第四章・不定积分

第三节・换元积分法

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

换元法引例

引例 设函数 $f(x)$ 有原函数 $F(x)$, 由不定积分定义得

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

其中 x 为积分变量, $f(x)$ 为被积函数. 当二者变量一致时, 可积分.

例如 $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

$$\int \cos 2x\,d(2x) = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin 2x + C$$

问题 $\int \cos 2x\,dx = ?$ 当积分变量 x, 与被积函数自变量 $2x$不一致时, 我们如何求不定积分?

解法 1 **凑微分法**: 根据上例, 若积分变量由 x 改为 $2x$, 使得积分变量与被积函数变量相一致, 可求不定积分 $\int \cos 2x\,d(2x)$. 根据 $d(2x) = 2dx$, 得

$$\int \cos 2x\,d(2x) = \int \cos 2x\,2dx$$

$$\frac{1}{2}\cdot\int \cos 2x\,d(2x) = \int \cos 2x\,dx$$

$$\therefore \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\int \cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\cdot\sin 2x + C$$

注 调整积分变量, 与被积函数自变量保持一致, 求不定积分. 我们称这种方法为凑微分法.

解法 2　配元法: 设 $u = 2x$, $\frac{du}{dx} = 2$, $\Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\therefore \int \cos 2x\, dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{2} du$$
$$= \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

注　调整被积函数自变量, 与积分变量保持一致, 求不定积分. 我们称这种方法为配元法.

对于相对复杂的被积函数, 上述两种解题方法提供给我们一个解题思路. 通过换元, 保持积分变量与被积函数自变量一致, 求不定积分.

换元法

定理 1　如果 $u = g(x)$ 在 I 可导, f 在 I 连续, 则

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du$$

证明　设 $F'(x) = f(x)$, 根据复合函数求导公式有

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int \frac{d}{dx} F(g(x)) dx = F(g(x)) + C$$
$$= F(u) + C = \int f(u) du$$

说明　国内课本讲换元法分为两类. 对照课本可称上述凑微分法为第一类换元法:

$$\int f(\phi(x)) g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, d(g(x))$$
$$= \left[\int f(u)\, du\right]_{u=g(x)}$$

配元法称为第二类换元法

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx\big|_{u=g(x)} = \int f(u) du$$

两类换元法的用法: 如例1, 能一眼看出用凑微分的方法适用于第一类换元法, 反之可用第二类换元法.

本章节课程, 不同于课本, 我们同时讲解两类换元法.

例 1　求 $\int (ax+b)^m\, dx \quad (m \neq -1)$

解　凑微分法: $\because d(ax+b) = a\, dx$

$$\therefore \int (ax+b)^m\, dx = \frac{1}{a} \cdot \int (ax+b)^m\, d(ax+b)$$
$$= \frac{1}{a(m+1)} (ax+b)^{m+1} + C$$

配元法: 令 $u = ax + b$, 则 $dx = \frac{1}{a} du$ 故

$$\int (ax+b)^m\, dx = \int u^m \frac{1}{a}\, du = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{m+1} u^{m+1} + C$$
$$= \frac{1}{a(m+1)} (ax+b)^{m+1} + C$$

例 2 求 $\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

解 凑微分法: $\because d(3\sqrt{x}) = \frac{3}{2}x^{-1/2}dx$.

$$\therefore \int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int e^{3\sqrt{x}}d(3\sqrt{x}) = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$$

配元法: 令 $u = 3\sqrt{x}$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{2}{3}du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. 故

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \frac{2}{3}\int e^u du = \frac{2}{3}e^u + C = \frac{2}{3}e^{3\sqrt{x}} + C$$

注 也可令 $u = \sqrt{x}$.

例 3 求 $\int \frac{1}{x(1+3\ln x)}dx$

解 凑微分法: $\because d(1+3\ln x) = 3\frac{1}{x}dx$.

$$\therefore \int \frac{1}{x(1+3\ln x)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+3\ln x}d(1+3\ln x)$$
$$= \frac{1}{3}\ln|1+3\ln x| + C.$$

配元法: 令 $u = 1+3\ln x$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{3}{x} \Rightarrow dx = \frac{x}{3}du$. 故

$$\int \frac{1}{x(1+3\ln x)}dx = \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{x}{3}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du$$
$$= \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln|1+3\ln x| + C.$$

例 4 求 $\int x\sqrt{1-x^2}dx$

解 凑微分法: $\because d(1-x^2) = -2xdx$.

$$\therefore \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}d\left(1-x^2\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

配元法: 令 $u = 1-x^2$, 则 $\frac{du}{dx} = -2x \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}du$. 故

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \cdots$$

例 5 求 $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

解 凑微分法:

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{(1+\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}dx = \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$$
$$= \int dx - \int \frac{d(1+\mathrm{e}^x)}{1+\mathrm{e}^x} = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

配元法: 令 $u = e^x$, 则 $\frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{1}{u}du$. 故

$$\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}du = \int \frac{1}{u} + \frac{-1}{1+u}du$$
$$= \ln|u| - \ln|1+u| + C$$
$$= x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

利用三角形公式

例 6　求 $\int \sin^3 xdx$

解

$$\begin{aligned}\int \sin^3 xdx &= \int \sin^2 x \sin xdx \\ &= -\int \sin^2 xd\cos x \\ &= -\int \left(1-\cos^2 x\right) d\cos x \\ &= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

注　被积函数中含有三角函数的奇次幂, 拿出一次凑微分

例 7　求 $\int \cos^2 xdx$

解

$$\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

注　被积函数为三角函数的偶次幂, 利用倍角公式降幂.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

例 8　求 $\int \left(1-2\sin^2 x\right)\sin 2xdx$

解

$$\begin{aligned}\int \left(1-2\sin^2 x\right)\sin 2xdx &= \int \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\sin 2xdx \\ &= \int \cos 2x \sin 2xdx \\ &= \int \frac{1}{2}\sin 4xdx = \int \frac{1}{8}\sin udu \\ &= -\cos 4x + C.\end{aligned}$$

例 9　求 $\int \tan xdx$.

解 $$\begin{aligned}\int \tan xdx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{\cos x}d\cos x \\ &= -\ln|\cos x| + C.\end{aligned}$$

类似可证

$$\begin{aligned}\int \cot xdx &= \int \frac{\cos xdx}{\sin x} = \int \frac{d\sin x}{\sin x} \\ &= \ln|\sin x| + C.\end{aligned}$$

例 10 求 $\int \cos 3x \cos 2x dx.$

解 已知:$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)]$

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 2x\, dx &= \frac{1}{2}\int (\cos x + \cos 5x) dx \\ &= \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C\end{aligned}$$

利用已知积分公式

例 11 求 $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

解 由公式 $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C.$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad \text{令 } u = \frac{x}{a} \text{ 则 } du = \frac{1}{a}dx$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + C \\ &= \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C\end{aligned}$$

例 12 求 $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad (a > 0)$

解 由公式 $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

分项积分

例 13 求 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$

解 部分分式求得 $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] \\ &= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a}\right] \\ &= \frac{1}{2a}[\ln|x-a| - \ln|x+a|] + C = \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a} + C.\end{aligned}$$

例 14 求 $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx.$

解 令 $u = xe^x$, 则 $\frac{du}{dx} = xe^x + e^x \Rightarrow dx = \frac{1}{e^x(x+1)}du.$ 故

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx &= \int \frac{x+1}{x(1+u)} \cdot \frac{1}{e^x(x+1)}du \\ &= \int \frac{1}{u(1+u)}du = \int \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}du \\ &= \ln|xe^x| - \ln|1+xe^x| + C \\ &= x + \ln|x| - \ln|1+xe^x| + C.\end{aligned}$$

例 15 求 $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$

解 记 $\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u + C.$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+3} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \\ &= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.\end{aligned}$$

例 16 求 $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx.$

解 记 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx &= \int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-4x^2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{3^2-(2x)^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{d\left(9-4x^2\right)}{\sqrt{9-4x^2}} \\ &= \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C.\end{aligned}$$

巧妙换元

例 17 求 $\int \sec x dx.$

解 设 $u = \sec x + \tan x$,

$$\frac{du}{dx} = \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\tan x + \sec x) = u \sec x$$

$$\Rightarrow \frac{du}{\sec x \cdot u} = dx$$

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\sec x}{\sec x \cdot u}du = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C \\ &= \ln|\sec x + \tan x| + C\end{aligned}$$

类似可证 $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C.$

三角函数换元

例 18　求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

解　设 $x=a\sin t,\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\cos t$, 且 $dx=a\cos t\,dt$

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int a\cos t\cdot a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt$$
$$=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=a^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C$$

其中, $\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

三角函数换元总结

1 $\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sin t$, $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

2 $\int f(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\tan t$, $t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

3 $\int f(x,\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sec t$, $t\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$

用万能公式换元

若有三角函数有理式 $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

令 $t=\tan\frac{x}{2}$, 则 $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

由 $\sin 2x=2\sin x\cos x$, 得

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$$

由 $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, 得

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx\Rightarrow\int R(t)dt$$

例 19　求不定积分 $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解　令 $u=\tan\frac{x}{2}$, 则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

$$\text{原式}=\int\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int\left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t^2+2t+\ln|t|\right)+C$$
$$=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

倒代换

例 20　求 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}$.

分母中因子次数较高时, 可试用倒代换

解　令 $x=\frac{1}{t}$, 得 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}=-\int \frac{t}{\sqrt{a^2t^2+1}}dt \because\ d\left(a^2t^2+1\right)=2a^2tdt$

$$\therefore \text{原式}=-\frac{1}{2a^2}\int \frac{d\left(a^2t^2+1\right)}{\sqrt{a^2t^2+1}}=-\frac{1}{a^2}\sqrt{a^2t^2+1}+C$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}+C.$$

例 21　求 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解　令 $x=\frac{1}{t}$, 原式 $=\int \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\frac{-1}{t^2}dt=-\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

$$=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

三角函数换元: 令 $x=\sec t$，$t\in(0,\pi/2)$．则有

原式 $=\int \frac{\sec t\ \tan t\ \mathrm{d}t}{\sec t\ \tan t}=t+C=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C$

配元法: 令 $u=\sqrt{x^2-1}$，则有

原式 $=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}=\arctan u+C=\arctan\sqrt{x^2-1}+C$

本节完!