第四章・不定积分

# 第一节・不定积分的概念

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

## 1.1 原函数与不定积分



一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=\ln x$



**定义** 设 $f(x)$ 是定义在区间 $I$ 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 $I$ 中每一点 $x$ 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $I$ 上的一个原函数.

**例如** $(\sin x)'=\cos x \;\Rightarrow\; \sin x$是$\cos x$的一个原函数.

$$\left(x^3\right)'=3x^2 \quad\Rightarrow\; x^3\text{是}3x^2\text{的一个原函数}.$$

**问题**

(1) 在什么条件下, 一个函数的原函数存在?

(2) 若原函数存在, 是否唯一?

(3) 若原函数不唯一, 其结构如何?

定理 1　若函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上存在原函数.

$$F'(x)=f(x) \quad (x\in I)$$

$$\Downarrow$$

初等函数在定义区间上连续

$$\Downarrow$$

初等函数在定义区间上有原函数



定理 2　若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的所有原函数都在函数族 $F(x)+C$ ($C$ 为任意常数) 内.

证明　$\because (F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$

$\therefore F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的原函数.

设 $\Phi(x)$ 是 $f(x)$ 的任一原函数, 即 $\Phi'(x)=f(x)$.

又知 $F'(x)=f(x)$

$\therefore [\Phi(x)-F(x)]'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$

故

$$\Phi(x)=F(x)+C_0$$

它属于函数族 $F(x)+C$.

推论　$f(x)$ 的任何两个原函数一定只差一个常数 $C$.



定义　$f(x)$ 在区间 $I$ 上的原函数全体称为 $f(x)$ 在 $I$ 上的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, $x$ 为积分变量.

$$\boxed{F'(x)=f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x=F(x)+C}$$

注　$C$ 称为积分常数, 不可丢!



例 1　求 $\int x^2dx$.

解　$\because \left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$

$\therefore \int x^2dx=\frac{x^3}{3}+C$

例 2　求 $\int \frac{1}{1+x^2}dx$.

解　$\because (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore \int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

**例 3** 求 $\int \frac{1}{x}dx.$

**解** 当 $x > 0$ 时，$\because (\ln x)' = \frac{1}{x}$

$$\therefore \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

当 $x < 0$ 时，$\because \ln(-x)I' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$

$$\therefore \int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$$

总之，

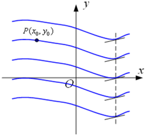
$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$



## 不定积分的几何意义

不定积分表示的是一族函数，从几何上看，代表一族曲线，称为积分曲线族.

曲线:$y = F(x) + C$ 在 $(x_0, y_0)$ 的切线的斜率为 $f(x_0)$.

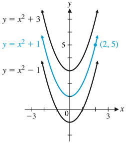





**例 4** 设曲线通过点 $(2, 5)$，且其上任意点处的切线斜率等于这点横坐标的两倍，求此曲线的方程.

**解** 设所求曲线方程为：$y = f(x)$. 由题意知 $\frac{dy}{dx} = 2x$ 即 $f'(x) = 2x$

$$\therefore f(x) = \int 2x\,dx = x^2 + C$$




又曲线通过点 $(2, 5)$，

$$5 = 2^2 + C$$

所以 $C = 1$，且 $y = x^2 + 1$.



## 1.2 不定积分的性质

从不定积分定义 $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ 可知:

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算:

1. $\dfrac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算:

1. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int \mathrm{d}\big(F(x)\big) = F(x) + C$



性质 2　非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

推论　若 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x)$, 则

$$\int f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x)\,dx$$



## 1.3 基本积分公式



## 基本积分公式 I

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$
3. $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
   - $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

例 5　求 $\int \sqrt{x}\left(x^2-5\right)dx$

解　$$\int \sqrt{x}\left(x^2-5\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \int x^{\frac{5}{2}}dx - \int 5x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$



例 6　求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx$

解　$$\int \frac{(x-1)^3}{x^2}dx = \int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2}dx$$
$$= \int\left(x-3+3x^{-1}-x^{-2}\right)dx$$
$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3\ln|x| + \frac{1}{x} + C$$



## 基本积分公式 II

4. $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$
5. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$



例 7　求 $\int 2^x e^x dx$

解　$$\int 2^x e^x dx = \int (2e)^x dx$$
$$= \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = \frac{2^x e^x}{1+\ln 2} + C$$

## 基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C$

10 $\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$

11 $\int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C$



例 8 求 $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$

解 $$\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx \int \frac{1}{2}\sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x + C$$

例 9 求 $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

解 $$\begin{aligned}\int \tan^2 x\,dx &= \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\ &= \int \sec^2 x\,dx - \int dx = \tan x - x + C\end{aligned}$$



例 10 求 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

解 $$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int \frac{1}{\sin^2 x}dx \\ &= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\ &= \tan x - \cot x + C\end{aligned}$$



## 基本积分公式 IV

12 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

13 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$

例 11 求 $\int \frac{1+x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx$

解 $$\begin{aligned}\int \frac{1+x+x^2}{x\left(1+x^2\right)}dx &= \int \frac{x+\left(1+x^2\right)}{x\left(1+x^2\right)}dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \\ &= \arctan x + \ln|x| + C\end{aligned}$$





本节完!