第六章・多元函数

第四节・全微分

■山东财经大学 ■田宽厚

4.1 全微分的定义

根据导数定义:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x).$$

由无穷小量与函数极限的关系 (章节 1.4 定理 1)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$

α 是自变量取极限过程中产生的无穷小量. 所以有

$$f'(x)\approx\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

当 Δx 很小, 且不等于零时, $f'(x)\approx\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 两边乘以 Δx.

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x.$$

$f'(x)\Delta x$ 称为微分, 记 dy 或 df:

$$dy=f'(x)\Delta x \quad 或 \quad df=f'(x)\Delta x$$

例如　对 x 微分得; $d(x)=(x)'\Delta x=1\Delta x=\Delta x$

$$\therefore dx=\Delta x$$

. . . .

定义　若 $y=f(x)$ 可导, 我们称函数的导函数 $f'(x)$ 与函数的增量 dx 的乘积为函数的微分, 记

$$dy=f'(x)dx \quad 或 \quad df=f'(x)dx$$

总结　有一元函数 $y=f(x)$, 其自变量的增量 dx 很小时, 函数的增量 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ 与函数的微分 $dy=f'(x)dx$ 之间的差很小.

由于函数是曲线, 当我们估计曲线在某点的增量 Δ 时, 若其自变量的增量 dx 很小, 我们可以用直线 $dy=f'(x)dx$ 去做估值. 也就是微积分中" 以直代曲"的思想.

这样, 把一元函数微分的定义延伸到二元函数 $z=f(x,y)$ 也就比较容易理解了.

可微

定义 1　如果函数 $z=f(x,y)$ 在定义域 D 内的点 (x,y) 处全增量 Δz 可用如下形式表示

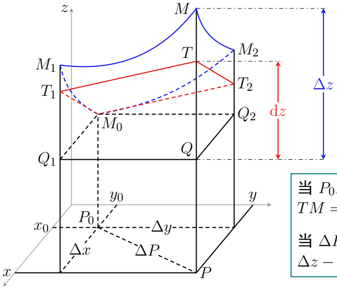
$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),\quad \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 Δx, Δy, 仅与 x,y 有关. 那么, 我们称函数在点 $(x,\ y)$ 处可微. 并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y$$

若函数在 D 内处处可微时, 则称此函数为 D 内的可微函数.

全微分的几何意义：以平代曲



当 $P_0P\to 0$ 时,
$TM=o(P_0P)$

当 $\Delta P\to 0$ 时,
$\Delta z-\mathrm{d}z=o(\Delta P)$

可微与连续之间的关系

当函数可微时:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\rho\to 0}[(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho)]=0$$

$$\text{得}\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y).$$

即

定理 1　函数在 (x,y) 点可微 ⇨ 函数在 (x,y) 点连续.

可微的必要条件

定理 2 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微, 则该函数在该点的偏导数 $A=\frac{\partial z}{\partial x}, B=\frac{\partial z}{\partial y}$ 存在, 且有全微分公式

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

其中 $\mathrm{d}x=\Delta x$，$\mathrm{d}y=\Delta y$.

可微的充分条件

定理 3 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微.

偏微分

类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如 设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial v}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$d_x u:=\frac{\partial u}{\partial x}dx$, $d_y u:=\frac{\partial u}{\partial y}dy$, $d_z u:=\frac{\partial u}{\partial z}dz$ 称为偏微分.

故有下述叠加原理

$$du=d_x u+d_y u+d_z u$$

例 1 求函数 $f(x,y)=e^{xy}$ 在点 $(1,\ 2)$ 处的全微分.

解 $f_x'(x,y)=ye^{xy}$, $\quad f_y'(x,y)=xe^{xy}$;

$f_x'(1,2)=2e^2$, $\qquad f_y'(1,2)=e^2$;

$$\therefore dz=f_x'(1,2)dx+f_y'(1,2)dy=2e^2dx+e^2dy.$$

例 2 求函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1,\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{y}{2} + ze^{yz},\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$= dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz.$$

4.2 全微分的应用

近似计算

函数 $z = f(x,\, y)$ 的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

函数 $z = f(x,\, y)$ 的全微分公式

$$dz = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

当 $|\Delta x|,\ |\Delta y|$ 很小时,

$$\Delta z \approx dz \tag{1}$$

我们有下列近似计算公式:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y \tag{2}$$

例 3 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解 设函数 $f(x,y) = x^y$, 则

$$f'_x(x,y) = yx^{y-1},\quad f'_y(x,y) = x^y\ln x$$

取 $x = 1, y = 2,\ \Delta x = 0.04, \Delta y = 0.02$. 则由式 (2), 得

原式 $= f(1.04, 2.02) \approx f(1,2) + f'_x(1,2)\Delta x + f'_y(1,2)\Delta y$

$= 1 + 2\times 0.04 + 0\times 0.02 = 1.08$

例 4　要造一个无盖的圆柱形水槽，其内半径为 2 米，高为 4 米，厚度 0.01 米，求需用材料多少立方米？

解　$V = \pi r^2 h$,　$\dfrac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$,　$\dfrac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$. 取 $r = 2, h = 4, \Delta r = \Delta h = 0.01$,

由式 (1)，得

$$\begin{aligned}\Delta V \approx dV &= 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h \\ &= 2\pi \times 2 \times 4 \times 0.01 + \pi \times 2^2 \times 0.01 = 0.2\pi\end{aligned}$$

即所需材料约为 0.2π 立方米.

4.3　内容小结

内容小结

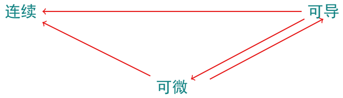
1. 全微分的定义
   - 定义; 记号; 几何意义
   - 二元函数 $z = f(x, y)$ 全微分公式

     $\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\mathrm{d}y$
   - 二元函数的性质关系; 定理 1, 2, 3
2. 近似计算公式:

   $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$

内容小结

一元函数的性质关系



内容小结

多元函数的性质关系

$$
\begin{tikzcd}
\text{连续} & & \text{偏导数存在} \\
& \text{可微} \arrow[ul, "\text{定理 }1"'] \arrow[ur, "\text{定理 }2"] & \\
& \text{偏导数连续} \arrow[u, "\text{定理 }3"'] &
\end{tikzcd}
$$

本节完!