第一章・函数与极限

第八节・闭区间上连续函数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

8.1 最值定理

最值定理

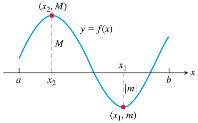
定义 1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．如果有 $x_0 \in I$，使得对所有 $x \in I$ 都有

$$f(x) \le f(x_0) \quad (\text{或 } f(x) \ge f(x_0)),$$

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（或最小值）.

注 这里的最值是在函数值的其定义域中作比较而得，英文的准确翻译是全域/绝对最大 (小) 值．Global (Absolute) Max/Min Value.

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.



也就是说在 $[a,\, b]$ 中存在 x_1, x_2, 且 $f\,(x_1) = m, f\,(x_2) = M$．对于 $[a,\, b]$ 中的任意 x, 总有 $m \le f(x) \le M$.

推论 1 在闭区间上连续的函数在该区间上有界.

最值定理

注 定理中的连续性与闭区间条件缺一不可

例如 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

例如 函数 $y=\mathrm{e}^x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上没有最大值和最小值.

8.2 零值定理

零值定理

定义 2 如果 x_0 使 $f(x_0)=0$, 那么 x_0 称为 $f(x)$ 的零点.

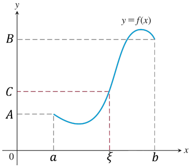
定理 2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号 ($f(a)f(b)<0$),则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

例如 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

8.3 介值定理

介值定理

定理 3 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$, $f(b)=B$, 且 $A\neq B$, 则对于 A 与 B 之间的任何数 C，至少有一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=C$.



证明 令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可得结论.

介值定理

例 1 证明方程 $x^3-4x^2+1=0$ 在区间 $(0,1,)$ 内至少有一个根.

证明 初等函数在其定义域内连续, 所以 $f(x)=x^3-4x^2+1=0\in C[0,1]$, 又

$$f(0)=1>0,\quad f(1)=-2<0$$

故据零点定理, 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f(\xi)=0$, 即

$$\xi^3-4\xi^2+1=0.$$

8.4 内容小结

内容小结

设函数 $f(x)\in C[a,b]$, 则

1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值与最小值 (定理1);
2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界 (推论1);
3. 若 $f(a)$, $f(b)$ 异号, $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $f(\xi)=0$(定理2);
4. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值 (定理3).

本章节内容可直接跳接章节 3.1.

本章完!