第二章 · 函数与极限

第一节 · 导数的概念

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

1.1 导数的物理背景

导数引例：瞬时速度

引例 1 物体作变速直线运动，经过的路程 s 是时刻 t 的函数，$s=f(t)$．求在 t_0 时刻物体的瞬时速度．

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

- 在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数的定义

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数．记为

$$f'(x_0),\quad y'|_{x=x_0}\quad \text{或}\quad \frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=x_0},\quad \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$$

注 导数 $f'(x_0)$ 反映了 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化快慢，因此 $f'(x_0)$ 又称为 $f(x)$ 在 x_0 点的变化率．

导数的几种形式

- $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ （定义）
- $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ （令 $h = \Delta x$）
- $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ （令 $x = x_0 + h$）

判断可导性方法 1

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导。否则，称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导。

如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导。

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a, b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a, b) 内的导函数(简称导数), 记为

$$f'(x), \quad y' \quad 或 \quad \frac{d}{dx} f(x), \quad \frac{dy}{dx}.$$

此时有

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

注　上式明确了求函数 $f(x)$ 在 x_0 点导函数的顺序: 先求 $f'(x)$ 的导数, 再代入 $x = x_0$, 得 $f'(x_0)$ 的导函数.

导函数的几种形式

- $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ （定义）
- $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ （令 $h = \Delta x$）

例 1 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

解

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x} = 0$$

即

$$(C)' = 0$$

例 2 求函数 $f(x)=x^n\left(n\in\mathbb{N}^+\right)$ 在 $x=a$ 处的导数.

解

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1}\right) \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

注 对一般幂函数 $y=x^\mu$ (μ 为常数)

$$(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

例如

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \left(x^{-1}\right)' = -x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)' = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$$

例 3 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 记 $\sin A\pm\sin B = 2\sin\frac{A\pm B}{2}\cos\frac{A\mp B}{2}$. 令 $h=\Delta x$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos x \end{aligned}$$

即 $(\sin x)' = \cos x$

类似可证得 $(\cos x)' = -\sin x$

基本导数公式 I

$$(C)' = 0 \quad (1)$$

$$(x^a)' = ax^{a-1} \quad (2)$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad (3)$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (4)$$

1.2 导数的几何意义

导数引例：切线斜率

引例 2　设曲线的方程为 $y = f(x)$，求在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率.

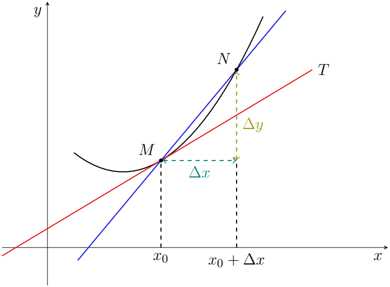
- 设 N 点在 M 点附近，则割线 MN 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

- 让 N 点往 M 点跑，则切线 MT 的斜率为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

导数引例：切线斜率



导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率.

从而点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

导数的几何意义

例 4 求 $f(x)=x^3$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

解 因为 $y'=\left(x^3\right)'=3x^2$,

所求切线斜率为：$k=3x^2\Big|_{x=1}=3$

切线方程为：$y-1=3(x-1) \quad \Rightarrow \quad 3x-y-2=0$

所求法线斜率为：$-\frac{1}{k}=-\frac{1}{3}$

法线方程为: $y-1=-\frac{1}{3}(x-1) \quad \Rightarrow \quad x+3y-4=0$

1.3 可导性与连续性的关系

可导性与连续性

性质 1 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow$ $f(x)$ 在 x_0 点连续.

证明 设 $y=f(x)$ 在点 x 处可导, 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ 存在, 因此必有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha, \text{其中} \lim x\to 0\alpha=0$$

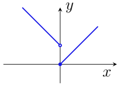
故, 当 $\Delta x\to 0$ 时

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x\to 0$$

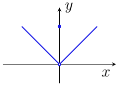
所以函数 $y=f(x)$ 在点 x 连续.

注意: 函数在点 x连续, 但在该点未必可导.

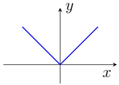
函数曲线的形状（在 $x=0$ 处）



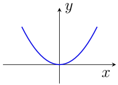
极限不存在



极限存在但不连续



连续但不可导



可导

复习与提高：导数的记号

选择 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充分条件是…………………………………（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

解 (A) 令 $t=1/h$，则

$$\lim_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\tfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{t\to 0^+}\tfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'_+(a).$$

因此选项 (A) 是 $f'(a)$ 存在的必要非充分条件.

(D) 令 $t=-h$，则

$$\lim_{h\to 0}\tfrac{f(a)-f(a-h)}{h}=\lim_{t\to 0}\tfrac{f(a+t)-f(a)}{t}=f'(a).$$

因此选项 (D) 是 $f'(a)$ 存在的充分必要条件.

(B) 和 (C)，令 $a=0$，$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 则这两个极限存在，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不连续从而不可导.

复习与提高

题 1 设 $x\in(-\delta,\delta)$ 时恒有 $|f(x)|\le x^2$，问 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？

复习与提高

题 2　设 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}$.

1.4 分段函数的导数

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义　设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

判断可导性方法 2

性质 2　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

$$\text{导数：}\ f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{左导数：}\ f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{右导数：}\ f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

例 5　证明函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 不可导.

证明　根据导数定义, 若极限存在则导数存在, 由于 $|x|$ 是分段函数, 所以分别讨论左右极限.

$$\because\quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h}{h}=\begin{cases}1, & h>0\\ -1, & h<0\end{cases}$$

$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ 不存在, 即 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

性质 3　函数的可导性和连续性有如下关系：

- 可导 $\Rightarrow$ 连续;
- 左可导 $\Rightarrow$ 左连续；
- 右可导 $\Rightarrow$ 右连续.

判断可导性方法 3

推论 1 (性质3的逆否定理)

- 不连续 $\Rightarrow$ 不可导；
- 不左连续 $\Rightarrow$ 不左可导；
- 不右连续 $\Rightarrow$ 不右可导.

反例: 函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处连续 (第 1.7 章节例 2), 但不可导 (例 5)

分段函数的导数

性质 4　假定 $u(x)$ 和 $v(x)$ 总可导，分段函数

$$f(x)=\begin{cases}u(x), & x\leqslant a\\ v(x), & x>a\end{cases}.$$

如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，则有

$$f'_-(a)=u'(a),\qquad f'_+(a)=v'(a).$$

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ……不连续且不可导

例 7　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性. ……连续但不可导

例 8　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\le 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性. ……连续且可导

复习与提高：导数的运算

题 3　设 $f(x)=(x-a)\phi(x)$，且 $\phi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

解　因为 $f'(x)=(x-a)'\phi(x)+(x-a)\phi'(x)$

$$=\phi(x)+(x-a)\phi'(x),$$

所以 $f'(a)=\phi(a)$. ……这种做法是否正确?

复习与提高：导数的记号

题 4　判断 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 是否相同：

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & x\ne 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $f'_+(0)$ 不存在，但是 $f'(0^+)$ 存在.

(2) $f'_+(0)$ 存在，但是 $f'(0^+)$ 不存在.

注　若导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，则两者相等.

1.5　内容小结

内容小结

1. 导数的概念, 定义1

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

2. 基本导数公式 I.
3. 导数的几何意义: 切线的斜率;
4. 基本导数公式;
5. 可导必连续, 性质 3;
6. 判断可导性 $\begin{cases}\text{定义 1} & \text{极限存在;}\\ \text{性质 2} & \text{左, 右导数存在且相等;}\\ \text{推论 1} & \text{不连续} \not\Rightarrow \text{不可导;}\\ & \text{若连续} \Rightarrow \text{性质4.}\end{cases}$

本节完!