第七章 · 无穷级数

第五节 · 函数的幂级数展开

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

5.1 泰勒公式和泰勒级数

泰勒公式

定理 (泰勒公式) 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

泰勒公式

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi=\theta x$，则 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n \to \infty$ 时 $R_n(x) \to 0$，则得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，上式变成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

5.2 函数展开成幂级数

已知当 $|x| < 1$ 时, 称为等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

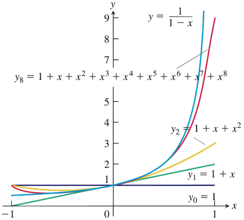
收敛于 $\frac{1}{1-x}$.因此当 $x \in (-1,1)$ 时, 有级数和 (和函数)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1 \tag{1}$$

若我们将 (1) 右边的部分和视为与左边函数近似的多项式 $P_n(x)$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

对于 x 接近零的值，我们只需要取该序列的几个项即可得到一个很好的近似值.



当我们向 $x = 1$ 或 -1 变化时，我们必须采用更多项.

由上式知道, 可以使用等比级数来生成函数, 该函数可以由幂级数展开式表示.

问题

1. 是否每个函数 $f(x)$ 都可以用幂级数来表示?
$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$
2. 在收敛域上, 和函数是否一定是 $f(x)$?

若 $f(x)$ 是关于 x 的幂级数, $\forall x \in (-R, R)$ 则有
$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$
取 $x = 0$, 则有 $c_0 = f(0)$.
$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1} + \cdots$$
取 $x = 0$, 则有 $c_1 = f'(0)$.
$$f''(x) = 2! c_2 + \cdots + n(n-1) c_n x^{n-2} + \cdots$$
取 $x = 0$, 则有 $c_2 = \frac{1}{2!} f''(0)$

以此类推
$$f^{(n)}(x) = n! c_n + \cdots$$
则有 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

把 $c_0, c_1, \cdots c_n$ 代入函数 $f(x)$ 的幂级数展开式
$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$
得麦克劳林级数
$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \cdots$$

定理 1 若 $f(x)$ 能展成 x(或 $(x-a)$) 的幂级数, 则这种展开式是唯一的, 且与它的麦克劳林级数 (或泰勒级数) 相同.

定理 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成麦克劳林级数 (或泰勒级数) 的充要条件是 $f(x)$ 的麦克劳林公式 (或泰勒公式) 余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

函数展开成幂级数

$$\text{展开方法} = \begin{cases} \text{直接展开法:} & \text{法利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法:} & \text{利用已知其级数展开式} \end{cases}$$

直接展开法: 利用泰勒公式

函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下:

1. 求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值;

$$f(0), f'(0), f''(0), \cdots, f^{(n)}(0), \cdots$$

2. 写出麦克劳林级数, 并求出其收敛半径 R;

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

3. 判别在收敛区间 $(-R, R)$ 内

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

是否为 0. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$, 幂级数收敛, 则有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

例 1 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解 $\because f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^x, f^{(n)}(0)=1\,(n=0,1,\cdots)$.
故 $f(x)$ 的麦克劳林级数得

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$
$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=+\infty$.

对任何有限数 x, 且 $\xi(0,x)$, 其余项满足

$$|R_n(x)| = |\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}| \le e^{|x|}\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

因为 $e^{|x|}$ 有限, 而 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 是级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 的一般项, 由比值审敛法得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = 0 < 1.$$

级数收敛. 由定理 7.1 得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.故 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

例 2 将函数 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解 由 $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, 得

$$f(0) = 0, f^{(2k)}(0) = 0, f^{(2k-1)}(0) = (-1)^{k-1}$$

其中 $k = 1, 2, \cdots$. 得麦克劳林级数

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

收敛半径为 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}/\frac{1}{(n+1)!} = +\infty$.

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)| = \left|\frac{\sin\left(\xi + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le 1\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0\ (n\to\infty)$$

故 $\forall x \in (-\infty,+\infty)$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots$$

例 3 将函数 $f(x) = (1+x)^m$ 展成 x 的幂级数. 其中 m 为任意常数.

解 过程略直接给结果: $\forall x \in (-1, 1)$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

我们称上式为二项展开式.

注 在 $x = \pm 1$ 处的收敛性与 m 有关.
当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式就是代数学中的二项式定理.

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-1$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+\cdots \quad (-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4-\cdots \quad (-1< x\le 1)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ (-1<x<1)$$

间接展开法

利用已知函数的幂级数展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法, 将所给函数展成幂级数.

例 4　将函数 $f(x)=e^{x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解:

$$\because e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots |x|<+\infty$$

$$\therefore e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots |x|<+\infty$$

例 5　将函数 $f(x)=\cos x$ 展开成 x 的幂级数.

解: 已知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots |x|<+\infty$$

两边求导得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad |x|<+\infty$$

例 6 将函数 $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x^2}$, $\arctan x$ 展开成 x 的幂级数.

解: 已知

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

两边积分得

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

上式右端的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=1$ 收敛, 而 $\ln(1+x)$ 在 $x=1$ 有定义且连续, 所以展开式对 $x=1$ 也成立, 于是收敛域为 $-1 < x \leq 1$.

将

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

中替换 x 为 x^2, 得

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots (-1 < x < 1)$$

同理, 两边积分得

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$

注 经过求导或求积后得到的展式, 必须考虑在端点的情况.

例 7 将函数 $f(x) = \ln x$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

解 已知 $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$.

$$\begin{aligned} f(x) = \ln x = \ln(2 + x - 2) &= \ln 2\left(1 + \frac{x-1}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) \\ &= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n+1} \\ &= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)}(x-2)^{n+1} \quad (0 < x \leq 4) \end{aligned}$$

例 8 将 $\sin x$ 展成 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sin\left[\frac{\pi}{4} + \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \qquad \sin\frac{\pi}{4}\cos$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1 - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \cdots\right)\right.$$

$$\left. + \left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5 - \cdots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \cdots\right]$$

例 9 将 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 展开成 x 的幂级数，并推证

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$$

解 由

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad |x|<+\infty$$

得

$$\frac{e^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\cdots(x\neq 0)$$

所以

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)}{n!}x^{n-2}+\cdots(x\neq 0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)}{n!}x^{n-2}+\cdots(x\neq 0)$$

又 $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}$

于是
$$\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\cdots+\frac{(n-1)}{n!}x^{n-2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$$

令 $x=1$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1.$

幂级数展开公式之一

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

上述各个幂级数展开式在 $-\infty<x<+\infty$ 时都成立.

幂级数展开公式之二

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$$

分别在 $(-1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,1]$，$[-1,1]$ 上成立.

5.3 幂级数的应用

例 10 计算 e 的近似值, 使其误差不超过 10^{-5}.

解 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$.
令 $x = 1$, 得

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

余项 $R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \cdots\right) \\ &\le \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{n \cdot n!} \end{aligned}$$

欲使 $R_n \le 10^{-5}$，只要 $\frac{1}{n \cdot n!} \le 10^{-5}$.

即 $n \cdot n! \ge 10^5$, 而 $8 \cdot 8! = 322560 > 10^5$.

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{8!} \approx 2.71828$$

注 R_n 在级数中表式 $S - S_n$ 之间的; 第 n 项部分和 S_n 作为近似与级数 S 的误差.

例 11 计算 $\sin 10^\circ$ 的近似值，误差不超过 10^{-5}.

解 $10^\circ = \frac{\pi}{180} \times 10 = \frac{\pi}{18}$.

由 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty)$

得

$$\begin{aligned} \sin 10^\circ &= \sin\frac{\pi}{18} \\ &= \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} + \ldots \end{aligned}$$

$$\sin 10^\circ = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1} + \cdots$$

. . . .

这是个交错级数，由莱布尼茨定理知，余项满足

$$|R_n| < u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n+1}$$

当 $n=2$ 时，$|R_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5 < 10^{-5}$.

所以取前两项和作为近似值，

$$\sin 10^\circ = \sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0.173646.$$

例 12 计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值，误差不超过 0.0001.

解

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}\ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \cdots$$

交错级数，由莱布尼茨定理，余项满足

$$|R_n| < u_{n+1} = \frac{1}{n!}x^{2n}$$

当 $n=7$ 时，$\frac{1}{15\cdot 7!} < 1.5\times 10^{-5} < 0.0001$.

所以取前 7 项，得 $\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0.7486$.

内容小结

1 函数的幂级数展开法

1. 直接展开法-利用泰勒公式;
2. 间接展开法—利用幂级数的性质及已知展开式的函数.

2 常用函数的幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\frac{x^3}{3} \quad \frac{x^5}{5} \quad \frac{x^7}{7} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$$

本章完!