

提示：如果问题的陈述不能完全满足解题条件，那么你可以做出某些假设。但是，这些假设必须是合理的，而且你也需要在作业中对这些假设给出清晰地说明和解释。

原则：你必须**独立完成**本课程的所有作业，除了课程设计内容之外，本课程没有需要小组协作完成的作业。一般来说，你可以与同学们讨论完成作业过程中遇到的问题，但是作业的具体解决方法（包括作业本身）必须是自己独立完成的。

问题 1：（30 分）

试证明在 M 类问题中最优分类器的分类错误率边界为 $P_e \leq \frac{M-1}{M}$ 。

提示：首先证明对每个 x 的后验概率 $P(\omega_i|x), i=1,2,\dots,M$ 的最大值大于或等于 $1/M$ ，且在所有后验概率相等时等式成立。

问题 2：（30 分）

在两类分类问题中，可以约束某类的错误率不变，即让 $\varepsilon_1 = \varepsilon$ 。试证明最小化另一类错误率得到的似然测试规则为：

$$\text{Decide } x \in \omega_1 \text{ if } \frac{P(\omega_1|x)}{P(\omega_2|x)} > \theta$$

其中，选择参数 θ 来满足约束条件。这就是 *Neyman-Pearson* 测试，它和贝叶斯最小风险规则相似。

提示：使用拉格朗日乘子法证明这个问题等价于最小化 $q = \theta(\varepsilon_1 - \varepsilon) + \varepsilon_2$ 的问题。

问题 3：（40 分）

在三类分类问题中，每类模式特征矢量均遵循正态分布。三个类别模式矢量的协方差矩阵相同，

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.8 \end{bmatrix}$$

每类的均值矢量分类为 $\mu_1 = [0.1, 0.1]^T$, $\mu_2 = [2.1, 1.9]^T$, $\mu_3 = [-1.5, 2.0]^T$ 。假设这些类别的先验概率是相同的。

1. 根据贝叶斯最小错误率分类器给出未知类别特征矢量 $[1.6, 1.5]^T$ 的类别。
2. 画出与模式特征矢量 $[2.1, 1.9]^T$ 具有相等马氏距离点的轨迹。