第三章 · 导数的应用

第二节 · 洛必达法则

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

洛必达法则

在第二章中我们已经知道 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 型的极限可能存在，也可能不存在.

$$1. \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad 2. \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+9}{5x^2+2x-1} = \frac{4}{5}$$

通常称不能直接使用极限的四则运算法则来计算的极限，为未定式的极限. 常见的不定式有：

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$$

$$0\cdot\infty, \infty-\infty$$

$$0^0, 1^\infty, \infty^0$$

若为未定式的极限，在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2.1 无穷小比值型

一、$\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理 1 如果 $\lim f(x) = 0$, $\lim g(x) = 0$, 而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 求极限 $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

解 原式 $\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$\overset{洛}{=} \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{3}{2}$$

注 不是未定式不能用洛必达法则!

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} \neq \lim_{x\to 1} \frac{6}{6} = 1$$

例 2 求极限 $\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{1}$.

解 原式 $\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

两种方法比较

注 1　对于 $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型极限，现在我们有两种方法可以使用：

(1) 等价无穷小量代换

(2) 洛必达法则

一般地，方法 (1) 应该优先使用，因为方法 (2) 可能变得复杂.

复习常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小量：

(1)	$\sin x \sim x$	(5)	$\ln(1+x) \sim x$
(2)	$\tan x \sim x$	(6)	$e^x - 1 \sim x$
(3)	$\arcsin x \sim x$	(7)	$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4)	$\arctan x \sim x$	(8)	$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

两种方法比较

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$.

解　原式 $\overset{\text{等价}}{=} \lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{6x} = \dfrac{3}{2}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$.

解　原式 $\overset{\text{等价}}{=} \dfrac{x-\sin x}{x^3} \overset{\text{洛}}{=} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} \overset{\text{等价}}{=} \dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \dfrac{3}{2}$.

2.2　无穷大比值型

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则

定理 2 如果 $\lim f(x)=\infty$, $\lim g(x)=\infty$, 而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在 (或为 ∞), 则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$.

解 原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+1}{6x-1}=\frac{4}{6}$.

例 6 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解 原式 $\overset{洛}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$

例 7 求极限 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{2^{\lambda x}}$ $(n$为正整数$)$.

解 原式 $\overset{洛}{=}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}\overset{洛}{=}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$

$$\overset{洛}{=}\cdots\overset{洛}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0.$$

注 例 6, 7 表明 $x\to+\infty$ 时, $e^{\lambda x}$ 快于 x^n 快于 $\ln x$.

注 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题.

例如

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

事实上

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

注　若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在 (或 $\neq \infty$)时，不能用洛必达法则！
即

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例如

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1} \Rightarrow \text{极限不存在}$$

$$\|$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

2.3　乘法减法型

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则

$$\infty-\infty \xrightarrow{\text{通分}} \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \xleftarrow{\text{取倒数}} 0\cdot\infty$$

例 8　求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

解　原式 $= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$$\overset{\text{洛}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0.$$

例 9 求极限 $\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x (n > 0)$.

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 0.$$

思考 用洛必达大则求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

2.4 幂指函数型

四、1^∞ 型, 0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^∞ 型, 0^0 型和 ∞^0 型的未定式, 我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式, 进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

$$\infty - \infty \xrightarrow{\text{通分}} \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \xleftarrow{\text{取倒数}} 0\cdot\infty \xleftarrow{\text{取对数}} \begin{cases} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{cases}$$

幂指函数型

例 10 求极限 $\lim_{x\to0^+} x^x$.

解 原式 $= e^{x\ln x}$

$$\downarrow \text{例 } 9;\ \lim_{x\to0^+} x^n\ln x = 0$$

$$= e^0 = 1.$$

例 11 求极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$.

解 记: $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln n} \xrightarrow{\text{例6}} 1$

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(n^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} \overset{\text{例6}}{=} 0.$$

2.5 内容小结

内容小结

洛必达法则

1. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式: $\lim\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$
2. $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式:

$$\infty-\infty \xrightarrow{\text{通分}} \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \xleftarrow{\text{取倒数}} 0\cdot\infty$$

3. 1^∞ 型, 0^0 型和 ∞^0 型的未定式: $0\cdot\infty \xleftarrow{\text{取对数}} \begin{cases} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{cases}$

本节完!