第七章 · 无穷级数

第一节 · 无穷级数的概念与性质

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

1.1 基本概念

无穷级数

定义 1 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项称为级数的通项(或 一般项).

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，记 $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$;
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.
- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 1 判别级数 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$ 的敛散性.

解

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2} = \infty$$

所以级数发散.

利用“拆项相消”求和

例 2 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

解

$$(1)\quad S_n = \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$= (\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+(\ln(n+1)-\ln n)$$

$$= \ln(n+1)\to\infty \quad (n\to\infty)$$

所以级数发散.

$$(2)\quad S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1-\frac{1}{n+1}\to 1 \quad (n\to\infty)$$

所以级数收敛, 其和为 1.

例 3 讨论等比级数（或称几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的敛散性，其中 $a\neq 0$，而 q 称为级数的公比.

解 (1) 若 $|q|\neq 1$:

$$S_n = a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

$$S_n\cdot q = \quad aq+aq^2+aq^2+aq^{n-1}+aq^n$$

两式相减 $S_n - S_n\cdot q = a-aq^n$, 得部分和

$$S_n = \frac{a-aq^n}{1-q}$$

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}$$

当 $|q|<1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-q}$.

当 $|q|>1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\infty$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, 级数发散.

. . . .

$$S_n=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}$$

(2) 若 $|q|=1$

当 $q=1$ 时, $S_n=a+a+\cdots+a=na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, 级数发散;

当 $q=-1$ 时, $S_n=a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a$

因此 $S_n=\begin{cases} a, & n \text{ 为奇数;} \\ 0, & n \text{ 为偶数.}\end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

. . . .

结论 关于等比级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n=\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\begin{cases} \text{当}|q|<1\text{时, 收敛于}\dfrac{a}{1-q}; \\ \text{当}|q|\geq 1\text{时, 发散.}\end{cases}$$

其中 a 表级数第一项, q 表公比.

等比级数的例子

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}2\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$ . . . . 收敛

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{5}{4}^n$ . . . . 发散

3. $\displaystyle-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\frac{8^n}{9^n}+\cdots$ . . . . 收敛

$$\because |q|=\left|-\frac{8}{9}\right|<1.\quad S=\frac{-\frac{8}{9}}{1+\frac{8}{9}}=-\frac{8}{17}.$$

积分检验法

积分检验法: 若函数 $f(x)>0$ 在区间 $[1,\infty]$ 且连续递减, 设 $u_n=f(n)$, 则反常积分 $\int_1^{\infty} f(x)dx$ 与无穷积分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同收敛或同发散.

调和级数发散

例 4 证明调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 发散.

解法 1 由级数可知 $u_n=\frac{1}{n}=f(n)$, 则函数 $f(x)=\frac{1}{x}>0$ 且在区间 $[1,\infty]$ 连续递减.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\ln x|_1^{\infty}=\infty.$$

因此由积分检验法得, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

解法 2 反证法: 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 收敛, 部分和为 S_n.

则 $S_n\to S$, 当 $n\to\infty$.

可见对部分和 S_{2n}, 也有 $S_{2n}\to S$, 当 $n\to\infty$.

于是 $S_{2n}-S_n\to S-S=0$, 当 $n\to\infty$.

但
$$\begin{aligned}S_{2n}-S_n&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\\&>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

故, 当 $n\to\infty$ 时, $S_{2n}-S_n\not\to 0$

由此得到矛盾, 假设不成立, 所以原级数必发散.

1.2 收敛级数的性质

无穷级数的运算：化正为负

$$\begin{aligned}S&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\&=1+\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots)=1+\frac{1}{2}S\end{aligned}$$

$\therefore\ S=2$ 即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$ ✓

....

$$\begin{aligned}T&=1+2+4+8+\cdots=1+(2+4+8+\cdots)\\&=1+2\cdot(1+2+4+\cdots)=1+2T\end{aligned}$$

$\therefore\ T=-1$ 即 $1+2+4+8+\cdots=-1$ ✗

性质 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

证明 设 $T_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (u_i \pm v_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \pm \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = S_n \pm W_n$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm W_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} W_n = S \pm W$$

收敛级数的线性组合仍收敛.

推论

- 性质1 表明收敛级数可逐项相加或相减.
- 若两级数中一个收敛一个发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 必发散. (用反证法可证)
- 但若两个级数都发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

  例如，取 $u_n = (-1)^{2n}, v_n = (-1)^{2n+1}$. $u_n + v_n = 0$.

性质 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，a 为常数. 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明 令 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c u_k = c \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = c S_n$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS$$

这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c u_n$ 收敛，其和为 cS.

推论 级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

例 5 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right)$ 的敛散性.

解

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

所以级数收敛.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$ 的敛散性.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$

$\because |q|=\frac{1}{2}<1$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛.

然而, 调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散.

所以，根据性质1的推论, 原级数发散.

性质 3 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

证明 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{k+n}$ 的部分和为

$$T_n=\sum_{l=1}^{n}u_{k+l}=S_{k+n}-S_k$$

由于 $n\to\infty$ 时, T_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $T=S-S_k$. 其它情况类似可证.

注 级数的敛散性与有限项无关.

例如 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 敛散性相同, 均收敛, 但和不同.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3,\quad \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{4}{3}.$$

无穷级数的运算：无中生有

$$\begin{aligned}0&=0+0+0+\cdots\\&=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\\&=1-1+1-1+1-1+\cdots \qquad ✗\\&=1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots\\&=1+0+0+0+\cdots\\&=1\end{aligned}$$

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

推论

- 若加括号后所得级数发散，则原级数发散
- 若加括号后所得级数收敛，则原级数未必收敛.

例如 $1-1+1-1+\cdots$ 发散，

加括号后 $(1-1)+(1-1)+\cdots$ 收敛.

证明 设收敛级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧，例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $W_m\,(m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n(n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列，因此必有

$$\lim_{m\to\infty}W_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S.$$

例 7 已知等比级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.$$

例 8 判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\because\ \sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 调和级数发散，由性质4推论，得原级数发散.

1.3 级数收敛的必要条件

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

推论 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 9 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

注 若通项趋于零，则级数未必收敛.

例 10 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 0，但是它发散 (例2).

1.4 内容小结

内容小结

1. 等比级数的敛散性:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \begin{cases} \text{当}|q|<1\text{时, 收敛于}\dfrac{a}{1-q}; \\ \text{当}|q|\geq 1\text{时, 发散.} \end{cases}$$

2. 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

3 收敛级数的性质:

- 收敛级数的线性性质, 性质1, 2;
- 级数的敛散性与有限项无关, 性质3;
- 收敛级数的结合律, 性质4.

4 收敛的必要条件: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

5 证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散的方法. 若

(1) 根据定义: $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则原级数发散;

(2) 性质4推论: 加括号后所得级数发散, 则原级数发散;

(3) 定理1推论: $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, 则原级数发散.

本节完!