第八章・常微分方程

第一节・微分方程的基本概念

山东财经大学　田宽厚

引例 1　一曲线通过点 $(1,2)$, 在该曲线上任意点处的切线斜率为 $2x$, 求该曲线的方程.

解　设所求曲线方程为 $y=y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=2x & (1) \\ y|_{x=1}=2 & (2) \end{cases}$$

由 (1) 得

$$y=\int 2x dx = x^2+C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

由 (2) 得 $C=1$, 因此所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

引例 2　列车在平直路上以 $20\,m/s$ 的速度行驶, 制动时获得加速度 $a=-0.4\,m/s^{-2}$ 求制动后列车的运动规律.

解　设列车在制动后 t 秒行驶了 s 米, 即求 $s=s(t)$. 已知

$$\begin{cases} \dfrac{d^2s}{dt^2}=-0.4 \\ s|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=0}=20 \end{cases}$$

由前一式两次积分, 可得 $s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

利用后两式可得 $C_1=20, \quad C_2=0$

因此所求运动规律为 $s=-0.2t^2+20t$.

这两个引例是想告诉我们. 他们虽然是不一样的表达, 但有统一的称呼, 叫做微分方程.

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

称为**微分方程**. 其中出现的导数的最高阶数 n, 称为微分方程的**阶**. 若 y 是一元函数称为**常微分方程**, 多元则称为**偏微分方程**.

例如　判别下列微分方程的阶数：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$

(2) $x\,\mathrm{d}x-y^2\,\mathrm{d}y=0$

(3) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3+3x$

定义 2 (解)　能使微分方程成为恒等式的函数，称为方程的解. 如果 n 阶微分方程的解中含有 n 个相互独立的任意常数，则称此解为 n 阶微分方程的通解. 一般说来，不含有任意常数的解，称为方程的特解.

注

- 通常由一定的条件出发，确定方程通解中的任意常数来得到特解. 但有些特解不能由通解求出，必须利用其它方法直接由方程解出.
- 通解 $\neq$ 全部解.
- 全部解 $=$ 通解 $+$ 不能包含在通解内的所有特解.
- 通常把 $\left\{\begin{array}{l}\text{常微分方程}\\ \text{初始条件}\end{array}\right.$ 称为初值问题 (柯西问题).

例 1　求解一阶微分方程 $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y\Big|_{x=1}=2\end{array}\right.$ ······ 初始条件

解　对方程两边积分，得到

$y=x^2+C$（C 为任意常数）························ 通解

将 $x=1$ 时 $y=2$ 代入上式，得到 $C=1$．因此

$y=x^2+1$ ································ 特解

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$. 因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{特解}$$

例 3 验证函数 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ (C_1, C_2 为常数) 是微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ 的解, 并求满足初始条件 $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ 的特解.

解 $$\frac{d^2y}{dx^2} = -4C_1\cos 2x - 4C_2\sin 2x$$
$$= -4(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) = -4y$$

这说明 $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ 是方程的解.

C_1, C_2 是两个独立的任意常数, 故它是方程的通解. 利用初始条件易得: $C_1 = 1$, $C_2 = 1$. 故所求特解为

$$y = \cos 2x + \sin 2x.$$

1.1 内容小结

内容小结

- 基本概念: 微分方程, 阶, 通解, 特解, 全部解.
- 微分方程: $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, 其中 x 为自变量, y 为因变量.
- 阶: 微分方程中导数的最高阶数 n.
- 通解: 含有常数的解.
- 特解: 确定常数的解. 但有些特解不能由通解求出, 必须利用其它方法直接由方程解出.
- 全部解 = 通解 + 不能包含在通解内的所有特解.

本节完!