第四章・不定积分

第四节・分部积分法

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

分部积分公式

由导数公式

$$(uv)' = u'v + uv'$$

积分得:

$$uv = \int u'v\,dx + \int uv'\,dx$$

分部积分公式:

$$\begin{cases} \int uv'\,dx & = uv - \int u'v\,dx \\ \int u\,dv & = uv - \int v\,du \end{cases}$$

例 1 求 $\int x\cos x\,dx$.

$u = x \qquad u' = 1$

$v' = \cos x \qquad v = \sin x$

解 原式 $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

解题技巧:

选取 u 及 v' 的一般方法:

把被积函数视为两个函数之积, 按"反对幂指三" 的顺序, 前者为 u 后者为 v'.

反: 反三角函数

对: 对数函数

幂: 幂函数

指: 指数函数

三: 三角函数

例 2 求 $\int x\ln x dx$.

$u = \ln x \qquad u' = \frac{1}{x}$

$v' = x \qquad v = \frac{1}{2}x^2$

解 原式 $= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int xdx$

$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$

例 3　求 $\int x\arctan x\,dx.$

$$u=\arctan x \qquad u'=\frac{1}{1+x^2}$$
$$v'=x \qquad v=\frac{1}{2}x^2$$

解　原式 $=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C$$

例 4　求 $\int\frac{\ln\cos x}{\cos^2 x}\,dx$

$$u=\ln\cos x \qquad u'=1-\tan x$$
$$v'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad v=\tan x$$

解　原式 $=\tan x\cdot\ln\cos x+\int\tan^2 x dx$

$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\int\left(\sec^2 x-1\right)dx$$
$$=\tan x\cdot\ln\cos x+\tan x-x+C.$$

例 5　求 $\int e^x\sin x dx.$

$$u=\mathrm{e}^x \qquad u'=\mathrm{e}^x$$
$$v'=\sin x \qquad v=-\cos x$$

解　原式 $=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx$

$$u=\mathrm{e}^x \qquad u'=\mathrm{e}^x$$
$$v'=\cos x \qquad v=\sin x$$

$$\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x dx.$$
$$\therefore\int e^x\sin x dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

说明　也可设 $u=\sin x, v'=e^x$. 分部积分法可以多次使用时, 所设类型必须一致.

单个被积函数函也可用分部积分法

例 6　求 $\int\arccos x\,dx.$

$$u=\arccos x \qquad u'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$v'=1 \qquad v=x$$

解　原式 $=x\arccos x+\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$=x\arccos x-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}d\left(1-x^2\right)$$
$$=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C.$$

分部积分法应和其它积分法配合使用

例 7　求 $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

解　令 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2$, $dx=2t\,dt$

$$\int e^{\sqrt{x}}dx = 2\int te^t\,dt \qquad \begin{array}{ll} u=t & u'=1 \\ v'=e^t & v=e^t \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2\left(te^t-\int e^t\,dt\right) \\ &= 2\left(te^t-e^t\right)+C \\ &= 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C. \end{aligned}$$

先分后合

例 8　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

解　原式 $= \int e^{2x}\sec^2 x\,dx + 2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$$\begin{array}{ll} u=e^{2x} & u'=2e^{2x} \\ v'=\sec^2 x & v=\tan x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= e^{2x}\tan x - 2\int e^{2x}\tan x\,dx + 2\int e^{2x}\tan x\,dx \\ &= e^{2x}\tan x + C \end{aligned}$$

例 9　求不定积分 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

本章完!