第四章・不定积分

第二节・有理分式的积分

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

4.1 有理分式

定义 1 如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 分别是 n 次,m 次多项式. 则称 $f(x)$ 为有理分式.

- 如果 $n<m$，则称有理分式为真分式;
- 如果 $n>m$，则称有理分式为假分式.

问题 如何对一个假分式, 例如

$$\frac{4x^3-2x^2+x+5}{x^2-3x+1}$$

求不定积分?

分析 根据多项式除法

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & & 4x & +10 \\ \hline
x^2-3x+1\big) & 4x^3 & -2x^2 & +x & +5 \\
 & -4x^3 & +12x^2 & -4x & \\ \hline
 & & 10x^2 & -3x & +5 \\
 & & -10x^2 & +30x & -10 \\ \hline
 & & & 27x & -5
\end{array}$$

$$\therefore\ \frac{4x^3-2x^2+x+5}{x^2-3x+1}=4x+10+\frac{27x-5}{x^2-3x+1}$$

结论　若 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 为假分式, 则

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

其中, $F(x)$ 为多项式, $\frac{R(x)}{Q(x)}$ 为真分式.

定理 1　假分式 $=$ 多项式 $+$ 真分式

4.2　部分分式分解

部分分式

引例

$$\begin{aligned}\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1} &= \frac{2(x+1)}{(x+3)(x+1)} - \frac{1(x+3)}{(x+3)(x+1)} \\ &= \frac{2x+2}{(x+3)(x+1)} - \frac{x+3}{(x+3)(x+1)} \\ &= \frac{x-1}{(x+3)(x+1)}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{x-1}{(x+3)(x+1)} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}$$

如上可知, 我们把一个真分式分解为几个真分式代数和的形式. 其中分解所得真分式叫做原分式的部分分式.

部分分式

定义 2　由一个真分式分解成几个真分式代数和, 这几个分式中的每一个真分式叫做原分式的部分分式. 其分解过程称为部分分式分解.

例如　$$\frac{x-1}{x^2+4x+3} = \frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+1}$$

注

- 若原分式有 n 个因子, 则原式可分解为 n 个部分分式.
- 部分分式得分母为原分式分母的因子.

例 1 求 $\dfrac{6x-2}{(x-3)(x+1)}$ 部分分式

解
$$\frac{6x-2}{(x-3)(x+1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+1)} = \frac{A(x+1)}{(x-3)(x+1)} + \frac{B(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{A(x+1)+B(x-3)}{(x-3)(x+1)}$$

$\therefore\ 6x-2 = A(x+1)+B(x-3)$

问题 如何求 A, B?

$$6x-2 = A(x+1)+B(x-3)$$

. . . .

解法 1 $6x-2 = Ax+A+Bx-3B = (A+B)x+(A-3B)$ 列方程组求得 A, B

解法 2 观察等式右边两项, 使得其中一个为零.

当 $x=-1$ 时, $A(x+1)=0$, 所以 $-8=-4B$, 得 $B=2$.

当 $x=3$ 时, $B(x-3)=0$, 所以 $16=4A$, 得 $A=4$

$$\therefore\ \frac{6x-2}{(x-3)(x+1)} = \frac{4}{(x-3)} + \frac{2}{(x+1)}$$

部分分式总结

真分式 $\frac{N(x)}{D(x)}$	部分分式
$\frac{N(x)}{(x+a)(x+b)}$	$\frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+b)}$
$\frac{N(x)}{(x+a)^2}$	$\frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2}$
$\frac{N(x)}{(x+a)(x+b)^2}$	$\frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+b)} + \frac{C}{(x+b)^2}$
$\frac{N(x)}{(x+a)(x^2+bx+c)}$	$\frac{A}{(x+a)} + \frac{Bx+C}{(x^2+bx+c)}$

例 2 求 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$ 部分分式

解 $\dfrac{x+3}{x^2-5x+6} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$

两边通分去分母, 得
$$x+3 = A(x-3)+B(x-2).$$

当 $x=3$ 时, $B=6$. 当 $x=2$ 时, $A=-5$.

所以
$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}.$$

例 3　求 $\dfrac{1}{(1+2x)\,(1+x^2)}$ 部分分式

解　$\dfrac{1}{(1+2x)\,(1+x^2)}=\dfrac{A}{1+2x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2}$

两边通分去分母, 得

$$1=(A+C)+(B+2C)x+(A+2B)x^2.$$

$$\text{比较两边系数:}\ \begin{cases} A+C=1 \\ B+2C=0 \\ A+2B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{4}{5} \\ B=-\frac{2}{5} \\ C=\frac{1}{5} \end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{(1+2x)\,(1+x^2)}=-\frac{4}{5}\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{5}\frac{-2x+1}{1+x^2}.$$

例 4　求 $\dfrac{1}{x(x-1)^2}$ 部分分式

解　$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$

两边通分去分母, 得 $1=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$

当 $x=1$ 时, $C=1$. 当 $x=0$ 时, $A=1$.

上式代入 $A=1, C=1$, 得 $1=(x-1)^2+Bx(x-1)+x$

任取 x, $x=2$, 得 $C=-1$.

所以

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}.$$

例 5　求 $\dfrac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}$ 部分分式

解　$\dfrac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+2}$

两边通分去分母, 得

$$4x^2+16x-8=A(x-2)(x+2)$$
$$+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

当 $x=0$ 时, $A=2$; 当 $x=2$ 时, $B=5$;

当 $x=-2$ 时, $C=-3$.

所以

$$\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}.$$

例 6　$\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{A}{x-a}+\dfrac{B}{x+a}=\dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$

例 7　$\dfrac{1}{1+u}\cdot\dfrac{1}{u}=\dfrac{1}{u}+\dfrac{-1}{1+u}$

例 8　$\dfrac{1}{u(u-1)}=\dfrac{-1}{u}+\dfrac{1}{u-1}$

4.3 有理分式积分

例 9 求 $\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx$.

解 由例2得部分分式,

$$\frac{x+3}{x^2-5x+6} = \frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}.$$

所以

$$\int \frac{x+3}{x^2-5x+6}dx = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{6}{x-3}\right) dx$$

$$= -5\ln|x-2| + 6\ln|x-3| + C.$$

例 10 求 $\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx$.

解 由例3得部分分式,

$$\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)} = \frac{4}{5}\frac{1}{1+2x} + \frac{1}{5}\frac{-2x+1}{1+x^2}.$$

所以

$$\int \frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}dx = \frac{4}{5}\int \frac{1}{1+2x}dx + \frac{1}{5}\int \frac{-2x+1}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{2}{5}\ln|1+2x| - \frac{1}{5}\ln\left|1+x^2\right| + \frac{1}{5}\arctan x + C$$

$$= \frac{1}{5}\left[\ln\frac{(1+2x)^2}{1+x^2} + \arctan x\right] + C.$$

例 11 求 $\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx$.

解 由例4得部分分式,

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

所以

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right] dx$$

$$= \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{1}{x-1} + C.$$

例 12　求 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

解　利用综合除法, 得

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}$$

由例5得部分分式, $\frac{4x^2+16x-8}{x(x-2)(x+2)} = \frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}$

所以，原式 $= \int \left(x^2+x+4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+2}\right)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|$$

$$-3\ln|x+2|+C.$$

注　初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

本节完!