第六章 · 多元函数

第七节 · 二重积分的概念与性质

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

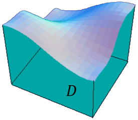
7.1 二重积分的概念

曲顶柱体

底面：在 xOy 面中的闭区域 D

顶面：在 D 之上的曲面

$$z = f(x, y)$$

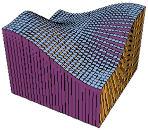


问题　如何求曲顶柱体的体积 V?

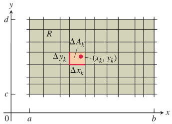
解法类似定积分解决问题的思想

具体步骤表述:

1. 分割成 n 份长方体;
2. 求每份长方体的体积;
3. 求近似和;
4. 求极限去误差.

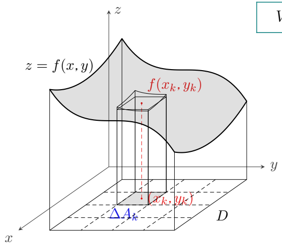


求长方体的体积:

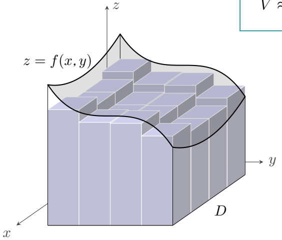


1. 把物体的底横切竖切成 n 份小矩形, 每份的长宽分别为 Δx_k, Δy_k
2. 每份底的面积 $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$
3. 每份长方体的高为 $f(x_k)$, 其体积为 $f(x_k, y_k)\Delta A_k$
4. 总体积为 $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$

$$V_i \approx f(x_k, y_k)\Delta A_k$$



$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A$$



同定积分求面积, 当分割成 n 份的数量趋近无穷时, 我们所求得体积与真实数值之间误差为零. 所以曲顶柱体的体积为

$$V = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$

S_n 为黎曼和公式.

二重积分

定义 1　设 $f(x, y)$ 是定义在闭区域上的函数，若黎曼和公式极限存在我们称函数 f 是可积的，且该极限为函数 f 在区间 D 上的二重积分，记作

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA.$$

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x, y) dA$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x, y)$ 称为被积函数
- dA 称为面积元素

注　同一元函数定积分，可积是指黎曼和极限存在，它与区间 D 的分法及点 (x_k, y_k) 的取法无关.

二重积分

根据微分定义，当误差趋近零时，记

$$\Delta A = dA,\ \Delta x = dx,\ \Delta y = dy$$

由于 $\Delta A = \Delta x \cdot \Delta y$，记

$$dA = dxdy.$$

因此，在直角坐标系中，常把面积元素 dA 记作 $dxdy$，而把二重积分记作

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

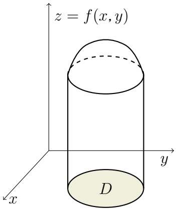
注　若函数 $f(x, y)$ 在闭区域 D 上有界或连续时，我们称 $f(x, y)$ 在 D 上可积.

二重积分的几何意义

若 $f(x, y) \geq 0$，二重积分

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dA$$

表示以 $z = f(x, y)$ 为曲顶，以区域 D 为底的曲顶柱体的体积.



7.2 二重积分的性质

二重积分的性质

性质 1 (线性性质)

- $\iint\limits_D kf(x,y)\,dA = k\iint\limits_D f(x,y)\,dA$ k 为常数
- $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dA \pm \iint\limits_D g(x,y)\,dA$

二重积分的性质

性质 2 (区域可加性)

若积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2, 则有

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_{D_1} f(x,y)dA + \iint_{D_2} f(x,y)dA$$

二重积分的性质

性质 3 (二重积分的不等性)

若在 D 上 $f(x,y)\geq g(x,y)$, 则

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dA \geq \iint\limits_D g(x,\,y)\,dA$$

特别地, 如果在区域 D 上 $f(x,y)\geq 0$, 则有

$$\iint\limits_D f(x,\,y)\,dA \geq 0$$

注 特别, 由于 $-|f(x,y)|\leq f(x,y)\leq |f(x,y)|$

$$|\iint\limits_D f(x,y)\,dA| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\,dA.$$

二重积分的性质

性质 4

若在 D 上 $f(x,\,y)\equiv 1$, D 的面积为 A,

$$\iint\limits_D 1\,dA = A.$$

二重积分的性质

性质 5 (估值定理)

设在 D 上 $m \le f(x,y) \le M$, D 的面积为 A, 则有

$$mA \le \iint\limits_D f(x,y)\,dA \le MA$$

二重积分的性质

在章节 5.1 中, 由一元定积分中值定理得 (5.1 性质 7), 函数 $f(x)$ 在区间 $a \le x \le b$ 的均值为

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

该定理可以延伸到在区域

$$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$$

上的关于二元函数 $f(x,\,y)$ 的均值定理.

做一个简单的猜测:

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,\,y)\,dxdy.$$

二重积分的性质

性质 6 (积分中值定理)

如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续, D 的面积为 A, 则在 D 中至少存在一点 (ξ,η), 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = f(\xi,\eta)\,A$$

二重积分的性质

二重积分的中值定理的几何意义是:

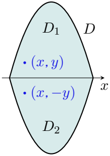
在有界闭区域 D 上以 $f(x,\,y)$ 为顶的曲顶柱体的体积等于区域 D 上以某一点 (ξ,η) 的函数值 $f(\xi,\eta)$ 为高的平顶柱体的体积.

通常把 $\frac{1}{A}\iint\limits_D f(x,y)dA$ 称为函数 $f(x,\,y)$ 在区域 D 上的平均值.

二重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称,

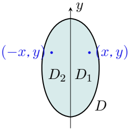
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数, 则
$$\iint_D f(x,y)dA = 2\iint_{D_1} f(x,y)dA$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数, 则
$$\iint_D f(x,y)dA = 0$$



二重积分的对称性

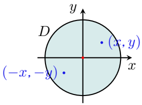
性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称,

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数, 则
$$\iint_D f(x,y)dA = 2\iint_{D_1} f(x,y)dA$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数, 则
$$\iint_D f(x,y)dA = 0$$



性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于原点对称,

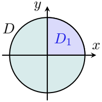
- 若 $f(x,y)$ 关于 $x,\,y$ 是偶函数,
$$\iint_D f(x,y)dA = 2\iint_{D_1} f(x,y)dA$$
- 若 $f(x,y)$ 关于 $x,\,y$ 是奇函数,
$$\iint_D f(x,y)dA = 0$$



二重积分的对称性

例 1　$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, 则

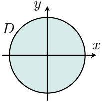
$$\iint_D x^2 + y^2 dA = 4 \iint_{D_1} x^2 + y^2 dA$$



例 2　$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$, 则

$$\iint_D (2x + 3y\sqrt{1 - x^2}) dA$$

$$= 2 \iint_D x dA + 3 \iint_D y\sqrt{1 - x^2} dA = 0$$



例 3　估计二重积分 $I = \iint\limits_D \dfrac{dA}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy + 16}}$ 的值, 其中积分区域 D 为矩形闭区域 $\{(x, y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$.

解　由于闭区域 D 是一个面积为 2 的长方形, 函数单调其最值在区间端点处到达, 有

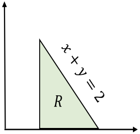
$$M = \frac{1}{\sqrt{(0 + 0)^2 + 4^2}} = \frac{1}{4}, \quad m = \frac{1}{\sqrt{(1 + 2)^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$$

由性质5, $mA \le \iint\limits_D f(x, y)\, dA \le MA$, 得

$$\frac{2}{5} \le I \le \frac{1}{2}.$$

例 4　比较 $\iint\limits_D \ln(x + y)\, dA$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x + y)]^2\, dA$ 的大小, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点各为 $(1, 0)$,$(1, 1)$,$(2, 0)$.

解　在积分区域 D 内, 有 $1 \le x + y \le 2 < e$



因此 $0 \le \ln(x + y) < 1$

于是 $\ln(x + y) > [\ln(x + y)]^2$, 得

$$\iint\limits_D \ln(x + y)\, dA \ge \iint\limits_D [\ln(x + y)]^2\, dA.$$

7.3　内容小结

内容小结

1. 二重积分的定义;

$$\iint\limits_D f(x,y)dA=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i,\eta_i\right)\Delta A \quad (dA=dxdy)$$

2. 二重积分的性质1-6.

本节完!