第七章・无穷级数

第三节・任意项级数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

3.1 基本概念

基本概念

定义 1 (任意项级数) 若 u_n 为任意实数, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为任意项级数.

3.2 交错级数及其审敛法

交错级数

定义 2 正负项相间的级数称为交错级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \cdots$$

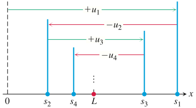
其中 $u_n > 0$，$n = 1, 2, 3, \cdots$.

莱布尼兹判别法

定理 1 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足条件

1. $u_n \geq u_{n+1}$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \leq u_1$，余项满足 $|R_n| \leq u_{n+1}$.



例 1 判断交错级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots$$

是否收敛.

解

1. $u_n = \frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}} = u_{n+1}$;
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.

所以交错等比级数收敛, 其和是 $S = \frac{1}{1-(-1/2)} \leq u_1 = 1$. 并且, 如果取前 n 项和 S_n 作为 S 的近似值, 则误差 $R_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

例 2 验证下列级数的敛散性

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$;

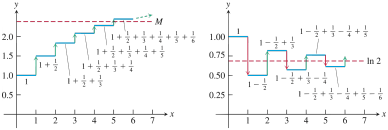
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$

解 (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 该交错级数满足条件

1. $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

所以级数收敛.



正项调和级数发散. 交错的调和级数收敛.

解 (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ 该交错级数满足条件

1. $u_n=\frac{1}{n!}>\frac{1}{n+1!}=u_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0$.

所以级数收敛.

解 (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 该交错级数满足条件

1. $u_n=\frac{n}{10^n}>\frac{n+1}{10^{n+1}}=u_{n+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{10^n}=0$.

所以级数收敛.

绝对值级数

定义 若有任意项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\cdots$$

其各项取绝对值后组成的正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+|u_3|+\ldots+|u_n|+\cdots$$

称为绝对值级数.

例 3 例2中的收敛级数各项取绝对值后所成的绝对值级数是否收敛?

解 (1) 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$,

绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 发散.

解 (2) 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$,

绝对值级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} < 1$ 收敛.

(3) 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$;

绝对值级数 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{10^{n+1}}}{\frac{n}{10^n}} = \frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n} < 1$ 收敛.

说明 收敛级数的绝对值级数不一定收敛.

3.3 绝对收敛与条件收敛

条件收敛与绝对收敛

定义 3 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,

1. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛;
2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都收敛, 称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

例如　由例3所得,

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以原级数条件收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$ 收敛; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛, 所以原级数绝对收敛.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 收敛; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ 收敛, 所以原级数绝对收敛.

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} \Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 收敛} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n| \text{ 发散} \end{cases}$$

问题　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 发散?

绝对收敛判别法

定理 2　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

注

- 绝对收敛的级数，原级数一定收敛.
- 缺陷: 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散时, 不能由此推出原级数也发散.

绝对收敛的级数一定收敛

定理 3　若任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho.$$

1. 当 $\rho < 1$ 时, 级数绝对收敛；
2. 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散;
3. 当 $\rho = 1$ 时, 无法判断.

注　若由比值 (根值) 判别法判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散, 则可以断定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例 4　验证下列级数绝对收敛

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{e^n}$;

证明

(1) $\because |u_n| = \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right| \le \frac{1}{n^4}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 收敛

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛.

因此由定理 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{e^n}$, 设 $u_n = \frac{n^2}{e^n}$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{(-1)^{n-1}\frac{n^2}{e^n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1.$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{n^2}{e^n}\right|$收敛.　因此级数绝对收敛.

例 5　验证下列级数绝对收敛

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n \quad (x \neq 0)$.

(1) $$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{(n+1)} = 0.$$

$\therefore$ 原级数 (绝对) 收敛.

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!x^n\ (x \neq 0)$, 设 $u_n = n!x^n$,

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n} = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty.$$

$\therefore$ 原级数发散.

例 6　判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的敛散性.

解

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^n}{n+1}|x|^{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}|x|^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

- $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛;
- $|x| > 1$ 时, 级数发散;
- $|x| = 1$ 时, 见下页...

$|x| = 1$:

- $x = 1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$,

  例2, 已证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛, 由例3得其绝对值级数发散, 所以原级数条件收敛;
- $x = -1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 级数发散.

综述:

当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛;

当 $x = 1$ 时, 级数条件收敛;

当 $|x| > 1$ 或 $x = -1$ 时, 级数发散.

例 7 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 的敛散性.

解 当 $p < 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$;

当 $p = 0$ 时, $n^p = 1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

根据 7.1 定理, 收敛必要条件, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$.

所以当 $p \le 0$ 时, 级数发散.

当 $p > 0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 是一个交错级数, 且满足条件

1. $u_n = \frac{1}{n^p} > \frac{1}{(n+1)^p} = u_{n+1}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

所以级数收敛.

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

$$= \begin{cases} \text{当} p > 1 \text{时, 级数收敛;} \\ \text{当} p \le 1 \text{时, 级数发散.} \end{cases}$$

结论 关于交错 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \begin{cases} \text{当} p > 1 \text{时, 绝对收敛} \\ \text{当} 0 < p \le 1 \text{时, 条件收敛.} \\ \text{当} p \le 0 \text{时, 级数发散} \end{cases}$$

3.4 绝对收敛的性质

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，和为 S，则任意交换此级数的各项顺序后所得级数也收敛，且和不变.

性质 2 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都绝对收敛，和分别为 S 和 W，则它们乘积 $\sum_{i,j=1}^{\infty} u_i v_j$ 也绝对收敛，其和为 $S \cdot W$.

3.5 内容小结

内容小结

任意项级数

- 交错级数：莱布尼兹判别法，定理1
- 绝对收敛，条件收敛概念，概念3
- 绝对收敛的级数一定收敛，若比值判别法判定发散，则原级数发散，定理3
- 判别一般级数敛散性的方法与步骤？(作业)

本节完!