第六章・多元函数

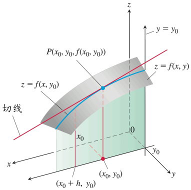
第三节・偏导数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

3.1 一阶偏导数

偏导数

若 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 在定义域内一点, 垂直平面 $y = y_0$ 将在曲线 $z = f(x, y_0)$ 中切割曲面 $z = f(x, y)$.



问题: 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的导函数如何求?

这里, 水平坐标为 x; 垂直坐标为 z; y 值在 y_0 处保持不变.

偏导数

一维空间中, 根据导数定义, 若

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{存在}$$

则称此极限值为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处关于 x 的导数.

在二维空间中, 若求 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处关于 x 的 “导数”, 也就是在 (x_0, y_0) 点固定 $y = y_0$, 对函数 $f(x, y) = f(x, y_0) = f(x)$ 求导 x. 需

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad \text{存在.}$$

偏导数

定义 1 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数．类似地定义函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

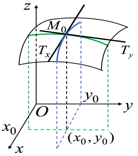
偏导数

注 我们称多元函数的“导数”为偏导数，为了区分偏导数和普通导数，我们用符号 ∂ 而不是先前使用的 d.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x,y_0\right)-f\left(x_0,y_0\right)}{\Delta x}=\left.\frac{d}{dx}f\left(x,y_0\right)\right|_{x=x_0}$$

对多元函数求关于某一个自变量的偏导数时，只需视其它变量为常数，根据一元函数的求导公式和求导法则，求导即可.

二元函数偏导数的几何意义



二元函数偏导数

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

分别是曲线

$$\begin{cases} z=f(x,y)\\ y=y_0\end{cases},\quad \begin{cases} z=f(x,y)\\ x=x_0\end{cases}$$

在点 M_0 处的切线 M_0T_x 和 M_0T_y 对 x 和 y 轴的斜率.

偏导数的计算

求函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的偏导数通常有三种解法：

解法 1 直接按定义计算.

解法 2 先求出 $f'_x(x,y)$，后代入 (x_0,y_0).

解法 3 先代 y_0 进原函数，再求 $f'_x(x,y_0)|_{(x=x_0,y=y_0)}$.

例 1 求函数 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点 $(1, 2)$ 处的偏导数.

解 先求后代法: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

先代后求法:

$$z|_{y=2} = x^2 + 6x + 4, \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = (2x+6)|_{x=1} = 8.$$

$$z|_{x=1} = 1 + 3y + y^2, \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = (3+2y)|_{y=2} = 7.$$

偏导函数

定义 2 设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 x 的偏导数都存在, 则有对 x 的偏导函数

$$f'_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

类似地, 设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 y 的偏导数都存在, 则有对 y 的偏导函数

$$f'_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

注 在不至于混淆时, 可把偏导函数简称为偏导数.

偏导函数

关于 $z = f(x,y)$, 将 y 看为常数, 对 x 求导, 得到 z 对 x 的偏导数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 关于 $z = f(x,y)$, 将 x 看为常数, 对 y 求导, 得到 z 对 y 的偏导数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$,

例 2 求函数 $f(x,y) = e^{xy} + x^2 y$ 的偏导数.

解

$$f'_x(x,y) = (e^{xy})'_x + \left(x^2 y\right)'_x = y e^{xy} + 2xy,$$

$$f'_y(x,y) = (e^{xy})'_y + \left(x^2 y\right)'_y = x e^{xy} + x^2.$$

例 3 设 $z = x^y\,(x > 0,\ x \neq 1)$, 求证 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$

解 $\because \dfrac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$

$$\therefore \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = x^y + x^y = 2z$$

例 4 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$, (R 为常数). 求证: $\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1.$

解
$$p = \frac{RT}{V}, \quad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$$
$$V = \frac{RT}{p}, \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{p}$$
$$T = \frac{pV}{R}, \quad \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{V}{R}$$
$$\therefore \frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{RT}{pV} = -1.$$

说明 偏导数记号是一个整体记号, 和导数不同, 不能看作分子与分母的商!

例 5 求函数 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数

解
$$f_x(0,0) = \frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0} = 0.$$
$$f_y(0,0) = \frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0} = 0.$$

$\therefore f(x,y)$在 $(0,0)$ 处的偏导数存在.

注 虽然该函在 $(0,0)$ 处的偏导数存在, 然而在点 $(0,0)$ 极限不存在 (6.2 例 4), 故函数在点 $(0,0)$ 处不连续.

三元函数的偏导数

注 一元函数可导必连续, 然而多元函数在某点各偏导数都存在, 但在该点不一定连续.

- 一元: 函数可导可连续.
- 二元: 函数可偏导不一定连续!

类似地, 关于三元函数 $u = f(x,y,z)$, 可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

例 6　求三元函数 $u=\sin\left(x+y^2-e^z\right)$ 的偏导数.

解　$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\left(x+y^2-e^z\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\cos\left(x+y^2-e^z\right)\cdot\left(x+y^2-e^z\right)'_y$$

$$=2y\cos\left(x+y^2-e^z\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\left(x+y^2-e^z\right)\cdot\left(x+y^2-e^z\right)'_z$$

$$=-e^z\cos\left(x+y^2-e^z\right).$$

3.2 高阶偏导数

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y, 按求导顺序不同再求偏导数, 就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x=z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x=f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y=z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y=f''_{xy}$
- $(z'_y)'_x=z''_{yx}$ 或 $(f'_y)'_x=f''_{yx}$
- $(z'_y)'_y=z''_{yy}$ 或 $(f'_y)'_y=f''_{yy}$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$

例 7 求函数 $z = e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{x+2y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x+2y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2\mathrm{e}^{x+2y}$;

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{x+2y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\mathrm{e}^{x+2y}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2\mathrm{e}^{x+2y}$;

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = 2\mathrm{e}^{x+2y}.$$

注 此处 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 但这一结论并不总成立.

例如 $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时:

$$f_x(x,\, y) = y\frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,\, y) = x\frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy}(x,\, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_x(0,\Delta y) - f_x(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\Delta y}{\Delta y} = -1$$

$$f_{yx}(x,\, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_y(\Delta x,0) - f_y(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

定理 当二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 都连续时, 两者必定相等.

本定理对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如 对三元函数 $u = f(x,y,z)$, 当三阶混合偏导数在点 (x,y,z) 连续时, 有

$$f_{xyz} = f_{yzx} = f_{zxy} = f_{xzy} = f_{yxz} = f_{zyx}$$

说明 因为初等函数的偏导数仍为初等函数, 而初等函数在其定义区域内是连续的, 故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

3.3 内容小结

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论
   - 定义; 记号; 几何意义
   - 函数偏导数存在 $\nRightarrow$ 函数在此点连续
   - 混合偏导数连续 $\Rightarrow$ 与求导顺序无关
2. 偏导数的计算方法
   - 求一点处偏导数的方法: 先代后求, 先求后代, 利用定义.
   - 求高阶偏导数的方法-逐次求导法 (与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序).

本节完!