$$\widehat{F}\psi_n = f_n\psi_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7.51}$$

Многие физически важные свойства собственных значений связаны с самосопряженностью операторов физических величин в квантовой механике.

Напомним, что каждому линейному оператору $\widehat{F}$ можно поставить в соответствие другой оператор $\widehat{F}^+$, который называют оператором, сопряженным к данному, или эрмитово сопряженным. Сопряженный оператор $\widehat{F}^+$ определяется с помощью интегрального соотношения

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_1^*(\widehat{F}\psi_2)\,dV = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_2(\widehat{F}^+\psi_1)^*\,dV. \tag{7.52}$$

Здесь ψ_1 и ψ_2 – две любые волновые функции, интегрирование которых ведут по всей области изменения пространственных переменных; dV – элемент объема пространства размерностью N, причем $dV = dx$ для $N = 1$, $dV = dx_1\,dx_2$ для $N = 2$, $dV = dx_1\,dx_2\,dx_3$ для $N = 3$.

Если оператор $\widehat{F}$ совпадает со своим сопряженным оператором $\widehat{F}^+$, т.е. $\widehat{F} = \widehat{F}^+$, то такой оператор называют ***эрмитовым***, или ***самосопряженным***. С учетом формулы (7.52) самосопряженность оператора $\widehat{F}$ означает выполнение интегрального равенства

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_1^*(\widehat{F}\psi_2)\,dV = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_2(\widehat{F}\psi_1)^*\,dV. \tag{7.53}$$

В качестве примера докажем самосопряженность оператора проекции импульса $\widehat{P}_x$. Для этого рассмотрим две волновые функции $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$ $(N = 1)$, удовлетворяющие условиям регулярности, в частности условиям $\psi_{1,2}(-\infty) = \psi_{1,2}(+\infty) = 0$. Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*(\widehat{P}_x\psi_2)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^*\left(-i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right)dx =$$

$$= -i\hbar\psi_1^*\psi_2\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2\left(i\hbar\frac{\partial\psi_1^*}{\partial x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2\left(-i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^* dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_2(\widehat{P}_x\psi_1)^*\,dx.$$

В соответствии с равенством (7.53) это означает самосопряженность оператора

$$\widehat{P}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}.$$

Докажем теперь, что собственные значения эрмитова оператора вещественны. Для этого умножим уравнение (7.51) для собственных значений слева на ψ_n^* и проинтегрируем полученное равенство по всей области изменения переменных. В результате получим

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n^*(\widehat{F}\psi_n)\,dV = f_n \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n^*\psi_n\,dV. \tag{7.54}$$

С учетом нормировки волновой функции

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n^* \psi_n \, dV = 1$$

из равенства (7.54) находим

$$f_n = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n^* (\widehat{F} \psi_n) \, dV.$$

Применив теперь операцию комплексного сопряжения к левой и правой частям полученного равенства, имеем

$$f_n^* = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n (\widehat{F} \psi_n)^* \, dV.$$

Но, как следует из уравнения (7.53), для эрмитова оператора

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n (\widehat{F} \psi_n)^* \, dV = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n^* (\widehat{F} \psi_n) \, dV,$$

поэтому $f_n = f_n^*$, т.е. эрмитов оператор имеет только действительные собственные значения.

Перейдем теперь к доказательству ортогональности собственных функций линейного эрмитова оператора. Для этого запишем уравнения для собственных функций ψ_n и ψ_m эрмитова оператора $\widehat{F}$:

$$\widehat{F} \psi_n = f_n \psi_n, \quad \widehat{F} \psi_m = f_m \psi_m. \tag{7.55}$$

Применив операцию комплексного сопряжения к левой и правой частям второго уравнения (7.55), получим

$$(\widehat{F} \psi_m)^* = f_m^* \psi_m^* = f_m \psi_m^*. \tag{7.56}$$

Умножая первое уравнение (7.55) на ψ_m^*, а равенство (7.56) на ψ_n и интегрируя полученные соотношения, находим

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*(\widehat{F}\psi_n)\,dV = f_n \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV; \\ &\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n(\widehat{F}\psi_m)^*\,dV = f_m \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV. \end{aligned} \tag{7.57}$$

Так как для эрмитова оператора

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*(\widehat{F}\psi_n)\,dV = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_n(\widehat{F}\psi_m)^*\,dV,$$

из уравнений (7.57) находим

$$f_n \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV = f_m \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV,$$

или

$$(f_n - f_m) \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV = 0. \tag{7.58}$$

Если $n \neq m$, т.е. $f_n \neq f_m$, то из (7.58) получаем

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV = 0, \tag{7.59}$$

что и доказывает ортогональность собственных функций эрмитова оператора.

Принимая во внимание условие нормировки для волновой функции, уравнение (7.59) можно записать как условие ортонормированности собственных функций эрмитова оператора:

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi_m^*\,\psi_n\,dV = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \tag{7.60}$$

где δ_{nm} – символ Кронекера.

Замечание 7.2. В случае вырождения спектра оператора $\widehat{\Phi}$ каждому собственному значению f_n может соответствовать несколько собственных функций $\psi_{n1}, \psi_{n2}, \ldots, \psi_{ns}$, где s – кратность вырождения. Условие (7.60) для вырожденного спектра будет иметь вид

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi^*_{mk}\,\psi_{nl}\,dV = \begin{cases} 1, & n = m \text{ и } k = l; \\ 0, & n \neq m \text{ или } k \neq l. \end{cases} \qquad \#$$

Система собственных функций эрмитова оператора является полной системой ортонормированных функций. Это означает, что произвольную функцию $\psi(x)$ ($x \in \mathfrak{R}^N$, $N = 1, 2, 3$), удовлетворяющую условиям регулярности, можно разложить в ряд по системе собственных функций

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\psi_n(x), \quad c_n = \text{const}. \tag{7.61}$$

Коэффициенты c_n разложения (7.61) можно определить, воспользовавшись ортогональностью собственных функций. Для этого умножим ряд (7.61) на $\psi^*_m(x)$ и проинтегрируем по всей области изменения переменных. Тогда, изменив порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi^*_m(x)\,\psi(x)\,dV = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi^*_m(x)\,\psi_n(x)\,dV. \tag{7.62}$$

В силу ортогональности собственных функций отличным от нуля членом суммы, стоящей в правой части равенства (7.62), будет только член с $n = m$. Поэтому получаем

$$c_m = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi^*_m(x)\,\psi(x)\,dV. \tag{7.63}$$

Заметим, что подставляя (7.63) в ряд (7.61) и снова изменяя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$\psi(x) = \int\limits_{\mathfrak{R}^N} \psi(x')\,\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \psi^*_n(x')\,\psi_n(x)\Big)\,dV'.$$

Для произвольной непрерывной функции $\psi(x)$ это равенство выполнено, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(x')\,\psi_n(x) = \delta_N(x - x'), \tag{7.64}$$

где $\delta_N(x - x')$ – N-мерная дельта-функция Дирака.

Соотношение (7.64) выражает условие полноты системы собственных функций эрмитова оператора.

Пример 7.1. Определить систему собственных функций оператора $\widehat{L}_z$ (оператора проекции момента импульса на выделенное направление z).

Из формул (7.50) находим, что $\widehat{L}_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$. Поэтому задачу на собственные значения оператора $\widehat{L}_z$ можно записать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = \lambda\,\psi \tag{7.65}$$

при условии периодичности

$$\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi),$$

которое является следствием условий регулярности волновой функции.

Решая уравнение (7.65), находим

$$\psi = A\,e^{\frac{i\lambda}{\hbar}\varphi},$$

где $A = A(r,\,\theta)$ – произвольная функция координат r и θ.

Условие периодичности приводит к равенству

$$e^{\frac{i\lambda}{\hbar}\varphi} = e^{\frac{i\lambda}{\hbar}(\varphi+2\pi)}, \quad \text{или} \quad e^{\frac{i\lambda 2\pi}{\hbar}} = 1.$$

Это равенство выполняется при условии

$$\frac{2\pi\lambda}{\hbar} = 2\pi m, \quad m = 0,\,\pm1,\,\pm2,\,\ldots$$

Отсюда определяем дискретный спектр собственных значений оператора $\widehat{L}_z$

$$\lambda_m = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \ldots \tag{7.66}$$

и систему нормированных собственных функций

$$\psi_m = A_m e^{im\varphi}, \quad A_m = 1/\sqrt{2\pi}. \tag{7.67}$$

Поэтому в соответствии с постулатом квантовой механики проекция момента импульса квантовой частицы на некоторое выделенное направление z может иметь только следующие значения:

$$L_z = m\hbar,$$

где m – магнитное квантовое число.

Используя результаты, полученные при описании квантовых состояний атома водорода, можно также утверждать, что задача на собственные значения оператора квадрата момента импульса

$$\widehat{L}^2\psi = L^2\psi, \quad \text{или} \quad -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}\psi = L^2\psi \tag{7.68}$$

имеет дискретный спектр собственных значений

$$L^2 = \hbar^2 l\,(l+1), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{7.69}$$

и соответствующую систему собственных функций

$$\psi_{lm} = Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = 0, \pm 1, \ldots, \pm l. \tag{7.70}$$

Спектр оператора $\widehat{L}^2$ является вырожденным с кратностью вырождения, равной $2l+1$. Каждому собственному значению уравнения (7.69) соответствует $2l+1$ собственных функций, представляющих собой сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

Вопросы и задачи

7.1. Найдите сферически-симметричное решение стационарного уравнения Шредингера, описывающее квантовые состояния частицы в сферической потенциальной яме радиуса r_0 с непроницаемыми стенками, считая, что внутри ямы потенциальная энергия частицы равна нулю.

Ответ: $\psi(r) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \dfrac{\sin \dfrac{n\pi r}{r_0}}{r}, \quad n = 1, 2, \ldots$

7.2. Вычислите вероятность нахождения вне классических границ движения одномерного гармонического осциллятора с наименьшим значением полной энергии.

Ответ: $P = 0,16$.

7.3. С учетом вероятностного смысла волновой функции определите среднее значение потенциальной энергии электрона в атоме водорода для произвольного квантового состояния.

Ответ: $\langle U \rangle = -\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a n^2}$.

7.4. Проверьте следующие правила коммутации для операторов проекций момента импульса:

$$\widehat{L}_x\widehat{L}_y - \widehat{L}_y\widehat{L}_x = i\hbar\widehat{L}_z; \quad \widehat{L}_y\widehat{L}_z - \widehat{L}_z\widehat{L}_y = i\hbar\,\widehat{L}_x.$$

7.5. Докажите следующее правило коммутации операторов проекций импульса и момента импульса:

$$\widehat{L}_x\widehat{P}_y - \widehat{P}_y\widehat{L}_x = i\hbar\,\widehat{P}_z.$$

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

8. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА

8.1. Теория нелинейной теплопроводности

Одним из актуальных направлений современной математической физики является изучение нелинейных математических моделей различных физико-химических явлений и процессов. Появление таких моделей обусловлено использованием в современной физике и технике воздействий на вещество электрических полей большой интенсивности, пучков частиц высокой энергии, мощного лазерного когерентного излучения, ударных волн высокой интенсивности, мощных тепловых потоков.

Линейные математические модели являются всегда лишь определенными приближениями при описании различных процессов. Их можно использовать только в тех случаях, когда исследуемые физические величины в рассматриваемом процессе изменяются не в очень широком диапазоне значений.

Нелинейные модели позволяют описать процессы в более широком диапазоне изменения параметров. При этом нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. В основе нелинейных моделей лежат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, законченной теории и общих методов решения задач для которых в настоящее время не разработано. Однако для ряда нелинейных задач математической физики удается найти точные аналитические решения, анализ свойств которых позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты в исследуемых процессах. В частности, при исследовании высокотемпературных тепловых процессов с учетом

действия таких механизмов переноса энергии, как электронная или лучистая теплопроводности, необходимо учитывать зависимость плотности ρ, удельной теплоемкости c и коэффициента теплопроводности среды k от температуры.

Мощность тепловых источников, распределенных в объеме среды, также может зависеть от температуры, если учитывать процессы диссоциации и ионизации молекул, фазовые переходы, излучение, горение, химические реакции и другие экзо- и эндотермические процессы, протекающие в нагретой среде.

Уравнение теплопроводности, учитывающее зависимость свойств среды от температуры и нелинейную зависимость от температуры мощности распределенных в объеме тепловых источников, является квазилинейным параболическим уравнением вида

$$\rho(u)\,c(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k(u)\operatorname{grad} u\right) + \mathcal{F}(u,\,x,\,y,\,z,\,t). \qquad (8.1)$$

Нелинейность задачи теплопроводности может быть также обусловлена нелинейностью граничного условия. Такие задачи, в отличие от задач с внутренней нелинейностью, обусловленной нелинейностью уравнения, часто называют задачами с внешней нелинейностью.

Нелинейное граничное условие на поверхности S тела может иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \Theta(u,\,P,\,t), \quad P \in S, \qquad (8.2)$$

где функция Θ нелинейным образом зависит от температуры.

К таким условиям, например, относится условие (2.14) на поверхности излучающего тела или условие конвективного теплообмена (2.12), в котором коэффициент теплообмена $\alpha_{\text{т}}$ зависит от температуры поверхности тела.

Задача теплопроводности становится нелинейной, если учитывать фазовые переходы в среде, такие, как плавление, испарение, конденсация, кристаллизация, происходящие при определенной температуре и сопровождающиеся выделением или поглощением теплоты.

В среде с фазовым переходом появляется поверхность Σ раздела фаз, которую называют фронтом фазового перехода. Эта поверхность перемещается с конечной скоростью. Баланс тепловой энергии на фронте фазового перехода с температурой u^* позволяет записать на движущейся поверхности Σ фронта кроме условия

$$u_1(P) = u_2(P) = u^*, \quad P \in \Sigma, \tag{8.3}$$

другое граничное условие:

$$\left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}\right)\Bigg|_{P\in\Sigma} = q^* \rho v, \tag{8.4}$$

где k_1, k_2 и u_1, u_2 – коэффициенты теплопроводности и температуры двух соприкасающихся фаз соответственно; q^* – удельная массовая теплота фазового перехода; v – мгновенная скорость перемещения фронта фазового перехода в направлении нормали $\vec{n}$ к поверхности Σ.

Так как скорость перемещения фронта v заранее не известна и должна быть найдена в процессе решения задачи теплопроводности, то граничное условие (8.4), называемое условием Стефана, делает задачу нелинейной.

Возможен и другой подход к моделированию процесса фазового перехода без явного выделения фронта фазового перехода при постановке задачи. Этот подход связан с переходом в класс обобщенных функций. Действительно, теплоту фазового перехода, выделяющуюся на фронте, можно учесть, считая внутреннюю энергию среды разрывной функцией температуры и вводя сосредоточенную теплоемкость среды. При этом внутренняя энергия единицы объема среды ε, как функция температуры, при $u = u^*$ скачком изменяется на величину теплоты фазового перехода, т.е.

$$\varepsilon = \int_0^u \tilde{c}(u)\, du + Q^* \eta(u - u^*). \tag{8.5}$$

Здесь $\widetilde{c}(u) = \rho(u)\,c(u)$ – теплоемкость единицы объема среды; $Q^* = \rho q^*$; $\eta(u-u^*) = \begin{cases} 1, & u > u^*; \\ 0, & u < u^* \end{cases}$ – импульсная функция Хевисайда, производная которой $d\eta/du$ есть дельта-функция $\delta(u-u^*)$ (см. Приложение 1).

Дифференцируя теперь внутреннюю энергию (8.5) по температуре, получим выражение для эффективной объемной теплоемкости среды с учетом теплоты фазового перехода

$$\widetilde{c}_{\text{эф}} = \widetilde{c}(u) + Q^*\,\delta(u-u^*).$$

Второе слагаемое, записанное через дельта-функцию, представляет собой сосредоточенную теплоемкость, которую следует понимать как обобщенную функцию температуры.

При таком описании фазового перехода уравнение теплопроводности в отсутствие объемных тепловых источников примет вид

$$\left[c(u) + q^*\,\delta(u-u^*)\right]\rho(u)\,\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}\left(k(u)\operatorname{grad} u\right). \qquad (8.6)$$

Здесь

$$c(u) = \begin{cases} c_1, & u < u^*; \\ c_2, & u > u^*; \end{cases} \quad \rho(u) = \begin{cases} \rho_1, & u < u^*; \\ \rho_2, & u > u^*; \end{cases} \quad k(u) = \begin{cases} k_1, & u < u^*; \\ k_2, & u > u^*. \end{cases}$$

Фронт фазового перехода в такой постановке задачи находится как изотермическая поверхность $u = u^* = \text{const}$, положение которой в пространстве, а в общем случае и форма, изменяются с течением времени.

Нелинейности изменяют не только количественные характеристики тепловых процессов, но и качественную картину их протекания. Они значительно усложняют математические модели тепловых процессов, причем во многом эти трудности связаны с невозможностью применения для нелинейных задач принципа суперпозиции решений. Число найденных точных

аналитических решений таких нелинейных задач теплопроводности крайне ограничено, но именно анализ этих решений позволяет выявить качественно новые нелинейные эффекты при распространении теплоты. Некоторые такие решения нелинейных задач теплопроводности рассмотрены ниже.

Квазилинейные параболические уравнения второго порядка лежат в основе математических моделей разнообразных явлений и процессов в механике, физике, биологии, экологии, технологии и других отраслей знаний. В частности, уравнение нелинейной теплопроводности (8.1) при определенных условиях описывает фильтрацию жидкостей и газов в пористых материалах, диффузию нейтронов, нелинейный скин-эффект при проникновении магнитного поля в проводящие среды. Это уравнение применимо при математическом описании процессов горения и детонации, химической кинетики, процесса роста и миграции биологических популяций, распространении загрязнений в окружающей среде. Такой диапазон приложений уравнения (8.1) обусловлен тем, что в его основе лежат фундаментальные законы сохранения энергии, массы или числа частиц.

8.2. Задача Стефана о фазовом переходе

Найдем аналитическое решение одномерной нелинейной задачи теории теплопроводности, которую называют ***задачей Стефана*** в честь И. Стефана, поставившего и решившего в 1889 г. задачу о фазовом переходе. Фазовый переход может быть связан с кристаллизацией жидкости при ее охлаждении. В этом случае задачу обычно называют задачей о промерзании, имея в виду, что процесс замерзания воды при ее охлаждении относится к процессам такого класса.

Пусть жидкая среда занимает полупространство $x > 0$ и пусть при $t < 0$ температура всех слоев жидкости одинакова и равна $u_0 > u^*$, где u^* – температура отвердевания жидкости. Без ограничения общности мы будем считать $u^* = 0$.

С момента времени $t = 0$ на границе $x = 0$ поддерживается постоянная температура $u_c < 0$ ниже температуры кристаллизации u^*. В этом случае при $t > 0$ вблизи граничной поверхности возникает слой твердой фазы, толщина которого с течением времени увеличивается (рис. 8.1). Фронт кристаллизации $x = \xi(t)$ в любой момент времени отделяет твердую фазу от жидкой, двигаясь с некоторой скоростью $v = d\xi/dt$ в направлении жидкой фазы. По постановке задачи $\xi(0) = 0$.

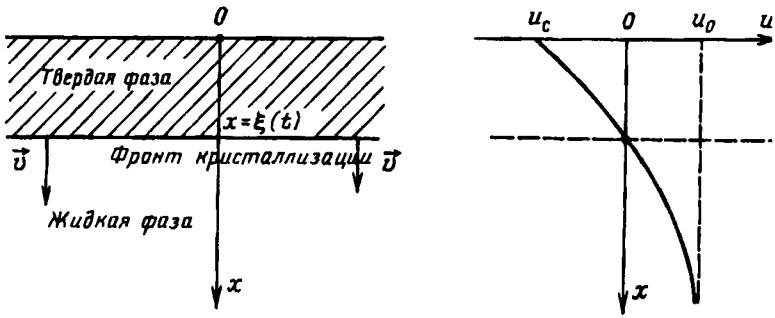


Рис. 8.1

Теплота фазового перехода, выделяющаяся при кристаллизации жидкости, отводится вследствие теплопроводности твердой фазы через граничную поверхность $x = 0$.

Явно выделяя движущийся фронт кристаллизации, обозначим индексом "1" величины, относящиеся к твердой фазе, а индексом "2" – к жидкой фазе. Тогда, считая, что свойства среды при фазовом переходе изменяются скачком, запишем уравнение теплопроводности для двух фаз:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t); \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty, \tag{8.8}$$

где a_1^2 и a_2^2 – коэффициенты температуропроводности твердой и жидкой фаз соответственно.

Учитывая, что в начальный момент времени существует только жидкая фаза, начальное условие для задачи запишем в виде

$$u_2(x,\,0) = u_0 = \text{const}, \quad x > 0. \tag{8.9}$$

Краевые условия задачи сформулируем следующим образом:

а) на границах области

$$\begin{aligned} &u_1 = u_c = \text{const} < 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \\ &u_2 \to u_0 = \text{const} > 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty; \end{aligned} \tag{8.10}$$

б) на фронте фазового перехода

$$u_1|_{x=\xi-0} = u_2|_{x=\xi+0} = 0; \tag{8.11}$$

$$k_1 \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} - k_2 \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} = \rho_1 q^* \frac{d\xi}{dt}, \tag{8.12}$$

где q^* – скрытая теплота кристаллизации, отнесенная к единице массы твердой фазы.

С помощью автомодельной переменной $\eta = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ (преобразование Больцмана) приведем уравнения (8.7) и (8.8) к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций $u_1(\eta)$ и $u_2(\eta)$:

$$\frac{1}{2}\eta \frac{du_i}{d\eta} + a_i^2 \frac{d^2 u_i}{d\eta^2} = 0, \quad i = 1,\,2. \tag{8.13}$$

Полагая $w_i = \dfrac{du_i}{d\eta}$, запишем уравнение (8.13) в виде

$$\frac{1}{w_i}\frac{dw_i}{d\eta} = -\frac{1}{2a_i^2}\eta. \tag{8.14}$$

Интегрируя выражение (8.14), получаем

$$w_i(\eta) = \widetilde{B}_i \exp\left(-\frac{\eta^2}{4a_i^2}\right), \quad \widetilde{B}_i = \text{const}. \tag{8.15}$$

Интегрируя (8.15) еще один раз, находим общее решение уравнений (8.13) для $i = 1$ и $i = 2$:

$$u_i(\eta) = A_i + \widetilde{B}_i \int\limits_0^{\eta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a_i^2}\right) d\xi = A_i + B_i\,\Phi\left(\frac{\eta}{2a_i}\right),$$

где $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int\limits_0^{z} e^{-\xi^2}\, d\xi$; A_i, $B_i = \mathrm{const}$.

Функцию $\Phi(z) \equiv \mathrm{erf}\,(z)$ называют ***интегралом ошибок*** (также функцией ошибок). Она часто встречается в задачах математической физики и поэтому затабулирована, как и ее производные и интеграл от нее. В частности $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = 1$. Для малых z имеет место разложение

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \frac{z^3}{1!\cdot 3} + \frac{z^5}{2!\cdot 5} - \ldots\right),$$

а при больших z справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(z) \simeq 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-z^2}}{z}\left(1 - \frac{1}{2z^2} + \frac{1\cdot 3}{(2z^2)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2z^2)^3} + \ldots\right).$$

Возвращаясь к переменным x и t, запишем найденные решения уравнений (8.7) и (8.8) в виде

$$\begin{aligned} u_1(x,\,t) &= A_1 + B_1\,\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad 0 < x < \xi(t); \\ u_2(x,\,t) &= A_2 + B_2\,\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0, \quad \xi(t) < x < \infty. \end{aligned} \tag{8.16}$$

Выполняя теперь граничные условия (8.10), находим

$$A_1 = u_c, \quad A_2 + B_2 = u_0. \tag{8.17}$$

При этом замечаем, что начальное условие (8.9) также будет выполнено.

Из условия (8.11) на фронте фазового перехода, т.е. при $x = \xi(t)$, следует, что

$$A_1 + B_1\,\Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0; \quad A_2 + B_2\,\Phi\left(\frac{\xi(t)}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0. \tag{8.18}$$

Каждое из этих условий может быть выполнено для любого $t > 0$ только в том случае, если аргументы функции $\Phi(z)$ в этих равенствах не зависят от времени. Но это возможно, если $\xi(t)/\sqrt{t} = \alpha = \text{const}$.

Таким образом, с точностью до некоторой константы α определены закон движения фронта фазового перехода

$$\xi(t) = \alpha\sqrt{t} \tag{8.19}$$

и его скорость

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}, \tag{8.20}$$

которая уменьшается со временем, т.е. по мере утолщения слоя твердой фазы.

Подставляя (8.19) в соотношения (8.18), получаем

$$A_1 + B_1\,\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right) = 0; \quad A_2 + B_2\,\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right) = 0. \tag{8.21}$$

Теперь из равенств (8.17) и (8.21) находим все четыре константы:

$$\begin{aligned} A_1 &= u_c; & B_1 &= -\frac{u_c}{\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_1}\right)}; \\ A_2 &= \frac{u_0\,\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}{\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right) - 1}; & B_2 &= \frac{u_0}{1 - \Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Чтобы определить константу α, надо воспользоваться условием Стефана (8.12) на фронте фазового перехода. Так как

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{-z^2},$$

то с учетом формул (8.16), (8.20) и (8.22) условие (8.12) приводит к уравнению

$$\frac{k_1\, u_c\, e^{-\alpha^2/(4a_1^2)}}{a_1\, \Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2\, u_0\, e^{-\alpha^2/(4a_2^2)}}{a_2\left[1-\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\alpha\rho_1 q^*. \qquad (8.23)$$

Анализ трансцендентного уравнения (8.23) показывает, что существует единственное положительное значение параметра α, удовлетворяющее этому уравнению. Приближенное значение корня этого уравнения может быть найдено численными методами.

В случае, когда начальная температура всех слоев жидкости равна температуре фазового перехода, т.е. $u_0 = 0$, из равенств (8.22) следует, что

$$A_1 = u_c; \qquad B_1 = -\frac{u_c}{\Phi\left(\dfrac{\alpha}{2a_1}\right)};$$

$$A_2 = 0; \qquad B_2 = 0,$$

и трансцендентное уравнение (8.23) принимает более простой вид

$$\beta\,\Phi(\beta)\,\exp\{\beta^2\} = N, \qquad (8.24)$$

где $\beta = \alpha/(2a_1)$; $N = |u_c|\, c_1/(\sqrt{\pi}\, q^*)$.

В общем случае приближенное решение уравнения (8.24) можно найти графическим способом или с применением численных методов решения трансцендентных уравнений. Если же параметры задачи соответствуют малым значениям N, то, воспользовавшись асимптотическими формулами $\Phi(\beta) \simeq \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\beta$, $\exp\{\beta^2\} \simeq 1$, справедливыми для малых значений β, из уравнения (8.24) получим

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta^2 = N; \quad \alpha = \sqrt{\frac{2\,|u_c|\, c_1 a_1^2}{q^*}}.$$

Отметим, что нелинейные задачи теплопроводности с фазовыми переходами широко используются для моделирования технологических процессов зонной плавки, направленной кристаллизации, выращивания монокристаллов и получения заданных структур полупроводниковых материалов. С помощью математических моделей может быть проведена оптимизация таких процессов по различным факторам.

8.3. Распространение тепловых возмущений в нелинейных средах

В работах Г.И. Баренблатта, Я.Б. Зельдовича, С.П. Курдюмова, Л.К. Мартинсона, А.А. Самарского и других найдены точные аналитические решения некоторых задач нелинейной теплопроводности. Анализ свойств этих решений позволяет обнаружить ряд важных нелинейных эффектов при распространении тепловых возмущений в средах, коэффициент теплопроводности которых зависит от температуры.

Рассмотрим среду, коэффициент теплопроводности k которой изменяется в зависимости от температуры u по степенному закону

$$k = k_0\, u^{\sigma}, \tag{8.25}$$

где $\sigma = \text{const} > 0$ – параметр нелинейности среды. Плотность среды ρ и ее теплоемкость будем считать постоянными, не зависящими от температуры. Такую среду, в отличие от среды с постоянным коэффициентом теплопроводности ($\sigma = 0$), назовем нелинейной, так как процесс теплопроводности в такой среде в отсутствие объемных тепловых источников описывается нелинейным, точнее, квазилинейным параболическим уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(u^{\sigma} \operatorname{grad} u), \tag{8.26}$$

где $a^2 = k_0/(\rho c)$ – характерный коэффициент температуропроводности.

При моделировании тепловых процессов в нелинейной среде необходимо использовать такие решения уравнения (8.26), которые удовлетворяют условиям непрерывности температуры и теплового потока. Но так как плотность теплового потока $\vec{q} = -k_0 u^\sigma \operatorname{grad} u$ в такой среде зависит не только от градиента температуры, но и от значения самой температуры, то решения уравнения нелинейной теплопроводности (8.26) следует искать в классе обобщенных функций, допускающих разрывы производных по пространственным переменным там, где функция u обращается в нуль и уравнение (8.26) вырождается.

Задача о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника. Пусть в нелинейной среде в начальный момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ мгновенно выделяется на единицу площади количество теплоты Q_0. От такого мгновенного сосредоточенного источника тепловые возмущения начнут распространяться симметрично по обе стороны от плоскости $x = 0$. Математическая модель такого процесса запишется в виде следующей задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ u(x, 0) = Q\,\delta(x). \end{cases} \tag{8.27}$$

Здесь $Q = Q_0/(\rho c)$, а одномерная дельта-функция $\delta(x)$ характеризует температурное воздействие плоского сосредоточенного источника.

Сходимость решения $u(x, t)$ при $t \to 0$ к начальному распределению следует понимать как слабую сходимость (см. Приложение 1), т.е. для любой непрерывной функции $f(x)$ необходимо выполнение интегрального соотношения

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, u(x, t)\, dx = Q\, f(0).$$

Физическая постановка задачи позволяет утверждать, что на бесконечности тепловые возмущения будут пренебрежимо малы в любой момент времени, т.е.

$$u \to 0, \quad u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{8.28}$$

Интегрируя уравнение в (8.27) по переменному x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, t)\, dx = a^2 \left\{ u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=+\infty} - u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=-\infty} \right\} = 0.$$

Отсюда с учетом начального условия следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\, t)\, dx = Q = \text{const}, \quad \forall\, t \geqslant 0. \tag{8.29}$$

Соотношение (8.29) отражает физический закон сохранения полной тепловой (внутренней) энергии среды в любой момент времени.

Единицы измерения определяющих параметров Q и a^2 задачи (8.27) в СИ определяются как К·м и м^2·с$^{-1}$·К$^{-\sigma}$ соответственно.

Из этих параметров и переменных x и t можно составить лишь одну безразмерную комбинацию, определяющую автомодельную переменную задачи,

$$\eta = \frac{x}{(Q^\sigma a^2 t)^\nu}, \quad \nu = \frac{1}{\sigma + 2}$$

и комбинацию, имеющую размерность температуры,

$$T = \left(\frac{Q^2}{a^2 t} \right)^\nu.$$

Поэтому согласно выводам теории размерности и подобия (см. Приложение 3) искомое решение задачи (8.27) должно иметь вид

$$u(x,\,t) = \left(\frac{Q^2}{a^2 t}\right)^{\nu} \Theta(\eta). \tag{8.30}$$

Подставив функцию u в форме (8.30) в уравнение (8.27), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Theta(\eta)$:

$$-\nu\Theta - \nu\eta\,\frac{d\Theta}{d\eta} = \frac{d}{d\eta}\left(\Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\eta}\right). \tag{8.31}$$

Уравнение (8.31) преобразуется к виду

$$-\nu\,\frac{d}{d\eta}\,(\eta\Theta) = \frac{d}{d\eta}\left(\Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\eta}\right). \tag{8.32}$$

Интегрируя (8.32) один раз, получаем

$$-\nu\eta\Theta = \Theta^{\sigma}\,\frac{d\Theta}{d\eta}, \quad \text{или} \quad \frac{d\Theta^{\sigma}}{d\eta} = -\frac{\sigma}{(\sigma+2)}\,\eta, \tag{8.33}$$

причем константу интегрирования полагаем равной нулю в силу условий (8.28).

После интегрирования (8.33), учитывая, что уравнение (8.31) имеет также особое решение $\Theta \equiv 0$, запишем решение уравнения (8.31), удовлетворяющее условиям (8.28), в следующей форме:

$$\Theta(\eta) = \begin{cases} \left[\dfrac{\sigma}{2(\sigma+2)}\,(\eta_0^2 - \eta^2)\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |\eta| < \eta_0; \\ 0, \quad |\eta| \geqslant \eta_0. \end{cases} \tag{8.34}$$

Здесь $\eta_0 > 0$ – некоторая постоянная, причем в области $|\eta| > \eta_0$ функция $\Theta(\eta)$ тождественно равна нулю.

Постоянную η_0 можно найти из условия (8.29), которое с учетом соотношений (8.30) и (8.34) запишем в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\eta)\,d\eta = \int\limits_{-\eta_0}^{+\eta_0} \Theta(\eta)\,d\eta = 1. \tag{8.35}$$

Отсюда получаем

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\int\limits_0^{\eta_0}(\eta_0^2-\eta^2)^{\frac{1}{\sigma}}\,d\eta=1. \tag{8.36}$$

Сделав замену $\xi = \eta/\eta_0$ в интеграле, запишем соотношение (8.36) в виде

$$2\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\eta_0^{\frac{\sigma+2}{\sigma}}\,I(\sigma)=1. \tag{8.37}$$

Здесь

$$I(\sigma)=\int\limits_0^1(1-\xi^2)^{\frac{1}{\sigma}}\,d\xi=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{\sigma}\right)};$$

$\Gamma(z)$ – ***гамма-функция Эйлера.***

Теперь из (8.37) находим постоянную

$$\eta_0=\left\{2\,I(\sigma)\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}\right\}^{-\frac{\sigma}{\sigma+2}} \tag{8.38}$$

Возвращаясь к переменным x и t, с учетом формул (8.30) и (8.34) запишем решение исходной задачи (8.27) в виде

$$u(x,\,t)=\begin{cases}U(t)\left[1-\left(\dfrac{x}{x_0(t)}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x|<x_0(t);\\ 0, & |x|\geqslant x_0(t).\end{cases} \tag{8.39}$$

Здесь

$$U(t)=\eta_0^{\frac{2}{\sigma}}\,Q^{\frac{2}{\sigma+2}}\left[\frac{\sigma}{2(\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}(a^2t)^{-\frac{1}{\sigma+2}}; \tag{8.40}$$

$$x_0(t)=\eta_0\,Q^{\frac{2}{\sigma+2}}\,(a^2t)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \tag{8.41}$$

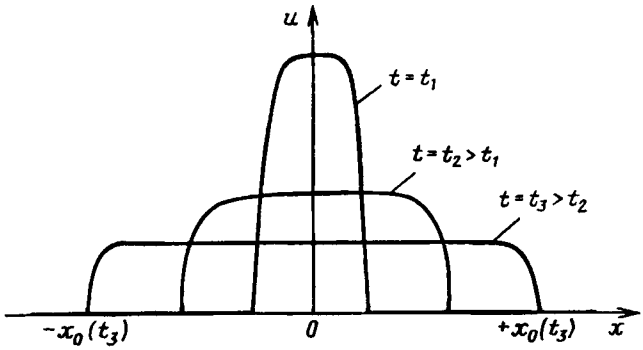


Рис. 8.2

Решение (8.39) имеет вид фронтового решения, описывающего распространение ***тепловой волны*** от мгновенного сосредоточенного теплового источника, помещенного в плоскости $x = 0$. Качественный вид температурного профиля такой тепловой волны в различные моменты времени ($t_3 > t_2 > t_1 > 0$) приведен на рис. 8.2.

Фронты тепловой волны, положения которых в любой момент времени определяются равенствами $x = \pm x_0(t)$, отделяют в пространстве область возмущений, где $u > 0$, от невозмущенной области $|x| > x_0(t)$, куда тепловые возмущения от источника еще не проникли и где $u = 0$. Фронты тепловой волны движутся с конечной скоростью

$$v(t) = \frac{dx_0}{dt} = \frac{a^2\eta_0}{\sigma+2}\, Q^{\frac{2}{\sigma+2}}\, (a^2 t)^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}} \sim t^{-\frac{\sigma+1}{\sigma+2}}. \qquad (8.42)$$

Скорость движения фронтов уменьшается с течением времени, однако тепловые возмущения проникают в нелинейную среду неограниченно далеко, так как $x_0(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Заметим, что если $\sigma > 1$, то фронты тепловой волны являются крутыми, так как в этом случае $|\partial u/\partial x| \to \infty$ при $x \to \pm x_0 \mp 0$. Однако, несмотря на неограниченный рост градиента температуры на крутом фронте тепловой волны, плотность теплового потока $q = -k_0 u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}$ при приближении к фрон-

ту из области возмущений стремится к нулю, обеспечивая выполнение на фронте физического условия непрерывности теплового потока при любых значениях параметра нелинейности $\sigma > 0$. При этом формулу (8.39) следует рассматривать как обобщенное решение задачи (8.27).

Формулы (8.34), (8.38) и (8.39) допускают предельный переход $\sigma \to 0$, соответствующий переходу к среде с постоянным коэффициентом теплопроводности, равным k_0. В этом случае $\eta_0 \to \infty$ и из решения (8.39) при $\sigma \to 0$ можно получить распределение температуры

$$u(x,\, t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left(1 - \sigma \frac{x^2}{4a^2 t}\right)^{\frac{1}{\sigma}} = \frac{Q}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

совпадающее с нестационарным температурным полем в задаче о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в линейной теории теплопроводности [см. уравнение (2.66)].

Таким образом, тепловые возмущения в нелинейной среде с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся в зависимости от температуры по степенному закону, распространяются по нулевому невозмущенному фону с конечной скоростью, в отличие от среды с постоянным коэффициентом теплопроводности, где скорость распространения тепловых возмущений бесконечна.

Этот вывод подтверждается еще одним точным решением задачи нелинейной теплопроводности. Пусть первоначально ненагретая нелинейная среда занимает полупространство $x > 0$ и с момента $t = 0$ температура на границе $x = 0$ начинает увеличиваться по степенному закону с показателем степени, связанным с параметром нелинейности среды σ. Процесс разогрева среды в этом случае описывается следующей нелинейной задачей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad t > 0, \quad x > 0; \\ u(x,\, 0) = 0, \quad u(0,\, t) = u_0\, t^{\frac{1}{\sigma}}. \end{cases} \tag{8.43}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что задача (8.43) имеет фронтовое решение

$$u(x,\,t) = \begin{cases} u_0\, t^{\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \dfrac{x}{x_0(t)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leqslant x < x_0(t); \\ 0, & x \geqslant x_0(t). \end{cases} \tag{8.44}$$

Здесь $x_0(t) = v_0 t$; $v_0 = \left(\dfrac{a^2 u_0^\sigma}{\sigma}\right)^{1/2}$.

Анализ решения (8.44) показывает, что от нагретой границы в глубь среды по невозмущенному нулевому фону распространяется тепловая (температурная) волна, фронт которой движется с постоянной скоростью, равной v_0. Скорость v_0 зависит от "амплитуды" u_0 теплового возмущения на стенке.

Качественный вид температурных полей в тепловых волнах (8.44) для различных значений параметра нелинейности σ показан на рис. 8.3.

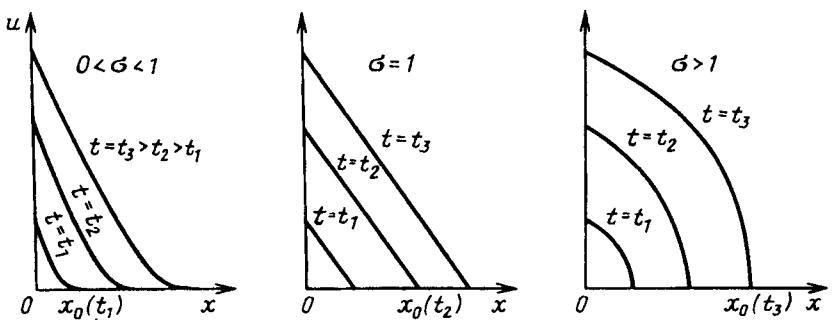


Рис. 8.3

Как и в предыдущей задаче, при значениях параметра нелинейности $\sigma > 1$ фронт тепловой волны (8.44) оказывается крутым, так как при этом $|\partial u/\partial x| \to \infty$ при $x \to x_0 - 0$. Однако можно проверить, что тепловой поток непрерывен во всех точках пространства и обращается в нуль при приближении к

фронтовой точке $x = x_0(t)$ из области возмущений. Действительно, вычисляя плотность теплового потока

$$q(x,\, t) = -k_0\, u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{k_0\, u_0^{\sigma+1}}{\sigma\, v_0} \left(t - \frac{x}{v_0}\right)^{\frac{1}{\sigma}}$$

и подставляя сюда $x = v_0 t$, получаем, что $q\Big(x_0(t),\, t\Big) = 0$ для любого $\sigma > 0$.

Итак, конечная скорость распространения тепловых возмущений указывает на появление в нелинейных средах своеобразного свойства "инерции" тепловых процессов, которое качественно изменяет характер протекания тепловых процессов в нелинейных средах по сравнению с аналогичными процессами в средах с постоянным коэффициентом теплопроводности, где тепловые возмущения распространяются мгновенно.

Пространственная локализация тепловых возмущений. Еще один интересный нелинейный эффект можно обнаружить при рассмотрении процесса распространения тепловых возмущений в нелинейных средах с объемным поглощением теплоты.

Рассмотрим задачу о влиянии мгновенного плоского сосредоточенного теплового источника в нелинейной среде с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся в зависимости от температуры по степенному закону, если в нагретой среде происходит объемное поглощение теплоты, удельная мощность которого в каждой точке среды пропорциональна значению температуры в данный момент времени. Математическая модель такого процесса соответствует задаче Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с младшим членом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) - p\, u, \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ u(x,\, 0) = Q\, \delta(x). \end{cases} \tag{8.45}$$

Здесь $p = \text{const} \geqslant 0$ – коэффициент поглощения. При $p = 0$ задача (8.45) переходит в рассмотренную выше задачу (8.27).

Поглощение энергии в объеме нелинейной среды приводит к уменьшению интегральной тепловой (внутренней) энергии среды. Поэтому при интегрировании (8.45) по пространственному переменному x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ находим

$$\frac{dJ}{dt} = -p\,J, \tag{8.46}$$

где $J(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\,t)\,dx$.

Так как

$$J(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,\,0)\,dx = Q\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = Q,$$

то, интегрируя уравнение (8.46), получаем

$$J(t) = Q\,e^{-pt}$$

Для решения задачи (8.45) перейдем с помощью преобразования

$$u(x,\,t) = v(x,\,t)\,e^{-pt} \tag{8.47}$$

к новой функции $v(x,\,t)$. Тогда уравнение для v принимает вид

$$e^{p\sigma t}\,\frac{\partial v}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(v^\sigma\,\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1.$$

Вводя новое независимое переменное (преобразованное время) по правилу

$$\tau = \tau(t) \equiv \frac{1 - e^{-p\sigma t}}{p\sigma}, \quad \tau \in \left[0,\,\frac{1}{p\sigma}\right), \tag{8.48}$$

получаем для функции $v(x,\,\tau)$ задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \tau} = a^2\,\dfrac{\partial}{\partial x}\left(v^\sigma\,\dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \quad 0 < \tau < \dfrac{1}{p\sigma}, \quad x \in \mathfrak{R}^1; \\ v(x,\,0) = Q\,\delta(x). \end{cases} \tag{8.49}$$

С точностью до обозначения временного переменного задача (8.49) соответствует решенной выше задаче (8.27) о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в нелинейной среде без объемного поглощения. Единственное отличие состоит в том, что задача (8.49) сформулирована на конечном "временном" интервале. Поэтому, использовав соотношение (8.39) и проведя обратное преобразование переменных, можно записать решение исходной задачи (8.45) в виде

$$u(x,\, t) = v(x,\, \tau(t))\, e^{-pt}, \tag{8.50}$$

где

$$v(x,\, \tau) = \begin{cases} U(\tau)\left[1 - \left(\dfrac{x}{x_0(\tau)}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & |x| < x_0(\tau); \\ 0, & |x| \geqslant x_0(\tau). \end{cases} \tag{8.51}$$

Зависимости $U(\tau)$ и $x_0(\tau)$ в (8.51) определены формулами (8.40) и (8.41), в которых время t следует заменить на τ, понимая под $\tau = \tau(t)$ преобразованное по закону

$$\tau(t) = \tau_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right), \quad \tau_m = \frac{1}{p\,\sigma}, \tag{8.52}$$

временное переменное. При этом существенно, что преобразование $t \to \tau$ отображает полубесконечный интервал $[0,\, +\infty)$ по переменному t в ограниченный отрезок $[0,\, \tau_m)$ по переменному τ.

Финитное решение (8.50) задачи (8.45) представляет собой фронтовое решение, описывающее распространение тепловой волны от мгновенного сосредоточенного источника с конечной скоростью перемещения фронтов $x = \pm x_0(\tau(t))$. Но главную особенность этого решения можно обнаружить, если проанализировать законы движения фронтов тепловой волны. Из этого анализа следует, что функция $u(x,\, t)$ в любой момент времени $t > 0$ равна нулю вне области $|x| < L(t)$, где

$$L(t) = L_m\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_m}}\right)^{\frac{1}{\sigma+2}}; \tag{8.53}$$

$$L_m = \eta_0\left(Q^\sigma\, a^2 \tau_m\right)^{\frac{1}{\sigma+2}}. \tag{8.54}$$

Так как $L(t) \to L_m < \infty$ при $t \to \infty$, то тепловые возмущения от источника проникают в нелинейную среду с объемным поглощением лишь на конечную глубину даже за бесконечный промежуток времени. Тепловые возмущения оказываются локализованными в ограниченной пространственной области. Как видно на рис. 8.4, на плоскости состояний (x, t) заштрихованная область возмущений, где $u > 0$, заключена в полуполосе, конечная ширина которой $2L_m$. При этом величина L_m, определяющая размер области локализации тепловых возмущений, зависит от определяющих параметров задачи в соответствии с выражением (8.54). В частности, размер области пространственной локализации увеличивается с ростом мощности теплового источника Q и уменьшается с увеличением коэффициента поглощения p.

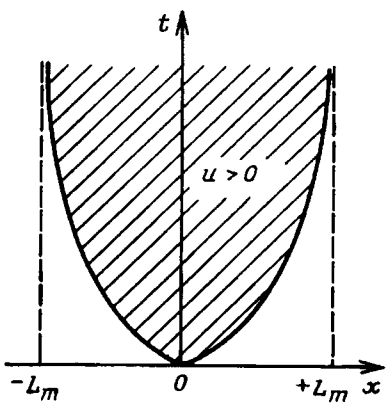


Рис. 8.4

Эффект пространственной локализации тепловых возмущений в рассмотренной задаче обусловлен объемным поглощением тепловой энергии. Действительно, если $p \to 0$, то $\tau_m \to \infty$ и, как следует из выражения (8.54), $L_m \to \infty$, т.е. в среду без объемного поглощения тепловые возмущения проникают неограниченно далеко.

Возможность создания условий, когда удержание разогретой среды в ограниченной области пространства можно осуществить за счет внутренних механизмов нелинейного процесса теплопроводности, является принципиально новым выводом, вытекающим из анализа математической модели (8.45) нелинейного процесса теплопроводности. Реализация таких условий является, в частности, одной из практически важных задач в проблеме управляемого термоядерного синтеза.

Отметим, что своеобразный режим метастабильной локализации тепловых возмущений может наблюдаться и в отсутствие в среде объемного поглощения теплоты. В этом режиме локализации фронт тепловой волны остается неподвижным в течение некоторого конечного промежутка времени. Такая локализация тепловых возмущений наблюдается при нагреве нелинейной среды в режиме с "обострением", когда температура граничной поверхности растет неограниченно за конечный промежуток времени. Такую локализацию теплового воздействия в режиме с обострением иллюстрирует следующая краевая задача нелинейной теплопроводности в полупространстве:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u^\sigma \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad 0 < t < T, \quad x > 0; \\ u(x,\,0) = A_0\, T^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, \quad x > 0; \\ u(0,\,t) = A_0\,(T-t)^{-\frac{1}{\sigma}}, \quad 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.55}$$

Здесь $A_0 = \mathrm{const} > 0$; $x_0 = \left[\dfrac{2A_0^\sigma a^2(\sigma+2)}{\sigma}\right]^{1/2}$.

Параметр T в задаче (8.55) назовем временем обострения процесса разогрева нелинейной среды, учитывая, что $u(0,\,t) \to \infty$ при $t \to T$.

Задача (8.55) имеет простое по форме решение в разделяющихся переменных:

$$u(x,\,t) = \begin{cases} A_0\,(T-t)^{-\frac{1}{\sigma}}\left(1 - \dfrac{x}{x_0}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant x < x_0, \quad 0 \leqslant t < T; \\ 0, \qquad x \geqslant x_0, \quad 0 \leqslant t < T. \end{cases} \tag{8.56}$$

Так как $u(x,\,t) = 0$ при всех $t \in [0,\,T)$ для любого $x \geqslant x_0$, то фронт теплового возмущения $x = x_0$, на котором равны нулю температура и тепловой поток, отделяет нагретую среду от холодной. Фронт неподвижен, несмотря на неограниченный

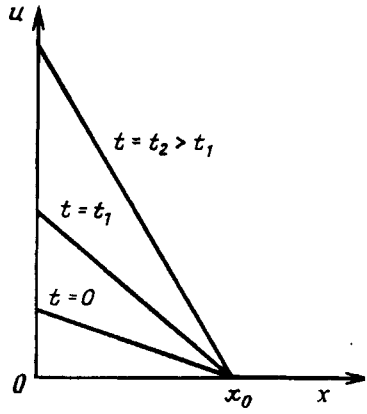


Рис. 8.5

рост температуры в области тепловых возмущений при $t \to T$. В течение промежутка времени $[0, T)$ тепловые возмущения от нагретой стенки локализованы в пространственной области $0 < x < x_0$ конечных размеров.

Решение (8.56) можно назвать остановившейся на конечное время тепловой волной. Качественный вид локализованных температурных профилей такой тепловой структуры в различные моменты времени интервала $[0, T)$ для среды с показателем нелинейности $\sigma = 2$ представлен на рис. 8.5.

8.4. Задача нелинейной теплопроводности с объемным поглощением

Рассмотрим еще одну задачу нелинейной теплопроводности, имеющую точное решение в аналитической форме. Пусть в нелинейной среде происходят эндотермические процессы, удельная мощность которых зависит от температуры степенным образом. Нестационарный процесс теплопроводности в такой среде с объемным поглощением теплоты описывается квазилинейным уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div}(u^\sigma \operatorname{grad} u) - p u^\nu, \quad t > 0, \quad M \in \mathfrak{R}^N. \qquad (8.57)$$

Здесь $u(M, t)$ – температура; $p = \text{const} > 0$ – параметр поглощения, а значение $N = 1, 2, 3$ определяет размерность пространства, в котором происходит исследуемый процесс.

Запишем модель задачи о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в среде с поглощением, если $\sigma < 1$, а показатель степени $\nu = 1 - \sigma$. Учитывая симметрию такой задачи (плоскую для $N = 1$, осевую для $N = 2$ и центральную для $N = 3$), сформулируем соответствующую *задачу Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{r^{N-1}} \dfrac{\partial}{\partial r} \left(r^{N-1} u^{\sigma} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) - p\, u^{1-\sigma}, \ t > 0, \ r \geqslant 0; \\ u(r, 0) = Q\, \delta_N(M), \end{cases} \tag{8.58}$$

где радиальная пространственная координата $r \geqslant 0$ для случаев $N = 2$ и $N = 3$ и $r = |x|$ для $N = 1$. Параметр a^2 в уравнении мы положили равным единице, что всегда можно сделать соответствующим выбором масштабов времени или пространственного переменного.

С учетом конечной скорости распространения тепловых возмущений в нелинейной среде будем искать решение задачи (8.58) в виде фронтового решения

$$u(r, t) = \begin{cases} A(t) \left[l(t) - r^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}}, & r^2 < l(t); \\ 0, & r^2 \geqslant l(t), \end{cases} \tag{8.59}$$

где $A(t)$ и $l(t)$ – функции, подлежащие определению.

Подставив предполагаемую форму решения (8.59) в уравнение (8.58), получим

$$\left(\frac{dA}{dt} + 2N\, \sigma^{-1} A^{1+\sigma} \right) \left[l(t) - r^2 \right]^{\frac{1}{\sigma}} +$$

$$+ \left(\sigma^{-1} A \frac{dl}{dt} + pA^{1-\sigma} - 4\sigma^{-2} A^{1+\sigma} r^2 \right) \left[l(t) - r^2 \right]^{\frac{1}{\sigma} - 1} = 0. \tag{8.60}$$

Можно заметить, что это соотношение приводится к виду

$$S(t)\left[l(t)-r^2\right]^{\frac{1}{\sigma}}=0, \tag{8.61}$$

если предположить, что

$$\sigma^{-1}A\,\frac{dl}{dt}+p\,A^{1-\sigma}-4\sigma^{-2}\,A^{1+\sigma}r^2=4\sigma^{-2}\,A^{1+\sigma}\left\{l(t)-r^2\right\},$$

т.е.

$$\sigma^{-1}A\,\frac{dl}{dt}+p\,A^{1-\sigma}=4\sigma^{-2}A^{1+\sigma}l. \tag{8.62}$$

Тогда

$$S(t)=\frac{dA}{dt}+2\sigma^{-2}\,(N\sigma+2)\,A^{1+\sigma}. \tag{8.63}$$

Так как условие (8.61) должно выполняться для любых r и t, то это возможно лишь при $S(t)=0$. С учетом формулы (8.63) это условие приводит к дифференциальному уравнению для определения функции $A(t)$:

$$\frac{dA}{dt}+2\sigma^{-2}\,(N\sigma+2)\,A^{1+\sigma}=0. \tag{8.64}$$

Для обеспечения слабой сходимости решения в форме (8.59) при $t\to 0$ к дельтаобразному начальному распределению необходимо, чтобы $l(t)\to 0$, а $A(t)\to\infty$ при $t\to 0$.

Разделяя переменные в уравнении (8.64), интегрируя и полагая константу интегрирования равной нулю, находим решение

$$A(t)=\left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}}t^{-\frac{1}{\sigma}}, \tag{8.65}$$

неограниченно возрастающее при $t\to 0$.

Теперь, используя соотношение (8.62), для функции $l(t)$ приходим к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dl}{dt}-2\,(N\sigma+2)^{-1}\,t^{-1}l=-2p\,(N\sigma+2)\,t. \tag{8.66}$$

Общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения первого порядка находим как сумму общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. В результате получаем

$$l(t) = C\,t^{\frac{2}{N\sigma+2}} - \frac{(N\sigma+2)^2}{N\sigma+1}\,p\,t^2, \quad C = \text{const}. \tag{8.67}$$

Таким образом, с учетом уравнений (8.59), (8.65) и (8.67) решение исходной задачи (8.58) можно записать в форме фронтового решения

$$u(r,\,t) = \begin{cases} U(t)\left[1 - \left(\dfrac{r}{r_+(t)}\right)^2\right]^{\frac{1}{\sigma}}, & 0 \leqslant r < r_+(t); \\ 0, \quad r \geqslant r_+(t), \end{cases} \tag{8.68}$$

где

$$U(t) = \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)\,t}\right]^{\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{2}{\sigma}}(t); \tag{8.69}$$

$$r_+^2(t) = C\,t^{\frac{2}{N\sigma+2}} - \frac{(N\sigma+2)^2}{N\sigma+1}\,p\,t^2. \tag{8.70}$$

Значение константы C в формуле (8.70) можно найти из соотношения

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_0^{r_+(t)} u(r,\,t)\,K(N)\,r^{N-1}\,dr = Q,$$

$$K(N) = \begin{cases} 2 \text{ при } N = 1; \\ 2\pi \text{ при } N = 2; \\ 4\pi \text{ при } N = 3, \end{cases} \tag{8.71}$$

являющегося следствием начального условия задачи Коши (8.58). С учетом выражений (8.68) – (8.70) соотношение (8.71)

преобразуется к виду

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{N\sigma+2}{\sigma}}(t) \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \times$$

$$\times K(N) \int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{N-1}\, d\xi = Q. \quad (8.72)$$

Учитывая, что

$$\lim_{t\to 0} t^{-\frac{1}{\sigma}} r_+^{\frac{N\sigma+2}{\sigma}}(t) = C^{\frac{N\sigma+2}{2\sigma}},$$

а значение интеграла

$$\int_0^1 (1-\xi^2)^{\frac{1}{\sigma}} \xi^{N-1}\, d\xi = \frac{1}{2} B\Big(\frac{N}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\Big)$$

выражается через ***бета-функцию***

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

из выражения (8.72) находим значение константы

$$C =$$

$$= Q^{\frac{2\sigma}{N\sigma+2}} \left\{ \left[\frac{\sigma}{2(N\sigma+2)}\right]^{\frac{1}{\sigma}} \frac{K(N)}{2} B\Big(\frac{N}{2}, \frac{\sigma+1}{\sigma}\Big) \right\}^{-\frac{2\sigma}{N\sigma+2}}. \quad (8.73)$$

Таким образом, точное решение задачи (8.58) имеет вид (8.68), где $U(t)$ и $r_+(t)$ определены соотношениями (8.69) и (8.70) с константой C, которая находится по формуле (8.73). Найденное решение допускает предельный переход $p \to 0$. Полагая в уравнении (8.70) $p = 0$, получаем решение задачи о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в нелинейной среде без объемного поглощения. Для $N = 1$ это решение было построено нами ранее [см. формулы (8.39) – (8.41)].

Дадим физическую интерпретацию решения (8.68). Оно описывает эволюцию тепловой структуры конечных пространственных размеров, которую мы будем называть тепловым импульсом. В любой момент времени $t > 0$ существует фронт теплового импульса $r = r_+(t)$, отделяющий область тепловых возмущений от невозмущенной области, куда тепловые возмущения еще не дошли и где $u = 0$.

Проанализируем характер движения фронта теплового импульса. Для этого запишем уравнение (8.70) в виде

$$r_+(t) = \sqrt{C}\, t^{\frac{1}{N\sigma+2}} \left[1 - \left(\frac{t}{t_m}\right)^{\delta}\right]^{1/2}, \quad t \in [0,\, t_m], \tag{8.74}$$

где $\delta = \dfrac{2N\sigma + 1}{N\sigma + 2}$, $t_m = \left[\dfrac{C\delta}{2p\,(N\sigma + 2)}\right]^{\frac{1}{\delta}}$. Качественный вид зависимости (8.74) представлен на рис. 8.6.

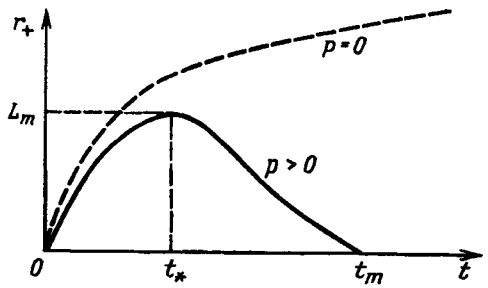


Рис. 8.6

На начальной стадии эволюции теплового импульса механизм тепловой диффузии является определяющим и пространственный размер теплового импульса увеличивается с течением времени. В среде распространяется ***волна разогрева***. Затем скорость движения фронта теплового импульса уменьшается, и при $t = t_*$, где

$$t_* = \left[\frac{C\delta}{2p\,(N\sigma + 2)^2}\right]^{\frac{1}{\delta}} = \frac{t_m}{(N\sigma + 2)^{\frac{1}{\delta}}},$$

фронт останавливается, проникнув в нелинейную среду с объемным поглощением лишь на конечную глубину.

При $t > t_*$ объемное поглощение тепловой энергии становится доминирующим фактором в балансе энергии, и волна разогрева сменяется ***волной охлаждения***, когда ширина теплового импульса уменьшается. Фронт теплового импульса изменяет направление движения, и в момент времени $t = t_m$ тепловой импульс стягивается в точку, прекращая свое существование. Тепловой импульс в среде с объемным поглощением тепловой энергии существует конечное время, т.е. для $t > t_m$ в любой точке пространства $u = 0$. Такую локализацию тепловых возмущений с конечным временем их существования в нелинейной среде с поглощением естественно назвать пространственно-временной локализацией.

При $p = 0$, т.е. в отсутствие объемного поглощения теплоты, из уравнения (8.70) следует монотонный степенной рост ширины теплового импульса (штриховая линия на рис. 8.6). Тепловые возмущения в этом случае проникают в среду неограниченно далеко.

Полученные соотношения можно рассматривать и при $p < 0$, когда в объеме среды протекают экзотермические процессы, приводящие к выделению тепловой энергии. В такой нелинейной среде с объемными тепловыми источниками фронт теплового импульса распространяется с конечной скоростью, однако ширина теплового импульса в соответствии с соотношением (8.70) при $p < 0$ увеличивается.

8.5. Уравнение типа "реакция – диффузия"

Моделирование ряда процессов в физических, химических и биологических системах приводит к решению краевых задач для систем квазилинейных уравнений вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\sum_{j=1}^{I} D_{ij} \operatorname{grad} u_j\right) + f_i(u_1, u_2, \ldots, u_I, M, t), \qquad (8.75)$$

где $i = 1, 2, \ldots, I$; $t > 0$; $M \in \mathfrak{R}^N$; $N = 1, 2, 3$.

Уравнения такого типа описывают нестационарные диффузионно-кинетические процессы в многокомпонентных распределенных системах, т.е. эволюцию широкого класса нелинейных активных систем с диффузией. Математические модели, в основе которых лежат уравнения вида (8.75), широко используются в биологии, экологии, экономике. Такими уравнениями описывают распространение нервных импульсов, волн эпидемий, распространение популяций растений и животных, а также другие эволюционные процессы.

Особенно широко системы уравнений вида (8.75) используют в химической кинетике при описании процессов типа "реакция – диффузия". Поэтому коэффициенты D_{ij} в уравнениях (8.75) называют коэффициентами собственной ($i = j$) и взаимной ($i \neq j$) диффузии. Младшие члены уравнений при этом описывают кинетические процессы в системе, т.е. взаимодействие (реакции) всех I компонентов такой системы со скоростью, зависящей от концентрации компонентов. Простейшим примером функций f_i, описывающих кинетику процессов, являются

$$f_i = k_i\, u_1^{\alpha_{i1}}\, u_2^{\alpha_{i2}} \cdots u_I^{\alpha_{iI}}, \quad \alpha_{ij} = \text{const} > 0. \tag{8.76}$$

Именно таким образом выражаются скорости химических реакций через концентрации реагирующих веществ по закону действующих масс. При этом коэффициенты k_i являются константами скоростей реакций, а α_{ij} – стехиометрическими коэффициентами.

Точные решения задач для уравнений вида (8.75) в общем случае найти не удается из-за нелинейностей, обусловленных младшими членами уравнений. Однако в частном случае двухкомпонентной системы реагирующих веществ ($I = 2$), когда $D_1 = D_2 = D > 0$, $k_1 = -k_2 = k > 0$ и $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 1$, т.е. для нелинейной системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k\,u_1 u_2; \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = D\,\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - k\,u_1 u_2, \end{cases} \tag{8.77}$$

можно найти точное аналитическое решение в области $\mathfrak{R}^2_+ = \{(x, t)\colon\ -\infty < x < +\infty, t > 0\}$. Это решение соответствует волнам концентраций со стационарными профилями, распространяющимися с одинаковой скоростью.

Действительно, будем искать решение системы (8.77) в виде $u_1 = u_1(\xi)$ и $u_2 = u_2(\xi)$, где $\xi = x + vt$, а $v = \mathrm{const} > 0$. Тогда система (8.77) преобразуется к виду

$$\begin{cases} v\,\dfrac{du_1}{d\xi} - D\,\dfrac{d^2u_1}{d\xi^2} = k\,u_1u_2; \\ v\,\dfrac{du_2}{d\xi} - D\,\dfrac{d^2u_2}{d\xi^2} = -k\,u_1u_2. \end{cases} \tag{8.78}$$

В области $-\infty < \xi < +\infty$ рассмотрим функцию

$$\gamma(\xi) = \left(\frac{e^{\alpha\xi}}{1 + e^{\alpha\xi}}\right)^2 \equiv \left(\frac{1 + \operatorname{th}\dfrac{\alpha\xi}{2}}{2}\right)^2,$$

зависящую от параметра $\alpha = \mathrm{const} > 0$. Дифференцируя эту функцию, находим, что

$$\frac{d\gamma}{d\xi} = -2\alpha\gamma\left(\gamma^{\frac{1}{2}} - 1\right)$$

и

$$\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2\gamma\left(\gamma^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(\gamma^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\right).$$

Следовательно,

$$v\,\frac{d\gamma}{d\xi} - D\,\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 D\gamma\left(1 - \gamma^{\frac{1}{2}}\right)\left(A + \gamma^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $A = \dfrac{v}{3\alpha D} - \dfrac{2}{3}$.

Если теперь параметр v, определяющий скорость волн, выбрать равным $v = 5\alpha D$, то при этом получим $A = 1$ и

$$v\,\frac{d\gamma}{d\xi} - D\,\frac{d^2\gamma}{d\xi^2} = 6\alpha^2 D\gamma\,(1 - \gamma).$$

Из этого соотношения следует, что если параметр α выбрать из условия $6\alpha^2 D = k$, т.е. считать, что $\alpha = \sqrt{k/(6D)}$ и $v = 5\sqrt{kD/6}$, то система (8.78) имеет решение $u_1 = \gamma(\xi)$ и $u_2 = 1 - \gamma(\xi)$.

Возвращаясь к переменным x и t, запишем найденное решение системы уравнений "реакция - диффузия" (8.77) в виде

$$u_1(x, t) = \frac{1}{4}\left[1 + \operatorname{th}\sqrt{\frac{k}{24D}}\left(x + 5\sqrt{\frac{kD}{6}}\,t\right)\right]^2; \qquad (8.79)$$
$$u_2(x, t) = 1 - u_1(x, t).$$

Это решение описывает стационарные волны концентраций компонентов, распространяющиеся с постоянной скоростью $v = 5\sqrt{kD/6}$. При этом пространственная область, занятая первым веществом, увеличивается, а область, занятая вторым веществом, - уменьшается. Это согласуется с физической моделью процесса (8.77), ибо кинетика процесса такова, что происходит рождение первой компоненты и уничтожение второй при их взаимодействии.

Рассмотрим теперь один из приближенных аналитических методов решения краевой задачи в области $\Omega = \{(x, t)\colon 0 \leqslant x \leqslant l,\ t \geqslant 0\}$, когда требуется найти решение системы I одномерных квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + f_1(u_1, u_2, \ldots, u_I, x, t);\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + f_2(u_1, u_2, \ldots, u_I, x, t);\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial u_I}{\partial t} &= D_I \frac{\partial^2 u_I}{\partial x^2} + f_I(u_1, u_2, \ldots, u_I, x, t),
\end{aligned} \qquad (8.80)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i(x, 0) = U_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad i = 1, 2, \ldots, I \qquad (8.81)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \cdots = \frac{\partial u_I}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \\ &\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} = \cdots = \frac{\partial u_I}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \end{aligned} \tag{8.82}$$

Задачу (8.80) - (8.82) можно интерпретировать, в частности, как задачу, моделирующую нестационарный процесс в химическом реакторе с непроницаемыми стенками. Ее приближенное решение найдем, проведя дискретизацию уравнений (8.80) по временному переменному. Такой метод с переходом к конечным разностям в уравнении лишь по одному переменному называют ***методом прямых***, или ***методом Роте***. Сходимость этого метода доказана в различных классах гладких и обобщенных решений для широкого класса нелинейностей в уравнениях системы (8.80).

Опуская доказательство сходимости и оценки погрешности метода, изложим саму схему построения достаточно простого алгоритма приближенного аналитического решения задачи (8.80) - (8.82). Основная идея *метода прямых* состоит в том, чтобы заменить оператор дифференцирования по временному переменному разностным отношением, считая

$$\left.\frac{\partial u_i}{\partial t}\right|_{t=t_k} = \frac{u(x,\, t_k) - u(x,\, t_{k-1})}{\tau} + O(\tau). \tag{8.83}$$

Подставляя (8.83) в систему (8.80) и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получаем полудискретный аналог задачи (8.80) - (8.82) в виде последовательности ($k = 1, 2, \ldots$) дифференциально-разностных уравнений для $i = 1, 2, \ldots, I$:

$$D_i \frac{d^2 u_i^{(k)}}{dx^2} - \tau^{-1} u_i^{(k)}(x) = -\tau^{-1} u_i^{(k-1)}(x) - F_i^{(k)}(x) \tag{8.84}$$

с граничными условиями

$$\left.\frac{du_i^{(k)}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{du_i^{(k)}}{dx}\right|_{x=l} = 0. \tag{8.85}$$

При этом на каждом временном слое в младших членах f_i уравнений (8.80) значения функций $u_1, u_2, \ldots, u_I$ взяты с предыдущего временного слоя, т.е.

$$F_i^{(k)}(x) = f_i\Big(u_1^{(k-1)}(x),\, u_2^{(k-1)}(x), \ldots, u_I^{(k-1)}(x),\, x,\, t_{k-1}\Big).$$

Итак, с помощью уравнений (8.84) с учетом условия (8.85) можно последовательно находить функции $u_i^{(k)}(x)$ для $k = 1, 2, \ldots$, являющиеся приближениями искомых решений $u_i(x, t)$ задачи (8.80) - (8.82) на временных слоях $t = t_k$. При этом для каждого значения индекса i задачу (8.84), (8.85) можно решать независимо. На первом шаге при вычислении $F_i^{(1)}(x)$ в качестве $u_i^{(0)}(x)$ следует взять начальные распределения $U_i(x)$.

Для каждого значения i решение дифференциального уравнения (8.84), удовлетворяющее граничным условиям (8.85), будем искать в форме разложения в тригонометрический ряд Фурье по системе ортогональных на интервале $0 < x < l$ функций

$$Z_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Записав это разложение в виде

$$u_i^{(k)}(x) = \frac{a_{i0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{in}^{(k)} \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{8.86}$$

укажем способ нахождения коэффициентов $a_{in}^{(k)}$. Для этого функцию $F_i^{(k)}(x)$, входящую в уравнение (8.84), разложим в тригонометрический ряд Фурье

$$F_i^{(k)}(x) = \frac{\varphi_{i0}^{(k)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in}^{(k)} \cos\frac{n\pi x}{l} \tag{8.87}$$

с коэффициентами, вычисляемыми по формуле Эйлера – Фурье,

$$\varphi_{in}^{(k)} = \frac{2}{l}\int\limits_0^l F_i^{(k)}(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n = 0,\,1,\,2,\ldots$$

Подставляя разложения (8.86) и (8.87) в уравнение (8.84), получаем

$$D_i\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a_{in}^{(k)} + \frac{1}{\tau}\,a_{in}^{(k)} = \frac{1}{\tau}\,a_{in}^{(k-1)} + \varphi_{in}^{(k)},$$

откуда находим искомые коэффициенты

$$a_{in}^{(k)} = \frac{a_{in}^{(k-1)}}{\tau D_i\,\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2} + 1} + \frac{\tau\,\varphi_{in}^{(k)}}{\tau D_i\,\dfrac{\pi^2 n^2}{l^2} + 1}. \tag{8.88}$$

Таким образом, приближенное решение задачи (8.80) – (8.82) на временных слоях $t = t_k = k\tau$, $k = 1, 2, \ldots$ найдено в форме разложения функций $u_i^{(k)}(x) \simeq u_i(x, t_k)$ в тригонометрические ряды Фурье (8.86) с коэффициентами $a_{in}^{(k)}$, которые определены соотношениями (8.88).

Реализация алгоритма (8.86) – (8.88) связана с нахождением коэффициентов Фурье функций $F_i^{(k)}(x)$, пересчитываемых на каждом шаге по k. Эта задача может быть решена на ЭВМ с использованием стандартных программ нахождения коэффициентов Фурье заданных функций.

С помощью предложенного алгоритма проведем расчет и проанализируем некоторые свойства решения задачи (8.80) – (8.82) для $I = 2$, если

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(u_1, u_2) = A - (B+1)\,u_1 + u_1^2 u_2; \\ f_2 &= f_2(u_1, u_2) = Bu_1 - u_1^2 u_2, \end{aligned} \tag{8.89}$$

где A и B – некоторые положительные константы.

Такая диффузионно-кинетическая модель была предложена брюссельской школой И. Пригожина и получила название "брюсселятор". Эта модель описывает превращение двух компонентов X и Y в некотором химическом реакторе с непроницаемыми стенками, если рождение и уничтожение компонентов в реакторе происходит по следующей схеме:

$$A \xrightarrow{k_1} X; \quad B + X \xrightarrow{k_2} Y + D;$$

$$2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X + C; \quad X \xrightarrow{k_4} E,$$

где значения констант скоростей реакций указаны над стрелками процессов. При этом предполагается, что концентрации веществ A и B в реакторе поддерживаются постоянными, а вещества D, C и E некоторым образом удаляются. Кроме того, считается, что скорости обратных реакций значительно меньше скоростей прямых. При этих предположениях кинетические процессы в системе описываются уравнениями (8.89), где u_1 и u_2 - концентрации веществ X и Y соответственно.

Приведем некоторые результаты расчетов нестационарных процессов с использованием модели брюсселятора. Если значение константы B, пропорциональное концентрации этого вещества, не очень велико, то по истечении некоторого времени установления система выходит на пространственно однородные, т.е. не зависящие от пространственной координаты, стационарные решения $u_1 = \overline{u_1} = A$ и $u_2 = \overline{u_2} = B/A$, для которых $f_1(\overline{u_1}, \overline{u_2}) = f_2(\overline{u_1}, \overline{u_2}) = 0$.

Однако начиная с некоторого критического значения $B = B_k$ пространственно однородные решения $\overline{u_1}$ и $\overline{u_2}$ становятся неустойчивыми. Поэтому при $B > B_k$ по истечении определенного времени релаксации система выходит на немонотонные пространственно-периодические стационарные структуры, которые называются диссипативными структурами.

Пример диссипативных структур приведен на рис. 8.7, где представлены результаты расчетов по алгоритму (8.86) - (8.88) при следующих значениях определяющих параметров: $D_1 =$

$= 4,4 \cdot 10^{-3}$; $D_2 = 2,2 \cdot 10^{-3}$; $l = 1$; $A = 2,1$; $B = 5,2$. В качестве начальных распределений были выбраны пространственно однородные решения $U_1 = 2$ и $U_2 = 2,3$. При расчетах удерживалось $N = 21$ членов ряда (8.86). Для временного шага $\tau = 0,1$ выход на стационарное решение в виде диссипативных структур наблюдался при $k > 120$.

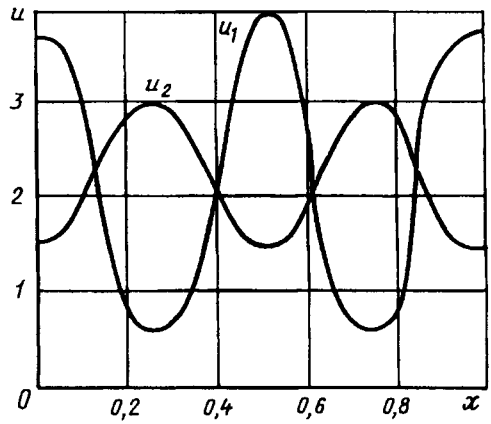


Рис. 8.7

Другой интересной особенностью модели (8.80) – (8.82) является возможность возникновения периодических колебаний концентраций веществ. Такие автоколебания в химических системах наблюдаются и экспериментально. В частности, одну из первых описанных в литературе автоколебательных химических реакций называют реакцией Белоусова – Жаботинского, которые наблюдали и объяснили периодическое изменение окраски раствора протеканием в нем химических реакций.

Итак, исследования математических моделей диффузионно-кинетических процессов показывают, что из-за нелинейности в многокомпонентных системах реагирующих веществ могут появляться упорядоченные, структурно-организованные состояния, а также состояния, изменяющиеся с определенной закономерностью и периодичностью. Эти состояния являются не-

равновесными и лежат вне термодинамической ветви, для которой характерны лишь стационарные бесструктурные состояния "тепловой смерти", соответствующие максимуму энтропии системы. Образование диссипативных структур относится к процессам упорядоченности и самоорганизации в неравновесных открытых физико-химических системах, которые представляют собой предмет изучения теории самоорганизации, или синергетики.

Вопросы и задачи

8.1. Сформулируйте постановку одномерной задачи о плавлении твердой фазы, занимающей полупространство $x > 0$, при наличии теплового потока, поступающего через поверхность $x = 0$.

8.2. Покажите, что задачу нелинейной теплопроводности в среде со степенными зависимостями теплоемкости и коэффициента теплопроводности от температуры можно свести к задаче для уравнения вида (8.26).

8.3. Используя теорию размерности и подобия, определите структуру решения сферически-симметричной задачи о влиянии мгновенного точечного источника, сообщающего нелинейной среде количество теплоты Q_0.

Ответ: $u(r, t) = \left(\dfrac{Q^2}{a^2 t}\right)^{\frac{\sigma}{2+3\sigma}} \Theta(\eta)$, $\eta = \dfrac{r}{\left(Q^\sigma a^2 t\right)^{\frac{1}{2+3\sigma}}}$, где $Q = Q_0/(\rho c)$.

8.4. Используя предельный переход в формуле (8.74), найдите скорость движения фронта сферической тепловой волны от мгновенного точечного теплового источника в нелинейной среде без объемного поглощения тепловой энергии.

Ответ: $v(t) = \text{const} \cdot t^{-\frac{1+3\sigma}{2+3\sigma}}$.

8.5. Составьте программу для ПЭВМ, реализующую алгоритм (8.86) – (8.88) для двухкомпонентной среды ($i = 1, 2$).

9. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

9.1. Уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова

Исследуя математическую модель процесса эволюции биологического вида в рамках предложенной Р. Фишером теории генотипов, А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский и Н.С. Пискунов в работе "Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме" (1937 г.) показали, что задача вытеснения одного биологического вида другим доминантным видом на некоторой территории может быть сведена к решению параболического уравнения с нелинейным младшим членом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,u(1-u), \quad t > 0, \quad x \in \mathfrak{R}^1. \tag{9.1}$$

Здесь $u(x,\,t) = \dfrac{N(x,\,t)}{N_m}$ – безразмерная концентрация (плотность) особей популяции, причем $0 \leqslant u \leqslant 1$; $k = \text{const} > 0$ – некоторый параметр задачи, который в биологической модели является мальтузианским параметром популяции.

Уравнение (9.1) называют ***уравнением Колмогорова – Петровского – Пискунова*** (или КПП). Это уравнение является частным случаем полулинейного уравнения вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u). \tag{9.2}$$

В уравнении (9.2) нелинейный младший член описывает объемные процессы генерации ($F > 0$) или поглощения ($F < 0$) в рассматриваемой системе. Если $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(0) > 0$, а $F'(1) < 0$, уравнение (9.2) называют уравнением типа КПП, ибо частным случаем такой зависимости, когда $F'(0) = k > 0$, является логистический закон генерации $F(u) = k\,u(1-u)$, соответствующий (9.1).

В биологической модели логистический закон можно объяснить следующим образом. В простой модели Мальтуса считалось, что темп роста численности популяции пропорционален числу особей в популяции в данный момент времени, т.е.

$$\frac{dN}{dt} = bN, \quad b = \text{const} > 0.$$

Такой закон приводит к неограниченному экспоненциальному росту численности: $N(t) = N_0 \exp(bt)$. В естественных условиях ограничение природных ресурсов (пищи, воды) приводит к тому, что существует некоторое критическое значение численности N_m, которое может обеспечить окружающая среда. Наличие такого механизма регуляции, зависящего от плотности, можно учесть, считая

$$\frac{dN}{dt} = b\left(1 - \frac{N}{N_m}\right) N.$$

В этом случае при приближении к критическому значению наступает насыщение, и рост численности популяции прекращается. В безразмерной форме для $u = N/N_m$ такой закон соответствует логистическому закону генерации в уравнении (9.1). Диффузионное слагаемое в уравнении (9.1) учитывает возможность миграции биологических особей в пространстве.

Полулинейное уравнение (9.2) называют ***уравнением Зельдовича***, если $F(u) > 0$ при $0 < u < 1$, $F(0) = F(1) = 0$, $F'(1) < 0$, но $F'(0) = 0$. Частным случаем такого уравнения является уравнение (9.2) с $F(u) = u^2(1-u)$, которое используется в теории горения для описания распространения пламени.

Если же функция $F(u)$ имеет три нуля на отрезке $[0, 1]$, т.е. $F(0) = F(\alpha) = F(1) = 0$, где $\alpha \in (0, 1)$, причем $F'(0) < 0$, $F'(\alpha) > 0$, а $F'(1) < 0$, то уравнение (9.2) называют ***уравнением Семенова***. Такое уравнение широко используется в математических моделях при описании автокаталитических цепных реакций.

Проведем анализ свойств решения уравнения (9.1) для следующей постановки задачи. Пусть в начальный момент време-

ни $t = 0$ функция $u = 0$ при $x < a$ и достигает своего максимального значения $u = 1$ при $x > b > a$. В частном случае $b = a$ такое начальное распределение концентрации представляет собой ступенчатую функцию Хевисайда.

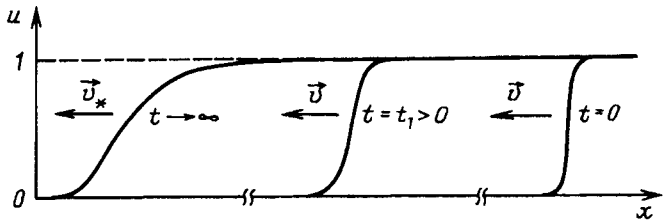


Рис. 9.1

Из такой постановки задачи очевидно, что вследствие процессов генерации и диффузии область плотностей, близких к единице, будет распространяться справа налево (рис. 9.1), увеличивая территорию, занятую доминантными особями. О таком нестационарном процессе можно говорить как о распространении волны концентрации. При этом следует ожидать, что нелинейная генерация при наличии диффузии по истечении достаточно большого промежутка времени сформирует некоторый стационарный профиль волны в переходной зоне, где $0 < u < 1$. Форма этого стационарного профиля не зависит от начального распределения концентрации в переходной зоне, и он перемещается из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией с некоторой характерной скоростью v_*.

Для того чтобы определить этот стационарный профиль нелинейной волны и ее скорость распространения, перейдем в движущуюся систему отсчета и будем искать решение уравнения (9.1) в форме простой бегущей волны

$$u(x, t) = \Theta(x + vt), \quad v = \text{const} > 0. \tag{9.3}$$

Тогда для функции $\Theta = \Theta(\xi)$, зависящей от переменного $\xi = x + vt$ специального вида, после подстановки (9.3) в (9.1) получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$v\,\frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + k\Theta\,(1 - \Theta), \quad 0 \leqslant \Theta \leqslant 1. \tag{9.4}$$

Это уравнение следует решать при выполнении физически очевидных условий

$$\begin{aligned} &\Theta \to 0, \quad d\Theta/d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty; \\ &\Theta \to 1, \quad d\Theta/d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty, \end{aligned} \tag{9.5}$$

вытекающих из постановки задачи.

Задача (9.4), (9.5) имеет бесчисленное множество решений с непрерывным спектром скоростей v, ограниченным снизу значением $v_* = 2\sqrt{k}$.

Для доказательства этого утверждения следует понизить порядок уравнения с помощью подстановки $p = d\Theta/d\xi$. Уравнение (9.4) при этом представляют в виде системы

$$\begin{aligned} &d\Theta/d\xi = p(\xi); \\ &dp/d\xi = v\,p - k\Theta\,(1-\Theta). \end{aligned} \tag{9.6}$$

Учитывая, что

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{dp}{d\Theta}\,\frac{d\Theta}{d\xi} = p\,\frac{dp}{d\Theta},$$

второе уравнение системы (9.6) можно записать в виде

$$p\,\frac{dp}{d\Theta} = v\,p - k\Theta\,(1-\Theta), \tag{9.7}$$

удобном для исследования на фазовой плоскости (Θ, p).

Таким образом, с учетом условий (9.5), решению уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова типа (9.3) соответствует траектория $p = p(\Theta)$ на фазовой плоскости, которая является интегральной кривой уравнения

$$\frac{dp}{d\Theta} = \frac{v\,p - k\Theta\,(1-\Theta)}{p} \tag{9.8}$$

и проходит через особые точки этого уравнения (0, 0) и (1, 0). При этом интегральная кривая должна лежать в полосе $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$ и не пересекать ось абсцисс вне концевых точек (рис. 9.2).

Покажем, что такая интегральная кривая может существовать только при $v > v_* = 2\sqrt{k}$. Действительно, с одной сторо-

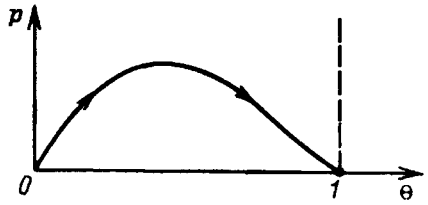


Рис. 9.2

ны, вблизи точки (0, 0), т.е. для $\Theta \ll 1$, искомую интегральную кривую можно аппроксимировать уравнением прямой $p = a\,\Theta$, где $a = \text{const} > 0$. С другой стороны, при $\Theta \ll 1$ уравнение (9.8) можно линеаризовать, если пренебречь квадратичными по Θ членами по сравнению с линейными. Тогда оно примет вид

$$\frac{dp}{d\Theta} \approx \frac{vp - k\Theta}{p}.$$

Подставляя сюда $p = a\Theta$, получаем для a квадратное уравнение

$$a^2 - va + k = 0.$$

Отсюда

$$a = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}\,.$$

Следовательно, условие существования вещественного a имеет вид

$$v \geqslant v_* = 2\sqrt{k}\,. \tag{9.9}$$

К такому же выводу можно прийти, исследуя особую точку (0, 0) уравнения при различных значениях параметров задачи v и k. Для этого линеаризуем систему (9.6) вблизи точки (0, 0). Тогда она примет вид линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$d\Theta/d\xi = p;$$
$$dp/d\xi = -k\Theta + vp.$$

Определитель матрицы коэффициентов такой системы

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -k & v \end{vmatrix} = k \neq 0.$$

Находя собственные значения этой матрицы из условия

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k & v - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

приходим к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 - v\lambda + k = 0.$$

Решая его, находим собственные значения

$$\lambda_{1,2} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} - k}\,.$$

Особая точка (0, 0) фазовой плоскости является неустойчивым узлом (рис. 9.3, *а*), если собственные значения λ_1 и λ_2 вещественны и имеют один знак, т.е. когда $v \geqslant 2\sqrt{k}$. Только из особой точки такого типа может выходить искомая интегральная кривая.

При $0 < v < 2\sqrt{k}$, когда λ_1 и λ_2 комплексны и не чисто мнимы, особая точка (0, 0) является неустойчивым фокусом (рис. 9.3, *б*). Выходящая из такой точки траектория обязательно пересечет ось абсцисс вблизи особой точки и попадет в область отрицательных значений Θ, т.е. покинет полосу $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$. Такая траектория не может быть искомой интегральной кривой.

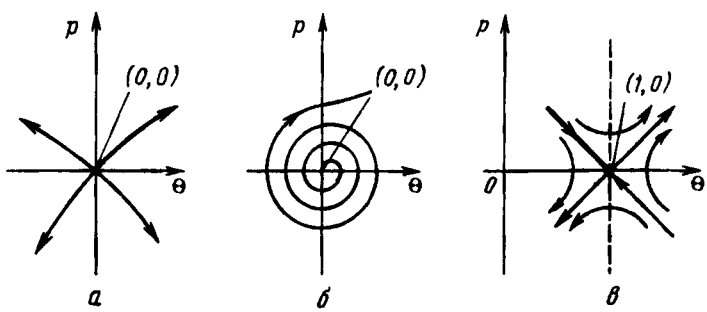


Рис. 9.3

Исследование точки (1, 0) фазовой плоскости показывает, что при $v \geqslant 2\sqrt{k}$ эта точка является седловой особой точкой (рис. 9.3, *в*), в которую под некоторым углом входит искомая интегральная кривая.

Докажем теперь, что для интегральной кривой рассматриваемого вида при $v \geqslant 2\sqrt{k}$ выполняются условия (9.5). Действительно, для этой кривой справедливы следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} &p = a\Theta + O(\Theta) \quad \text{при} \quad \Theta \to 0; \\ &p = c\,(1-\Theta) + O(1-\Theta) \quad \text{при} \quad \Theta \to 1, \end{aligned} \tag{9.10}$$

где a и c – некоторые положительные константы.

Вспомним, что $p = d\Theta/d\xi$ или $d\xi = d\Theta/p(\Theta)$. Интегрируя последнее соотношение, находим

$$\xi - \xi_0 = \int\limits_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{d\Theta}{p(\Theta)}, \quad 0 < \Theta_0 < 1.$$

Отсюда с учетом уравнения (9.7) следует, что $\xi \to -\infty$ при $\Theta \to 0$ и $\xi \to +\infty$ при $\Theta \to 1$.

Как было показано А.Н. Колмогоровым, И.Г. Петровским и Н.С. Пискуновым, волна, распространяющаяся с минимальной скоростью $v = v_* = 2\sqrt{k}$, обладает важным свойством устойчивости. Это свойство состоит в том, что любой начальный профиль $u(x, 0) = f(x)$, где $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $f(+\infty) = 1$, $f(-\infty) = 0$, а $f'(x) \geqslant 0$, по истечении достаточно большого промежутка времени всегда принимает форму стационарного профиля, движущегося со скоростью $v_* = 2\sqrt{k}$. Форму этого устойчивого стационарного профиля можно определить из решения уравнения (9.4) с $v = v_*$, удовлетворяющего условиям (9.5). Аналитического решения этой задачи при $v = v_*$ не найдено, однако она достаточно просто может быть решена численными методами.

Следовательно, для оценки скорости распространения нелинейных волн в процессах, описываемых уравнением (9.1), необходимо использовать значение $v_* = 2\sqrt{k}$. Примером таких волн могут служить волны распространения популяций растений и животных или волны эпидемий.

Важно отметить, что при одном значении v, близком к v_*, когда $v = 5\sqrt{k/6} \approx 1,02\,v_*$, точное решение уравнения (9.4), удовлетворяющее условиям (9.5), может быть найдено в аналитическом виде.

Действительно, введем в рассмотрение функцию

$$\omega(\xi;\,\alpha,\,\nu) = \left(\frac{e^{\alpha\xi}}{1+e^{\alpha\xi}}\right)^{\nu} \equiv \left(1+e^{-\alpha\xi}\right)^{-\nu}, \quad -\infty < \xi < +\infty,$$

которая при $\alpha > 0$ и $\nu > 0$ удовлетворяет условиям (9.5).

Дифференцированием находим, что

$$\frac{d\omega}{d\xi} = -\alpha\nu\omega\left(\omega^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$$

и

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} = \alpha^2\nu\,(\nu+1)\,\omega\left(\omega^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)\left(\omega^{\frac{1}{\nu}} - \frac{\nu}{\nu+1}\right).$$

Поэтому при действии на функцию ω оператором

$$\widehat{L} = v\,\frac{d}{d\xi} - \frac{d^2}{d\xi^2}$$

получим

$$\widehat{L}\omega = -\alpha^2\nu\,(\nu+1)\,\omega\left(\omega^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)\left(\omega^{\frac{1}{\nu}} + A\right),$$

где $A = \dfrac{v}{\alpha\,(\nu+1)} - \dfrac{\nu}{\nu+1}$.

Пусть $A = 1$, т.е. $v = (2\nu+1)\,\alpha$. Тогда имеем

$$\widehat{L}\omega = \alpha^2\nu\,(\nu+1)\,\omega\left(1 - \omega^{\frac{2}{\nu}}\right).$$

В частном случае, когда $\nu = 2$ и $v = 5\alpha$,

$$\widehat{L}\omega = 6\alpha^2\omega\,(1-\omega).$$

Отсюда следует, что функция $\Theta(\xi) = \omega(\xi;\,\sqrt{k/6}\,,\,2)$ является решением задачи (9.4), (9.5) при $v = 5\sqrt{k/6}$.

Можно заметить также, что если $A = 0$, т.е. $v = \nu\alpha$, то

$$\widehat{L}\omega = \alpha^2\nu\,(\nu+1)\,\omega^{\frac{1+\nu}{\nu}}\left(1 - \omega^{\frac{1}{\nu}}\right).$$

Следовательно, в частном случае, функция

$$u(x,\,t) = \omega\left(\xi;\,\sqrt{\frac{k}{2}},\,1\right) \equiv \left(1 + e^{-\sqrt{\frac{k}{2}}\xi}\right)^{-1},$$

где $\xi = x + \sqrt{\dfrac{k}{2}}\,t$, является решением уравнения Зельдовича

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\,u^2(1-u), \quad k = \text{const}.$$

Это решение представляет собой бегущую волну со стационарным профилем, распространяющуюся с постоянной скоростью $v = \sqrt{k/2}$. При этом вследствие объемной генерации возмущений область, где $u > 0$, расширяется с течением времени.

Отметим, что с помощью решений вида (9.3) уравнений (9.1) или (9.2) можно находить и исследовать асимптотические решения других нелинейных уравнений математической физики.

9.2. Уравнение Бюргерса

Волновые процессы являются эффективным средством передачи энергии и информации. Они широко используются в науке и технике. Поэтому исследование закономерностей распространения волн различной природы является важной и актуальной задачей.

При изучении процесса распространения плоских волн различной природы в качестве исходного соотношения выберем закон сохранения, записанный в универсальной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{9.11}$$

Здесь $u(x,\,t)$ – некоторая характеристика состояния среды, например плотность массы, импульса или энергии, а q – плотность потока, связанная с u и u_x некоторым функциональным соотношением $q = q(u,\,u_x)$, конкретный вид которого зависит от выбора физического механизма переноса массы, импульса или энергии.

В случае линейного конвективного механизма переноса $q = a\,u$, где a – некоторая постоянная. При этом уравнение (9.11) приводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{9.12}$$

решение которого

$$u(x,\,t) = f(x - at) \tag{9.13}$$

описывает волну неизменного профиля, распространяющуюся со скоростью a в положительном направлении оси Ox.

Если же $q = q(u)$, то мы переходим в область нелинейных волн, причем в первом приближении нелинейность конвективного механизма переноса можно учесть, считая

$$q = au + \frac{1}{2}\,bu^2, \quad a,\,b = \text{const}. \tag{9.14}$$

Подставив выражение (9.14) в (9.11), получим обобщенное уравнение (9.12) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a\,\frac{\partial u}{\partial x} + bu\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9.15}$$

Переходя к новым переменным $x' = x - at$ и $t' = bt$, преобразуя производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x'}\,\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t'}\,\frac{\partial t'}{\partial t} = -a\,\frac{\partial u}{\partial x'} + b\,\frac{\partial u}{\partial t'},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'}\,\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'},$$

и опуская штрихи у новых переменных, получаем нелинейное ***уравнение Римана***

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{9.16}$$

Это уравнение имеет решение, по форме аналогичное решению (9.13), если константу a в нем формально заменить на u. Такое решение

$$u(x,\, t) = f(x - ut) \tag{9.17}$$

описывает эволюцию нелинейной волны, профиль которой в начальный момент времени задан в виде $u(x,\, 0) = f(x)$.

Доказательство того, что формула (9.17) определяет решение нелинейного уравнения (9.16), можно провести прямыми вычислениями производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(-u - t\,\frac{\partial u}{\partial t}\right) f'; \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(1 - t\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) f'.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} =$$
$$= -uf' - t\,\frac{\partial u}{\partial t}\,f' + uf' - ut\,\frac{\partial u}{\partial x}\,f' = -tf'\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + tf'\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Формула (9.17) представляет собой неявное выражение для u. Анализ этой формулы позволяет выявить характерные свойства нелинейной волны, одним из которых является изменение формы волны при ее распространении. Действительно, как следует из (9.17), точки профиля волны, имеющие бо̀льшие значения ординаты, движутся с бо̀льшими скоростями (рис. 9.4, *а*). Поэтому "вершина" волны начинает обгонять остальные участки. В результате профиль нелинейной волны при распространении искажается так, что крутизна правого "склона " увеличивается (рис. 9.4, *б*). Наконец, наступает такой момент времени, когда происходит "опрокидывание " волны. После этого момента времени профиль волны, описываемый формулой (9.17),

становится многозначным, когда некоторым значениям координаты соответствуют три значения функции u (рис. 9.4, *в*).

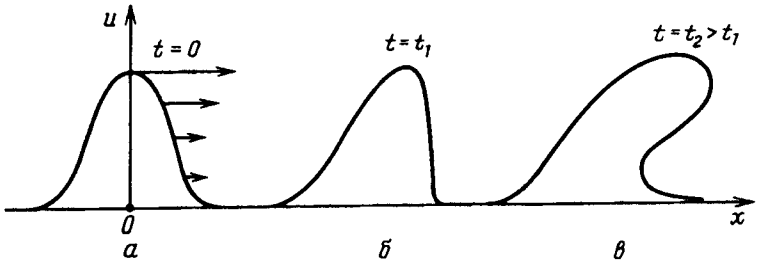


Рис. 9.4

Такая многозначность функции u в большинстве физических моделей не может быть обоснована. Чтобы придать такому решению физический смысл, можно поступить следующим образом. Многозначный непрерывный профиль нелинейной волны заменим профилем с разрывом (рис. 9.5), определяя его положение $x = s(t)$ так, чтобы разрыв отсекал области с равными площадями (заштрихованы на рисунке).

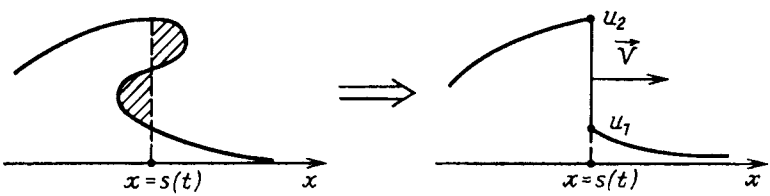


Рис. 9.5

Такое разрывное решение моделирует ***ударную волну***, распространяющуюся в сплошной среде, если под u понимать, например, плотность среды. При переходе через фронт ударной волны в направлении его движения плотность среды изменяется скачком от u_2 до u_1. Здесь и далее с учетом направления движения разрыва будем обозначать индексом "1" величины до точки разрыва, а индексом "2" – после точки разрыва. Будем считать также, что вне точки разрыва $x = s(t)$ функция $u(x, t)$ непрерывна вместе со своими первыми производными.

Проинтегрируем уравнение (9.13) по x от точки x_2 до точки x_1 ($x_2 < x_1$). Тогда после интегрирования получим

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_2}^{x_1} u(x,\,t)\,dx + \frac{1}{2}\left[u^2(x_1,\,t) - u^2(x_2,\,t)\right] = 0. \qquad (9.18)$$

Если точка разрыва $x = s(t)$ попадает в интервал $(x_2,\,x_1)$, то уравнение (9.18) следует записать, выделив точку разрыва. В этом случае

$$\frac{d}{dt}\left[\int\limits_{x_2}^{s(t)} u(x,\,t)\,dx + \int\limits_{s(t)}^{x_1} u(x,\,t)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[u^2(x_2,\,t) - u^2(x_1,\,t)\right]. \qquad (9.19)$$

Проведя в уравнении (9.19) дифференцирование интегралов с переменными пределами, получим

$$u(s^-,\,t)\,V + \int\limits_{x_2}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx - u(s^+,\,t)\,V + \int\limits_{s(t)}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial t}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[u^2(x_2,\,t) - u^2(x_1,\,t)\right], \qquad (9.20)$$

где $u(s^-,\,t) = u_2$ и $u(s^+,\,t) = u_1$ – предельные значения функции u слева и справа от точки разрыва; $V = ds/dt$ – скорость распространения разрыва.

Устремим теперь точки x_2 и x_1 слева и справа к точке разрыва $x = s(t)$. Поскольку производная $\partial u/\partial t$ ограничена в каждом из интервалов непрерывности, то при $x_2 \to s^-$ и $x_1 \to s^+$ интегралы в (9.20) обратятся в нуль. Тогда из уравнения (9.20) получим $(u_2 - u_1)\,V = \frac{1}{2}\,(u_2^2 - u_1^2)$, или

$$V = \frac{1}{2}\,(u_2 + u_1). \qquad (9.21)$$

Формула (9.21) определяет скорость распространения разрыва в некоторых относительных единицах измерения через значения плотности u слева и справа от точки разрыва.

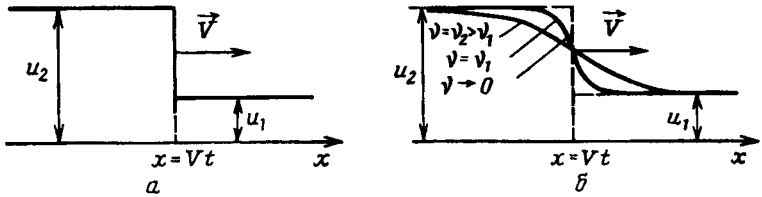


Рис. 9.6

Распространяющийся с конечной скоростью разрыв можно рассматривать как фронт ударной волны. Простейшим разрывным решением уравнения (9.16) является ударная волна сжатия ($u_2 > u_1$), имеющая форму прямоугольной ступеньки (рис. 9.6, *а*)

$$u(x,\, t) = \begin{cases} u_1 = \text{const}, & x > Vt; \\ u_2 = \text{const}, & x < Vt, \end{cases} \tag{9.22}$$

фронт которой распространяется с постоянной скоростью $V = (u_1 + u_2)/2$.

Если в механизме переноса кроме конвективной составляющей учесть и диффузионную составляющую плотности потока $q_д = -c\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $c = \text{const} > 0$, т.е. положить в законе сохранения (9.11)

$$q = au + \frac{1}{2}bu^2 - c\frac{\partial u}{\partial x},$$

то после несложных преобразований получим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \nu = \text{const} > 0. \tag{9.23}$$

Это уравнение в математической физике называют ***уравнением Бюргерса***.

При моделировании ударных волн, распространяющихся в сплошной среде, диффузионный член в правой части уравнения (9.23) появляется, если учесть эффекты вязкости при движении среды. Поэтому, исследуя свойства решения уравнения Бюргерса (9.23), мы можем качественно изучать влияние вязкости среды на структуру ударной волны.

Прежде всего найдем решение нелинейного уравнения Бюргерса (9.23) в виде бегущей волны с неизменным профилем, т.е. такое решение $u = u(\xi)$, которое зависит от переменного $\xi = x - Vt$, содержащего некоторую постоянную V, имеющую смысл скорости распространения волны.

Потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{aligned} &u \to u_2, \quad \frac{du}{d\xi} \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to -\infty; \\ &u \to u_1, \quad \frac{du}{d\xi} \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to +\infty. \end{aligned} \tag{9.24}$$

Такая постановка задачи позволяет исследовать структуру ударной волны сжатия (9.22) вблизи ее фронта с учетом влияния диффузионного механизма переноса (вязкости). При этом следует ожидать, что наличие диффузионного слагаемого в уравнении Бюргерса приведет к сглаживанию разрыва, и только при $\nu \to 0$ решение будет трансформироваться к виду (9.22) с крутым фронтом.

Действительно, профиль стационарной волны $u(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$-V\frac{du}{d\xi} + u\frac{du}{d\xi} = \nu\frac{d^2u}{d\xi^2}. \tag{9.25}$$

Интегрируя (9.25) один раз, имеем

$$-Vu + \frac{1}{2}u^2 + C = \nu\frac{du}{d\xi}. \tag{9.26}$$

Здесь C – постоянная интегрирования.

Выполняя условия (9.24), получаем

$$-Vu_1 + \frac{1}{2}u_1^2 + C = 0;$$

$$-Vu_2 + \frac{1}{2}u_2^2 + C = 0.$$

Отсюда находим

$$V = \frac{1}{2}(u_2 + u_1); \quad C = \frac{1}{2}u_1u_2. \tag{9.27}$$

Из выражений (9.21) и (9.27) следует, что диффузионный механизм переноса, т.е. вязкость среды, не изменяет стационарной скорости распространения ударной волны сжатия.

С учетом формул (9.27) запишем теперь уравнение (9.26) в виде

$$(u - u_1)(u - u_2) = 2\nu \frac{du}{d\xi}.$$

Отсюда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{d\xi}{2\nu} = \frac{du}{(u - u_1)(u - u_2)}. \tag{9.28}$$

Используя разложение на простые дроби

$$\frac{1}{(u - u_1)(u - u_2)} = \frac{1}{u_1 - u_2}\left[\frac{1}{u - u_1} + \frac{1}{u_2 - u}\right],$$

проинтегрируем уравнение (9.28), записав его решение в виде

$$\xi = \frac{2\nu}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - u}{u - u_1}, \quad u_2 < u < u_2. \tag{9.29}$$

Разрешая полученное соотношение относительно u, получаем

$$u = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + \exp\left(\dfrac{u_2 - u_1}{2\nu}\xi\right)}, \quad \xi = x - Vt. \tag{9.30}$$

Решение (9.30) уравнения Бюргерса (9.23) описывает структуру ударной волны с шириной переходной области $l = \dfrac{2\nu}{u_2 - u_1}$ (рис. 9.6, *б*). При $\nu \to 0$ ширина переходной области стремится к нулю и стационарный профиль волны (9.30) переходит в ступенчатый профиль (9.22).

Решение (9.30) можно записать также в виде

$$u(x, t) = V - A \operatorname{th}\left[\frac{A}{2\nu}(x - Vt)\right], \tag{9.31}$$

где $V = \dfrac{u_1 + u_2}{2}$; $A = \dfrac{u_2 - u_1}{2}$.

Важный результат для уравнения Бюргерса был получен Коулом и Хопфом, которые показали, что нелинейное уравнение Бюргерса (9.23) с помощью замены

$$u = -\frac{2\nu}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \equiv -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi \tag{9.32}$$

сводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{9.33}$$

Действительно, если в уравнении (9.33) перейти от функции φ к функции $\psi = -2\nu\ln\varphi$, то с учетом преобразований

$$\varphi = e^{-\frac{\psi}{2\nu}}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\frac{1}{2\nu}e^{-\frac{\psi}{2\nu}}\frac{\partial\psi}{\partial t};$$
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{4\nu^2}e^{-\frac{\psi}{2\nu}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2\nu}e^{-\frac{\psi}{2\nu}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

из (9.33) получим уравнение для функции ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}.$$

Продифференцировав это уравнение по x, запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Теперь, обозначив производную $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ через u, для функции

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial x} = -2\nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\varphi$$

получим уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Таким образом, с помощью замены Коула – Хопфа (9.32) каждое решение $\varphi(x, t)$ линейного уравнения теплопроводности (9.33) порождает решение $u(x, t)$ нелинейного уравнения Бюргерса (9.23).

Если начальное условие для уравнения теплопроводности (9.33) выбрать в форме

$$\varphi(x, 0) = \Phi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^x F(\xi)\,d\xi\right], \tag{9.34}$$

то для уравнения Бюргерса (9.23) соответствующее начальное условие будет иметь вид

$$u(x, 0) = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{9.35}$$

Решение уравнения теплопроводности (9.33) с начальным условием (9.34) может быть записано в форме интеграла Пуассона [см. формулу (2.74)]

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\eta)\,\exp\left[-\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta. \tag{9.36}$$

После подстановки $\Phi(\eta)$ из уравнения (9.34) в уравнение (9.36) получаем

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^\eta F(\xi)\,d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta,$$

откуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{(-1)}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-\eta)}{2\nu t}\,\exp\left[-\frac{1}{2\nu}\int_0^\eta F(\xi)\,d\xi - \frac{(x-\eta)^2}{4\nu t}\right] d\eta.$$

Тогда в силу соотношения (9.32) для $u(x, t)$ имеем формулу

$$u(x, t) = \frac{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-B/(2\nu)}\, d\eta}{\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-B/(2\nu)}\, d\eta}, \tag{9.37}$$

где $B(\eta, x, t) = \displaystyle\int\limits_0^{\eta} F(\xi)\, d\xi + \frac{(x-\eta)^2}{2t}$.

Итак, с помощью замены Коула – Хопфа найдено в виде (9.37) нестационарное решение нелинейного уравнения Бюргерса (9.23), удовлетворяющее при $t = 0$ начальному условию (9.35). Это решение описывает эволюцию профиля нестационарной волны, распространение которой обусловлено нелинейным механизмом конвективного переноса и диффузией.

9.3. Уравнение Кортевега – де Фриза

Пусть процесс распространения одномерных волн описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных по пространственной переменной x и времени t, имеющим вид

$$\widehat{L}u = 0, \tag{9.38}$$

где $\widehat{L}$ - линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами; $u(x, t)$ - функция, описывающая некоторую характеристику волны, например плотность среды, давление или потенциал скоростей.

Будем искать решение уравнения (9.38) в форме монохроматической волны

$$u(x, t) = a \exp[-i\,(\omega t - kx)]. \tag{9.39}$$

После подстановки выражения (9.39) в (9.38) получим некоторое соотношение $D(\omega, k) = 0$ между частотой ω и волновым числом k, которое называют ***дисперсионным соотношением***. Очевидно, что существует однозначная связь между дифференциальным уравнением (9.38) и порожденным им дисперсионным соотношением. В ряде случаев дисперсионное соотношение можно разрешить относительно частоты волны и записать его в виде $\omega = \omega(k)$.

Заметим, что наличие мнимой части у ω физически соответствует изменению амплитуды волны (9.39). В случае $\operatorname{Im}\omega < 0$, когда амплитуда волны уменьшается, говорят о среде с диссипацией энергии волн. Если же $\operatorname{Im}\omega = 0$, то среду называют недиссипирующей. При рассмотрении процесса распространения волн в активных средах, например электромагнитных волн в рабочих телах лазеров, возможна реализация условия $\operatorname{Im}\omega > 0$, когда происходит усиление волны и ее амплитуда с течением времени увеличивается.

Если $\dfrac{d^2\omega}{dk^2} \neq 0$, то фазовая скорость волны $v_\text{ф} = \omega/k$ не совпадает с групповой $v_\text{г} = d\omega/dk$. Такую среду (а иногда и саму волну) называют средой с дисперсией, или диспергирующей средой. При наличии дисперсии монохроматические волны разных частот распространяются с разными скоростями. Так как любую сложную по форме немонохроматическую волну с произвольным профилем можно представить с помощью разложения в ряд или интеграла Фурье как сумму монохроматических волн, то в диспергирующей среде, где эти монохроматические составляющие распространяются с различными скоростями, их сумма в различные моменты времени будет давать различные профили немонохроматической волны. Дисперсия, как и нелинейность, приводит к искажению профиля распространяющейся волны.

Простейшее дисперсионное соотношение $\omega = v_0 k$ соответствует линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad v_0 = \text{const}, \tag{9.40}$$

решения которого $u(x, t) = f(x - v_0 t)$ для различных f описывают распространение недиспергирующих волн.

Более сложное дисперсионное соотношение $\omega = v_0 k - \beta k^3$ соответствует линейному уравнению с дисперсией

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad v_0 = \text{const}; \ \beta = \text{const}. \tag{9.41}$$

Одновременный учет дисперсии и нелинейности приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \tag{9.42}$$

которое называют ***уравнением Кортевега – де Фриза*** (или КдФ).

Впервые уравнение (9.42) было получено Кортевегом и его учеником де Фризом в 1895 г. при описании распространения длинных волн на воде в прямоугольном канале со свободной поверхностью. В такой гидродинамической модели под u следует понимать смещение поверхности жидкости от равновесного уровня.

В настоящее время уравнение КдФ стало универсальным уравнением математической физики при моделировании волновых процессов различной физической природы с учетом дисперсии и слабой нелинейности.

Замечание 9.1. Путем простых масштабных преобразований координаты, времени или искомой функции уравнение КдФ можно записать также в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sigma u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad \sigma = \text{const}.$$

В литературе используются различные нормировки, отвечающие значениям $\sigma = 1$, $\sigma = 6$ и $\sigma = -6$. #

Важной особенностью уравнения (9.42) в классе быстроубывающих на бесконечности функций является существование бесконечного набора сохраняющихся величин вида

$$I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_n(\eta, \eta_x, \ldots)\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $w_n(\eta, \eta_x, \ldots)$ – плотность сохраняющейся величины, зависящая от u и ее производных по x; $\eta = \beta^{-1}u$. Приведем несколько первых плотностей:

$$w_1 = \eta; \quad w_2 = \frac{1}{2}\eta^2; \quad w_3 = \frac{1}{3}\eta^3 - \eta_x^2;$$
$$w_4 = \frac{1}{4}\eta^4 - 3\eta\eta_x^2 + \frac{9}{5}\eta_{xx}^2.$$

Наличие бесконечного числа законов сохранения позволяет сделать вывод об интегрируемости уравнения КдФ в явном виде.

Приступая к поиску волновых решений уравнения КдФ, можно ожидать, что искажение профиля волны вследствие конвективной нелинейности может быть скомпенсировано изменением профиля распространяющейся волны, вызванным эффектами дисперсии. Предполагая возможность такой компенсации, будем искать решение уравнения КдФ в виде бегущей волны со стационарным профилем. Для этого произведем замену переменного $\xi = x - vt$ и преобразуем уравнение (9.42) в уравнение для функции $u = u(\xi)$:

$$-v\frac{du}{d\xi} + u\frac{du}{d\xi} + \beta\frac{d^3u}{d\xi^3} = 0, \tag{9.43}$$

где $v = \text{const}$; $\beta = \text{const}$.

Это уравнение можно проинтегрировать, понизив его порядок. В результате интегрирования получим

$$-vu + \frac{1}{2}u^2 + \beta\frac{d^2u}{d\xi^2} = a, \quad a = \text{const}.$$

Умножая это уравнение на $du/d\xi$ и интегрируя полученное соотношение, находим

$$-\frac{v}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{\beta}{2}\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = au + b, \quad b = \text{const}. \tag{9.44}$$

Уравнение (9.44) можно привести к следующей форме:

$$3\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = F(u), \tag{9.45}$$

где $F(u) = -u^3 + 3v\,u^2 + 6au + 6b$.

Кубический трехчлен $F(u)$ целесообразно записать в виде $F(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u)$, обозначив через u_1, u_2 и u_3 корни уравнения $F(u) = 0$. При этом

$$v = \frac{u_1 + u_2 + u_3}{3}; \quad a = -\frac{u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1}{6}; \quad b = \frac{u_1u_2u_3}{6}.$$

Полагая, что все три корня действительны, причем $u_3 \leqslant u_2 \leqslant u_1$, запишем уравнение (9.45) в виде

$$3\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = (u_1 - u)(u_2 - u)(u_3 - u). \tag{9.46}$$

Поскольку выражение в левой части (9.46) положительно при $\beta > 0$, то функция u может изменяться в интервале $u_2 \leqslant u \leqslant u_1$.

Предположим сначала, что $u_2 = u_3 = 0$, а $u_1 = 3v > 0$. В этом случае из (9.46) следует уравнение

$$3\beta\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2 = u^2(u_1 - u),$$

из которого, разделяя переменные и интегрируя, находим

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u_1 - u}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}.$$

Вычисляя квадратуру, получаем

$$-\frac{2}{\sqrt{u_1}}\,\mathrm{Arth}\sqrt{1 - \frac{u}{u_1}} = \frac{\xi + \xi_0}{\sqrt{3\beta}}. \tag{9.47}$$

Константу ξ_0 положим равной нулю. В этом случае точка $\xi = 0$ будет соответствовать максимуму функции u, так как $u(0) = u_1$ при $\xi_0 = 0$. Тогда из уравнения (9.47) находим

$$1 - \frac{u}{u_1} = \mathrm{th}^2\left(-\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{u_1}{3\beta}}\right)$$

или

$$u(\xi) = u_1 \operatorname{ch}^{-2}\left(\xi\sqrt{\frac{u_1}{12\beta}}\right). \tag{9.48}$$

Возвращаясь к переменным x и t, запишем найденное решение уравнения КдФ в виде нелинейной волны неизменной формы

$$u(x,\, t) = A \operatorname{ch}^{-2}\left(\frac{x - vt}{\Delta}\right). \tag{9.49}$$

Здесь $A = u_1$ – амплитуда волны; $v = A/3$ – скорость волны; $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$ – параметр, характеризующий эффективный размер области возмущения, где $u > 0,5A$.

Такое решение (9.49) уравнения КдФ называют ***уединенной волной***, или ***солитоном***. Профиль уединенной волны изображен на рис. 9.7.

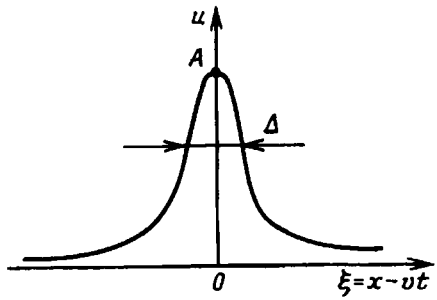


Рис. 9.7

Такое возмущение колоколообразной формы, не изменяющейся со временем, распространяется в виде солитона с конечной скоростью $v = A/3$, значение которой зависит от амплитуды солитона. Чем больше амплитуда солитона, тем с большей скоростью он движется. Зависимость скорости распространения от амплитуды характерна для всех нелинейных волн, в том числе и для нелинейной уединенной волны (9.49). Эффективная ширина Δ солитона уменьшается с ростом его амплитуды.

Учитывая, что уравнение (9.43) инвариантно относительно замены

$$u \to u + u_0, \quad v \to v + u_0, \quad u_0 = \text{const},$$

можно записать также решение уравнения КдФ в виде уединенной волны, бегущей по ненулевому фону:

$$u(x,\,t) = u_0 + A\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\sqrt{\frac{A}{12\beta}}\left[x - \left(u_0 + \frac{A}{3}\right)t\right]\right\}. \qquad (9.50)$$

В более общем случае, когда все три корня уравнения $F(u) = 0$ отличны от нуля, после интегрирования уравнения (9.46) получаем

$$u(\xi) = u_2 + (u_1 - u_2)\,\mathrm{cn}^2\left(\xi\sqrt{\frac{u_1 - u_3}{12\beta}},\, s\right), \qquad (9.51)$$

где параметр s определяется выражением $s^2 = \dfrac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$.

Специальную функцию $w = \mathrm{cn}(z,\, s)$ называют ***эллиптической функцией Якоби*** или ***эллиптическим косинусом***. Эта функция определяется неявным образом с помощью эллиптического интеграла первого рода

$$z = \int\limits_0^w \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - s^2\sin^2\varphi}}.$$

Решение (9.51) называют ***кноидальной волной***. Эта волна является пространственно периодической структурой (рис. 9.8), и ее период по пространственному переменному, т.е. длина волны,

$$\lambda = 4K(s)\sqrt{\frac{3\beta}{u_1 - u_3}}.$$

Здесь $K(s)$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$$K(s) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - s^2\sin^2\varphi}}.$$

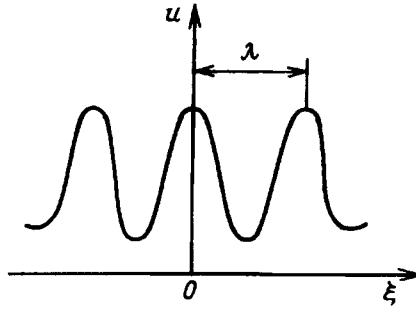


Рис. 9.8

В предельном случае, когда u_3 и u_2 стремятся к нулю, параметр s стремится к единице, а так как при $s \to 1$

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1-s^2}, \quad \text{а} \quad \operatorname{cn}(z, s) \approx \frac{1}{\operatorname{ch} z},$$

то расстояние между соседними максимумами кноидальной волны неограниченно возрастает ($\lambda \to \infty$) и каждый из них превращается в одиночный солитон.

9.4. Многосолитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза

В численном эксперименте с применением ЭВМ, выполненном в 1965 г. М. Крускалом и М. Забуски, было исследовано "столкновение" двух солитонов с разными амплитудами, когда быстрый солитон обгоняет медленный. Оказалось, что по мере сближения в результате взаимодействия солитоны начинают обмениваться амплитудами и скоростями. При этом при столкновении не наблюдается неупругих эффектов. Быстрый солитон как бы проходит сквозь медленный без нарушения их формы. После столкновения возникают точно такие же по форме солитоны, что и до столкновения. Это свойство солитонов сохранять свою форму при взаимодействиях позволяет назвать солитон "частицеподобным" решением уравнения КдФ.

Удивительно, но процесс взаимодействия солитонов удается описать точным аналитическим решением уравнения КдФ

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Сделаем подстановку

$$u = 12\beta\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\ln F), \tag{9.52}$$

являющуюся определенным обобщением подстановки (9.32) Коула – Хопфа.

Тогда после преобразований получим для функции $F(x, t)$ сложное нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка

$$F\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right) - \\ - \frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right) + 3\beta\left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right] = 0. \tag{9.53}$$

Особенность уравнения (9.53) состоит в том, что оно имеет характерную форму, содержащую оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3}{\partial x^3}.$$

Поэтому можно заметить, что простая функция с экспонентой

$$F(x, t) = 1 + f = 1 + \exp(-\theta), \tag{9.54}$$

удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0; \qquad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0,$$

где $\theta = \alpha(x - s) - \alpha^3\beta t$; α, $s = \text{const}$. Поэтому функция (9.54) является также решением уравнения (9.53). Если теперь в соответствии с формулой преобразования (9.52) найти решение

уравнения КдФ, порожденное функцией $F(x, t)$ из (9.54), то его можно представить простой формулой

$$u = 12\beta \frac{\alpha^2 f}{(1+f)^2} = 3\beta\alpha^2 \left(\frac{2}{e^{\theta/2} + e^{-\theta/2}}\right)^2 = 3\beta\alpha^2 \operatorname{ch}^{-2}\frac{\theta}{2},$$

которая при $3\beta\alpha^2 = A = \text{const}$ описывает одиночный солитон

$$u(x, t) = A \operatorname{ch}^{-2}\left[\frac{(x-s) - vt}{\Delta}\right], \tag{9.55}$$

где $v = \beta\alpha^2 = A/3$; $\Delta = \sqrt{12\beta/A}$, сдвинутый вперед на величину s относительно "стандартного" солитона (9.49). Величина s представляет собой координату центра (максимума) солитона при $t = 0$. Ее часто называют фазой солитона. Амплитуда A и фаза s полностью определяют солитон. Поэтому в дальнейшем мы будем использовать символ $\mathrm{Sol}(A, s)$ для обозначения уединенной волны (9.55).

Для нахождения более сложного по структуре решения уравнения КдФ, описывающего взаимодействие двух солитонов, воспользуемся методом возмущений в теории взаимодействия. Для этого представим функцию F в виде разложения в ряд

$$F = 1 + \varepsilon F^{(1)} + \varepsilon^2 F^{(2)} + \ldots \tag{9.56}$$

по некоторому формально введенному параметру ε, который после преобразований можно положить равным единице.

Подставляя (9.56) в (9.53) и собирая члены при одинаковых степенях ε, получаем цепочку уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right) = 0; \tag{9.57}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) = \\ = -3\beta\left[\left(\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial^3 F^{(1)}}{\partial x^3}\right] \tag{9.58}$$

и т.д.

Если в качестве $F^{(1)}$ выбрать сумму двух экспонент, порождающих солитон, т.е. считать, что

$$F^{(1)} = f_1 + f_2, \quad f_j = \exp\left[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t\right], \quad j = 1, 2,$$

то уравнение (9.57) тождественно выполняется, так как каждое из f_j является его решением.

Второе соотношение (9.58) этой цепочки дает уравнение для определения функции $F^{(2)}$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) = 3\beta\alpha_1\alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2. \qquad (9.59)$$

Будем искать его решение в виде $F^{(2)} = Bf_1f_2$, где B – некоторая постоянная, которую требуется определить. Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} = \alpha_1^3 \beta B f_1 f_2 + \alpha_2^3 \beta B f_1 f_2 = \beta (\alpha_1^3 + \alpha_2^3) B f_1 f_2;$$

$$\beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3} = -\beta (\alpha_1 + \alpha_2)^3 B f_1 f_2;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} + \beta \frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial x^3}\right) =$$

$$= \left[-(\alpha_1^3 + \alpha_2^3) + (\alpha_1 + \alpha_2)^3\right] (\alpha_1 + \alpha_2) \beta B f_1 f_2 =$$

$$= 3\beta\alpha_1\alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)^2 B f_1 f_2.$$

Тогда с учетом (9.59) получаем

$$B = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2}.$$

В остальных уравнениях цепочки для функций $F^{(k)}$ при $k > 2$ правые части обращаются в нуль, давая результат $F^{(k)} = 0$ для всех $k > 0$. Поэтому функция

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 f_2 \qquad (9.60)$$

является точным решением уравнения (9.53).

Теперь, используя преобразование (9.52), находим соответствующее точное решение уравнения КдФ в виде

$$\frac{u}{12\beta} = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2}{(1 + f_1 + f_2 + B f_1 f_2)^2} + \\ + \frac{B(\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{(1 + f_1 + f_2 + B f_1 f_2)^2}. \quad (9.61)$$

Здесь

$$f_j = \exp\Big[-\alpha_j(x - s_j) + \alpha_j^3 \beta t\Big], \quad j = 1, 2; \quad B = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}\right)^2.$$

Проведем анализ полученного решения. Покажем, что это решение близко к уединенной волне (9.55) с $\alpha = \alpha_j$ в тех областях плоскости состояний (x, t), где $f_j \approx 1$, а f_i $(i \neq j)$ либо велико, либо мало. Действительно, проводя предельные переходы в (9.61), получаем:

а) если $f_j \approx 1$, а $f_i \ll 1$, то

$$u = 12\beta \frac{\alpha_j^2 f_j}{(1 + f_j)^2}.$$

Это решение соответствует солитону $\mathrm{Sol}(A_j, s_j)$;

б) если $f_j \approx 1$, а $f_i \gg 1$, то

$$u = 12\beta \frac{\alpha_j^2 \widetilde{f}_j}{(1 + \widetilde{f}_j)^2}, \quad \widetilde{f}_j = B f_j.$$

Такое решение описывает сдвинутый по фазе солитон $\mathrm{Sol}(A_j, \widetilde{s}_j)$, где

$$\widetilde{s}_j = s_j + \frac{1}{\alpha_j} \ln B.$$

В области, где $f_1 \approx 1$ и $f_2 \approx 1$, происходит взаимодействие солитонов и функция $u(x, t)$ сложным образом зависит от x и t в

соответствии с выражением (9.61). В области плоскости (x, t), где f_1 и f_2 обе малы или велики, имеем $u \approx 0$.

Опишем теперь с помощью уравнения (9.61) взаимодействие уединенных волн. Пусть для определенности $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$, а $s_1 > s_2$, так что "быстрый" солитон с большей амплитудой находится сначала левее "медленного" солитона, догоняя его.

При $t \to -\infty$ область взаимодействия солитонов отсутствует (рис. 9.9, *а*), и уравнение (9.61) описывает две волны. Центр уединенной волны с амплитудой A_1 находится в точке $x = s_1 + \alpha_1^2 \beta t$, вблизи которой $f_1 \approx 1$, а $f_2 \ll 1$. Центр уединенной волны с амплитудой $A_2 > A_1$ находится левее в точке

$$x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_2^2 \beta t,$$

вблизи которой $f_2 \approx 1$, а $f_1 \gg 1$. В остальных точках $u \approx 0$.

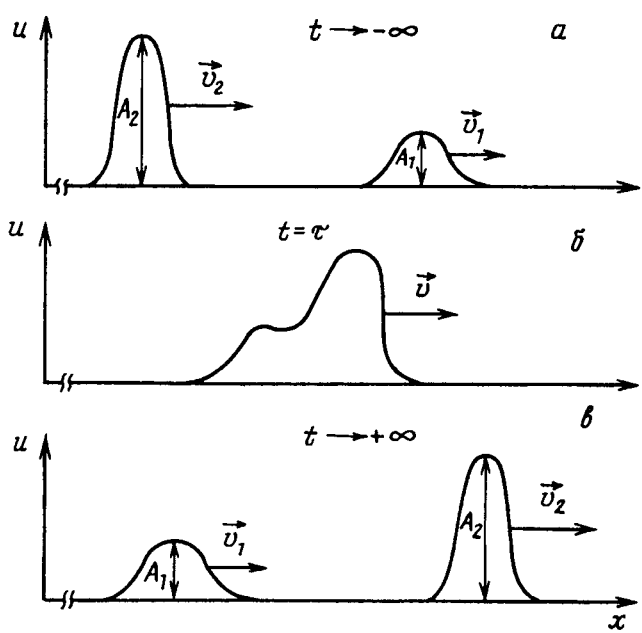


Рис. 9.9

При $t \to +\infty$ имеем следующую картину (рис. 9.9, *в*): центр уединенной волны с амплитудой A_1 находится в точке

$$x = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2 + \alpha_1^2 \beta t,$$

вблизи которой $f_1 \approx 1$, а $f_2 \gg 1$; центр уединенной волны с амплитудой A_2 находится правее в точке $x = s_2 + \alpha_2^2 \beta t$, вблизи которой $f_1 \ll 1$, а $f_2 \approx 1$. В остальных точках $u \approx 0$.

Взаимодействие солитонов (рис. 9.8, *б*) происходит в окрестности точки

$$x = \frac{\alpha_2^2 s_1 - \alpha_1^2 s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}$$

в момент времени $t = \tau$, где $\tau = \dfrac{s_1 - s_2}{\beta\left(\alpha_2^2 - \alpha_1^2\right)}$.

После столкновения образуются снова два солитона с теми же амплитудами и скоростями, что и до столкновения. Изменяются лишь фазы этих солитонов. "Быстрый" солитон в результате столкновения получает дополнительный сдвиг вперед на величину

$$\frac{1}{\alpha_2} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2,$$

а "медленный" солитон сдвигается назад на величину

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right)^2.$$

Более общий метод решения уравнения КдФ, который называют методом обратной задачи рассеяния, основан на использовании свойств решения линейного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + [\lambda - u(x, t)]\,\psi = 0, \quad \lambda = \text{const},$$

в котором в качестве потенциала силового поля выступает функция $u(x, t)$, являющаяся решением уравнения КдФ.

Методом обратной задачи рассеяния показано, что N-солитонное решение уравнения КдФ, описывающее взаимодействие N солитонов, может быть также найдено по формуле (9.52), где

$$F = \det F_{mn},$$

и выражается через определитель матрицы размером $N \times N$ с матричными элементами

$$F_{mn} = \delta_{mn} + \frac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} f_m.$$

Здесь δ_{mn} – символ Кронекера, соответствующий единичной матрице, а $f_m = \exp[-\alpha_m (x - s_m) + \alpha_m^3 \beta t]$.

В частном случае $N = 2$ имеем

$$\det F_{mn} = \begin{vmatrix} 1 + f_1 & \dfrac{2\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} f_1 \\ \dfrac{2\alpha_2}{\alpha_2 + \alpha_1} f_2 & 1 + f_2 \end{vmatrix} = 1 + f_1 + f_2 + f_1 f_2 -$$

$$- \frac{4\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 f_2 = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 f_2,$$

что совпадает с решением (9.60) для двух солитонов.

Асимптотически N-солитонное решение при $|t| \to \infty$ распадается на сумму N солитонов, расположенных при $t \to -\infty$ в порядке убывания их амплитуд и скоростей, а при $t \to +\infty$ – в порядке возрастания амплитуд и скоростей.

Первое качественное описание уединенной волны на поверхности неглубокого канала было дано в 1844 г. морским инженером Скотт-Расселем. В 1958 г. Р. Сагдеев показал, что в плазме также могут распространяться возмущения в виде уединенных волн. Солитоны описывают решения нелинейных уравнений во многих задачах физики плазмы, физики твердого тела, гидродинамики, квантовой теории поля, биофизики, химической кинетики и др.

Именно устойчивость солитонов по отношению к изменению формы позволила специалистам по волоконной оптике предложить использовать нелинейные эффекты для подавления дисперсии волн и получения коротких солитонных импульсов в оптических линиях связи. Расчеты показали, что это позволяет увеличить скорость передачи информации по линиям оптической связи на несколько порядков. Есть основания даже утверждать, что природа давно выбрала такой способ передачи информации с помощью импульсов-солитонов в нервных волокнах.

Решения в виде уединенных волн были обнаружены для большого числа других физически интересных нелинейных уравнений математической физики. Среди них можно отметить нелинейное уравнение Шредингера (или НУШ), которое в безразмерной форме имеет вид

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\,|u|^2\,u = 0. \tag{9.62}$$

Это уравнение описывает распространение модулированных волн в кристаллах и оптических волокнах, ленгмюровских волн в плазме, тепловых волн в твердых телах, волн возбуждения в молекулярных цепях и другие процессы.

Решения в виде уединенных волн обнаружены также и у нелинейного ***уравнения синус-Гордона*** (уравнение sin-Гордон)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0, \tag{9.63}$$

описывающего, например, протекание тока Джозефсона через участок между двумя сверхпроводниками, распространение волн намагниченности в ферромагнетиках или движение дислокаций в кристаллах.

Все это позволяет сделать вывод о том, что теория нелинейных волновых процессов, рассматривающая взаимодействие волн различной природы, является актуальным направлением математической физики.

Вопросы и задачи

9.1. Опишите механизм "опрокидывания" волн в условиях нелинейного конвективного переноса.

9.2. Для диспергирующей волны, описываемой дисперсионным соотношением $\omega = v_0 k - \beta k^3$, определите разность фазовой и групповой скоростей.

Ответ: $v_{\text{ф}} - v_{\text{гр}} = 2\beta k^2$.

9.3. Преобразуйте уравнение Кортевега – де Фриза (9.42) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

9.4. Покажите, что модифицированное уравнение Кортевега – де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

имеет солитонное решение

$$u(x,\,t) = \sqrt{6c}\,\operatorname{ch}^{-1}[\sqrt{c}\,(x - ct)], \quad c = \text{const}.$$

9.5. Используя соотношение (9.61), составьте программу для ПЭВМ, позволяющую наблюдать на дисплее взаимодействие двух сталкивающихся солитонов.

Приложение 1. ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

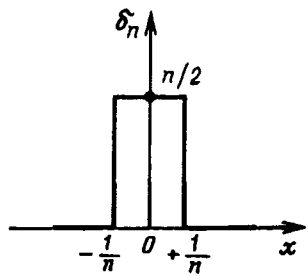
Дельта-функция $\delta(x)$ была введена в математическую физику П. Дираком для описания сосредоточенных воздействий. В нестрогой форме она определялась как "странная" функция, равная нулю всюду, кроме одной точки, где она равна бесконечности, причем интеграл от этой функции равен единице.

Поэже в работах С.Л. Соболева, Л. Шварца, И.М. Гельфанда и других авторов была разработана теория обобщенных функций. В этой теории было показано, что дельта-функция не может быть определена как классическая функция, однако как обобщенную функцию ее можно определить строго математически.

В частности, к понятию дельта-функции как обобщенной функции можно прийти, рассматривая ее в качестве предела функциональных последовательностей, обладающих определенными свойствами.

Рассмотрим, например, последовательность $\{\delta_n\} = \delta_1(x)$, $\delta_2(x), \ldots, \delta_n(x), \ldots$ кусочно-постоянных функций, определенных в интервале $-\infty < x < +\infty$ по правилу

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{если } |x| < 1/n; \\ 0, & \text{если } |x| > 1/n. \end{cases}$$



Можно заметить, что при любом значении n функция $\delta_n(x)$ обладает рядом свойств.

1. Условие четности:

$$\delta_n(x) = \delta_n(-x).$$

2. Условие нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x)\,dx = 1.$$

3. Для любой непрерывной функции $f(x)$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = f(\overline{x}),$$

где $\overline{x} \in \left(-\dfrac{1}{n}, +\dfrac{1}{n}\right)$.

Действительно, с использованием теоремы о среднем значении получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = \frac{n}{2}\int\limits_{-1/n}^{+1/n} f(x)\,dx = \frac{n}{2}\,f(\overline{x})\,\frac{2}{n} = f(\overline{x}).$$

Здесь $\overline{x}$ – некоторая точка внутри интервала $\left(-\dfrac{1}{n}, +\dfrac{1}{n}\right)$, такая, что $\overline{x} \to 0$ при $n \to \infty$.

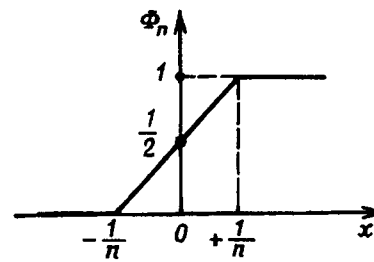
4. Справедливо соотношение

$$\delta_n(x) = \frac{d\Phi_n}{dx}, \quad x \neq \pm\frac{1}{n},$$

где

$$\Phi_n(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \delta_n(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -1/n; \\ \dfrac{1}{2}\,(1 + nx), & |x| < 1/n; \\ 1, & x > 1/n. \end{cases}$$

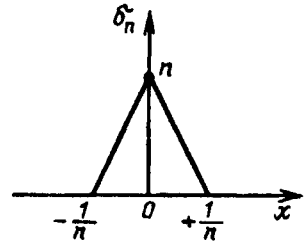


Следует отметить, что при $n \to \infty$ функция $\Phi_n(x)$ стремится в пределе к ступенчатой функции Хевисайда $\eta(x)$, т.е.

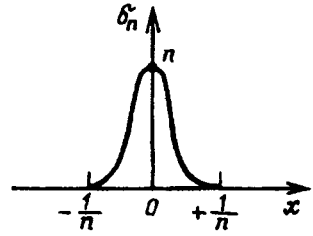
$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Свойствами 1 – 3 обладают также другие последовательности функций $\delta_n(x)$, которые можно назвать локализованными вблизи точки $x = 0$ нормированными последовательностями:

$$\delta_n(x) = \begin{cases} n - n^2|x|, & |x| < 1/n; \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases}$$

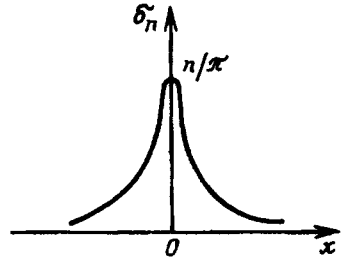


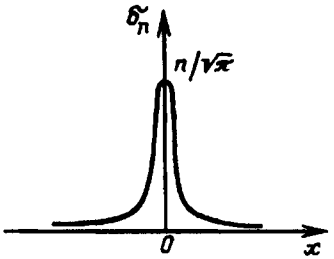
$$\delta_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}(1 + \cos n\pi x), & \\ & |x| < 1/n; \\ 0, & |x| > 1/n; \end{cases}$$



$$\delta_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)},$$

$$-\infty < x < +\infty;$$





$$\delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2},$$

$$-\infty < x < +\infty.$$

Если у рассмотренных выше локализованных нормированных последовательностей функций $\delta_n(x)$ устремить n к бесконечности, то мы придем к соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0; \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

которое показывает, что предельный элемент этих функциональных последовательностей не является, вообще говоря, функцией в классическом понимании. Поэтому предел при $n \to \infty$ следует понимать не в смысле равномерной сходимости, а в смысле слабой сходимости последовательности.

Говорят, что последовательность $\{\Theta_n(x)\}$ сходится слабо на интервале (a, b), если для любой непрерывной функции $f(x)$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,\Theta_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\Theta(x)\,dx,$$

который и определяет предельный элемент $\Theta(x)$ слабо сходящейся последовательности $\{\Theta_n(x)\}$, даже если этот предельный элемент не является функцией в классическом смысле.

Итак, назовем предельный элемент, к которому в случае слабой сходимости сходятся рассмотренные выше локализованные нормированные последовательности $\{\delta_n(x)\}$, обобщенной дельта-функцией и обозначим ее символом $\delta(x)$.

Свойства 1 – 3 функций $\delta_n(x)$ не зависят от значения n. Поэтому эти свойства можно приписать и предельному элементу, т.е. считать, что

$$\delta(x) = \delta(-x);$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1 \tag{П1}$$

или для произвольного интервала $(a,\, b)$

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = \begin{cases} 0, & ab > 0; \\ 1, & a < 0 < b. \end{cases}$$

При этом для любой непрерывной функции $f(x)$ выполняется интегральное соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0). \tag{П2}$$

Формулу (П1) можно рассматривать как следствие формулы (П2) при $f(x) \equiv 1$. Поэтому интегральное соотношение (П2) следует выделить как основное свойство дельта-функции, рассматривая фактически формулу (П2) как определение дельта-функции в случае слабой сходимости и понимая ее как

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_n(x)\,dx = f(0).$$

Благодаря необычным для классической функции свойствам, дельта-функция выделяет окрестность точки $x = 0$. Именно как предельный элемент последовательности сосредоточенных вблизи точки $x = 0$ функций, эффективная "ширина" которых $\Delta \to 0$, а "высота" $h \to \infty$, дельта-функцию можно

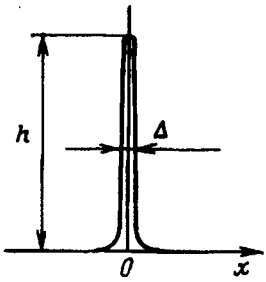


Рис. П1

представить в виде, изображенном на рис. П1.

Учитывая свойство 4 рассмотренной последовательности кусочно-постоянных функций и проводя предельный переход $n \to \infty$, можно получить формулу

$$\delta(x) = \frac{d\eta}{dx}, \quad \eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

которая определяет обобщенную дельта-функцию как производную разрывной функции Хевисайда. Естественно, что и эту формулу следует понимать как предельную в смысле слабой сходимости.

Наряду с дельта-функцией $\delta(x)$ для описания сосредоточенного воздействия в точке $x = x_0$ вводят дельта-функцию вида $\delta(x - x_0)$, определяемую интегральным соотношением

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0), \tag{П3}$$

где $f(x)$ – любая непрерывная функция.

Заменой переменного в уравнении (П3) можно показать справедливость формулы

$$\delta(ax - b) = \frac{1}{a}\,\delta\Big(x - \frac{b}{a}\Big), \quad a = \text{const},\ b = \text{const}; \quad a \neq 0.$$

Аналогично вводится пространственная дельта-функция $\delta(M,\, M_0)$, $M,\, M_0 \in \mathfrak{R}^N$. Основным свойством, определяющим такую обобщенную функцию, является интегральное соотношение

$$\iiint\limits_{\Omega} \delta(M,\, M_0)\, f(M)\, dV = \begin{cases} f(M_0),\ M_0 \in \Omega; \\ 0,\ M_0 \notin \Omega, \end{cases}$$

где $f(M)$ – непрерывная в области Ω функция. При этом область Ω может совпадать со всем пространством $\mathfrak{R}^N$.

Для $f(M) \equiv 1$ имеем

$$\iiint\limits_{\Omega} \delta(M,\, M_0)\, dV = \begin{cases} 1, & M_0 \in \Omega; \\ 0, & M_0 \notin \Omega. \end{cases}$$

При записи дельта-функции в N-мерном пространстве ($N = 2,\, 3$) будем использовать обозначения $\delta_N(M,\, M_0)$ и $\delta_N(M)$, если точка M_0 находится в центре выбранной системы координат.

В прямоугольных декартовых координатах справедливы следующие представления двумерной и трехмерной дельта-функции через одномерные:

$$\delta_2(M,\, M_0) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0);$$

$$\delta_3(M,\, M_0) = \delta(x - x_0)\, \delta(y - y_0)\, \delta(z - z_0).$$

Напомним, что в классе функций, которые на отрезке $[-l,\, +l]$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

коэффициенты разложения a_n и b_n определяются по формулам Эйлера – Фурье

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} g(x) \cos \frac{n\pi x}{l}\, dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{+l} g(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx. \qquad (\text{П}4)$$

Действуя формально, положим в выражениях (П4) $g(x) = \delta(x - x_0)$, где $x_0 \in (-l, +l)$. Тогда для коэффициентов разложения дельта-функции получим

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \delta(x - x_0) \cos\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l};$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \delta(x - x_0) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx = \frac{1}{l}\sin\frac{n\pi x_0}{l}.$$

Таким образом, с учетом этих формул можно записать следующее разложение на отрезке $[-l, +l]$ дельта-функции $\delta(x - x_0)$ в тригонометрический ряд Фурье:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l} + \sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi(x - x_0)}{l}, \quad x_0 \in (-l, +l). \quad (\text{П5})$$

В комплексной форме это разложение можно представить в виде

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2l}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{n\pi}{l}(x - x_0)}. \quad (\text{П6})$$

Аналогичным образом на отрезке $[0, l]$ можно записать разложение дельта-функции в тригонометрические ряды по косинусам или синусам:

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad x_0 \in (0, l); \quad (\text{П7})$$

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad x_0 \in (0, l). \quad (\text{П8})$$

Соотношения (П5) – (П8) следует рассматривать как равенства в классе слабо сходящихся функций, т.е. в соответствии с интегральным соотношением (П3). Покажем, например, что для обобщенной функции, представленной рядом (П8), выполняется интегральное соотношение (П3). Для этого рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$, которую можно на отрезке $[0, l]$ разложить в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad x \in (0, l),$$

где $f_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$. Тогда с помощью почленного интегрирования ряда находим, что

$$\int_0^l f(x)\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx\right]\sin\frac{n\pi x_0}{l} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin\frac{n\pi x_0}{l} = f(x_0).$$

Но это и означает эквивалентность левой и правой частей равенства (П8) в смысле выполнения определяющего дельта-функцию интегрального соотношения

$$\int_0^l f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx = f(x_0), \quad x_0 \in (0, l).$$

Переходя в уравнениях (П5) и (П6) к пределу при $l \to \infty$, можно получить разложение дельта-функции в интеграл Фурье

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\cos\omega(x - x_0)\,d\omega,$$

или

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-x_0)}\, d\omega.$$

В классе слабосходящихся функций следует также рассматривать и разложение дельта-функции в ряд Фурье по полной и ортогональной на некотором отрезке $[a,\, b]$ системе функций $\{\psi_n(x)\}$. Коэффициенты такого разложения вычисляют по формуле

$$c_n = \frac{1}{||\psi_n||^2} \int\limits_a^b \delta(x - x_0)\, \psi_n(x)\, dx = \frac{\psi_n(x_0)}{||\psi_n||^2}, \quad x_0 \in (a,\, b).$$

Поэтому в соответствии с теоремой Стеклова можно записать следующее разложение:

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x_0)\, \psi_n(x)}{||\psi_n||^2}. \qquad (\text{П}9)$$

Разложения (П5) – (П8) и (П9) используют при решении задач математической физики.

Приложение 2. ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ

При решении краевых задач математической физики методом разделения переменных отыскание координатных функций сводится к задачам на собственные значения с соответствующими граничными условиями. Поэтому изложим некоторые общие сведения о свойствах решений таких задач.

Пусть задан линейный дифференциальный оператор L, действующий на функцию $y(x)$ по правилу

$$L[y(x)] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\,\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y(x),$$

где $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$ – непрерывные на отрезке $[a,\, b]$ функции.

Обозначим через $\mathcal{B}$ класс функций, которые непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ вместе со своими производными вплоть до второго порядка включительно и удовлетворяют в граничных точках $x = a$ и $x = b$ условиям вида

$$\begin{cases} -\alpha_1\, y'(a) + \beta_1\, y(a) = 0; \\ \alpha_2\, y'(b) + \beta_2\, y(b) = 0, \end{cases}$$

где $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2} = \text{const} \geqslant 0$, причем $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ и $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Установим некоторые свойства оператора L. Пусть

$$(Ly,\, z) = \int\limits_a^b L[y(x)]\, z(x)\, dx, \tag{П10}$$

где функции $y(x)$ и $z(x)$ взяты из класса $\mathcal{B}$. Интегрируя дважды по частям, получаем

$$(Ly,\, z) = (y,\, Lz) + [p(x)\,(y\,z' - zy')]\Big|_a^b. \tag{П11}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что из граничных условий для функций $y(x)$ и $z(x)$ следуют соотношения

$$y(a)\,z'(a) - z(a)\,y'(a) = 0, \quad y(b)\,z'(b) - z(b)\,y'(b) = 0.$$

Но тогда из уравнения (П11) вытекает, что для любых функций $y(x)$ и $z(x)$ из класса $\mathcal{B}$ справедливо равенство

$$(Ly,\, z) = (y,\, Lz), \tag{П12}$$

означающее, что оператор L для функций из класса $\mathcal{B}$ является самосопряженным оператором.

Аналогично устанавливается также, что для функций $y(x)$ из этого класса $(Ly,\, y) \geqslant 0$. При этом знак равенства имеет место, когда $q(x) \equiv 0$ и $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

Будем искать решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$L[X(x)] = \lambda\rho(x)\,X(x), \quad a < x < b, \tag{П13}$$

удовлетворяющее однородным краевым условиям

$$\begin{cases} -\alpha_1\,X'(a) + \beta_1\,X(a) = 0; \\ \alpha_2\,X'(b) + \beta_2\,X(b) = 0. \end{cases} \tag{П14}$$

Здесь λ – некоторая постоянная; $\rho(x) > 0$ – заданная непрерывная функция, которую будем называть весовой функцией.

Задача (П13), (П14) при любых значениях λ имеет решение $X(x) \equiv 0$. Однако существуют значения параметра λ, при которых эта задача имеет нетривиальные решения. Такие значения параметра λ называют собственными значениями задачи, а соответствующие им нетривиальные решения – собственными функциями. При этом однородную задачу (П13), (П14) на отыскание собственных значений и собственных функций называют задачей Штурма – Лиувилля.

Перечислим основные свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.

1. Существует счетное множество $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ собственных значений и соответствующих им линейно независимых собственных функций $X_1(x), X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ задачи (П13), (П14). При этом собственные функции определены с точностью до произвольной константы.

2. Все собственные значения задачи (П13), (П14) неотрицательны.

Для доказательства этого свойства умножим обе части тождества

$$L[X_n(x)] = \lambda_n \rho(x) X_n(x)$$

на $X_n(x)$ и проинтегрируем результат по x в пределах от a до b. Тогда с учетом обозначения (П10) получим

$$(LX_n, X_n) = \lambda_n \int_a^b \rho(x) X_n^2(x)\, dx.$$

Поскольку $(LX_n, X_n) \geqslant 0$, а интеграл в правой части положителен, то $\lambda_n \geqslant 0$.

Замечание П2.1. Для граничных условий первого и третьего рода все собственные значения всегда положительны. Для условий второго рода ($\beta_1 = \beta_2 = 0$) при $q(x) \equiv 0$ число $\lambda = 0$ является собственным значением задачи Штурма – Лиувилля (П13), (П14), а $X_0 \equiv 1$ – отвечающей ему собственной функцией. #

3. Собственные функции $X_n(x)$ и $X_m(x)$, отвечающие различным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ с весом $\rho(x)$, т.е.

$$\int_a^b \rho(x) X_n(x) X_m(x)\, dx = 0.$$

Для доказательства этого свойства рассмотрим два тождества

$$L[X_n(x)] = \lambda_n \rho(x) X_n(x);$$
$$L[X_m(x)] = \lambda_m \rho(x) X_m(x).$$

Умножим первое из них на $X_m(x)$, а второе на $X_n(x)$ и вычтем из первого результата второй:

$$L[X_n(x)]\,X_m(x) - L[X_m(x)]\,X_n(x) = (\lambda_n - \lambda_m)\,\rho(x)\,X_n(x)\,X_m(x).$$

Интегрируя полученное равенство по x в пределах от a до b и учитывая обозначение (П10), получаем

$$(LX_n,\, X_m) - (X_n,\, LX_m) = (\lambda_n - \lambda_m)\int\limits_a^b \rho(x)\,X_n(x)\,X_m(x)\,dx.$$

В силу свойства (П12) самосопряженности оператора L левая часть этого равенства равна нулю, а так как $\lambda_n \neq \lambda_m$, то равен нулю интеграл в правой части.

Таким образом, если $X_1(x),\, X_2(x), \ldots, X_n(x), \ldots$ – система собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (П13), (П14), то

$$\int\limits_a^b \rho(x)\,X_n(x)\,X_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \|X_n\|^2, & m = n. \end{cases}$$

Здесь величина

$$\|X_n\| = \left(\int\limits_a^b \rho(x)\,X_n^2(x)\,dx\right)^{1/2}$$

есть норма собственной функции $X_n(x)$.

4. Всякая функция из класса $\mathcal{B}$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям задачи Штурма – Лиувилля, абсолютно и равномерно сходящийся на отрезке $[a,\, b]$ (***теорема разложимости Стеклова***). При этом рядом Фурье функции $f(x)$ по системе собственных функций задачи (П13), (П14) называется ряд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,X_n(x),$$

в котором коэффициенты Фурье c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_a^b \rho(x)\, f(x)\, X_n(x)\, dx.$$

5. Система собственных функций является полной в классе $\mathfrak{L}_2$.

Обозначим через $\mathfrak{L}_2$ класс функций, интегрируемых с квадратом с некоторым весом $\rho(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда если $g(x) \in \mathfrak{L}_2$, то

$$\int_a^b \rho(x)\, g^2(x)\, dx < +\infty.$$

Ортогональную на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$ систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ назовем полной в классе $\mathfrak{L}_2$, если для любой функции $g(x)$ из класса $\mathfrak{L}_2$ найдется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ с некоторыми коэффициентами c_n, сходящийся к $g(x)$ на $[a, b]$ в среднем, т.е.

$$\int_a^b \rho(x) \Big[g(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n\, \varphi_n(x) \Big]^2 dx \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Докажем, что система собственных функций $\Big\{ X_n(x) \Big\}_{n=1}^{\infty}$ задачи Штурма – Лиувилля (П13), (П14) будет полной в $\mathfrak{L}_2$. Из свойств пространства $\mathfrak{L}_2$ следует, что для любой функции $g(x) \in \mathfrak{L}_2$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция $f(x) \in \mathcal{B}$, что

$$\int_a^b \rho(x) \Big(g(x) - f(x) \Big)^2 dx < \varepsilon/4.$$

А так как функция $f(x)$ по теореме Стеклова разлагается в равномерно сходящийся на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

то для всякого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое $N_1(\varepsilon_1)$, что при $N \geqslant N_1$

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right| < \varepsilon_1, \quad x \in [a, b].$$

Тогда

$$\int_a^b \rho(x) \left[g(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right]^2 dx = \int_a^b \rho(x) \Big\{ [g(x) - f(x)] +$$

$$+ \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right] \Big\}^2 dx \leqslant 2 \int_a^b \rho(x) \left[g(x) - f(x) \right]^2 dx +$$

$$+ 2 \int \rho(x) \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right]^2 dx < \frac{\varepsilon}{2} + 2\varepsilon_1^2 \int_a^b \rho(x)\, dx.$$

Если теперь ε_1 положить равным $\frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon} \left(\int_a^b \rho(x)\, dx \right)^{-1/2}$, то

$$\int_a^b \rho(x) \left[g(x) - \sum_{n=1}^{N} c_n X_n(x) \right]^2 dx < \varepsilon.$$

Это означает, что система функций $\left\{ X_n(x) \right\}_{n=1}^{\infty}$ полна в $\mathfrak{L}_2$.

Приведем некоторые примеры собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (П13), (П14) для различных значений параметров.

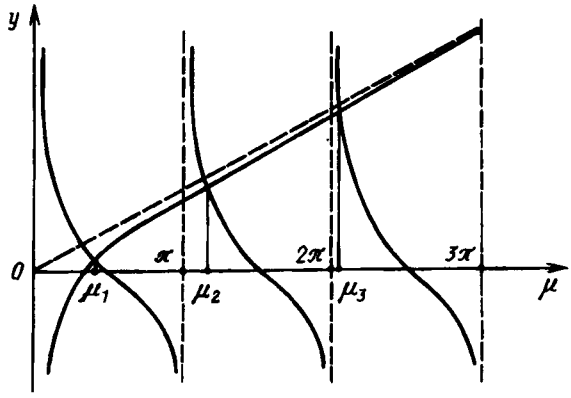


Рис. П2

Пример П2.1. Пусть $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$, $a = 0$, $b = l$. Соответствующая задача Штурма – Лиувилля запишется в виде

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0; \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения $\lambda_n = \left(\dfrac{\mu_n}{l}\right)^2$ этой задачи выражаются через неотрицательные корни μ_n трансцендентного уравнения (рис. П2)

$$\operatorname{ctg}\mu = \frac{\alpha_1\alpha_2\mu^2 - \beta_1\beta_2 l^2}{(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)\mu},$$

а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\mu_n x}{l} + \theta_n\right), \quad \theta_n = \operatorname{arctg}\frac{\alpha_1\mu_n}{\beta_1 l}.$$

Квадрат нормы этих собственных функций равен

$$||X_n||^2 = \frac{l}{2}\left[1 + \frac{(\mu_n^2\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 l^2)(\alpha_1\beta_2 l + \alpha_2\beta_1 l)}{(\mu_n^2\alpha_1^2 + \beta_1^2 l^2)(\mu_n^2\alpha_2^2 + \beta_2^2 l^2)}\right].$$

В частных случаях:

а) для граничных условий первого рода ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots; \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}; \quad ||X_n||^2 = \frac{l}{2};$$

б) для граничных условий второго рода ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$)

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{l}; \quad ||X_n||^2 = \begin{cases} l, & n = 0; \\ \dfrac{l}{2}, & n \neq 0; \end{cases}$$

в) для смешанных граничных условий ($\alpha_1 = \beta_2 = 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 1$)

$$\lambda_n = \left[\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right]^2, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$X_n(x) = \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2l}; \quad ||X_n||^2 = \frac{l}{2};$$

г) для смешанных граничных условий ($\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, $\beta_2 = h > 0$)

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\mu_n x}{l}; \quad ||X_n||^2 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{hl}{\mu_n^2 + h^2 l^2}\right),$$

где μ_n – положительные корни трансцендентного уравнения $\mathrm{tg}\mu = -\mu/(hl)$.

Пример П2.2. В задаче Штурма – Лиувилля в качестве граничных условий могут выступать также условия периодичности

$$X(a) = X(b), \quad X'(a) = X'(b)$$

или для циклической переменной $x = \varphi$

$$X(\varphi) = X(\varphi + 2\pi).$$

В частности, для задачи

$$X''(\varphi) + \lambda X(\varphi) = 0;$$
$$X(\varphi) = X(\varphi + 2\pi)$$

собственные значения $\lambda_n = n^2$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем каждому собственному значению соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$. Поэтому можно считать, что

$$X_n(\varphi) = a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi. \qquad (\text{П}15)$$

Замечание П2.2. Собственные функции (П15) можно записать в виде комплексных функций действительного аргумента

$$X_n(\varphi) = c_n e^{in\varphi}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \#$$

Пример П2.3.* Пусть $p(x) = x$, $q(x) = m^2/x$, $\rho(x) = x$, $a = 0$, $b = R$, $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, m – целое число. Соответствующая задача Штурма – Лиувилля формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dX}{dx}\right) + \dfrac{m^2}{x}X = \lambda x X, \quad 0 < x < R; \\ |X(0)| < +\infty, \quad X(R) = 0. \end{cases} \qquad (\text{П}16)$$

* В этом и последующих примерах рассматриваются уравнения для специальных функций. В этих задачах Штурма – Лиувилля коэффициент $p(x)$ обращается в нуль в граничных точках отрезка $[a, b]$. Для таких граничных точек условия формулируются как условия ограниченности собственных функций. Более подробные сведения о свойствах специальных функций, являющихся собственными функциями, можно найти в монографиях.

Собственные значения этой задачи λ_n связаны с положительными корнями μ_{mn}, $n = 1, 2, \ldots$, уравнения $\mathcal{J}_m(\mu) = 0$, где $\mathcal{J}_m(x)$ - функция Бесселя m-го порядка, простым соотношением

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_{mn}}{R}\right)^2.$$

Собственные функции задачи (П16), ортогональные на отрезке $[0, R]$ с весом $\rho(x) = x$, определяются формулой

$$X_n(x) = \mathcal{J}_m\left(\frac{\mu_{mn}x}{R}\right),$$

а квадрат их нормы равен

$$||X_n||^2 = \frac{R^2}{2}\,\mathcal{J}_m'^2(\mu_{mn}).$$

Напомним, что функция $y = \mathcal{J}_m(x)$ является ограниченным в точке $x = 0$ решением уравнения Бесселя m-го порядка

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Пример П2.4. Пусть $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 1$, $a = -1$, $b = +1$. Тогда для соответствующей задачи Штурма - Лиувилля

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dX}{dx}\right] = \lambda X, \quad -1 < x < +1; \\ |X(\pm 1)| < +\infty \end{cases}$$

собственные значения $\lambda_n = n\,(n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а собственные функции

$$X_n(x) = P_n(x), \quad ||X_n||^2 = \frac{2}{2n+1},$$

где полиномы n-й степени

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\, n!}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right]$$

называют ***полиномами Лежандра***. На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ эти полиномы ортогональны с весом $\rho(x) \equiv 1$.

Первые полиномы Лежандра равны

$$P_0(x) \equiv 1; \quad P_1(x) = x; \quad P_2(x) = \frac{1}{2}\,(3x^2 - 1);$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}\,(5x^3 - 3x); \quad P_4(x) = \frac{1}{8}\,(35x^4 - 30x^2 + 3);$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}\,(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Пример П2.5. Если $p(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \dfrac{m^2}{1-x^2}$, $\rho(x) \equiv 1$, $a = -1$, $b = +1$, то соответствующая задача Штурма – Лиувилля формулируется как краевая задача

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\,\dfrac{dX}{dx}\right] + \dfrac{m^2}{1-x^2}\,X = \lambda X, \quad -1 < x < +1; \\ |X(\pm 1)| < \infty \end{cases}$$

с условиями ограниченности собственных функций на концах отрезка $[-1, +1]$. Для такой задачи $m = 1, 2, \ldots$, $\lambda_n = n\,(n+1)$, $n = 1, 2, \ldots$,

$$X_n(x) = P_n^m(x), \quad \|X_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

Здесь специальные функции

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad m \leqslant n,$$

носят название присоединенных функций (многочленов) Лежандра m-го порядка. В частности:

$$P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}; \quad P_2^1(x) = 3\,(1-x^2)^{1/2}x;$$

$$P_2^2(x) = 3\,(1-x^2); \quad P_3^1 = \frac{3}{2}\,(1-x^2)^{1/2}(5x^2-1);$$

$$P_3^2(x) = 15\,(1-x^2)\,x; \quad P_3^3(x) = 15\,(1-x^2)^{3/2}.$$

Пример П2.6. Пусть параметры задачи (П13), (П14) заданы в виде $p(x) = e^{-x^2}$, $q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = +\infty$. Соответствующая задача Штурма - Лиувилля

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(e^{-x^2}\dfrac{dX}{dx}\right) = \lambda\, e^{-x^2} X, \quad -\infty < x < +\infty; \\ |X(\pm\infty)| < Mx^s, \quad M,\, s = \text{const} > 0 \end{cases} \tag{П17}$$

рассматривается на неограниченной прямой, причем так как коэффициент $p(x)$ обращается в нуль при $x \to \pm\infty$, то на бесконечности ставится условие ограниченного (степенного) роста собственных функций задачи.

Задача (П17) имеет собственные функции

$$X_n(x) = H_n(x); \quad ||X_n||^2 = \sqrt{\pi}\cdot 2^n \cdot n!$$

только при $\lambda = \lambda_n = 2n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Здесь полиномы степени n

$$H_n(x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$$

называют полиномами Чебышева - Эрмита. Для них справедлива рекуррентная формула

$$H_{n+1}(x) - 2x\, H_n(x) + 2n\, H_{n-1}(x) = 0,$$

позволяющая определять H_n для всех n, зная $H_0(x) \equiv 1$ и $H_1(x) = 2x$. Например, $H_2(x) = 2x\, H_1 - 2H_0 = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 2x\, H_2 - 4H_1 = 8x^3 - 12x$ и т.д. #

Задача на собственные значения может быть сформулирована и в более общей постановке как задача отыскания нетривиальных решений уравнений в частных производных, решаемых в некоторой области $\Omega \subset \mathfrak{R}^N$ $(N = 2, 3)$.

В частности, для задачи $(k > 0,\ q \geqslant 0,\ \rho > 0)$

$$\begin{cases} \operatorname{div}(k \operatorname{grad} v) - qv + \lambda\rho v = 0, \quad M \in \Omega \subset \mathfrak{R}^N; \\ v|_\Sigma = 0 \end{cases} \tag{П18}$$

существует счетное множество положительных собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots$, которым соответствуют собственные функции $v_1(M)$, $v_2(M), \ldots, v_n(M), \ldots$, удовлетворяющие условию ортогональности в области Ω:

$$\iiint\limits_\Omega \rho(M)\, v_n(M)\, v_m(M)\, dV = \begin{cases} 0, \ m \neq n; \\ ||v_n||^2, \ m = n. \end{cases}$$

Здесь dV – элемент объема пространства $\mathfrak{R}^N$.

Может быть также доказана теорема разложимости функции $f(M)$, имеющей непрерывные частные производные до второго порядка в области Ω и удовлетворяющие условию $f = 0$ на границе Σ, в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям задачи (П18)

$$f(M) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, v_n(M), \quad M \in \Omega \tag{П19}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{||v_n||^2} \iiint\limits_\Omega \rho(M)\, f(M)\, v_n(M)\, dV.$$

При более слабых условиях, накладываемых на функцию f, ряд (П19) может сходиться к функции $f(M)$ в среднем.

Другой интересный класс задач на собственные значения в приложении к задачам технической механики можно найти в монографии Л. Коллатца.

Приложение 3. МЕТОДЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ И ПОДОБИЯ

Во многих случаях при решении задач математической физики первая информация о свойствах решения может быть получена с помощью подхода, основанного на теории размерности и подобия, которая играет важную роль при моделировании различных физических процессов. Методами теории размерности и подобия была решена, например, практически важная газодинамическая задача о сильном взрыве (Л.И. Седов, 1946 г.), а также задача о влиянии мгновенного сосредоточенного теплового источника в нелинейной теплопроводности (Я.Б. Зельдович, А.С. Компанеец, 1950 г.) и ряд других.

Пусть в некоторой системе единиц измерения физических величин установлены некоторые ***основные*** единицы $q_1, q_2, \ldots, q_n$ для измерения основных физических величин. Так, в Международной системе единиц (СИ) такими основными единицами являются килограмм, метр, секунда, ампер, градус Кельвина, свеча и моль.

Тогда единицы измерения других ***производных*** величин, определяемых с помощью физических формул и законов, выражаются через основные единицы. Поэтому при изменении масштаба единиц измерения q_i в α_i раз числовое значение производной величины a изменится в R раз. Тогда, если

$$R = \alpha_1^{b_1} \alpha_2^{b_2} \cdots \alpha_n^{b_n},$$

говорят, что величина a имеет ***размерность***

$$[a] = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \cdots q_n^{b_n}. \qquad (\text{П}20)$$

Символ размерности обычно берется в прямые скобки или используется обозначение $\dim a$ (от *англ.* dimension – размер, размерность).

Формула размерности (П20) показывает, как мера величины a зависит от мер основных величин. Если же в (П20) все показатели размерности b_i для $i = 1, 2, \ldots, n$ равны нулю, то величину a называют ***безразмерной***, приписывая ей размерность 1.

Вычисление размерностей облегчается правилами размерности произведения (отношения) двух физических величин. По этому правилу если $a = A \cdot B$, то $[a] = [A] \cdot [B]$, а если $a = A/B$, то $[a] = [A]/[B]$.

Пример П3.1. Записать размерности скорости v, кинетической энергии W_k и удельной массовой теплоемкости c в СИ.

1. Так как по определению $v = \Delta S/\Delta t$, то

$$[v] = \frac{[\Delta S]}{[\Delta t]} = \frac{L}{T} = LT^{-1}.$$

2. В соответствии с определяющей формулой $W_k = \dfrac{1}{2}mv^2$ имеем

$$[W_k] = \left[\frac{1}{2}\right][m]\,[v]^2 = 1 \cdot M\,(LT^{-1})^2 = M\,L^2\,T^{-2}.$$

Такую же размерность имеют потенциальная энергия, работа и количество теплоты.

3. По определению $c = \dfrac{\Delta Q}{m\Delta T^{\circ}}$, где ΔQ – количество теплоты, необходимое для нагревания массы m вещества на ΔT°. Поэтому

$$[c] = \frac{[\Delta Q]}{[m]\,[\Delta T^{\circ}]} = \frac{M\,L^2\,T^{-2}}{M\Theta} = L^2\,T^{-2}\,\Theta^{-1}.$$

Здесь L, M, T и Θ – символы размерности длины, массы, времени и температуры – основных физических величин соответственно. #

Замечание П3.1. Иногда в формулах размерностей используют символы не самих основных величин, а их единиц измерения. Например, $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$, $[W_k] = \text{кг}\cdot\text{м}^2\cdot\text{с}^{-2}$. #

Теория размерности накладывает определенные ограничения на возможные функциональные зависимости между размерными величинами. Так если две величины a_1 и a_2 связаны равенством $a_1 = a_2$, то $[a_1] = [a_2]$. Равенство размерностей означает сохранение равенства величин при изменении масштабов основных единиц измерения.

Аналогично если величины a_1, a_2 и a_3 связаны равенством $a_1 = a_2 + a_3$, то размерности всех трех величин должны быть одинаковы, т.е. $[a_1] = [a_2] = [a_3]$.

Запомним, что все члены в уравнениях, связывающих физические величины, должны иметь одну и ту же размерность. Это свойство физических и соответственно математических формул называется свойством однородности.

В более общем случае задачи математической физики искомая величина u функционально зависит от некоторых определяющих параметров $x_1, x_2, \ldots, x_m$, представляющих собой размерные величины. Так, если исследуемое явление изучается при помощи дифференциального уравнения, то определяющие параметры появляются: 1) в виде коэффициентов дифференциального уравнения, 2) в виде величин, входящих в начальные и граничные условия, 3) в виде геометрических параметров области решения – размеров, углов.

Решая задачу математической физики, мы должны установить функциональную связь

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m). \qquad (\text{П}21)$$

Оказывается, что теория размерности налагает определенные ограничения на структуру функциональной связи (П21). Поэтому использование этой теории позволяет предсказать определенные свойства и структуру этой связи, не решая всей задачи.

Пусть среди m определяющих размерных параметров задачи $x_1, x_2, \ldots, x_m$ первые k ($k \leqslant m$) имеют независимые размерности, т.е. размерность любой величины не может быть представлена в виде степенного одночлена из размерностей других

величин. Например, размерности длины L, массы M и скорости LT^{-1} независимы, а размерности длины L, скорости LT^{-1} и ускорения LT^{-2} – зависимы.

В этом случае размерности $m-k+1$ величин $u, x_{k+1}, \ldots, x_m$ можно выразить через размерности величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$, т.е.

$$[u] = [x_1]^{r_1}\,[x_2]^{r_2}\cdots[x_k]^{r_k};$$
$$[x_{k+1}] = [x_1]^{p_1}\,[x_2]^{p_2}\cdots[x_k]^{p_k};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[x_m] = [x_1]^{s_1}\cdots[x_2]^{s_2}\cdots[x_k]^{s_k}.$$

Здесь все показатели размерностей r_i, p_i, ..., s_i для $i = 1, 2, \ldots, k$ могут быть определены по правилу размерностей.

Следовательно, в рассматриваемой задаче можно определить $m-k+1$ безразмерных параметров или критериев:

$$\Pi = \frac{u}{x_1^{r_1}x_2^{r_2}\cdots x_k^{r_k}};$$
$$\Pi_1 = \frac{x_{k+1}}{x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_k^{p_k}};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi_{m-k} = \frac{x_m}{x_1^{s_1}x_2^{s_2}\cdots x_k^{s_k}}.$$

Одна из центральных теорем теории размерности и подобия, так называемая П-теорема, утверждает, что соотношение между размерными физическими величинами, не зависящее от выбора масштаба основных единиц измерения, всегда можно сформулировать как соотношение между меньшим числом соответствующих безразмерных величин. В частности, функциональную связь (П21) всегда можно привести к эквивалентной зависимости между безразмерными величинами

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-k}). \qquad (\text{П}22)$$

В математической физике, например, любое дифференциальное уравнение можно привести к безразмерной форме.

Заметим, что преимущество зависимости (П22) перед (П21) состоит прежде всего в уменьшении числа независимых переменных на k.

Соотношение (П22) можно записать также, выделив множитель, имеющий размерность величины u. Тогда из (П22) получим

$$u = x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k} \cdot F(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-k}). \qquad (\text{П}23)$$

Чем меньше число определяющих параметров задачи и чем больше среди них величин с независимыми размерностями, тем более жестко ограничена функциональная связь между размерными величинами. Действительно, пусть $k = m$, т.е. все определяющие параметры задачи имеют независимые размерности. Тогда из этих величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$ нельзя образовать ни одной безразмерной комбинации и соотношение (П23) запишется в виде

$$u = C\, x_1^{r_1} x_2^{r_2} \cdots x_k^{r_k}, \quad C = \text{const}. \qquad (\text{П}24)$$

Так как показатели $r_1, r_2, \ldots, r_k$ находят по размерности величины u, то в случае $k = m$ связь величины u с определяющими параметрами задачи содержит неопределенность только в виде константы.

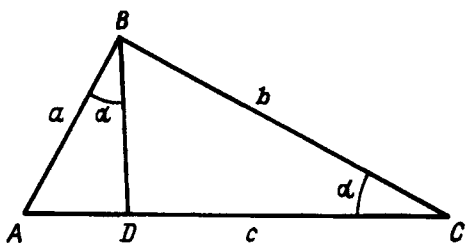


Рис. П3

Пример П3.2. Пусть задан прямоугольный треугольник (рис. П3), который полностью определяется заданием длины гипотенузы c и угла α. Поэтому и его площадь S зависит от этих определяющих парметров, т.е.

$$S = S(c, \alpha).$$

Размерность площади $[S] = L^2$, а определяющие параметры имеют размерности $[c] = L$ и $[\alpha] = 1$. Поэтому из П-теоремы вытекает, что $S = c^2F(\alpha)$, где $F(\alpha)$ – некоторая функция безразмерного угла α, измеренного в радианах.

Но то же самое относится к площадям двух прямоугольных треугольников ABD и BCD (см. рис. П3), для которых роль гипотенуз играют катеты исходного треугольника ABC. Поэтому $S_1 = a^2F(\alpha)$ и $S_2 = b^2F(\alpha)$. Но так как $S = S_1 + S_2$, то

$$c^2F(\alpha) = a^2F(\alpha) + b^2F(\alpha),$$

или

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема Пифагора доказана методом теории размерности. Сам Пифагор, правда, не знал, что доказанная им теорема является следствием П-теоремы.

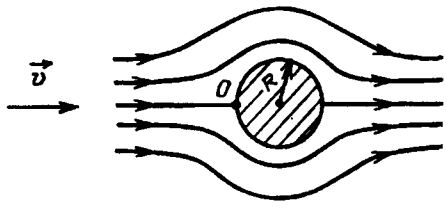


Рис. П4

Пример П3.3. Пусть поток несжимаемой идеальной жидкости обтекает шар радиуса R (рис. П4). Вдали от шара давление будем считать равным нулю, а скорость однородного потока – равной v. Требуется определить давление p в лобовой точке O.

Замечание П3.2. Мы исключили давление на бесконечности p_0 из определяющих параметров задачи, так как жидкость несжимаема и изменение давления p_0 в ней не может сказаться на поле скоростей. В нашей задаче учесть это статическое давление p_0 можно, понимая под давлением p не динамическое давление, а разность $(p - p_0)$. #

Определяющими параметрами задачи в силу симметричного расположения точки O относительно набегающего потока являются лишь плотность жидкости ρ, скорость потока v и радиус шара R. Поэтому

$$p = f(\rho, v, R).$$

Так как

$$[\rho] = ML^{-3}, \quad [v] = LT^{-1}, \quad [R] = L,$$

то размерности всех трех определяющих параметров задачи оказались независимы и $k = m = 3$.

Следовательно, из П-теоремы в соответствии с формулой (П24) находим, что

$$p = C\rho^{r_1} v^{r_2} R^{r_3}, \quad C = \text{const}. \tag{П25}$$

Так как размерность давления $[p] = ML^{-1}T^{-2}$, то из уравнения (П25) получаем

$$ML^{-1}T^{-2} = (ML^{-3})^{r_1}(LT^{-1})^{r_2}(L)^{r_3}.$$

Отсюда находим, что $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, а $r_3 = 0$. Таким образом, искомое давление в точке O не зависит от радиуса шара и определяется формулой

$$p = C\rho v^2, \quad C = \text{const}.$$

Значение константы C можно определить, привлекая полную систему гидродинамических уравнений и решая соответствующую задачу. #

Следствием теории размерности является понятие подобных явлений или процессов. Два явления считаются подобными, если по найденным характеристикам одного простым пересчетом можно получить характеристики другого. С учетом П-теоремы это означает, что подобные явления отличаются только значениями определяющих параметров, но так, что составленные с их помощью соответствующие безразмерные критерии

Π_1, Π_2, ..., Π_{m-k} совпадают. Равенство всех безразмерных критериев для процессов в двух системах является необходимым и достаточным условием подобия этих систем. Поэтому безразмерные критерии называют критериями подобия.

Размерные физические параметры, входящие в критерии подобия, могут принимать для подобных систем сильно различающиеся значения как, например, размеры лабораторных моделей и натурных конструкций. Но сами безразмерные критерии подобия в таких системах должны быть одинаковыми. Это свойство подобных систем используется при экспериментальном моделировании процессов в лабораторных условиях.

Если в рассматриваемом физическом процессе в двух системах выполнено равенство не всех, а лишь части критериев подобия, то говорят о частичном подобии. В этом случае существенно, чтобы влияние критериев, равенство которых не соблюдается, на протекание процесса в системе было незначительным.

В теории упругости при изучении напряжений и деформаций в конструкциях под воздействием внешних сил критериями подобия являются коэффициент Пуассона σ и критерии $\rho gl/E$ и $F/(El^2)$, где ρ – плотность материала конструкции; g – ускорение силы тяжести; l – характерный размер конструкции; E – модуль Юнга; F – характерная внешняя сила.

В гидроаэромеханике важнейшими критериями подобия являются число Рейнольдса $\mathrm{Re} = vl/\nu$, число Маха $\mathrm{M} = v/a$, и число Фруда $\mathrm{Fr} = v^2/(gl)$, где v – характерная скорость течения; l – характерный размер; ν – кинематическая вязкость; a – местная скорость распространения звука.

В теории теплопроводности и теплопередачи характерными критериями подобия являются число Фурье $\mathrm{Fo} = a^2t/l^2$, число Нуссельта $\mathrm{Nu} = a^2l/\lambda$, число Био $\mathrm{Bi} = \alpha l/\lambda$, число Пекле $\mathrm{Pe} = vl/a^2$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = \nu/a^2$. Здесь a^2 – коэффициент температуропроводности, l – характерный размер, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент теплоотдачи, v – характерная скорость потока, ν – кинематическая вязкость.

С понятием подобия тесно связано свойство автомодельности (от *греч.* autos – сам и *франц.* modele – образец), т.е. самоподобия нестационарного процесса в системе, когда процесс в различные моменты времени остается подобным самому себе, испытывая лишь сжатие или растяжение по пространственным переменным.

Обычно автомодельность нестационарного процесса приводит к тому, что его характеристики оказываются зависящими от комбинаций координат и времени специального вида

$$\eta = \frac{x}{\beta t^s}, \quad [\beta] = LT^{-s},$$

которые называют ***автомодельными переменными***.

Для автомодельности процесса достаточно, чтобы система определяющих его параметров содержала не более двух параметров с независимыми размерностями, отличными от длины и времени. Поэтому условием автомодельности является отсутствие характерного размера и характерной временной величины для процесса. При описании такого автомодельного процесса обычно удается перейти от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Учебные издания

Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1964.

Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – М.: Наука, 1968.

Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – М.: Высшая школа, 1961.

Владимиров В.С. Уравнеиия математической физики. – М.: Наука, 1988.

Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970.

Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1964.

Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982.

Ли Цзун-дао. Математические методы в физике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.

Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.

Савельев И.В. Курс общей физики: Учебник для вузов: В 3 т. – М.: Наука, 1986.

Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука. 1966.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

Монографии по специальным курсам

Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979.

Коллатц Л. Задачи на собственные значения: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968.

Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.; Л.: Физматгиз, 1963.

Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. – М.: Наука, 1987.

Николс Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.

Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989.

Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / *А.А. Самарский, В.А. Галактионов, С.П. Курдюмов, А.П. Михайлов.* – М.: Наука, 1987.

Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981.

Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.

Теория солитонов: Метод обратной задачи / В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1980.

Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.

Хакен Г. Синергетика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980.

Справочные издания

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963.

Математическая энциклопедия: В 5 т. – М.: Сов. эицикл., 1977 – 1985.

Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: Пер. с нем. – М.: Наука, 1977.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Бета-функция 282

Волна тепловая 270
– разогрева 283
– ударная 305
– уединенная 317
– электромагнитная 219
Волны импульса 32
– кноидальные 318
– отклонения 29
– стоячие 50

Гамма-функция Эйлера 269

Дельта-функция 55, 329

Задача Дирихле 114, 118, 126
– Коши для гиперболического уравнения 27
– – – уравнения теплопроводности 88, 173
– краевая 56, 67, 123
– Неймана 114
– Штурма – Лиувилля 47, 339
– экологического прогнозирования 186
Значения собственные 47, 68, 167, 172, 197, 220, 252, 340

Интеграл ошибок 262
– Пуассона 119, 123, 128

Конус характеристический 195
Кривая характеристическая 16

Метод Даламбера 27
– прямых (Роте) 288
Метод функции Грина 118
– Фурье 45, 67
– характеристик 33

Носитель функции 31

Оператор Даламбера 207
– Лапласа 100
– самосопряженный (эрмитовый) 248
Операторы физических величин 243
Отображение конформное 135

Переменные автомодельные 360
Полиномы Лежандра 150, 349
– Чебышева – Лагерра 241
– Чебышева – Эрмита 231, 350
Потенциал векторный 99, 209
– двойного слоя 105
– комплексный 138
– логарифмический 105
– объемный 105
– поляризационный 210
– простого слоя 105
– скалярный 209
Преобразование конформное 135
– Коула – Хопфа 310
Принцип максимума для гармонической функции 112
– – – параболического уравнения 77
Производная обобщенная 36

Разложение потенциала мультипольное 144
Решение обобщенное 12, 34

– строгое 12
– фундаментальное для уравнения Лапласа 101
– – уравнения теплопроводности 87, 177

Солитон 317
Соотношение дисперсионное 313

Теорема Стеклова 342

Уравнение Бюргерса 307
– волновое 24, 194
– гиперболического типа 15,21
– диффузии 163
– Зельдовича 295
– Колмогорова – Петровского – Пискунова 294
– Кортевега – де Фриза 314
– Лапласа 98, 133
– Лежандра 147
– Максвелла 206
– параболического типа 15, 60
– Пуассона 99, 133
– Римана 303
– Семенова 295
– синус-Гордона 327
Уравнение теплопроводности 63, 162
– типа "реакция – диффузия" 284
– Шредингера 227, 327
– эллиптического типа 15, 97
Условие калибровки Лоренца 209
Условия граничные 10, 43, 64, 114
– начальные 11

Форма каноническая уравнения 16, 20
Формула Грина 103
– Даламбера 29
– Пуассона 90
Функции Лежандра присоединенные 236, 350
– собственные 47, 68, 167, 172, 197, 247, 252, 340
– сферические 237
Функция Бесселя 168, 201
– волновая 226
– гармоническая 111
– Грина 87, 116
– источника 56, 75
– Неймана 168, 201
– пробная 35
– финитная 31
– Якоби 318

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Основные обозначения 7

Введение 9

В1. Задачи математической физики 9

В2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка 14

Раздел I. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 21

1. Уравнение гиперболического типа 21

1.1. Уравнения колебаний струны 21

1.2. Задача Коши для гиперболического уравнения 27

1.3. Обобщенные решения 34

1.4. Колебания полуограниченной струны 39

1.5. Краевые задачи для гиперболического уравнения 43

1.6. Краевые задачи для неоднородного уравнения 52

Вопросы и задачи 58

2. Уравнения параболического типа 60

2.1. Одномерный нестационарный процесс распространения теплоты 60

2.2. Краевые задачи для уравнения теплопроводности 67

2.3. Свойства решений краевых задач для уравнения теплопроводности 75

2.4. Неоднородное уравнение теплопроводности 79

2.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности 83

Вопросы и задачи 94

3. Уравнения эллиптического типа 97

3.1. Задачи, приводящие к уравнениям эллиптического типа . . 97

3.2. Фундаментальные решения уравнения Лапласа 100

3.3. Интегральная формула Грина 103

3.4. Свойства объемного потенциала 106

3.5. Свойства гармонических функций 111

3.6. Краевые задачи для уравнения Лапласа 114

3.7. Метод функций Грина 116

3.8. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом разделения переменных 123

Вопросы и задачи 130

Раздел II. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 133

4. Уравнения Пуассона и Лапласа как математические модели электростатических полей 133

4.1. Применение конформных отображений для решения задач электростатики . . . 133

4.2. Мультипольное разложение потенциала . . . 144

4.3. Расчет поля электростатического подвеса . . . 148

4.4. Электрическое поле в плазме . . . 152

Вопросы и задачи . . . 159

5. Математическое моделирование диффузионных процессов переноса 160

5.1. Моделирование диффузионных процессов переноса в движущихся средах . . . 160

5.2. Краевые задачи остывания нагретых тел . . . 163

5.3. Распространение теплоты в неограниченном пространстве 173

5.4. Диффузионный процесс в активной среде с размножением . 182

5.5. Задача экологического прогнозирования . . . 186

Вопросы и задачи . . . 189

6. Волновое уравнение для акустических и электромагнитных волн 191

6.1. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны . . . 191

6.2. Колебания прямоугольной мембраны . . . 196

6.3. Колебаиия круглой мембраны . . . 200

6.4. Волновое уравнение для электромагнитных волн . . . 205

6.5. Потенциалы электромагнитного поля . . . 209

6.6. Электромагнитное излучение дипольного осциллятора . . . 213

6.7. Распространение электромагнитных волн в цилиндрическом волноводе . . . 219

Вопросы и задачи . . . 224

7. Уравнение Шредингера для описания квантовых состояний частиц 226

7.1. Волновая функция . . . 226

7.2. Задача о гармоническом осцилляторе в квантовой механике 228

7.3. Квантовые состояния атома водорода . . . 234

7.4. Операторы физических велнчин в квантовой механике . . . 243

Вопросы и задачи . . . 253

Раздел III. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ **255**

8. Нелинейные модели диффузионных процессов переноса **255**

8.1. Теория нелинейной теплопроводности 255

8.2. Задача Стефана о фазовом переходе 259

8.3. Распространение тепловых возмущений в нелинейных средах 265

8.4. Задача нелинейной теплопроводности с объемным поглощением 278

8.5. Уравнения типа "реакция – диффузия" 284

Вопросы и задачи 293

9. Нелинейные уравнения волновых процессов **294**

9.1. Уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова 294

9.2. Уравнение Бюргерса 302

9.3. Уравнение Кортевега – де Фриза 312

9.4. Многосолитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза 319

Вопросы и задачи 328

Приложение 1. Дельта-функция и ее свойства **329**

Приложение 2. Задача Штурма – Лиувилля **339**

Приложение 3. Методы теории размерности и подобия **352**

Список рекомендуемой литературы **361**

Предметный указатель **363**

Учебное издание

Математика в техническом университете
Выпуск XII

Мартинсон Леонид Карлович
Малов Юрий Иванович

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Редактор *Е.Н. Ставицкая*
Художник *С.С. Водчиц*
Корректор *Е.В. Авалова*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97 г.

Подписано в печать 18.12.2001. Формат $60\times88^1/_{16}$.
Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Усл. печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 24,15.
Тираж 3000 экз. Заказ № 8874.

Издательство МГТУ имени Н. Э. Баумана,
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.

Отпечатано с готового оригинала-макета
в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ,
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403.
Тел. 554-21-86.

ISBN 5-7038-1911-3

9 785703 819111