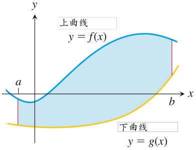
第五章 · 定积分

第四节 · 定积分的应用

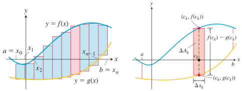
■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

4.1 平面图形的面积

若在坐标轴上有一不规则区域，其上界为 $y = f(x)$，下界是为 $y = g(x)$, 左边界为 $x = a$, 有边界为 $x = b$.



如何求该区域面积?



1 在区间 $[a, b]$ 上把所求面积分成 n 份宽为 Δx_k 的**竖列**矩形.

2 每个矩形面积 $\Delta A_k =$ 长 · 宽 $= [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$.

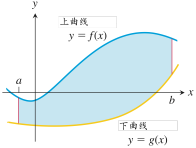
3 所有矩形的和为 $A \approx \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$

4 设 $P = \max\{\Delta x_k\}$ 求极限，使得误差趋近于零

$$A = \lim_{P\to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)]\,\Delta x_k = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$

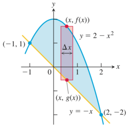
定义 1 (曲线之间的面积) 若 f 和 g 连续并且在 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 则在从 a 到 b 的曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 之间的区域的面积是 $(f-g)$ 从 a 到 b 的积分

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$



例 1 (在相交曲线之间的面积) 求由抛物线 $y = 2 - x^2$ 和直线 $y = -x$ 所围区域的面积.

解 首先确定积分区间, 当 $f(x) = g(x)$, 有 $2 - x^2 = -x$, 得两线交叉点 $x = -1$, $x = 2$.



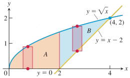
由于任何一个竖直矩形的上界交于 $f(x) = 2 - x^2$, 下界交于 $g(x) = -x$.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_{-1}^2 \left[\left(2 - x^2\right) - (-x)\right] dx$$

$$= \int_{-1}^2 \left(2 + x - x^2\right) dx = \frac{9}{2}$$

例 2 (针对边界的改变而改变积分) 求第一象限中，以 $y = \sqrt{x}$ 为上界, 以 x 轴和直线 $y = x - 2$ 为下界的区域面积.

解 易求得两个曲线在第一象限只有一个相交点 $x = 4$, 故积分区间为 $[0, 4]$. 对于任意竖直矩形而言, 上界交于 $f(x) = \sqrt{x}$ 不变.



然而矩形下界, 在子区间 $[0, 2]$ 中交于 $g(x) = 0$, 在子区间 $[2, 4]$ 中交于 $g(x) = x - 2$.

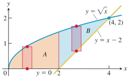
因此把所求区域分为两份 A 与 B.

当 $0 \leq x \leq 2$:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}.$$

当 $2 \leq x \leq 4$:

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x} - (x - 2) = \sqrt{x} - x + 2.$$



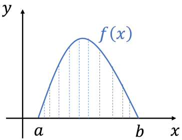
$$A = \int_0^2 \sqrt{x}dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 = \frac{10}{3}.$$

4.2 关于 y 的定积分

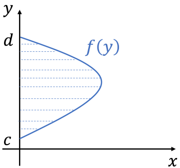
由函数 $f(x)$ 的曲线和 x 轴上的区间 $[a, b]$ 所围成的区域面积称为定积分

$$\int_b^a f(x)\,dx. \qquad \text{取 } x \text{ 为积分变量}$$



同理，由函数 $f(y)$ 的曲线和 y 轴上的区间 $[c, d]$ 所围成的区域面积称为定积分

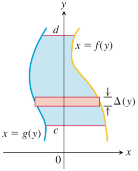
$$\int_d^c f(y)\,dy. \qquad \text{取 } y \text{ 为积分变量}$$



(把该区域用**横列**矩形划分成无数份小区域，每个矩形的宽度为 Δy).

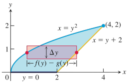
定义 2 (曲线之间的面积) 如果一个区域的左边界和右边界分别是函数 $f(y), g(y)$ 的曲线，上边界和下边界分别是 $y = c$, $y = d$. 若 $f(y) > g(y)$, 则该区域的面积为

$$\int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy.$$



例 3 求第一象限中，以 $y=\sqrt{x}$ 为上界，以 x 轴和直线 $y=x-2$ 为下界的区域面积.

在例2中，我们竖列矩形在区域中，用关于 x 的定积分求面积，步骤繁琐.

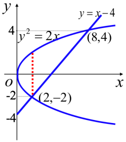


若横列矩形在区域中，任意横列矩形左边界相交于函数 $g(y)=y^2$，右边界相交于函数 $f(y)=y+2$.

解 $A=\int_c^d [f(y)-g(y)]\,dy=\int_0^2 \left[y+2-y^2\right]\,dy=\dfrac{10}{3}.$

例 4 (针对边界的改变而改变积分) 计算抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $y=x-4$ 所围成图形的面积.

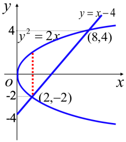
解 易求两曲线相交点为 $(2,-2),(8,4)$. 若取关于 x 的定积分，积分区间为 $[0,8]$. 同例2：对于任意竖直矩形而言，上界交于 $f(x)=\sqrt{2x}$ 不变.



然而矩形下界，在子区间 $[0,2]$ 中交于 $g(x)=-\sqrt{2x}$，在子区间 $[2,8]$ 中交于 $g(x)=x-4$. 因此把所求区域分为两部分 $[0,8]=[0,2]\cup[2,8]$ 分别求积分.

$$A=\int_0^2 \sqrt{2x}-(-\sqrt{2x})\,dx+\int_2^8 \sqrt{2x}-(x-4)\,dx \quad 步骤繁琐$$

若取 y 为积分变量，积分区间为 $[-2,4]$. 任意横列矩形左边界相交于函数 $g(y)=\frac{1}{2}y^2$，右边界相交于函数 $f(y)=y+4$.



$$A=\int_{-2}^4 \left(y+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^4=18.$$

4.3 立体的体积

如何求一个面包的体积？

复习求曲面梯形面积的步骤：

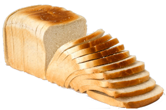
(1) 分割成 n 份，每份宽为 Δx_k.

(2) 求得每份的面积 = 高 × 宽 = $f(x_k)\cdot\Delta x_k$.

(3) 求 n 份的面积之和，$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k$，误差存在.

(4) 求极限去误差：

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx.$$



同理，求体积的步骤：

(1) 分割成 n 份，每份宽为 Δx_k.

(2) 求得每份的体积 = 横截面积 × 宽 = $A(x_k)\cdot\Delta_k$.

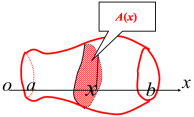
(3) 求 n 份的体积之和，$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_k)\cdot\Delta x_k$，误差存在.

(4) 求极限去误差：

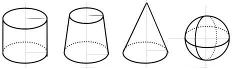
$$V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} A(x_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b A(x)\,dx.$$

定义 3 (平行截面面积为已知的立体的体积)　已知从 $x=a$ 到 $x=b$ 横截面积 $A(x)$ 的立体，如果 $A(x)$ 可积，那么它的体积是 A 从 a 到 b 的积分

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \tag{1}$$



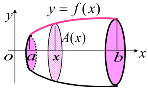
定义 4 (旋转体)　由一个平面图形绕平面内一条直线旋转一周而成的立体叫做旋转体. 这直线叫做旋转轴.



圆柱体、圆台体、圆锥体、球体都是旋转体.

举几个例子：

1 求由 $y=f(x), x=a, x=b, y=0$ 围成的曲边梯形，绕 x 轴旋转一周而成的立体的体积 V.

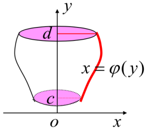


$$A(x)=\pi y^2=\pi[f(x)]^2$$

取 x 为积分变量，积分区间为 $[a,\ b]$. 由公式 (1) 得

$$V_x=\int_a^b A(x)\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2 求由 $x=\varphi(y), y=c, y=d, x=0$ 围成的曲边梯形，绕 y 轴旋转一周而成的立体的体积 V.



$$A(y)=\pi x^2=\pi[\varphi(y)]^2$$

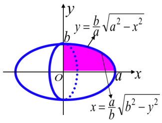
取 y 为积分变量，积分区间为 $[a,\ b]$. 由公式 (1) 得

$$V_y=\int_c^d A(y)\,dy=\pi\int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$$

例 5　计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 分别绕 x 轴与 y 轴旋转产生的旋转体 (旋转椭球体) 的体积.

解　由对称性知，所求体积为：

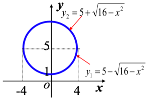
$$V_x=\int_{-a}^{a}\pi y^2 dx=2\int_0^a \pi y^2 dx$$
$$=2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx$$
$$=2\pi\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2$$



同理 $V_y=2\int_0^b \pi x^2 dy=2\pi\int_0^b \frac{a^2}{b^2}\left(b^2-y^2\right)dy=\frac{4}{3}\pi a^2 b$

- $a=b$ 时，得半径为 a 的球体的体积:$V=\frac{4}{3}\pi a^3$

例 6　求圆形 $x^2+(y-5)^2=16$ 绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.



解　所求体积为

$$V_x=\int_{-4}^{4}A(x)\,dx=\int_{-4}^{4}\pi r^2\,dx=\pi\int_{-4}^{4}[y_2-y_1]^2\,dx$$
$$=\pi\int_{-4}^{4}\left[(5+\sqrt{16-x^2})^2-(5-\sqrt{16-x^2})^2\right]dx$$
$$=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}dx=40\pi\int_0^4\sqrt{16-x^2}dx=160\pi^2.$$

4.4 经济应用问题举例

- 已知总成本函数 $C(x) = C_1 + C_2(x)$, 求导得边际成本 $C'(x)$.
- 已知总收益 $R(x)$, 求导得边际收益 $R'(x)$.
- 已知总利润 $L(x)$, 求导得边际利润 $L'(x)$.

- 已知边际成本 $C'(x)$, 求 $[0, x]$ 区间积分得总成本函数
$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0).$$
- 已知边际收益 $R'(x)$, 求 $[0, x]$ 区间积分得总收益
$$R(x) = \int_0^x R'(t)dt.$$
- 已知边际利润 $L'(x) = R'(x) - C'(x)$, 求 $[0, x]$ 区间积分得总利润
$$L(x) = \int_0^x L'(t)dt - C(0) = R(x) - C(x).$$

例 7　已知某产品总产量的变化率是时间 t (单位：年) 的函数
$$f(t) = 2t + 5 \quad t \geq 0$$
求第一个五年和第二个五年的总产量各为多少？

解　设总产量是 $F(t)$, 是变化率 $f(t)$ 的原函数，所以第一个五年和第二个五年的总产量分别为
$$F(5) - F(0) = \int_0^5 f(t)dt = \int_0^5 (2t+5)dt = 50$$
$$F(10) - F(5) = \int_5^{10} f(t)dt = \int_5^{10} (2t+5)dt = 100.$$

例 8　某商品日产量为 x 单位时, 固定成本为 20 元, 边际成本为

$$C'(x) = 0.4x + 2 \quad (\text{元}/\text{单位}).$$

(1) 求总成本函数 $C(x)$.

(2) 若销价为 18 元/单位, 且产品可全部销出, 求总利润函数 $L(x)$.

(3) 日产量为多少时才能获得最大利润.

解　$$C(x) = \int_0^x C'(t)dt + C(0) = \int_0^x (0.4t + 2)dt + C(0)$$
$$= \left(0.2t^2 + 2t\right)\Big|_0^x + 20 = 0.2x^2 + 2x + 20.$$

(2) 因总收益 $R(x) = 18x$, 所以

$$L(x) = R(x) - C(x) = -0.2x^2 + 16x - 20.$$

(3) 由 $L'(x) = -0.4x + 16 = 0$, 得 $x = 40$, 且 $L''(40) = -0.4 < 0$. 所以日产量为 40 单位时才能获得最大利润, 最大利润为

$$L(40) = -0.2 \times 40^2 + 16 \times 40 - 20 = 300$$

或 $$L(40) = \int_0^{40} L'(t)\,dt - C(0)$$
$$= \int_0^{40} (-0.4t + 16)\,dt - 20$$
$$= [-0.2t^2 + 16t]_0^{40} - 20 = 300.$$

本节完!