计算机视觉作业一

姓名：李宁　　　　　　　　学号：2120180459　　　　　　　　专业：计算机科学与技术

假如使用齐次坐标表示直线的话，则两条二维直线得交点可以使用它们之间得叉乘乘积来表示，即：$\tilde{x} = \tilde{l_1} \times \tilde{l_2}$。

问题 1：（最小平方交点）

一、问题描述

如果已知多条直线且希望找到与每条直线距离的平方和最小的点$\tilde{x}$，

$$D = \sum_i \left(\tilde{x} \cdot \tilde{l_\iota}\right)^2$$

计算D

二、基本思路

首先假设在一个二维空间上，可知直线的表达式为

$$l\text{：} ax + by + c = 0$$

则空间内一点(x_0, y_0)到直线的最短距离为

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

所以，点(x_0, y_0)到平面上多条直线的距离的平方和组成了一个关于x，y的二元二次函数$f(x, y)$。根据二元二次函数求极值的数学原理，问题即为所求，进而可以将图形空间推广到更多维度上。问题即为所求。

三、问题求解

解：假设在一个二维空间上，已知有 n 条直线

$$l_1\text{：} a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$l_2\text{：} a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$l_n\text{：} a_nx + b_ny + c_n = 0$$

则空间内一点(x, y)到各条直线的距离的平方为

$$d_1^2 = \left(\frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right)^2 = \frac{a_1^2x^2 + b_1^2y^2 + 2a_1b_1xy + 2a_1c_1x + 2b_1c_1y + c_1^2}{a_1^2 + b_1^2}$$

$$d_2^2 = \left(\frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right)^2 = \frac{a_2^2x^2 + b_2^2y^2 + 2a_2b_2xy + 2a_2c_2x + 2b_2c_2y + c_2^2}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\cdots\cdots \quad \cdots\cdots$$

$$d_n^2=\left(\frac{|a_nx+b_ny+c_n|}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\right)^2=\frac{a_n^2x^2+b_n^2y^2+2a_nb_nxy+2a_nc_nx+2b_nc_ny+c_n^2}{a_n^2+b_n^2}$$

因此，设$D=f(x,y)=d_1^2+d_2^2+\cdots+d_n^2$，得到如下公式

$$f(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)x^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)y^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)xy+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)x$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)y+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)$$

之后将$f(x,y)$分别对 x 和 y 求导得

$$f_x(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)y+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)$$

$$f_y(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)y+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)x+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)$$

令

$$\mathrm{A}=f_{xx}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i^2}{a_i^2+b_i^2}$$

$$\mathrm{B}=f_{xy}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}$$

$$\mathrm{C}=f_{yy}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_i^2}{a_i^2+b_i^2}$$

因为易验证 $\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0$，且$\mathrm{A}>0$，所以当$f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$时，原函数取得极小值。

因此令$f_y(x,y)=0$，求得y，代入$f_x(x,y)=0$；令$f_x(x,y)=0$，求得x，代入$f_y(x,y)=0$即可求得使$f(x,y)$取得极小值的点(x_0,y_0)。所求x_0，y_0如下：

$$x_0=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)^2}$$
$$y_0=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)^2}$$

于是

$$D_0=f(x_0,y_0)=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)x_0^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)y_0^2+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ib_i}{a_i^2+b_i^2}\right)x_0y_0$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2a_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)x_0+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2b_ic_i}{a_i^2+b_i^2}\right)y_0+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i^2}{a_i^2+b_i^2}\right)$$

同理，可以推广到更高维度空间上。

问题 2：（直线拟合）

一、问题描述

为了将一群点拟合为一条直线，可以计算这些点的均值和围绕这个均值的协方差矩阵，试证明：经过均值且沿着协方差椭球长轴（最大特征矢量）方向的直线将最小化到这些点的距离平方和。

二、基本思路

该问题的求解即为对最小平方误差理论的求证。由题意所给条件（均值和最大特征矢量方向）可知，证明本题主要有两个步骤：

① 确定中心点

② 确定过点的一个单位方向

三、问题求解

证明：设空间中有 n 个样本点$(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$，每个样本点为 m 维，将样本点$x_k$在直线上的投影记为$x_k'$，则题目需要最小化的目标公式为

$$D=\sum_{k=1}^{n}\|x_k'-x_k\|^2 \tag{1}$$

为了确定一条直线，则需要确定一个点以及在该点确定的方向即可。

① 确定点：

假设要在空间中找一点x_0来代表 n 个样本点，则该 m 维的点需满足如下公式结果最小。

$$J_0(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\|x_0-x_k\|^2 \tag{2}$$

假设$\bar{x}$为 n 个样本点的均值

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \tag{3}$$

那么

$$J_0(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\|(x_0-\bar{x})-(x_k-\bar{x})\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\|x_0-\bar{x}\|^2-2\sum_{k=1}^{n}(x_0-\bar{x})^T(x_k-\bar{x})+\sum_{k=1}^{n}\|x_k-\bar{x}\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\|x_0-\bar{x}\|^2-2(x_0-\bar{x})^T\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})+\sum_{k=1}^{n}\|x_k-\bar{x}\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\|x_0-\bar{x}\|^2+\sum_{k=1}^{n}\|x_k-\bar{x}\|^2 \tag{4}$$

因为后一项与x_0无关，可以看作常量，而$J_0(x_0)\geq 0$，因此，若最小化$J_0(x_0)$，$x_0=\bar{x}$。因此需要确定的点x_0即为样本点均值。

② 确定方向：（为了方便观察，该步将向量加粗）

由上一步骤可知所求直线必过样本均值点。假设直线的方向是单位向量$\boldsymbol{e}$。则该直线上的任一点$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}'$可以用均值点$\overline{\boldsymbol{x}}$和$\boldsymbol{e}$(单位向量)来表示

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}'=\overline{\boldsymbol{x}}+a_k\boldsymbol{e}$$

其中，a_k是$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}'$到点$\overline{\boldsymbol{x}}$的距离。

则可以重新定义D如下式，即为即为最小化目标公式

$$J_1(a_1,\dots\dots,a_n,\boldsymbol{e})=\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}'-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|(\overline{\boldsymbol{x}}+a_k\boldsymbol{e})-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}\|^2 \tag{5}$$

将上式展开

$$J_1(a_1,\dots\dots,a_n,\boldsymbol{e})=\sum_{k=1}^{n}\|(\overline{\boldsymbol{x}}+a_k\boldsymbol{e})-\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}\|^2=\sum_{k=1}^{n}\|a_k\boldsymbol{e}-(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}})\|^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|\boldsymbol{e}\|^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2 \tag{6}$$

首先，将$\boldsymbol{e}$固定，看作常量，然后对a_k进行求导，得

$$a_k=\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}}) \qquad （7）$$

然后，固定a_k，对$\boldsymbol{e}$求偏导数，首先将公式（7）代入J_1，得

$$J_1(\boldsymbol{e})=\sum_{k=1}^{n}a_k^2\|\boldsymbol{e}\|^2-2\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}})+\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}[\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}})]^2+\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}})^T\boldsymbol{e}+\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2$$

$$= -\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}+\sum_{k=1}^{n}\|\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}}\|^2 \tag{8}$$

其中$\boldsymbol{S}=\sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x_k}-\overline{\boldsymbol{x}})^T$，与协方差矩阵类似，只是缺少分母 n-1。$S$ 为散列矩阵。

然后对$\boldsymbol{e}$求偏导数，但$\boldsymbol{e}$需要首先满足$\|\boldsymbol{e}\|^2=1$，引入拉格朗日乘子λ，来使$\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}$最大，即$J_1$最小，令

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}-\lambda(\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e}-1) \tag{9}$$

则

$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{e}}=2\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}-2\lambda\boldsymbol{e} \tag{10}$$

所以，当导数为 0 时，得

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{e}=\lambda\boldsymbol{e} \tag{11}$$

两边除以 n-1 就变成了对协方差矩阵求特征值向量了。因此$\boldsymbol{e}$为最大特征矢量的方向向量即为所求。