第一章 · 函数与极限

第六节 · 无穷小量的比较

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

6.1 无穷小量的阶

无穷小量的比较

例如 $x \to 0$ 时, $3x, x^2, \sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty.$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$, 称 β 比 α 高阶, 记为 $\beta=o(\alpha)$.

2 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$, 称 β 比 α 低阶.

3 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$, 称 β 和 α 同阶.

★ 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$, 称 β 和 α 等价, 记为 $\beta\sim\alpha$.

注 若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0,\ k>0$, 则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

无穷小量的阶

例如 章节 1.5 中已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$$

因此, 在 $x\to 0$ 时, 分子分母互为等价无穷小.

无穷小量的阶

例如 章节 1.5 中已知

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

因此, 在 $x\to 0$ 时, $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小, 或由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1$, 得等价关

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2.$$

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=1.$

证明 记 $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}\right)$

令 $\sqrt[n]{1+x}=t$, 则 $x\to 0\Rightarrow t\to 1$, 且 $x=t^n-1$.

原式 $=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t-1}{\frac{1}{n}\cdot(t^n-1)}$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{n(t-1)}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+t+1)}$$

$$=\frac{n}{1+1+\cdots+1}=\frac{n}{n}=1.$$

即有等价关系

$$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$$

例 2 证明: 当 $x\to 0$ 时, $e^x-1\sim x$.

证明 令 $y=e^x-1$, 则 $x\to 0\Rightarrow t\to 0$, 且 $x=\ln(1+t)$.

原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{t}\ln(1+t)}$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(1+t)^{1/t}}\overset{?}{=}\frac{1}{\ln e}=1$$

即有等价关系

$$e^x-1\sim x;\quad \ln(1+x)\sim x$$

更一般地, 我们有 (章节 1.7 例 4,5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时, 有如下这些常用的等价无穷小量:

(1)	$\sin x \sim x$	(5)	$\ln(1+x) \sim x$
(2)	$\tan x \sim x$	(6)	$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
(3)	$\arcsin x \sim x$	(7)	$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$
(4)	$\arctan x \sim x$	(8)	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{1}{n}x$

6.2 等价无穷小量代换原理

等价无穷小量代换

定理 1 设 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$, 且 $\lim \alpha'\beta'$, $\lim \frac{\alpha'}{\beta'}$ 存在,

则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha\beta = \lim\limits_{x\to x_0} \alpha'\beta'$ (2) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$

证明

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

注 定理1可知, 求两个无穷小量商的极限时, 如果分子, 分母的等价无穷小量存在, 则就可用它们各自的等价无穷小量来代换原来的分子, 分母, 使计算简化.

等价无穷小量代换

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $\tan 2x \sim 2x$, $\sin 3x \sim 3x$.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{3x} = \dfrac{2}{3}$.

等价无穷小量代换

例 4　求 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解　当 $x\to 0$ 时, $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$, $\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$.

原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}$.

等价无穷小量代换

注　当 $\alpha\sim\alpha'$、$\beta\sim\beta'$ 时, 下列等式总是成立:

$$\alpha\cdot\beta\overset{\checkmark}{\sim}\alpha'\cdot\beta',\qquad \frac{\alpha}{\beta}\overset{\checkmark}{\sim}\frac{\alpha'}{\beta'}$$

但下列等式未必成立:

$$\alpha\pm\beta\overset{\times}{\sim}\alpha'\pm\beta'$$

例如　当 $x\to 0$ 时, 有

$$\boxed{\begin{matrix}x+x^2\sim x+x^3\\ x\sim x\end{matrix}}\xrightarrow{\text{两边同时相减}}\boxed{x^2\overset{\times}{\sim}x^3}$$

6.3 等价无穷小量运算规则

运算规则 1

设对同一变化过程, α,β 为无穷小, 由等价无穷小的性质, 可得简化某些极限运算的下述规则.

1 和差取大规则: 若 $\beta=o(\alpha)$, 则 $\alpha\pm\beta\sim\alpha$.

注　大相对于无穷小而言的, β 是高阶于 α 无穷小, 故 α 比 β 大.

例如　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$.

运算规则 2

2 和差代替规则: 若 α 与 β 不等价, $\alpha \sim \alpha'$, $\beta \sim \beta'$, 则有

$$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$$

此时若 $\gamma \sim \gamma'$, 则有 $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\gamma} = \lim \dfrac{\alpha' - \beta'}{\gamma'}$.

例如 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x - \sin x}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - x}{\frac{1}{2}x} = 2$.

注 $\alpha \sim \beta$ 时此结论未必成立, 如例6.

3 因式代替规则: 若 $\alpha \sim \beta$, 且 $\phi(x)$ 极限存在或有界, 则

$$\lim \alpha\varphi(x) = \lim \beta\varphi(x)$$

例如 $\lim_{x\to 0} \arcsin x \cdot \sin \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$.

注 在求和差运算的极限时, 须慎用无穷小量的等价替换. 在求乘除运算的极限时, 可以大胆使用无穷小量的等价替换.

例 5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)\sin x}{\arcsin x}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sin x$, $\arcsin x \sim x$.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+1)x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x+1) = 1$

注 只能代换无穷小量, 不能代换非无穷小量.

例 6 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

解 当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sin x$, $\arcsin x \sim x$.

原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \cdot \frac{1}{2}x^2}{x^3} = \dfrac{1}{2}$

注 只能分别代换乘除项, 不能分别代换加减项.

6.4 等价无穷小量性质

等价无穷小量性质

性质 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量, 则

(1) $\alpha \sim \beta$ $\Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$

(2) α 与 β 同阶不等价 $\Leftrightarrow \alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价

(3) α 比 β 低阶 $\Leftrightarrow \alpha - \beta \sim \alpha$

证明 设 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c$, $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha} = d$, 则 $d = 1 - c$. 因此

(1) $c = 1$ 等价于 $d = 0$.

(2) $c \neq 0, 1$ 等价于 $d \neq 0, 1$.

(3) $c = 0$ 等价于 $d = 1$.

等价无穷小量的充要条件

性质 (1) 称为等价无穷小量的充要条件, 即

$$\alpha \sim \beta \rightleftharpoons \beta = \alpha + o(\alpha)$$

例如 当 $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

当 $x \to 0$ 时,

$$\sin x = x + o(x), \tan x = x + o(x).$$

6.5 内容小结

内容小结

1. 无穷小的比较: 高阶, 低阶, 同阶, 等价, k 阶.
2. 常用等价无穷小
3. 等价无穷小量替换定理, 定理 1
4. 等价无穷小量在极限运算的下述规则: 和差取大, 和差代替, 因式代替
5. 等价无穷小量的性质及充要条件

本节完!