第一章・函数与极限

第三节・函数的极限

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

3.1 $x \to \infty$ 时函数的极限

函数极限 $(x \to \infty)$ 的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
4. $y = 2^x$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 如果当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 无限接近一个确定的常数 A，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

否则，称当 $x \to \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在.

注 此定义是不严格的，严格的定义可以见下一页.

函数的极限 ($x \to \infty$)

定义 1　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\varepsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

注　$x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$．类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$．

性质　$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$．

函数极限的例子

例如　证明 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$．

证明　$\forall \varepsilon > 0$，欲使 $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$，只要 $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, 取 $X = \frac{1}{\varepsilon}$, 当 $|x| > X$ 时, 就有 $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. 因此

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

函数极限的基本公式 I

$$\lim_{x\to\infty} C = C \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数}) \tag{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1) \tag{3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1) \tag{4}$$

3.2　$x \to x_0$ 时函数的极限

函数极限 $(x \to x_0)$ 的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to 1$ 时，$y \to c$
2. $y = x$
   - 当 $x \to 2$ 时，$y \to 2$
3. $y = 2x + 1$
   - 当 $x \to 3$ 时，$y \to 7$
4. $y = \sqrt{x}$
   - 当 $x \to 4$ 时，$y \to 2$

函数的极限 $(x \to x_0)$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，如果当 x 从左右两边趋于 x_0 时，$f(x)$ 都无限接近一个确定的常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

否则，称当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在.

注　此定义是不严格的，严格的定义可以见下一页.

函数的极限 $(x \to x_0)$

定义 2　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

函数极限的例子

例如　证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

证明　$\forall \varepsilon > 0$，取 $\delta = \varepsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

函数极限的例子

例如　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$ （$x_0>0$）.

证明

$$|f(x)-A|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leq\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}$$

$\forall\varepsilon>0$, 欲使 $|f(x)-A|<\varepsilon$, 只要 $|x-x_0|<\sqrt{x_0}\varepsilon$, 且 $x\geq0$. 而 $x\geq0$ 可用 $|x-x_0|\leq x_0$ 保证.
故取 $\delta=\min\left\{\sqrt{x_0}\varepsilon,x_0\right\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，必有

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|<\varepsilon$$

因此 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$

函数极限的基本公式 II

定理 (初等函数的连续性)　如果初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

例如　对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$；
2. $\lim\limits_{x\to 2}x^3=2^3=8$；
3. $\lim\limits_{x\to 3}e^x=e^3$；
4. $\lim\limits_{x\to 9}\log_3 x=\log_3 9=2$；
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$；
6. $\lim\limits_{x\to 1}\arctan x=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$.

函数的极限 $(x\to x_0)$

注　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\neq1;\\ 3, & x=1.\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注 定义指出即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在．这说明函数在 x_0 点的极限是否存在与函数在 x_0 处有无定义无关.

这是因为函数在 x_0 点的极限是函数在 x_0 附近的变化趋势, 而不是在 x_0 处函数值．

例 2 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

例 3 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$ 不存在.

3.3 极限的四则运算法则

四则运算法则

求函数 $f(x)$ 极限时，自变量变化过程分六种形式:

$$
\begin{array}{ll}
(1)\, x \to x_0 & (4)\, x \to \infty \\
(2)\, x \to x_0^+ & (5)\, x \to +\infty \\
(3)\, x \to x_0^- & (6)\, x \to -\infty
\end{array}
$$

注 为了表达和论述函数极限的共有性质和运算规则，今后将不特别指出自变量变化的过程，将用 $\lim f(x)$ 泛指函数极限的任何一种形式.

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，那么

1. $\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
2. $\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B$
3. $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 1 $\lim \left(C \cdot f(x)\right) = C \lim f(x)$ (C 为常数)

推论 2 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$ (n 为正整数)

例 4 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2+5x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{2+5\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2+5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$=\dfrac{3+0}{2+5\times 0}=\dfrac{3}{2}$

例 5 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x^2+2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+2\cdot\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{0+0}{3+2\times 0}=0$

例 6 求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x+4}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-\dfrac{1}{x^2}}{\frac{3}{x}+4\cdot\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$

$=\dfrac{2-0}{3\times 0+4\times 0}=?$

例 7 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+1)$.

解 原式 $=3\lim\limits_{x\to 1}x^2-2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}1$

$=3\times 1^2-2\times 1+1=2$

例 8　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

例 9　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

函数的极限 $(x\to x_0)$

例 10　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

3.4　函数极限的性质

函数极限的性质

性质 1 (唯一性)　若 $\lim f(x)$ 存在，则极限唯一.

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \le M$.

例如　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$，此时当 $|x| > 5$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \le M$.

例如　设 $f(x) = \frac{1}{x}$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \le 2$.

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例如　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0$，此时当 $|x| > 10$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例如　设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

定理 (保号性)　设 $f(x) \ge 0$（或 $f(x) \le 0$），且 $\lim f(x) = A$，则 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

推论　如果函数 $g(x) \ge h(x)$，而且 $\lim g(x) = A$，$\lim h(x) = B$，则有 $A \ge B$.

3.5 左极限与右极限

左极限和右极限

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的左侧有定义．如果 x 从 x_0 左侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个确定的常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A$$

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的右侧有定义．如果 x 从 x_0 右侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 无限接近一个确定的常数 A，则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

左极限和右极限

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A$$

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A$$

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

例 11 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^-}-x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}|x|=\lim_{x\to 0^+}x=0$$

根据定理2, $\lim_{x\to 0^-}|x|=\lim_{x\to 0^+}|x|=0$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}|x|=0.$$

例 12 给定函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0 & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 讨论 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 的极限是否存在．

解 根据定理2, 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$$

显然, $f\left(0^-\right)\neq f\left(0^+\right)$, 所以 $\lim_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

注 研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

3.6 内容小结

内容小结

1. $x\to\infty$ 时函数的极限.
2. $x\to x_0$ 时函数的极限.
3. 极限的四则运算法则
   - $x\to\infty$ 时, 分子分母同除最高次幂 (" 抓大头")．例4, 5, 6
   - $x\to x_0$ 时, 用代入法 (基本函数)． 例7
   - $x\to x_0$ 时, 对 $\frac{0}{0}$ 型, 约去公因子． 例8, 9
4. 函数极限的性质:
   - 唯一性; 有界性; 保号性;
5. 左右极限等价定理

本节完!