第五章・定积分

第五节・广义积分

山东财经大学 田宽厚

若定积分的积分区间 $[a,b]$ 有限, 且被积函数 $f(x)$ 有界，则称积分 $\int_b^a f(x)\,dx$. 为常义积分. 也就是说, 若积分同时时满足

1. 积分上下限为常量.
2. $f(x)$ 在 $[a,\, b]$ 内的每个点都有定义.

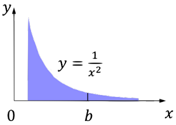
则为常义积分. 否则称为

反常积分 (广义积分) $\begin{cases} 1.\ \text{无穷限积分;} \\ 2.\ \text{瑕积分.} \end{cases}$

5.1 无穷限的广义积分

无穷限的广义积分

函数 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 在区间 $[1, \infty)$ 的定积分为 $A = \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\,dx$. 是曲线 $y = \dfrac{1}{x^2}$ 和直线 $x = 1$ 及 x 轴所围成的开口曲边梯形的面积.



解法

$$A = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

例 1 计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx.$

解
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{1+x^2}dx+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{1}{1+x^2}dx$$
$$=\lim_{a\to-\infty}[\arctan x]_a^0+\lim_{b\to+\infty}[\arctan x]_0^b$$
$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

无穷限的广义积分

定义 1 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$, $b>a$, 若
$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$
存在, 则称此极限为 $f(x)$ 的无穷限广义积分, 记作
$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

- 如果极限存在，则称反常积分收敛；
- 如果极限不存在，则称反常积分发散.
- 无穷限广义积分也称为第一类广义积分.

无穷限的广义积分的计算方法

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 根据定义
$$\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{b\to+\infty}F(x)|_a^b$$
$$=\lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a)=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a).$$
若记 $F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$; $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$. 则该广义积分有类似牛-莱公式的计算表达式:

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有
$$\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(a)$$
$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$$
$$=F(b)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}F(x)-\lim_{x\to-\infty}F(x)$$

例 2 计算 $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

解 根据定义1, 得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx$$
$$= \lim_{b\to+\infty}[-e^{-x}]_0^b = \lim_{b\to+\infty}\left(1-e^{-b}\right) = 1.$$

或牛-莱公式表达式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) - (-e^{-0}) = 1.$$

思考 若 $\dfrac{x}{1+x^2}$ 是奇函数，根据偶倍奇零性质，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = 0.$$

对吗？

分析 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$ 原积分发散！

注 对广义积分, 只有在收敛的条件下才能使用偶倍奇零的性质, 否则会出现错误.

例 3 讨论广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 敛散性.

解 当 $p=1$ 时, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = +\infty.$

当 $p\neq 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b$$
$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-p}-1}{1-p} = \begin{cases} +\infty, & p<1 \\ \frac{1}{p-1}, & p>1 \end{cases}$$

因此, 当 $p>1$, 广义积分收敛, 其值为 $\frac{1}{p-1}$. 当 $p\leq 1$, 广义积分发散.

无穷限广义积分的分部积分法

例 4 计算 $\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt\,(p>0)$.

解 由 $\quad u=t\Rightarrow u'=1$

$$v'=e^{-pt}\Rightarrow v=-\frac{1}{p}e^{-pt}$$

得 $$\int_0^{+\infty} te^{-pt}\,dt = -\frac{t}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,dt$$
$$= -\frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p^2}.$$

无穷限广义积分的换元积分法

例 5　计算 $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.

解　设 $\sqrt{x-1}=t$, $x=t^2+1$, 得 $\frac{dx}{dt}=2t$, $dt=2tdt$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{2t}{(t^2+1)\cdot t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{2}{(t^2+1)}\,dt$$
$$= 2\arctan t|_1^{+\infty} = 2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$

无穷限积分的线性性质

1 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} kf(x)dx$ 收敛, 且

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)\,dx.$$

2 若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty}[f(x)+g(x)]\,dx$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[f(x)\pm g(x)]dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

定理 1 (无穷限积分收敛的判定)

设 $f(x)\geq 0, \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛的充要条件为,

$$P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

是有界函数.

定理 2 (比较判别法)　设 $0\leq f(x)\leq g(x)$, 则有

(1) 当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 也收敛;

(2) 当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散时, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 也发散.

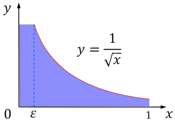
定义 设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛;

- 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 收敛, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 绝对收敛.
- 如果 $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ 发散, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 条件收敛.

定理 3 绝对收敛的无穷限积分必收敛.

5.2 无界函数的广义积分

函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 在区间 $[0, 1]$ 的定积分为 $A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ 是曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 与 x 轴，y 轴和直线 $x = 1$ 所围成的开口曲边梯形的面积.



解法 1

$$A = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \to 0^+} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

定义 2 设 $f(x) \in C(a,b]$, 而在点 a 的右邻域内无界, $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$. 取 $\varepsilon > 0$, 若极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

存在, 则称此极限为函 $f(x)$ 在 $(a,\ b]$ 上的无界函数广义积分，记作

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

- 如果极限不存在，则称反常积分发散.
- 无界函数广义积分又称作第二类广义积分;
- 无界点常称为瑕点 (奇点).
- 若被积函数为有理式，使得分母为零的点为瑕点.

- 若 $f(x) \in C[a,b)$，而在 b 的左邻域内无界, $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

- 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上. 除点 c 外连续, $(a < c < b)$, 而在点 c 的邻域内无界，则定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx.$$

例 6 计算反常积分 $\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\ (a > 0)$.

解 若 $x = a$, 分母为零. 所以 a 为瑕点.

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^{a-\varepsilon}$$

$$= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

暇积分的计算方法

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 根据定义

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [F(x)]_{a+\varepsilon}^{b}$$

$$= F(b) - \lim_{\varepsilon\to 0^+} F(a+\varepsilon) = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

若记 $F(a^+) = \lim_{x\to a^+} F(x)$; $F(a^-) = \lim_{x\to a^-} F(x)$. 则该广义积分有类似牛-莱公式的计算表达式:

暇积分的计算方法

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界（a 称为瑕点）. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - \lim_{x\to a^+} F(x) = \Big[F(x)\Big]_{a^+}^b = F(b) - F(a^+)$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 b 时无界（b 称为瑕点）. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b^-} F(x) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

设 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a, b 时无界（a, b 称为瑕点）. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{a^+}^{b^-} = F(b^-) - F(a^+)$$

注意: 若瑕点 $c\in(a,b)$, 则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)\underline{-F\left(c^+\right) + F\left(c^-\right)} - F(a).$$ 可相消吗?

例 7 讨论广义积分 $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,dx$ 的敛散性.

分析 $\because \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

所以积分收敛. 对么?

注 虽然 $[-1,1]$ 为对称区间，且 $\frac{1}{x^3}$ 是奇函数，但由于函数在 $x=0$ 处有瑕点，不能说积分等于 0.

解 若 $x=0$, 使得分母为零. 所以 0 为瑕点.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\,dx.$$

因为

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{-1}^{0^-} = \lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \left(-\frac{1}{-2}\right)$$
$$= -\infty + \frac{1}{2} = +\infty.$$

所以原广义积分发散.

例 8 证明反常积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\,dx$ 当 $q<1$ 时收敛; $q\geq 1$ 时发散.

解 当 $q=1$ 时, $\int_a^b \frac{1}{x-a}\,dx = [\ln|x-a|]_{a^+}^b = +\infty.$

当 $q\neq 1$ 时,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^q}\,dx = \left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1 \\ +\infty, & q>1 \end{cases}$$

所以当 $q<1$ 时, 该广义积分收敛, 其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$;

当 $q\geq 1$ 时, 该广义积分发散.

5.3 Γ 函数和 β 函数

定义 3 (Γ 函数) 广义积分

$$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty}x^{r-1}e^{-x}\,dx\quad(r>0). \tag{1}$$

是参变量 r 的函数, 称为 Γ 函数

性质:

1. $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r)\quad(r>0)$.
2. $\Gamma(n+1)=n!\quad n\in\mathbb{Z}^+$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

例 9 $\dfrac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}=\dfrac{5!}{2\cdot 2!}=\dfrac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 2\cdot 1}=30.$

例 10
$$\frac{\Gamma(2.5)}{\Gamma(0.5)}=\frac{1.5\times\Gamma(1.5)}{\Gamma(0.5)}=\frac{1.5\times 0.5\times\Gamma(0.5)}{\Gamma(0.5)}=0.75.$$

例 11
$$\int_0^{+\infty}x^3e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}x^{4-1}e^{-x}dx=\Gamma(4)=3!=6.$$

例 12 求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx\quad(r>0,\lambda>0).$

解 设 $y=\lambda x$, 得 $x=\dfrac{y}{\lambda}$, $dx=\dfrac{1}{\lambda}dy$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}\,dx&=\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}\cdot\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{r-1}e^{-y}\,dy\\&=\frac{\lambda^{r-1}}{\Gamma(r)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda^{r-1}}y^{r-1}e^{-y}\,dy\\&=\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r)}=1.\end{aligned}$$

定义 4 (β 函数)

$$\beta(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \quad (p>0,q>0)$$

是参变量 p, q 的函数, 称为 β 函数.

性质:

(1) $\beta(p,q)=\beta(q,p)$.

(2) $\beta(p+1,q+1)=\frac{q}{p+q+1}\beta(p+1,q)$.

(3) $\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

5.4 内容小结

内容小结

1 反常积分 $=\begin{cases}\text{积分区间无限} & \text{无穷限反常积分}\\ \text{被积函数无界} & \end{cases}$

2 两个重要的反常积分

$$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\begin{cases}+\infty, & q\le 1,\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & q>1\end{cases}\qquad \int_a^b\frac{1}{(x-a)^q}dx=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q<1\\ +\infty, & q\ge 1\end{cases}$$

3 计算无穷限反常积分的方法:

- 根据定义1, 先将广义积分转化为常义积分, 再对该定积分求极限.
- 类似牛-莱公式的计算表达式

4 计算瑕反常积分的方法:

- 根据定义2, 先将广义积分转化为常义积分, 再对该定积分求极限.
- 类似牛-莱公式的计算表达式.

5 Γ, β 函数.

本章完!