第五章・定积分

# 第二节・微积分基本定理

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

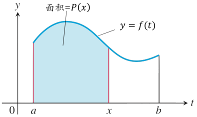
## 2.1 积分上限函数



**定义 1** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，称

$$P(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b]$$

为积分上限函数.




注 为了区别积分上限与积分变量，特将积分变量记为 $t$，这是一个关于积分上限为 $x$ 的函数.



**定理 1** 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $P(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 在 $[a,b]$ 可导，即

$$P'(x) = \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' = f(x).$$

注 定理1告诉我们，闭区间 $[a,\,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 一定有原函数，并且积分上限函数 $\int_a^x f(t)\,dt$ 就是他的一个原函数.

**证明** 设 $x, x+\Delta x \in [a,b]$, 则有

$$\begin{aligned}\Delta P(x) &= P(x+\Delta x) - P(x)\\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt\end{aligned}$$

由于 $f(x) \in C([a,b])$, $\forall \xi \in [x, x+\Delta x]$, 积分中值定理得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt = f(\xi)(x+\Delta x - x) = f(\xi)\Delta x$$

所以

$$\Delta P(x) = f(\xi)\Delta x, \quad \forall \xi \in [x, x+\Delta x]$$



$$\begin{aligned}P'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{P(x+\Delta x)-P(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{x\to\xi}\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \lim_{x\to\xi}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = f(x)\end{aligned}$$

同理, $P(x)$ 在区间 $[a,\, b]$ 左侧存在右导数:

$$P'_+(a) = f(a)$$

右侧存在左导数:

$$P'_-(b) = f(b).$$

所以 $P(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 且

$$P'(x) = \left[\int_a^x f(t)\,dt\right]' = f(x)$$



**定理 2** 对于更一般的变限积分，有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x), \qquad \left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$



**例 1** 计算

(1) $\left(\int_{-2}^x e^{t^2}\,dt\right)'$; (2) $\left(\int_x^3 \cos^2 t\,dt\right)'$; (3) $\left(\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right)'$.

**解** (1) $\left(\int_{-2}^x e^{t^2}\,dt\right)' = e^{x^2}\cdot x' - e^{(-2)^2}\cdot(-2)' = e^{x^2}$.

(2) $\left(\int_x^3 \cos^2 t\,dt\right)' = \cos^2 3\cdot 3' - \cos^2 x\cdot x' = -\cos^2 x$.

(3) 原式 $= \dfrac{1}{\sqrt{1+x^6}}\cdot\left(x^3\right)' - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}\cdot\left(x^2\right)'$

$= \dfrac{3x^2}{\sqrt{1+x^6}} - \dfrac{2x}{\sqrt{1+x^4}}$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_{2x}^{0} \sin t^2 \, dt}{x^3}$.

解 $$\lim_{x\to 0} \frac{\int_{2x}^{0} \sin t^2 \, dt}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_{2x}^{0} \sin t^2 \, dt\right)'}{(x^3)'}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(2x)^2 \cdot (2x)'}{3x^2}$$
$$= -\frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x^2}{x^2}$$
$$= -\frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{4x^2}{x^2} = -\frac{8}{3}.$$



## 2.2 牛顿—莱布尼茨公式



## 关于不定积分的复习

若 $F'(x) = f(x)$, 称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数. 在不定积分中,
$$\int f(x)dx = F(x) + C$$
求的是 $f(x)$ 的原函数族, 包含有无穷个原函数,
$$F(x) + C_1,\ F(x) + C_2,\ \cdots$$
且任意两个原函数相减得常量 $C$
$$(F(x) + C_1) - (F(x) + C_2) = C_1 - C_2 = C$$



## 关于积分上限函数

对于积分上限函数 $P(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$

由 $P'(x) = \left[\int_a^x f(t)\, dt\right]' = f(x)$, 知 $P(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数.

若存在另一个原函数 $F(x)$, 则 $F(x) - P(x) = C$ 得, $F(x) = P(x) + C$.

$$
\begin{aligned}
F(b)-F(a) &= (P(b)+C)-(P(a)+C) \\
&= P(b)-P(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

称此公式为牛顿—莱布尼茨 (Newton-Leibniz ) 公式.



## 微积分基本公式

**定理 3** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿－莱布尼茨公式.

**注** 也可记 $F(x)|_a^b = F(b)-F(a)$.



**例 3** 计算

(1) $\int_0^1 x^2 dx$;　　(2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx$.

**解** (1) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

(2) $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.



**例 4** 计算 $\int_0^2 |1-x|dx$.

**解**

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 |1-x|dx &= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx \\
&= x - \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}x^2 - x\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{2} - 0 + \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1
\end{aligned}
$$

**例 5 (方法同上)** 计算 $\int_0^2 f(x)\,dx$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

**解** $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(x-1)dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}x^2-x\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$



**例 6** 求 $F(x)=\int_0^x \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值和最小值

**解** 因为 $F'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}>0$, 所以 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单增.最大值为 $F(1)$, 最小值为 $F(0)$, 且

$$F(1)=\int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt$$

$$=\ln\left(t^2+t+1\right)\Big|_0^1=\ln 3.$$

$$F(0)=0.$$



**例 7** 设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1)\\ x, & x\in[1,2].\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ 在 $[0,2]$ 上的表达式.

**解** 当 $x\in[0,1)$ 时, $F(x)=\int_0^x t^2\,dt=\frac{1}{3}x^3$.

当 $x\in[1,2]$ 时, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 t^2\,dt+\int_1^x t\,dt$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}.$$

所以 $F(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1)\\ \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}, & x\in[1,2]\end{cases}$



## 2.3 内容小结

- 积分求导公式

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt = f\left[b(x)\right]\cdot b'(x) - f\left[a(x)\right]\cdot a'(x).$$

- 微积分基本公式: 牛顿 - 莱布尼茨公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) = F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a).$$





本节完!