relax

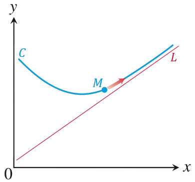
第三章 · 导数的应用

第六节 · 函数图形的描绘

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

6.1 曲线的渐近线

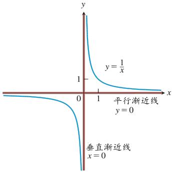
定义 1 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的渐近线.



定义 2 给定曲线 $y = f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.



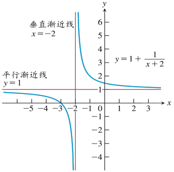
注

(1) $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

(2) $x \to a$ 可以改为 $x \to a^+$ 或 $x \to a^-$.

例 1 求曲线 $y = 1 + \frac{1}{x+2}$ 的水平和铅直渐近线

解



$$\because \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x+2} = 1$$
$\therefore y = 1$ 为水平渐近线;

$$\because \lim_{x\to 1} 1 + \frac{1}{x+2} = -2$$
$\therefore x = -2$ 为铅直渐近线.

定义 3 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

注 $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

定理 1 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{而且} \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b.$$

证明

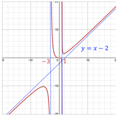
$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx + b)] = \lim_{x\to+\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = 0$$
$$\therefore k = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x}\right], \quad \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = b$$

例 2 求曲线 $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线.

解 $k = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x - 3} = 1,$

$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2 + 3x}{x^2 + 2x - 3} = -2.$

$\therefore y = x - 2$ 为曲线的斜渐近线.



$$\because y = \frac{x^3}{(x+3)(x-1)}$$
$$\therefore \lim_{x\to-3} y = \infty, \ \lim_{x\to 1} y = \infty$$
所以有铅直渐近线 $x = -3$ 及 $x = 1$.

6.2 函数图形的描绘

步骤

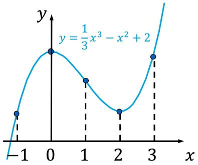
1. 确定函数 $y = f(x)$ 的定义域, 并考察其对称性及周期性;
2. 求 $f'(x), f''(x)$, 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为 0 和不存在的点;
3. 列表判别增减及凹凸区间, 求出极值和拐点;
4. 求渐近线;
5. 确定某些特殊点, 描绘函数图形.

例 3 描绘 $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2$ 的图形.

1. 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 无对称性及周期性.
2. $y' = x^2 - 2x, y'' = 2x - 2$,
   令 $y' = 0$, 得 $x = 1$. $y'' = 0$, 得 $x = 0, 2$
3.

x	$x<0$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$x>2$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y''	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{4}{3}$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$
		极大		拐点	$\searrow$	极小	

4. $x = -1, 3$, 得 $y = \frac{2}{3}, 2$.



例 4 描绘方程 $(x-3)^2+4y-4xy=0$ 的图形

1 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$, 定义域为 $(-\infty,1),(1,+\infty)$

2 求关键点, 原方程两边对 x 求导;

一阶导数 : $2(x-3)+4y'-4y-4xy'=0$

二阶导数 : $2+4y''-8y'-4xy''=0$

所以

$$y'=\frac{x-3-2y}{2(x-1)}=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2}$$

$$y''=\frac{1-4y'}{2(x-1)}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

令 $y'=0,\ x=-1,\ 3.$

$$y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)},\quad y'=\frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},y''=\frac{2}{(x-1)^3}$$

3 判别曲线形态

x	$x<-1$	-1	$(-1,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$x>3$
y'	$+$	0	$-$	无	$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	定	$+$		$+$
y''	$\nearrow$	-2	$\searrow$	义	$\searrow$	0	$\nearrow$

4 求渐近线: $\because \lim\limits_{x\to1}y=\infty, \therefore x=1$ 为铅直渐近线.

又因 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\frac{(x-3)^2}{4x(x-1)}=\frac{1}{4},\ k=\frac{1}{4}.$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y-\frac{1}{4}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}-\frac{1}{4}x\right]$$

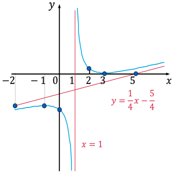
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)}=-\frac{5}{4}$$

$\therefore\quad y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$ 为斜渐近线

5 $x=0,\ 2,$ 得 $y=-\frac{9}{4},\ \frac{1}{4}$

6 绘图

x	$x<-1$	-1	$(-1,\ 1)$	1	$(1,\ 3)$	3	$x>3$
y''	$\nearrow$	-2 极大	$\searrow$	无定义	$\searrow$	0 极小	$\nearrow$



铅直渐近线: $x=1$

斜渐近线: $y=\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}$

特殊点:$(0,\ -\frac{9}{4}),\ (2,\ \frac{1}{4})$

6.3 内容小结

内容小结

1. 曲线渐近线的求法: 水平渐近线, 垂直渐近线, 斜渐近线;
2. 函数图形的描绘 - 按作图步骤进行.

本章完!