第一章 · 函数与极限

第一节 · 数集与函数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

1.1 数集与区间

集合的概念

定义 具有某种特定性质的事物的总体称为集合，简称集．组成集合的事物称为元素，简称元．不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

- 元素 a 属于集合 M，记作 $a \in M$.
- 元素 a 不属于集合 M，记作 $a \notin M$.
- M 为数集 $= \begin{cases} M^* & \text{表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 的集;} \\ M^+ & \text{表示 } M \text{ 中排除 } 0 \text{ 与负数的集.} \end{cases}$

集合的表示法

1. 列举法：比如 $A = \{a, b, c, d\}$
2. 描述法：比如 $B = \{x \mid x^3 + x - 1 > 0\}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R} \longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集 $\mathbb{C}$

有限区间

数轴上长度大于零的一段称为区间：$\begin{cases} \text{有限区间} \\ \text{无限区间} \end{cases}$

有限区间有四种（$a < b$，a 和 b 称为区间的端点）：

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad \text{有限开区间}$$
$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b\} \qquad \text{有限闭区间}$$
$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b\} \qquad \text{左开右闭区间}$$
$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b\} \qquad \text{左闭右开区间}$$

例如　用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid 1 < x < 3\}$　　(2) $\{x \mid -5 \le x < 0\}$

无限区间

无限区间有五种（其中 a 或 b 称为区间的端点）：

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \qquad \text{无限开区间}$$
$$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\} \qquad \text{无限开区间}$$
$$(-\infty, b] = \{x \mid x \le b\} \qquad \text{无限闭区间}$$
$$[a, +\infty) = \{x \mid x \ge a\} \qquad \text{无限闭区间}$$
$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

例如　用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid x < 3\}$　　(2) $\{x \mid x \ge 2\}$

注　无穷大不是一个很大的数，而是一个变化趋势，它表达的是不管给定多么大一个数，它都比这个数还要大，因此在区间的端点上，都不能包含无穷大，无穷大只能是开.

区间的定义

注　我们希望下册第六章节定义的开区域（闭区域）概念是这里的开区间（闭区间）概念在 $\mathbb{R}^n$ 中的推广，因此

(1) 开区间分为有限开区间和无限开区间，排除空集

(2) 闭区间分为有限闭区间和无限闭区间，排除独点集

(3) 规定整个实数集 $\mathbb{R}$ 既是开区间又是闭区间

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

绝对值不等式的等价公式设 $a, b > 0$：

- $|x| < b$: $-b < x < b$
- $|x| > a$: $x < -a$ 或 $x > a$
- $a < |x| < b$: $-b < x < -a$ 或 $a < x < b$

绝对值的三角不等式：

- $|x + y| \leq |x| + |y|$
- $|x - y| \geq |x| - |y|$

绝对值

例 1　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \,\middle|\, |x-2| < 3\right\}$

(2) $\left\{x \,\middle|\, 0 < |x-2| < 3\right\}$

解

(1) $(-1, 5)$: 以 2 为原点, 3 为半径的开区间

(2) $(-1, 2) \cup (2, 5)$: 以 2 为原点, 3 为半径, 且不包含原点的区间.

邻域

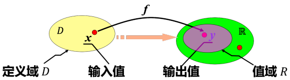
- 点 a 的δ 邻域 $U(a, \delta)$：
$$\left\{x \,\middle|\, |x-a| < \delta\right\} = (a - \delta, a + \delta)$$
- 点 a 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a, \delta)$：
$$\left\{x \,\middle|\, 0 < |x-a| < \delta\right\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$$
- 点 a 的左邻域：$(a - \delta, a)$; 点 a 的右邻域：$(a, a + \delta)$

其中 a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径 .

例如　$\left\{x \,\middle|\, |x-2| < 3\right\}$, 是 $U(2, 3)$ 的 δ 邻域;
$\left\{x \,\middle|\, 0 < |x-2| < 3\right\}$, 是 $\mathring{U}(2, 3)$ 的去心 δ 邻域.

1.2　函数的概念

定义 1　设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$, 如果存在一个对应规则 f, 使得对每个 $x \in D$, 都有一个确定的实数 y 与之对应, 则称 f 为定义在 D 上的一个函数, 记为 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, 简记为 $y = f(x)$.



- x 称为自变量(输入值);
- y 称为因变量(输出值);
- D 称为定义域;
- $R = \left\{ y \,\middle|\, y = f(x), x \in D \right\}$ 称为值域 .

注

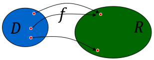
- 构建函数的三要素—定义域, 对应规则, 值域 .
- x 的输出值 $f(x)$ 是唯一的, 但 y 的元素不一定唯一.

$$f\left(x_1\right) = y = f\left(x_2\right).$$

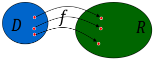
- 两个函数相同, 当且仅当两者的定义域和对应规则都相同 .

例如　$y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数 .

问题　二者极限是否相同?



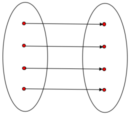
若 $\forall y \in R$, $\exists x \in D$, 使得 $f(x) = y$, 则称 $f : D \to R$ 为满射 .



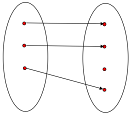
若 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, 有 $f\left(x_1\right) \neq f\left(x_2\right)$ 则称 f 为单射(一对一映射).

若 f 既是满射又是单射, 则称 f 为双射 .

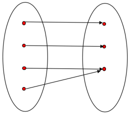
例如



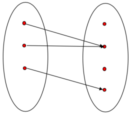
单射、满射



单射非满射



满射非单射



非满射非单射

自然定义域

对未指明定义域的函数, 通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

1 $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,
2 $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,
3 $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求:

1 根号里面要求大于等于零;
2 对数里面要求大于零;
3 分母要求不能等于零.

1.3 函数的性质

函数的奇偶性

定义 2 给定函数 $y=f(x)$,

1 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.
2 若 $\forall x\in D$, 总有 $f(-x)=-f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

注

- 偶函数的图形关于 y 轴对称.
  例如 $x^2,\ x^4,\ \dfrac{1}{x^2},\ \dfrac{1}{x^4},\ \cos x$ 为偶函数.
- 奇函数的图形关于原点对称.
  例如 $x,\ x^3,\ \dfrac{1}{x},\ \dfrac{1}{x^3},\ \sin x,\ \tan x$ 为奇函数.

函数的奇偶性

例 2 判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^4-2x^2+1$ ……………… 偶函数
(2) $f(x)=x^3+x$ ……………… 奇函数
(3) $f(x)=x^2+x+1$ ……………… 非奇非偶函数
(4) $f(x)=\frac{1-x^2}{\cos x}$ ……………… 偶函数
(5) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ……………… 奇函数

函数的周期性

定义 3　对于函数 $y = f(x)$, 如果存在正常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立, 则称此函数为周期函数；满足这个等式的最小正数 T, 称为此函数的周期．

例如

(1) $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期．

(2) $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 以 π 为周期．

函数的单调性

定义 4　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对于区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2,

1. 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；
2. 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的；

函数的单调性

例如

- $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的．
- $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的．
- $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少．
- $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少, 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加．

函数的有界性

定义 5　设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义, 如果存在一个正数 M, 对于所有 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \le M$, 则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界．

如果函数在其定义域上有界, 则称它为有界函数；否则称它为无界函数．

例如

(1) $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是有界函数．

(2) $y = x^2$, $y = \tan x$ 是无界函数．

函数的有界性

注

1. 有界性的概念须明确数集 $I \subset D$.
2. 若函数 $f(x)$ 在 D 上有上 (下) 界, 则上 (下) 界不唯一 .

例如

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内有下界, 但没有上界 .

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 内有下界, 也有上界 .

函数的有界性

类似地, 我们可以定义函数有上界和有下界的概念 .

- 对于所有 x, 恒有 $|f(x)| \le M$ .... 有界
- 对于所有 x, 恒有 $f(x) \le M_1$ .... 有上界
- 对于所有 x, 恒有 $f(x) \ge M_2$ .... 有下界

定理　$f(x)$ 有界 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 有上界而且有下界 .

即

$$M_1 \le f(x) \le M_2.$$

1.4 复合函数的构建

复合函数

定义　将 $u = g(x)$ 代入 $y = f(u)$，得到的新函数 $y = f[g(x)]$，称为这两个函数的复合函数．记作:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

复合函数的定义域是那些使得它有意义的 x 所组成的集合.

注　$f \circ g$ 表示按先 g 然后 f 的次序复合两个函数．$g \circ f$ 表示按先 f 然后 g 的次序复合两个函数

$$\therefore f \circ g \neq g \circ f$$

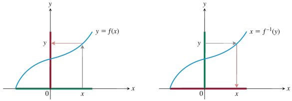
例如

(1) 两个函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

(2) 三个函数 $y = \sin u$、$u = v^2 - 1$ 和 $v = e^x$ 的复合函数是 $y = \sin(e^{2x} - 1)$.

反函数

因为单射函数的每个输出值只有一个输人值与之对应，所以单射函数可以反过来看作是把输出值送回到它们所来自的输人值．由逆转单射函数的定义域和值域定义的函数就是 f 的反函数．反函数 f 的记号是 f^{-1}，念作"f 逆"



反函数

定义 6 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R。如果对每个 $y\in R$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 R 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**。

反函数

注

- 函数为单射是构建反函数的必要条件．若函数不是单射，可以通过限制定义域的方法使其成为单射，再计算反函数．
- 函数与其反函数的图形关于直线 $y=x$ 对称．
- 习惯上仍用 x 表示自变量，y 表示因变量．因此 $y=f(x), x\in D$ 的反函数记成

$$y=f^{-1}(x),\ x\in R.$$

求反函数的步骤

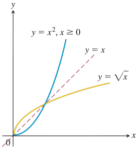
1. 从方程 $y=f(x)$ 求解 x，这样得到公式 $x=f^{-1}(y)$，一个关于自变量为 y 的函数．
2. 交换 x 和 y，得到公式 $y=f^{-1}$，一个关于自变量为 x 的函数．

反函数

例 3 求函数 $y=x^2, x\geq 0$ 的反函数.

这里我们需要注意，一般情况下 $y=x^2$ 是一个偶函数，所以它不是一个单射函数． 在限制了函数的定义域之后 $y=x^2, x\geq 0$ 变成了一个单射函数，因此反函数在被限制的定义域上是存在的.

解



1. 原式求 x: $\sqrt{y}=\sqrt{x^2}=|x|=x$.
2. 交换 x 和 y: $y=\sqrt{x}$.

测试反函数的方法

定理 1 函数 f, f^{-1} 互为反函数, 当且仅当

$$f(f^{-1}(x))=x \quad \text{并且} \quad f^{-1}(f(x))=x.$$

例 4 验证 $\arccos(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{3}$.

解 已知 $\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$, 把等式两边分别代入其反函数函数 $\arccos(\cdot)$, 等式始终成立.

$$\arccos(\cos(\frac{\pi}{3}))=\arccos(\frac{1}{2})$$

由定理 (1) 得证.

1.5 初等函数

三角函数

- 正弦函数 $y=\sin x$
- 余弦函数 $y=\cos x$
- 正切函数 $y=\tan x$
- 余切函数 $y=\cot x$
- 正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$
  - $\sec^2 x=\tan^2 x+1$
- 余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$
  - $\csc^2 x=\cot^2 x+1$

反三角函数

- 反正弦函数 $y=\arcsin x$ .... $x=\sin y$
  - $x\in[-1,1]$, $\quad y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
- 反余弦函数 $y=\arccos x$ .... $x=\cos y$
  - $x\in[-1,1]$, $\quad y\in[0,\pi]$
- 反正切函数 $y=\arctan x$ .... $x=\tan y$
  - $x\in(-\infty,+\infty)$, $\quad y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$
- 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ .... $x=\cot y$
  - $x\in(-\infty,+\infty)$, $\quad y\in(0,\pi)$

注　习惯上在三角形函数前缀 arc 表示反三角形函数, 而不用 f^{-1}.

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

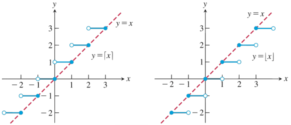
1. 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，等.
2. 对数函数 $y=\log_a x$；$y=\ln x$；
3. 幂函数 $y=x^n$；
4. 指数函数 $y=a^x$；$y=\mathrm{e}^x$；
5. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，等；
6. 常数值函数 $y=c$；

由六种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数，称为初等函数.

非初等函数举例

符号函数 $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$

取整函数 $y=[x]=n$, 当 $n\le x<n+1$, $n\in\mathbb{Z}$.



注　取整函数分向上，向下取整，例如 $x=2.9$ 向上取整为 3，向下取整为 2． 书本上指的是向下取整.

1.6　内容小结

内容小结

- 集合及映射的概念.
- 函数的定义及函数的三要素—定义域, 对应规则, 值域 .
- 函数的特性: 有界性, 单调性, 奇偶性, 周期性.
- 复合函数和反函数的定义, 以及反函数的测试方法.
- 基本初等函数 (反对幂指三常), 以及初等函数的结构.

本节完!