第六章 · 多元函数

第一节 · 空间解析几何

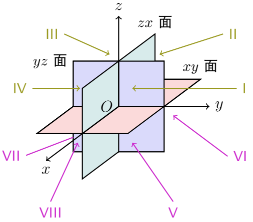
■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

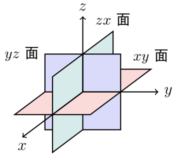
1.1 空间直角坐标系

空间直角坐标系

x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴) 互相垂直, 且按右手规则组成了一个空间直角坐标系,

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限





坐标面上的点:

xy 面 $\leftrightarrow z=0$

yz 面 $\leftrightarrow x=0$

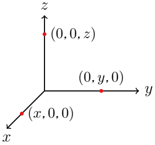
zx 面 $\leftrightarrow y=0$

坐标轴上的点:

x 轴 $\leftrightarrow y=z=0$

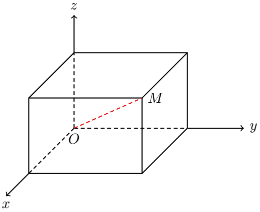
y 轴 $\leftrightarrow z=x=0$

z 轴 $\leftrightarrow x=y=0$



定义 1 (点的坐标)

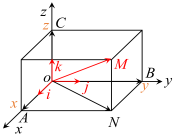
在空间直角坐标系中，若 $M \longleftrightarrow$ 坐标 (x, y, z)，称 $(x,\ y,\ z)$ 为点 M 的坐标. 点 M 记为 $M(x,\ y,\ z)$.



1.2 空间任意两点间的距离

起点在原点的向量 $\overrightarrow{OM}$

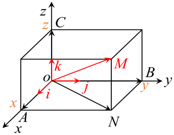
设点 $M(x,\ y,\ z)$, 以 $i,\ j,\ k$ 分别表示沿 $x,\ y,\ z$ 轴正向的单位向量, 称为基本单位向量.



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\
&= xi + yj + zk
\end{aligned}
$$

$x,\ y,\ z$ 是 OM 在三坐标轴上的投影, 称为 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.
简记为 $\overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 称其为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式.

点 $M(x,\ y,\ z)$ 与坐标原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ 的距离 $|OM|$:



$$
\begin{aligned}
|OM| &= \sqrt{|ON|^2 + |NM|^2} \\
&= \sqrt{|OA|^2 + |OB|^2 + |OC|^2} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned}
$$

- 空间两点 $O(0,\ 0,\ 0), M(x,\ y,\ z)$ 之间的距离公式为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1}$$

起点不在原点 O 的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$

设点 $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right), M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 \\ &= (x_2 i + y_2 j + z_2 k) - (x_1 i + y_1 j + z_1 k) \\ &= (x_2 - x_1)\, i + (y_2 - y_1)\, j + (z_2 - z_1)\, k\end{aligned}$$

- 空间两点 $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right), M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (2)$$

例 1 已知空间中三个点的坐标 $A(1, 2, 3)$, $B(-3, 0, 1)$, $C(-1, -1, -2$
求 $\triangle ABC$ 的各边边长.

解

$$|AB| = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-2)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{6}$$

$$|BC| = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-0)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|AC| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{38}$$

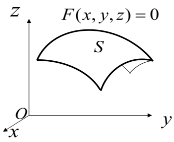
1.3 曲面方程

曲面

定义 给定空间中曲面 S 和方程 $F(x, y, z) = 0$.如果 $\boxed{S \text{ 上任意点 } (x}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{满足 } F(x, y, z) = 0}$

则称



- $F(x, y, z) = 0$ 是曲面 S 对应的方程;
- S 是方程 $F(x, y, z) = 0$ 对应的曲面.

例 2 (空间的平面方程)

求到两定点 $M_1(1,\,-1,\,1)$, $M_2(2,\,1,\,-1)$ 等距离的点 $M(x,\,y,\,z)$ 的轨迹方程.

解　由于 $|M_1M| = |M_2M|$ 得,

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$$

化简得点 M 的轨迹方程为

$$2x+4y-4z-3=0.$$

注　一般地, 空间任意一个平面的方程为三元一次方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中 A, B, C, D 均为常数，且 A, B, C 不全为零.

例 3 (球面)

求球心在点 $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解　设 $M(x,\,y,\,z)$ 是球面上任意一点, 则 $|M_0M| = R$.

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R.$

故所求球面方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2.$$

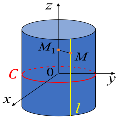
注　若球心在原点，则 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是球面的上半部,

$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 是球面的下半部.

例 4 (圆柱面) 关于半径为 R 的圆柱面方程式.

解 设 $x^2+y^2=R^2$ 是在 xOy 面以原点为中心, R 为半径的圆 C. 取直线 l 绕 z 轴旋转且与其平行.



当任取柱面上一点 $M(x,y,z)$.

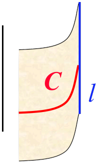
过 M 做垂线交于 z 轴上的点 $M_1(0,0,z)$. 则 $|\overrightarrow{M_1M}|=R$.

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2}=R.$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=R^2.$$

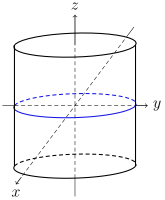
定义 2 (柱面)

平行定直线并沿定曲线C移动的直线 l形成的轨迹叫做柱面. 定曲线 C叫做柱面的准线, 动直线 l叫做母线.



$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.

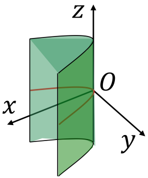


准线 C: xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

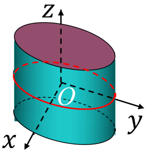
母线 l: 平行于 z 轴的直线.

注 只含 x,y 的方程 $F(x,y)=0$, 在空间直角坐标系中表示母线平行于 z 轴的柱面. 其准线是 xOy 平面上曲线 C: $F(x,y)=0$.

例 5 (抛物柱面) 因为 $y^2=2x$ 是个二元函数, 图形是抛物线, 那么在三维空间中, $y^2=2x$ 表示母线平行于 z 轴的抛物柱面; 准线为 xOy 面上的抛物线.



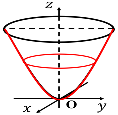
例 6 (椭圆柱面) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面



一般的三元方程，通常很难立即想出其图形的形状. 但若依次用平行于坐标面的平面 $x=a$, $y=b$ 和 $z=c$ 去截曲面 S, 则可得一系列的截口曲线; 再将它们综合起来就会得出曲面 S 的全貌——这种方法称为" 平行截口" 法

例 7 (旋转抛物面) 作 $z=x^2+y^2$ 的图形.

解 用平面 $z=c$ 去截曲面 $z=x^2+y^2$, 其截痕为圆 $x^2+y^2=c$ 和 $z=c$.



当 $c=0$ 时, $(0, 0, 0)$ 满足此方程;
当 $c>0$ 时, 其截痕为以 $(0, 0, c)$ 为圆心, 以 $\sqrt{c}$ 为半径的圆. 显然 c 越大，其截痕圆越大.
当 $c<0$ 时, 截面与曲面无交点.

如果用平面 $x=a$ 或 $y=b$ 去截曲面, 其截痕均为抛物线, 我们称 $z=x^2+y^2$ 的图形为旋转抛物面.

例 8 (双曲抛物面) 作 $z=y^2-x^2$ 的图形.

解 用 $z=c$ 截曲面, 有截痕 $y^2-x^2=c$, $z=c$.
当 $c=0$ 时, 其截痕是两条相交于原点 $(0, 0, 0)$ 的直线;

$$y-x=0, z=0; \quad y+x=0, z=0.$$

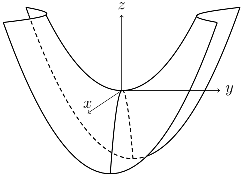
当 $c\neq 0$ 时, 其截痕为双曲线.
用平面 $y=c$ 截该曲面, 其截痕为抛物线

$$z=c^2-x^2, y=c.$$

用平面 $x=c$ 截该曲面, 其截痕为抛物线

$$z=y^2-c^2, x=c$$

此曲面称为双曲抛物面，也叫鞍面.



1.4 内容小结

内容小结

- 空间两点 $O(0,\, 0,\, 0), M(x,\, y,\, z)$ 之间的距离公式为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- 空间两点 $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right), M_2\left(x_2, y_2, z_2\right)$ 之间的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

本节完!