第三章 · 导数的应用

第五节 · 函数的单调性与曲线的凹凸性

■ 山东财经大学　■ 田宽厚

5.1　函数单调性和极值第一判别法

函数单调性判别法

定理 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 那么

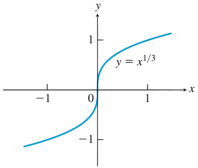
(1) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增.

(2) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减.

注　若在区间上 $f'(x) = 0$ 的点仅有有限个，仍有

(1) 在 (a,b) 上 $f'(x) \geq 0$ ⇨ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 在 (a,b) 上 $f'(x) \leq 0$ ⇨ 在 $[a,b]$ 上单调减少.



函数在某驻点两边导数同号, 则不改变函数的单调性.

函数单调性判别法

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则可按照下面步骤求出函数在各个区间的单调性：

1. 求一阶导函数，得驻点；
2. 用驻点划分单调区间；
3. 在每一区间用定理1判断区间单调性.

例 1　确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解

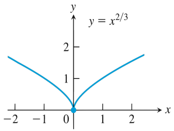
1. 求驻点：$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，
   令 $f'(x)=0$，得 $x=1, x=2$
2. 用驻点划分单调区间，判断单调性：

x	$(-\infty,\ 1)$	1	$(1,\ 2)$	2	$(2,\ +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

3. 故 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1),(2,+\infty)$；
   $f(x)$ 的单调减区间为 $(1,2)$.

例 2　讨论函数 $y=x^{2/3}$ 的单调性

解



$$y'=\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$y'\Big|_{x=0}=\infty$$

$x=0$ 为驻点.

从而有两个单调区间：$(-\infty,0)$　和　$(0,\ +\infty)$.

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$y'<0$，函数在 $(-\infty,0]$ 单调递减；

当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，$y'>0$，函数在 $[0,+\infty)$ 单调递增.

利用单调性来证明不等式

例 3　证明当 $x>1$ 时，$2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$

证明　令 $f(x)=2\sqrt{x}-3+\frac{1}{x}$，$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}=\frac{x\sqrt{x}-1}{x^2}$.

因为 $x>1$，所以 $x=1$ 为唯一驻点.

得两个单调区间：$(-\infty,\ 1)$ 和 $(1,+\infty)$

当 $x>1$ 时，$x\in(1,+\infty)$，$f'(x)>0$.

因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

从而当 $x>1$ 时，有 $f(x)>f(1)=0$，即 $2\sqrt{x}>3-\frac{1}{x}$.

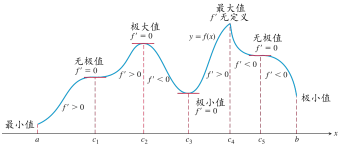
极值第一判别法

定理 2　若 ξ 为连续函数 $f(x)$ 的驻点，且 $f(x)$ 在 ξ 的某领去心域内可导. 当 x 从左往右通过 ξ 时;

(1) 如果 f'左正右负, 则称 $f(x)$ 在 ξ 取极小值;

(2) 如果 f'左负右正, 则称 $f(x)$ 在 ξ 取极大值;

(3) 如果 f'左右同号, 则称 $f(x)$ 在 ξ 无极值.



例 4　求函数 $f(x) = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ 的极值.

解

1 求驻点: $f'(x) = x^{\frac{2}{3}} + (x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$,

$f'(x) = 0$, 得 $x_1 = \frac{2}{5}$. $f'(x)$ 不存在, 得 $x_2 = 0$

2 判断导函数在驻点两则正负号:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2	↘	−0.33	↗

3 极大值 $f(0) = 0$, 极小值 $f(\frac{2}{5}) = -0.33$.

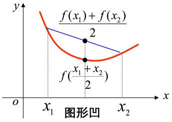
5.2 曲线凹凸性和极值第二判别法

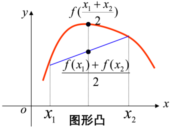
凹凸性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续. 如果对任何 I 上任何两点 x_1 和 x_2, 恒有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

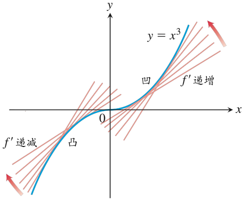
则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹(上凹) 的. 反之则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凸(下凹) 的.





凹凸性

直观观察, 任取点 x, 若 $f(x)$ 的曲线总位于该点切线的上方, 则称曲线在区间 I 上是凹(上凹, 下凸) 的. 反之, 则称曲线在区间 I 上是凸(下凹, 上凸) 的.



凹凸性的判别法

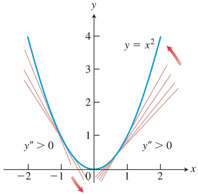
定理 3 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内有二阶导数, 那么

(1) 如果 $x \in (a,b)$ 时, 恒有 $f''(x) > 0$, 则函数的曲线在 $[a,b]$ 上是凹的.

(2) 如果 $x \in (a,b)$ 时, 恒有 $f''(x) < 0$, 则函数的曲线在 $[a,b]$ 上是凸的.

例 5 自证函数 $y = x^3$ 曲线的凹凸性, 见上图

例 6 设函数 $y = x^2$, 在区间 $(-\infty, +\infty)$, $y'' = 2 > 0$, 所以函数曲线在 $(-\infty, +\infty)$ 总是上凹.



拐点判别法

定义 2 若点 $(c,\ f(c))$ 上有切线, 且该点左右两侧的凹凸性不同, 称该点为拐点.

注 若点 $(c,\ f(c))$ 为函数曲线的拐点, 则有

- $f''(c) = 0$;
- 或 $f''(c)$ 不存在

反过来讲, 若 $f''(c)$ 不存在, $f'(c)$ 一定不存在, 因此 c 点有垂直切线, 根据函数曲线性质, 必为拐点.

然而当 $f''(c) = 0$ 时, $(c,\ f(c))$ 未必是拐点. 需验证 c 点两侧凹凸性是否相同 (f'' 是否异号).

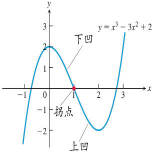
函数曲线凹凸性判别法

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则可按照下面步骤求出函数在各个区间的凹凸性及拐点：

1. 求二阶导函数，或导数不存在的点，得可疑拐点；
2. 用可疑拐点划分单调区间；
3. 在每一区间用定理3判断区间曲线凹凸性.
4. 验证拐点两侧凹凸性是否相同，确认拐点.

例 7　函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$, $f'(x)=3x^2-6x$. $f''(x)=6x-6$.

当 $x=1$ 时，$f''(x)=0$. 所以 $x=1$ 为可疑拐点



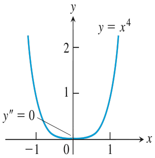
当 $x<1$ 时，$f''(x)<0$，曲线是凸的；

当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，曲线是凹的.

二阶导函数为零，且两侧异号. 所以 $x=1$ 为函数曲线的拐点.

例 8　函数 $f(x)=x^4$, $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=12x^2=0$.

当 $x=0$ 时，$f''(x)=0$，所以 $x=0$ 为可疑拐点.



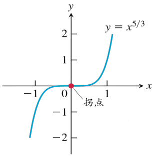
当 $x\le 0$ 时，$f''(x)>0$，曲线是凹的；

当 $x\ge 0$ 时，$f''(x)>0$，曲线是凹的.

二阶导函数为零，但两侧同号. 所以 $x=0$ 不是函数曲线的拐点.

例 9　函数 $f(x)=x^{5/3}$, $f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}$, $f''(x)=\frac{10}{9}x^{-1/3}$.

当 $x=0$ 时，$f''(x)$ 不存在. 所以 $x=0$ 为 (可疑) 拐点.

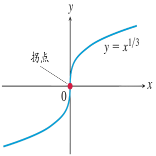


当 $x<0$ 时，$f''(x)<0$，曲线是凹的；

当 $x>0$ 时，$f''(x)>0$，曲线是凹的.

二阶导函数不存在，且两侧异号. 所以 $x=0$ 为函数曲线的拐点.

例 10 函数 $f(x)=x^{1/3}$, $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3}$,$f''(x)=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$.
当 $x=0$ 时, $f''(x)$ 不存在, 所以 $x=0$ 为 (可疑) 拐点.



当 $x<0$ 时, $f''(x)>0$, 曲线是凹的.;

当 $x>0$ 时, $f''(x)<0$, 曲线是凸的..

二阶导函数不存在, 且两侧异号. 所以 $x=0$ 是函数曲线的拐点.

利用凸凹性来证明不等式

例 11 证明 $\frac{e^a+e^b}{2}>e^{\frac{a+b}{2}}\quad(a\neq b)$

证明 令 $f(x)=e^x$, 因 $f''(x)=e^x>0$, 所以曲线 $f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是凹的.故对任意 a, $b(a\neq b)$, 有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

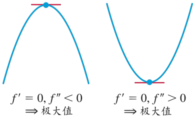
即

$$\frac{e^a+e^b}{2}>e^{\frac{a+b}{2}}$$

极值第二判别法

定理 4 若函数 f'' 在点 c 的一个邻域内连续

(1) 如果 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)<0$, 则函数 $f(x)$ 在点 c 取极大值;
(2) 如果 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)>0$, 那么函数 $f(x)$ 在点 c 取极小值;
(3) 如果 $f'(c)=0$ 且 $f''(c)=0$, 无法判定极值.



例 12 求函数 $f(x)=\left(x^2-1\right)^3+1$ 的极值

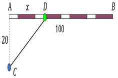
解

1. 求导数:
$f'(x)=6x\left(x^2-1\right)^2$, $f''(x)=6\left(x^2-1\right)\left(5x^2-1\right)$
2. 令 $f'(x)=0$, 得驻点 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$
3. 判别极值点:
因 $f''(0)=6>0$, 故 $f(0)=0$ 为极小值;
又 $f''(-1)=f''(1)=0$, 故需用第一判别法判别.
由于 $f'(x)$ 在 $x=\pm1$ 左右邻域内不变号,
所以 $f(x)$ 在 $x=\pm1$ 没有极值.

例 13 铁路 AB 段长为 100km, 工厂 C 距 A 处 20km, $AC \perp AB$, 要在 AB 线上选定一点 D 向工厂修一条公路, 已知铁路与公路每公里货运价之比为 $3:5$, 为使货物从 B 运到工厂 C 的运费最省, 问 D 点应如何取?

解 设 $AD = x(\text{km})$, 则 $CD = \sqrt{20^2 + x^2}$

总运费 $y = 5k\sqrt{20^2 + x^2} + 3k(100 - x) \quad (0 \le x \le 100)$



$$y' = k\left(\frac{5x}{\sqrt{400+x^2}} - 3\right), \quad y'' = 5k\frac{400}{(400+x^2)^{3/2}}$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 15$, 又 $y''|_{x=15} > 0$, 所以 5 为唯一的极小值点, 从而为最小值点, 故 $AD = 15\text{km}$ 时运费最省.

5.3 内容小结

内容小结

1. 函数单调性判别法, 定理1;
2. 极值第一判别法, 定理2;
3. 凹凸性的判别法, 定理3;
4. 极值第二判别法, 定理4.

本节完!