第七章 · 无穷级数

第四节 · 幂级数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

4.1 函数项级数的概念

定义 1 设 $u_n(x), (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数，称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数.

对 $x_0 \in I$，若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，称 x_0 为其收敛点，所有收敛点的全体称为其收敛域.

若常数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，称 x_0 为其发散点，所有发散点的全体称为其发散域.

定义 2 在收敛域上，函数项级数的和是 x 的函数 $S(x)$，称它为级数的和函数，并写成

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

若用 $S_n(x)$ 表示函数项级数前 n 项的和，即

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

令余项 $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x), \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

例 1 等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \begin{cases} \text{当}|x|<1\text{时, 收敛于}\dfrac{1}{1-x}; \\ \text{当}|x|\geq 1\text{时, 发散.} \end{cases}$

在区间 $(-1,1)$ 内, 等比级数收敛, 所以 $(-1,1)$ 内任意一点都是该级数的收敛点, 其收敛域为 $(-1,1)$.

因此当 $x\in(-1,1)$ 时, 有和函数

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$, 或写作 $|x|\geq 1$.

4.2 幂级数及其收敛性

定义 3 形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ 的级数，即

$$c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots+c_n(x-a)^n+\cdots$$

称为 $x-a$ 的幂级数．其中数列 c_n 称为幂级数的系数.

特别地，当 $a=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，即

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots \tag{1}$$

称为 x 的幂级数.

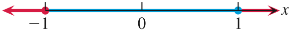
例 2 下列幂级数在 x 取何值时收敛?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

解 根据比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x|=|x|$$

当 $|x|<1$ 时, 级数收敛; 当 $|x|>1$ 时, 级数发散; 当 $x=1$ 时, 交错调和级数收敛; 当 $x=-1$ 时, 调和级数发散.因此当 $-1<x\leq 1$ 时, 级数收敛.



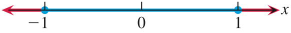
例 3　下列幂级数在 x 取何值时收敛?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

解　根据比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$$

当 $x^2<1$ 时, 级数收敛; 当 $x^2>1$ 时, 级数发散; 当 $x=1$ 时, 由莱布尼茨判别法得, 交错级数 $1-1/3+1/5-1/7+\cdots$ 收敛; 当 $x=-1$ 时, 同理得交错级数 $-1+1/3-1/5+1/7+\cdots$ 收敛. 因此当 $-1\le x\le 1$ 时, 级数收敛.



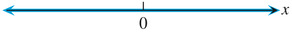
例 4　下列幂级数在 x 取何值时收敛?

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

解　根据比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0<1$$

因此当 $-\infty<x<+\infty$ 时, 级数收敛.



例 5　下列幂级数在 x 取何值时收敛?

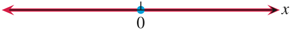
$$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n=1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots$$

解　根据比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|$$

所以当 $x=0$, 极限趋近于 0, 且小于 1, 级数绝对收敛; 当 $x\neq 0$, 极限趋近于无穷, 且大于 1, 级数发散.

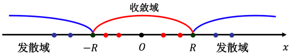


定理 (幂级数收敛定理:Abel 定理)　若幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots$$

在 $x=\alpha\neq 0$ 收敛, 则满足不等式 $|x|<\alpha$ 的一切 x 幂级数都绝对收敛. 反之, 若当 $x=\beta$ 时发散, 则对满足不等式 $|x|>\beta$ 的一切 x, 该幂级数发散.

注　由 Abel 定理可以看出, $\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.



若已知 R, 可知级数收敛范围, 这里称 R 为收敛半径, 如何求 R?

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, 形如例2, 4, 5, 根据比值判别法

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot \left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \cdot |x|$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$. 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho|x|$.

当 $\rho \neq 0$ 时:

1. 如果 $\rho|x| < 1$, 即 $|x| < 1/\rho$ 时, 幂级数绝对收敛;
2. 如果 $\rho|x| > 1$, 即 $|x| > 1/\rho$ 时, 幂级数发散;
3. 如果 $\rho|x| = 1$, 即 $|x| = 1/\rho$ 时, 敛散性不定.

设 $R = 1/\rho$, 则级数在 $(-R, R)$ 必收敛. 如例2

当 $\rho = 0$ 时: $\rho|x| = 0 < 1$, 幂级数对任何 x 都绝对收敛.
取 $R = 1/\rho$, 则级数在 $(-\infty, +\infty)$ 必收敛. 如例4

当 $\rho = \infty$ 时: $\rho|x| = +\infty$, 幂级数只在 $x = 0$ 处收敛. 取 $R = 1/\rho$, 则级数在 $(0, 0)$ 必收敛. 如例5

对于任意 ρ, 设 $R = 1/\rho$ 时, 级数在 $(-R, R)$ 必收敛, 我们称 R 为收敛半径.

当 $0 < R < +\infty$ 时, $(-R, R)$ 端点处的敛散性则不定. 确定点 $R, -R$ 敛散性后, 我们有幂级数收敛域.

- $(-R, R)$
- $(-R, R]$
- $[-R, R)$
- $[-R, R]$

若 $R = 0$，则收敛域为 $\{0\}$；若 $R = +\infty$，则收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

定理 1　对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$，若 $\rho \neq 0, \infty$, 则 $R = \frac{1}{\rho}$ 存在, 使得

1. 当 $|x| < R$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > R$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = R$ 时，级数的敛散性未定.

幂级数收敛半径的求法

定理 2 如果幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

的系数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \rho$.

则其收敛半径为 $R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$

说明 据此定理, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径为 $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

例 6 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$ 的收敛域.

解 $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}\cdot\frac{n^2+1}{2^n}\right| = 2$

收敛半径 $R = \frac{1}{2}$.

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 原级数 $= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}$, 级数收敛;

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 原级数 $= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, 级数收敛.

所以幂级数收敛域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

例 7 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(-1)^{n-1}}\right| = 1,\ R = 1.$

当 $x = -1$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-2}$, 级数发散.

当 $x = 1$ 时, 幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, 级数发散.

所以幂级数收敛域为 $(-1, 1)$.

例 8 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛域.

解 级数缺少偶次幂项, 不能应用定理1

故由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2$$

当 $\frac{1}{2}x^2 > 1$, 即 $|x| > \sqrt{2}$ 时, 级数发散;

当 $\frac{1}{2}x^2 < 1$, 即 $|x| < \sqrt{2}$ 时, 级数收敛;得 $R = \sqrt{2}$.

当 $x = \sqrt{2}$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$, 发散;

当 $x = -\sqrt{2}$ 时, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$, 发散;

所以级数的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

例 9　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$ 的收敛域.

解　级数缺少奇次幂项, 不能应用定理1

故由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2}x^{2(n+1)}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!\cdot x^{2n}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}\cdot|x|^2 = 4|x|^2$$

当 $4x^2<1$，即 $|x|<\frac{1}{2}$ 时, 级数收敛;

当 $4x^2>1$，即 $|x|>\frac{1}{2}$ 时, 级数发散;

所以幂级数收敛半径为 $R=\frac{1}{2}$.

或令 $t=x^2$, 原级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}t^n$.

例 10　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n}$ 的收敛域.

解　通项为复合式, 不能应用定理1.

令 $t=x-1$, 则幂级数变为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2^n\cdot n}$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n n}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n}=2$. 当 $t=-2$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{2^n\cdot n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 收敛;

当 $t=2$ 时，幂级数成为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{2^n\cdot n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 发散;

所以幂级数的收敛域为 $[-2,2)$，原级数的收敛域为 $-2\le x-1<2$, 即 $-1\le x<3$ 或 $[-1,3)$.

4.3　幂级数的性质

幂级数的运算

两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.

定理　设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n\right)\pm\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(c_n\pm b_n)x^n,\quad |x|<R$$

其中等式在 $(-R,R)$ 中成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

$$\lambda \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda \cdot c_n x^n, \quad |x| < R_1$$

其中 λ 为常数.

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad |x| < R$$

其中 $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，等式在 $(-R, R)$ 中成立.

性质 1 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 2 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径为 $(-R, R)$, 其和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x c_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}\end{aligned}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 3 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 收敛, 和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在收敛区间上可导. 则有逐项求导公式

$$\begin{aligned}S'(x) &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \big(c_n x^n\big)' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} \\ S''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} \\ &\ \ \vdots\end{aligned}$$

逐项求导后得到的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \cdots$ 和原级数有相同的收敛半径.

注 逐项求导或积分时, 运算前后端点处的敛散性可能改变.

例 11 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$,
得收敛半径 $R = 1$.
当 $x=-1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$, 级数发散;
当 $x=1$ 时, 幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 级数发散;
所以幂级数收敛域为 $(-1, 1)$.

故当 $x \in (-1, 1)$ 时,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

令 $x = \frac{1}{2}$, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}\times 4 = 2$$

和函数 $S(x)$ 的解法 2: 两边积分得

$$\int_0^x S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

两边求导得

$$S(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1.$$

例 12 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\cdot\frac{n}{(-1)^{n-1}}\right| = 1$ 得收敛半径 $R = 1$.
当 $x=-1$ 时, 幂级数成为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ 级数发散;}$$

当 $x=1$ 时, 幂级数成为, 7.3 例 1(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{ 级数收敛}$$

所以幂级数收敛域为 $(-1, 1]$.

设和函数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$, $(-1<x\le 1)$

两边求导得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\right)'$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x}, |x|<1$$

两边积分得 $S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)dt$

$$=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt=\ln(1+x)$$

因 $S(0)=0$, 所以 $S(x)=\ln(1+x), |x|<1$

又 $x=1$ 时, 幂级数收敛;

所以和函数 $S(x)=\ln(1+x)$, $(-1<x\le 1)$

例 13　求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解　易求出幂级数的收敛半径为 1.

$x=-1$ 时级数收敛, $x=1$ 时级数发散.

则在 $[-1,1)$ 中, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{x}\ln(1-x),\quad x\neq 0.$$

∴ 当 $x\neq 0$ 时, $S(x)=-\frac{1}{x}\ln(1-x),\quad x\in[-1,0)\cup(0,1)$

而 $x=0$ 时,

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{\ln(1-x)}{x}\right)=1$$

$S(x)$ 收敛于 1.

因此由和函数的连续性得:

$$S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$$

4.4　内容小结

内容小结

1 求幂级数收敛域的方法

- 对标准型幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $(c_n \neq 0)$:
  先求收敛半径, 再讨论端点的收敛性. (例6, 7)
- 对非标准型幂级数 (缺项或通项为复合式):
  求收敛半径时直接用比值法或根值法. (例8, 9)
  也可通过换元化为标准型再求. (例10)

2 幂级数的性质

- 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算.
- 在收敛区间内幂级数的和函数连续;
- 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

3 求和函数的常用方法-利用幂级数的性质. (例11,12, 13)

本节完!