提示：如果题目的陈述不能完全满足解题条件，那么你可以做出某些假设。但是，这些假设必须是合理的，而且你也需要在作业中对这些假设给出清晰地说明和解释。

原则：你**必须独立完成**本课程的所有作业，除了课程设计内容之外，本课程没有需要小组协作完成的作业。一般来说，你可以与同学们讨论完成作业过程中遇到的问题，但是作业的具体解决方法（包括作业本身）必须是你自己独立完成的。

问题：最小平方交点和直线拟合

假如使用齐次坐标表示直线的话，则两条二维直线的交点可以使用它们之间的叉乘乘积来表示，即：$\tilde{\mathbf{x}} = \tilde{l}_1 \times \tilde{l}_2$。

1. 如果已知多条直线且希望找到与每条直线距离的平方和最小的点 $\tilde{\mathbf{x}}$，

$$D = \sum_i \left(\tilde{\mathbf{x}} \cdot \tilde{l}_i \right)^2$$

   如何计算 D？

2. 为了将一群点拟合为一条直线，可以计算这些点的均值和围绕这个均值的协方差矩阵，试证明：经过均值且沿着协方差椭球长轴（最大特征矢量）方向的直线将最小化到这些点的距离平方和。

3. （选作）虽然投影空间对偶原理(Projective Duality)告诉我们点和直线是可以互换的，但是这两种方法在本质上是不同的。为什么两个算法在表面上如此不同？它们实际上是最小化不同的目标吗？

参考：

投影空间对偶原理可以叙述为：对于空间元素（点、直线与平面）的每个投影命题都对应着另一个命题（对偶的），这个命题是从第一个命题用文字“平面”代替“点”并且用文字“点”代替“平面”，文字“直线”保持不变而得到的。

如果这两个命题中的一个得到证明，那么两个相互对偶的命题就都是正确的。