

提示：如果问题的陈述不能完全满足解题条件，那么你可以做出某些假设。但是，这些假设必须是合理的，而且你也需要在作业中对这些假设给出清晰地说明和解释。

原则：你必须**独立完成**本课程的所有作业，除了课程设计内容之外，本课程没有需要小组协作完成的作业。一般来说，你可以与同学们讨论完成作业过程中遇到的问题，但是作业的具体解决方法（包括作业本身）必须是自己独立完成的。

问题 1：（30 分）

在一维模式特征空间的两类问题中，两类模式的概率密度分布函数分别为 $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ 和

$\mathcal{N}(1, \sigma^2)$ 。试证明最小平均风险的分类阈值为 $x_0 = \frac{1}{2} - \sigma^2 \ln \frac{C_{12} \Pr(\omega_2)}{C_{21} \Pr(\omega_1)}$ ，其中假设

$$C_{11} = C_{22} = 0。$$

问题 2：（70 分）

1. 生成两个各包含 $N=1000$ 个二维随机矢量的数据集 \mathbf{X} 和 \mathbf{X}' 。数据集中随机矢量来自于三个分布模型，它们分别满足均值矢量 $\mathbf{m}_1 = [1, 1]^T$ 、 $\mathbf{m}_2 = [4, 4]^T$ 和 $\mathbf{m}_3 = [8, 1]^T$ 和协方差矩阵 $\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_3 = 2\mathbf{I}$ ，其中 \mathbf{I} 是 2×2 的单位矩阵。在生成数据集 \mathbf{X} 时，假设来自三个分布模型的先验概率相同；而在生成数据集 \mathbf{X}' 时，鲜艳概率分别为 0.6、0.3 和 0.1。
2. 分别画出所生成的两个数据集中随机矢量的散布图。
3. 在两个数据集上分别应用“似然率测试规则”、“贝叶斯风险规则”（其中 $C_{12} = 2$ ， $C_{13} = 3$ ， $C_{23} = 2.5$ ， $C_{11} = C_{22} = C_{33} = 0$ ， $C_{21} = C_{31} = C_{32} = 1$ ）、“最大后验概率规则”和“最短欧氏距离规则”进行模式分类实验，给出实验过程设计和实验结果。
4. 对每个数据集给出上述每种分类规则的分类错误率，分析结果并给出你的结论。