第二章 · 函数与极限

第三节 · 高阶导数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

3.1 高阶导数的概念

定义 1 假定函数 $y = f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x) = \left[f'(x)\right]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x) = \left[f''(x)\right]'$ 称为三阶导数，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]'$ 称为 n 阶导数，
  - 也可记为 $y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

注 规定 $f^{(0)}(x) = f(x)$，即 $y^{(0)} = y$.

高阶导数

例 1 设 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 求 $y^{(n)}$

解

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

$$y'' = 2\cdot 1 a_2 + 3\cdot 2 a_3 x + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2}$$

依次类推, 可得

$$y^{(n)} = n! a_n$$

高阶导数

例 2　设 $y = e^{ax}$, 求 $y^{(n)}$

解

$$
\begin{aligned}
y' &= a\mathrm{e}^{ax} \\
y''' &= a^3\mathrm{e}^{ax}, \cdots \\
&\vdots \\
y^{(n)} &= a^n e^{ax}
\end{aligned}
$$

一般地,

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

高阶导数

例 3　设 $y = \ln(1+x)$, 求 $y^{(n)}$

解

$$
\begin{aligned}
y'' &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\
y''' &= (-1)^2 \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \vdots \\
y^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}
$$

一般地,

$$(\ln(1-x))^{(n)} = -\frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

高阶导数

例 4　设 $y = \sin x$, 求 $y^{(n)}$

解

$$
\begin{aligned}
y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
y'' &= \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
y'' &= \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

一般地, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

类似可证: $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

3.2　高阶导数的运算法则

莱布尼茨公式

设函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都有 n 阶导数, 则

(1) $(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)}=Cu^{(n)}$ (C为常数)

(3) 莱布尼茨公式: 记组合系数 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$
\begin{aligned}
(uv)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, u^{(n-k)}\, v^{(k)} \\
&= u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+ \\
&\quad +\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} \\
&\quad +\cdots+uv^{(n)}
\end{aligned}
$$

高阶导数

例 5 设 $y=x^2e^{2x}$, 求 $y^{(20)}$

解 设 $u=\mathrm{e}^{2x}, v=x^2$, 则

$$u^{(k)}=2^k\mathrm{e}^{2x}\quad(k=1,2,\cdots,20)$$

$$v'=2x,\quad v''=2,\quad v^{(k)}=0\quad(k=3,\cdots,20)$$

代入莱布尼茨公式, 得

$$
\begin{aligned}
y^{(20)} &= 2^{20}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2x+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2 \\
&= 2^{20}\mathrm{e}^{2x}\left(x^2+20x+95\right)
\end{aligned}
$$

3.3 内容小结

内容小结

高阶导数的求法

1. 逐阶求导法, 例1;
2. 利用归纳法, 例2, 3;
3. 间接法——利用已知的高阶导数公式, 例4;
4. 利用莱布尼茨公式, 例5.

本节完!