第八章 · 常微分方程

第二节 · 一阶微分方程

山东财经大学　田宽厚

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$.

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量微分方程
2. 齐次微分方程
3. 一阶线性微分方程

2.1 可分离变量微分方程

(一) 可分离变量微分方程

形如

$$f(y)\,\mathrm{d}y=g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{或} \quad \frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$$

的方程称为可分离变量微分方程.

例如

- $\frac{dy}{dx}=x^2y^3$
- $\frac{dy}{dx}=y\ln x$
- $\frac{dy}{dx}=y^2\sin x$
- $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$

等式右边是两个不同自变量函数的乘机.

若已知可分离变量的微分方程 $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$. 两边除以 $g(y)$ 得

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx} = f(x)$$

两边给积分

$$\int \frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx$$

所以称其为可分离变量微分方程.

积分的结果 $y = y(x, C)$ 就是原方程的通解. 其中 C 为积分后出现的任意常数.

例 1 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2y$ 的通解.

解 分离变量得

$$\frac{dy}{y} = 3x^2dx \quad (y \neq 0)$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = x^3 + C_1.$$

即

$$y = \pm e^{x^3+C_1} = \pm e^{C_1}e^{x^3} = Ce^{x^3}.$$

易验证 $y = 0$ 也是方程的解 ($c = 0$), 但它不被包含在通解内. 此时称 $y = 0$ 为方程的奇解.

注 运算过程中可将 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$, 在最后的结果中, 用任意常数 c 进行调节, 补回用 y 代替 $|y|$ 造成的损失.

例 2 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的通解.

解 分离变量得

$$ydy = -xdx$$

两边积分

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c$$

即

$$x^2 + y^2 = c$$

是微分方程的通解.

注 微分方程的通解可以用隐函数表示.

例 3 已知放射性元素铀的衰变速度与当时未衰变原子的含量 M 成正比, 已知 $t = 0$ 时铀的含量为 M_0, 求在衰变过程中铀含量 $M(t)$ 随时间 t 的变化规律.

解 根据题意, 有 $\begin{cases} \dfrac{dM}{dt} = -\lambda M & (\lambda > 0) \\ M|_{t=0} = M_0 & (\text{初始条件}) \end{cases}$

$$\int \frac{dM}{M} = \int (-\lambda)dt \quad \Rightarrow \quad \ln M = -\lambda t + C$$

即 $M = Ce^{-\lambda t}$ 利用初始条件, 得 $C = M_0$ 故所求铀的变化规律为

$$M = M_0e^{-\lambda t}.$$

例 4 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时 $(t=0)$ 速度为 0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解 根据牛顿第二定律列方程 $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

初始条件为 $v|_{t=0}=0$

对方程分离变量, 然后积分: $\int\frac{dv}{mg-kv}=\int\frac{dt}{m}$ 得

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C$$

利用初始条件, 得 $C=-\frac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解

$$v=\frac{mg}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

2.2 齐次微分方程

(二) 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

例如

- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x-2y}{x+y}$
- $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2}{xy-x^2}$
- $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

注 次代表着函数中每一个独立项的指数，齐表示一样．函数是齐次的，即函数的每一个独立项的指数相等.

例如 $\left(xy-y^2\right)dx=\left(x^2-2xy\right)dy$ 函数的每一个独立项的指数都是 2.

进一步讲, 它可以转化成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy}$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1-2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

齐次微分方程的解法

1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$
2. 换元：令 $u=\frac{y}{x}$，则有 $y=xu$，
   从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u$．代入原方程得到
   $$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=f(u)$$
3. 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}u}{f(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$
4. 两边积分：得到通解，然后将 u 代回

例 5　求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解．

解　方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$．

- 令 $u=\dfrac{y}{x}$，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\tan u+u$．
- 分离变量，得到 $\cot u\,\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$．
- 两边积分，得到 $\ln|\sin u|=\ln|x|+C_0$．
- 整理等式，得到 $\sin u=Cx$，即 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$．

代入初始条件，得到 $C=\dfrac{1}{2}$，故特解为 $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$．

例 6　解微分方程 $\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$

解　方程变形为 $\dfrac{dy}{dx}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$．

- 令 $u=\dfrac{y}{x}$，得到 $u+x\dfrac{du}{dx}=2u-u^2$．
- 分离变量，得到 $\dfrac{du}{u^2-u}=-\dfrac{dx}{x}$，即
  $$\left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du=-\frac{dx}{x}$$
- 两边积分，得到 $\ln\left|\dfrac{u-1}{u}\right|=-\ln|x|+\ln|C|$．
- 整理等式，得到 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C$，即 $x(y-x)=Cy$.

2.3　一阶线性微分方程

线性微分方程

定义 1　若微分方程的因变量和其导数是一次幂，且互不相乘，则称该方程为线性方程，否则称为非线性方程.

(1) $y' + x^2 y = x$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

(3) $yy' + xy = 1$ ✗

(4) $\frac{dx}{dt} - x = t^2$ ✓

(5) $\frac{dy}{dt} + \cos y = 0$ ✗

(6) $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2\sin x$ ✓

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数，得到通解为（其中 $C = \pm \mathrm{e}^{C_0}$）

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{1}$$

例 7　求 $y' - 2xy = 0$ 得通解

解　$p(x) = -2x$ 故该一阶齐线性方程的通解为

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} = Ce^{-\int(-2x)dx} = Ce^{x^2}.$$

例 8　求解初值问题 $y' + y\sin x = 0, \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2$

解　先求此一阶齐线性方程的通解：$p(x) = \sin(x)$ 得

$$y = Ce^{-\int \sin x dx} = Ce^{\cos x}$$

将 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2$ 代入通解, 得 $C = 2$ 故该初值问题的解为

$$y = 2e^{\cos x}$$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 9　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1. 恒等变形：$xy' + y = x$
2. 合并左边：$(xy)' = x$
3. 两边积分：$xy = \frac{1}{2}x^2 + C$
4. 得到通解：$y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 10　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1. 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$
2. 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$
3. 两边积分：$\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$
4. 得到通解：$y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 11　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1. 恒等变形：$\mathrm{e}^x y' + \mathrm{e}^x y = \mathrm{e}^x$
2. 合并左边：$(\mathrm{e}^x y)' = \mathrm{e}^x$
3. 两边积分：$\mathrm{e}^x y = \mathrm{e}^x + C$
4. 得到通解：$y = 1 + C\mathrm{e}^{-x}$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

1. 恒等变形：$v(x)\,y' + p(x)v(x)\,y = q(x)v(x)$
2. 合并左边：$\big(v(x)\,y\big)' = q(x)v(x)$
3. 两边积分：$v(x)\,y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$
4. 得到通解：$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

问题　积分因子 $v(x)$ 是否一定存在？如何求出它？

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解　展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$，即 $p(x)\,v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
- 分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = p(x)\,\mathrm{d}x$
- 求解方程：$\ln v = \int p(x)\,\mathrm{d}x$，即 $v = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

注 1　公式已经包含了任意常数，因此计算积分时不需要再加上任意常数.

注 2　若 $\int p(x)\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$，则代入公式时去掉绝对值号不影响结果.

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

则方程的通解为

$$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right) \tag{2}$$

一阶线性微分方程的通解

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

即

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

齐次方程通解　　非齐次方程特解

例 12　求 $y' - 2xy = e^{x^2}\cos x$ 得通解

解　因为 $p(x) = -2x,\quad q(x) = e^{x^2}\cos x.$
根据非齐次方程解公式 (2)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

所以，方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int(-2x)dx}\left(\int e^{x^2}\cos x e^{\int(-2x)dx}dx + C\right) \\ &= e^{x^2}\left(\int e^{x^2}\cos x e^{-x^2}dx + C\right) \\ &= e^{x^2}\left(\int \cos x dx + C\right) \\ &= e^{x^2}(\sin x + C) \end{aligned}$$

例 13　求方程 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x+y^3}$ 的通解

解　不是线性方程. 原方程可以改写为 $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{y}x = y^2$ 这是一个以 y 为自变量的一阶非齐线性方程，其中

$$p(y) = -\frac{1}{y},\quad q(y) = y^2$$

故原方程的通解为 $x = e^{-\int p(y)dy}\left(\int q(y)e^{\int p(y)dy}dy + C\right)$

$$\begin{aligned} &= e^{-\int -\frac{1}{y}dy}\left(\int y^2 e^{\int -\frac{1}{y}dy}dy + C\right) \\ &= \frac{1}{2}y^3 + Cy \end{aligned}$$

2.4　伯努利方程

伯努利方程

形如

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$$

的方程称为伯努利方程. 当 $n = 0, 1$ 时, 方程变为一阶线性微分方程.

解　方程两边除以 y^n 得,

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

容易看出, $\frac{d}{dx}(y^{1-n}) = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ 与上式第一项只差一个常数因子 $1-n$, 因此上式两边乘以 $(1-n)$.

伯努利方程

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x) \qquad (3)$$

令 $u=y^{1-n}$, 则 $\dfrac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$

将其代入 (3) 后，可将其化为一阶线性微分方程

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

求方程通解后, 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例 14 求方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解 方程两边除以 y^2 得,

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\cdot y^{-1}=a(\ln x)$$

令 $u=y^{-1}$, 则

$$\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$$

化为一阶线性非齐次微分方程

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=-a\ln x$$

$$\frac{du}{dx}-\frac{u}{x}=-a\ln x$$

. . . .

由 (2) 得其通解为

$$u=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$u=x\left[\int -a\frac{\ln x}{x}dx+C\right] \qquad \text{由换元法, 设 } u=\ln x$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $u=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解: $yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$.

例 15 求方程 $y'-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ 的通解.

解 令 $z=y^{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{y}$, 则

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y}\frac{dz}{dx}$$

代入原方程, 得一阶线性非齐次微分方程

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

. . . .

由 (2) 得其通解为

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{2}{x}dx}\left(\int \frac{x}{2}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx+c\right) \\ &= x^2\left(\int \frac{1}{2x}dx+c\right)=x^2\left(\frac{1}{2}\ln|x|+c\right) \end{aligned}$$

于是, 原方程的通解为

$$y=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+c\right)^2$$

2.5 内容小结

内容小结

- 一阶微分方程：
  1. 可分离变量微分方程 $y'=f(x)\cdot g(y)$
  2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$; 其中次代表着函数中每一个独立项的指数，齐表示一样.
  3. 一阶线性微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$.
     - 若 $q(x)\equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
     - 若 $q(x)\not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程
     - 伯努利方程: $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$

- 可分离变量方程的求解方法:
  1. 分离变量后积分;
  2. 根据定解条件确定常数.
- 齐次微分方程的求解方法:
  1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$;
  2. 换元：令 $u=\frac{y}{x}$，通过换元将方程转化为可分离变量微分方程;
  3. 解可分离变量微分方程;
  4. 将 $u=\frac{y}{x}$ 代回.

- 一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 通解:

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

- 一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 通解:

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

- 伯努利方程 $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1)$
令 $u = y^{1-n}$, 化为线性方程求解.

- 注意用变量代换将方程化为已知类型的方程;
例如, 解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

例如　解方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$

解法 1　取 y 作自变量 $\frac{dx}{dy} = x + y$ 线性方程

解法 2　作变换 $u = x + y$, 则 $y = u - x$, $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$, 代入原方程得 $\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u+1}{u}$ 可分离变量方程.

练习

$x\frac{dy}{dx} + y = xy\frac{dy}{dx}$	$\Rightarrow$	$\frac{y-1}{y}dy = \frac{dx}{x}$	可分离变量方程
$x\frac{dy}{dx} = y(\ln y - \ln x)$	$\Rightarrow$	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$	齐次方程
$\left(y - x^3\right)dx - 2xdy = 0$	$\Rightarrow$	$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}y = -\frac{x^2}{2}$	一阶线性非齐次方程
$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(y-2x)}$	$\Rightarrow$	$\frac{dx}{dy} = y^2 - 2xy$	一阶线性非齐次方程
$(y\ln x - 2)ydx = xdy$	$\Rightarrow$	$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$	伯努利方程

本节完!