第一章 · 函数与极限

第七节 · 函数的连续性

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

7.1 函数的连续性

连续的概念

例如 自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

注 $\Delta x = x - x_0$ 称为自变量的增量, 相应的 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 称为函数的增量.

连续的概念

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \Big) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

有如下等价的定义, 见下页.

连续的条件

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

可见, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续必须具备下列条件:

1. $f(x_0)$ 存在;
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)$; 存在
3. $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

连续函数

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

- $f(x)$ 在区间左端点 a 处连续是指 $f(a^+)=f(a)$
- $f(x)$ 在区间右端点 b 处连续是指 $f(b^-)=f(b)$

在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数的集合记作 $C[a,b]$.

注　连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例 1　证明函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证明　由定义1, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\Delta y|=2\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|$$

$$\le 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\cdot 1=|\Delta x|\quad \Delta x\to 0$$

即 $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$

注　这里用到了 $\sin A\pm\sin B=2\sin\frac{A\pm B}{2}\cos\frac{A\mp B}{2}$, 和 $|\sin x|\le|x|$, $|\cos x|\le 1$. 同理可证 $y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

连续的性质

性质 1　$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow$ $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

例 2　判断函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 点的连续性：

解　章节 1.1-例 12 已证

$$\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}-x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

得 $f(0^-)=f(0^+)=f(0)$, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续.

记: $|x|$ 在 $x=0$ 处连续!

连续的性质

练习 1 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，判断它在 $x=0$ 点的连续性.

连续的性质

例 3 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1\\ b, & x=1\\ ax+1, & x>1\end{cases}$ 是连续的，求 a 和 b.

解 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x^2+1=2$. 已知函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 连续, 根据性质1, $f(1^-)=f(1^+)=f(1)$.

得, $2=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}ax+1=a+1$, $2=f(1)=b$.

所以 $a=1$, $b=2$.

7.2 连续函数的运算

复合函数的极限

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=A$$

分析 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0 \Rightarrow$ 当 $x\to x_0$ 时, $g(x)\to u_0$.

$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A \Rightarrow$ 当 $u\to u_0$ 时, $f(u)\to A$.

$$g(x)\to u_0\Rightarrow f(g(x))\to A$$

当 $x\to x_0$ 时, $g(x)\to u_0\Rightarrow f(g(x))\to A$.

$$\Rightarrow\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=A$$

复合函数的极限

定理 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 点连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right].$$

分析　由定理1，得 $\lim\limits_{x\to x_0} f[g(x)]=f(u_0)$

又因 $f(u)$ 在 u_0 点连续，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$. 所以

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u_0)=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]$$

注　如果函数 f 在 u_0 处连续，函数符号 f 可与极限符号 $\lim$ 交换位置.

函数的连续性

定理 3　若函数连续，则其反函数也连续，且单调性一致.

例如　$y=\sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续单调递增，其反函数 $y=\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上也连续单调递增，

函数的连续性

定理 4　一切初等函数在其定义区间内都连续.

- 基本初等函数在其定义域内都是连续函数.
- 两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.
- 两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

例如　$\sin x,\cos x$ 连续 $\Rightarrow \tan x,\cot x$ 在其定义域内连续.

函数的连续性

注　根据连续定义，如果 $f(x)$ 已知在点 x_0 连续，那么求 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 的极限时，只要求 f 在点 x_0 的函数值就行了. 因此上述关于初等函数连续性的结论提供了求极限的方法:

若 $f(x)$ 是初等函数，且 x_0 是 $f(x)$ 定义区间内的点，那么

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(x_0).$$

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$=\log_a\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_a \mathrm{e}=\frac{\ln e}{\ln a}=\frac{1}{\ln a}$$

注 由此可见当 $a=e,\ x\to 0$ 时, 有

$$\ln(1+x)\sim x$$

例 5 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解 令 $t=a^x-1$, 则 $x=\log_a(1+t)$,

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\log_a(1+t)}$

$$=\ln a$$

$$\Rightarrow \qquad a^x-1\sim x\ln a$$

注 由此可见当 $a=e,\ x\to 0$ 时, 有

$$e^x-1\sim x$$

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{\sin x}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{3}{\sin x}\ln(1+2x)}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3}{x}\cdot 2x}=e^6$$

注 若 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$, 则有

$$\lim_{x\to x_0}[1+u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln[1+u(x)]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)u(x)}$$

7.3 函数的间断点

函数的间断点

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，则下列情形之一，函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续:

1. $f(x)$ 在点 x_0无定义;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 若 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, 称 x_0 为可去间断点.
- 若 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$, 称 x_0 为跳跃间断点.

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 若其中有一个为 ∞, 称 x_0 为无穷间断点.
- 若均不为 ∞, 称 x_0 为振荡间断点：

注 间断点常见位置:（1）分母为零；（2）分段点.

函数的间断点

例 7 判断函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的间断点及其类型.

解 因为函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 处无定义, 所以 $x = 0$ 为间断点. 又因

$$f\left(0^-\right) = -\infty, \quad f\left(0^+\right) = +\infty.$$

所以 $x = 0$ 为函数的无穷间断点.

注 正无穷大、负无穷大都是无穷大，但无穷大可以既不是正无穷大，也不是负无穷大的. 在一般求极限的题目里，极限结果是 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，把结果写成 ∞ 是没有问题的，但自变量 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$ 是不可以写成 $x \to \infty$ 的.

函数的间断点

例 8 判断 $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 间断点及其类型.

解 函数 $f(x)$ 是关于 $x = 0$ 处的分段函数, 所以 $x = 0$ 为函数的间断点. 由例7知, $\lim\limits_{x\to 0} = \dfrac{1}{x} = \infty$, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ 极限不存在. 所以 $x = 0$ 为函数的震荡间断点.

函数的间断点

例 9　判断 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 间断点及其类型.

解　由于 $x=1$ 使得函数 $f(x)$ 分母为零, 函数无定义, 所以 $x=1$ 是其间断点. 又因

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$
$$\Rightarrow f\left(x_1^-\right)=f\left(x_1^+\right)$$

故 $x=1$ 为可去间断点.

函数的间断点

例 10　判断 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 间断点及其类型.

解　函数 $f(x)$ 是关于 $x=1$ 处的分段函数, 所以 $x=1$ 为函数的间断点.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim_{x\to 0^+} f(x)$$

故 $x=1$ 为跳跃间断点.

7.4　内容小结

内容小结

1. $f(x)$ 在点 x_0 连续的等价形式
   $$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)\rightleftarrows f\left(x_0^-\right)=f(x_0)=f\left(x_0^+\right)$$
2. 基本初等函数在定义区间内连续
3. 连续函数的四则运算结果仍连续
4. 连续函数的反函数连续
5. 连续函数的复合函数连续
6. $f(x)$ 在点 x_0 连续的三个条件
7. 间断点的类型

本节完!