第六章・多元函数

第六节・二元函数的极值

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

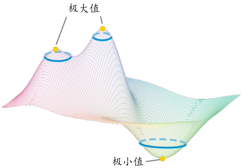
6.1 极值的导数验证方法

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

1. 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有
$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$
称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.
2. 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有
$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$
称 (x_0, y_0) 为极小值点，$f(x_0, y_0)$ 为极小值.

极值和极值点



注

- 极大值和极小值统称极值.
- 极大值点和极小值点统称极值点.
- 函数的极值是函数的局部性质;

导数验证方法 1

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零或都不存在的点称为驻点.

说明　课本只定义导数为零的点是驻点.

注　若函数定义在闭区域, 那么函数极值点可能在驻点和边界取得, 这里统称驻点及边界点为可疑极值点.

例 1　求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-4y+9$ 的极值.

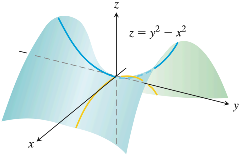
解　函数的定义域是整个平面, 且无界. 偏导数是连续的. 函数极值点只能存在于

$$f'_x(x_0,y_0)=2x=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=2y-4=0.$$

解得 $(0,2)$, 极值为 $f(0,2)=5$.
由于 $f(x,y)=x^2+(y-2)^2+5$ 大于 5. 所以点 $(0,2)$ 是极小值点, 5 是极小值.

定理1的不足

个别情况下, 在定义域的内点上 $f'_x=f'_y=0$ 无法保证函数 f 有极值. 例如 $f(x,y)=y^2-x^2$, 驻点 $(0,0)$ 不是极值点.



导数验证方法 2

定理 2 (极值的充分条件)　设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续二阶偏导数，且 $f'_x(x_0,y_0)=0$, $f'_y(x_0,y_0)=0$.令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$.

(1) 如果 $B^2-AC<0$，且
- $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 如果 $B^2-AC=0$，则无法判断极值点.

注　结论 (1) 中的 A 换为 C 结论不变.

例 2 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解 函数在整个平面上有定义，没有边间点. 因此可疑极值点是 $f'_x=f'_y=0$ 的点.

解方程组 $\begin{cases} f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

求二阶偏导数

$$f''_{xx}=6x+6,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{yy}=-6y+6.$$

极值的导数验证方法

$$f''_{xx}=6x+6,\quad f''_{xy}=0,\quad f''_{yy}=-6y+6.$$

在点 $(1,0)$ 处, $A=12,B=0,C=6$

$B^2-AC=-72<0,A=12>0$, 有极小值 $f(1,0)=-5$

在点 $(1,2)$ 处, $A=12,B=0,C=-6$

$B^2-AC=72>0$, 无极值.

在点 $(-3,0)$ 处, $A=-12,B=0,C=6$

$B^2-AC=72>0$, 无极值.

在点 $(-3,2)$ 处, $A=-12,B=0,C=-6$

$B^2-AC=-72<0,A=-12<0$, 极大值 $f(-3,\,2)=31$.

6.2 在闭区域的最值问题

最值问题

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, $P\left(x_0,y_0\right)\in D$, 对于区域 D 内任一点 (x,y), 若恒有不等式

$$f(x,y)\leq f\left(x_0,y_0\right)\quad (\text{或}\quad f(x,y)\geq f\left(x_0,y_0\right))$$

则称 $f\left(x_0,y_0\right)$ 为该函数在 D 上的最大值(或最小值). 最大值与最小值统称为最值. 使函数取得最值的点统称为最值点.

最值问题

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内可微分，且只有有限个使得导数为零的点．则它在 D 上的最值只可能出现在

1 驻点

2 边界上的点

. . . .

在很多实际问题中，最值一定存在，并在 D 内部取得．此时若驻点唯一，且不是偏导数不存在的点, 则该驻点就是最值点．

例 3　某厂要用铁板做成一个体积为 8 立方米的有盖长方体水箱. 问怎样选择尺寸, 才能使所用的材料最省？

解　设水箱的长、宽、高分别为 x, y, z 米, 则由体积 $V = xyz$, 可得

$$z = \frac{V}{xy} = \frac{8}{xy}$$

水箱所用材料即水箱表面积

$$S = 2(xy + yz + zx) = 2\left(xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}\right)$$

其定义域为 $D = \{(x,y)|x > 0, y > 0\}$.

$$S = 2(xy + yz + zx) = 2\left(xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}\right)$$

令

$$S'_x = 2\left(y - \frac{8}{x^2}\right) = 0, \quad S'_y = 2\left(x - \frac{8}{y^2}\right) = 0.$$

得唯一驻点 $(2, 2)$.

根据实际问题, S 一定存在最小值. 因此, 当 $x = 2$ 米, $y = 2$ 米, $z = 2$ 米时, 表面积 S 取得最小值 24 平方米.

即当水箱的长、宽、高相等时，所用材料最省.

例 4　某工厂生产两种产品, 产量分别为 Q_1 和 Q_2 时, 总成本函数是 $C = Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2 + 5$, 两种产品的需求函数分别是

$$Q_1 = 26 - P_1, \quad Q_2 = 10 - \frac{1}{4}P_2$$

为使利润最大, 试确定两种产品的产量及最大利润.

解　由需求函数得 $P_1 = 26 - Q_1, \quad P_2 = 40 - 4Q_2$.
由此得总收益函数

$$\begin{aligned} R = R(Q_1, Q_2) &= P_1Q_1 + P_2Q_2 \\ &= (26 - Q_1)Q_1 + (40 - 4Q_2)Q_2 \\ &= 26Q_1 + 40Q_2 - Q_1^2 - 4Q_2^2 \end{aligned}$$

则利润函数

$$L(Q_1,Q_2)=R-C=26Q_1+40Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-5Q_2^2-5$$

其中, $0\le Q_1\le 26, 0\le Q_2\le 10$.

令 $\begin{cases}\frac{\partial L}{\partial Q_1}=26-4Q_1-2Q_2=0\\ \frac{\partial L}{\partial Q_2}=40-10Q_2-2Q_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Q_1=5\\ Q_2=3\end{cases}$

依题意, 该问题应有最大利润, 而函数有唯一驻点 $(5,\,3)$. 所以, $L(5,\,3)=120$ 是函数 $L(Q_1,\,Q_2)$ 的最大值. 即当两种产品的产量分别为 5 和 3 时, 可获得最大利润, 最大利润为 120.

6.3 条件极值与拉格朗日乘数法

条件极值

在讨论函数 $f(x,\,y)$ 的极值问题时, 如果自变量除了限制在函数的定义域内以外, 不受其他条件约束, 此时的极值称为无条件极值, 简称极值.

如果自变量在函数的定义域内取值时, 还要满足一定的附加条件 - 称为约束条件, 这时所求的极值称为条件极值.

例如　求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的极大值.由于定义域存在且 $D:=\left\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\right\}$.这是无条件极值问题, 易知点 $(0,\,0)$ 是极大值点, 极大值 $f(0,\,0)=1$.

例如　求函数 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在条件

$$g(x,y)=x+y-1=0$$

下的极大值. 这里多了一个附加条件, 这是条件极值问题.

拉格朗日乘数法 I

问题　求函数 $z = f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y) = 0$ 下的极值.

解法 1　把约束条件代入函数, 代入原函数, 转化为求一元函数的无条件极值问题.

解法 2　设引入辅助函数 $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$，

则极值点满足: $\begin{cases} L'_x(x,\,y) = f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ L'_y(x,\,y) = f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda(x,\,y) = g(x,y) = 0 \end{cases}$

消去 λ，解得的 (x,y) 即为极值可疑点.

辅助函数 L 称为拉格朗日（Lagrange）函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法, λ 称为拉格朗日乘数.

例 5　求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

解　设长方体的长、宽、高分别为 x, y, z, 则问题变为在约束条件 $g(x,y,z) = 2xy + 2yz + 2xz - a^2 = 0$ 下, 求函数 $V = xyz$ 的最大值.

作拉格朗日函数:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(2xy + 2yz + 2xz - a^2\right)$$

作拉格朗日函数:

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(2xy + 2yz + 2xz - a^2\right)$$

联立

$$\begin{cases} L'_x = yz + 2\lambda(y+z) = 0 \\ L'_y = xz + 2\lambda(x+z) = 0 \\ L'_z = xy + 2\lambda(y+x) = 0 \\ L'_\lambda = 2xy + 2yz + 2xz - a^2 = 0 \end{cases}$$

解得 $x=y=z=\frac{\sqrt{6}}{6}a$. 此为唯一可能的极值点, 而该问题存在最大值, 所以最大值就在该点取得, 即在表面积为 a^2 的长方体中, 长、宽、高均为 $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ 时, 体积最大, $V=\frac{\sqrt{6}}{36}a^3$.

例 6 求由一定点 (x_0,y_0,z_0) 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 最短距离.

解 设 (x,y,z) 为平面上的一点, 点 (x_0,y_0,z_0) 到点 (x,y,z) 的距离

$$d=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

问题可归结为: 在约束条件 $Ax+By+Cz+D=0$ 下, 求 d^2 的最小值.

作拉格朗日函数:

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \\ +\lambda(Ax+By+Cz+D) \end{aligned}$$

联立

$$\begin{cases} L'_x=2(x-x_0)+\lambda A=0 \\ L'_y=2(y-y_0)+\lambda B=0 \\ L'_z=2(z-z_0)+\lambda C=0 \\ L'_\lambda=Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

得 $d^2=\frac{\lambda^2}{4}\left(A^2+B^2+C^2\right)$;

$$\lambda=\frac{2\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)}{A^2+B^2+C^2}.$$

故所求距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

例 7 销售量 Q 与用于两种广告手段的费用 x 和 y 之间的函数关系为

$$Q=\frac{200x}{5+x}+\frac{100y}{10+y}$$

利润是销售量的 $\frac{1}{5}$ 减去广告成本, 而广告预算是 25 万元, 试确定如何分配两种手段的广告成本, 以使利润最大?

解 由题意知，利润函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{5}Q-(x+y)=\frac{40x}{5+x}+\frac{20y}{10+y}-x-y$$

所求问题即为: 在约束条件 $x+y=25$ 下, 求 $f(x,\,y)$ 的最大值点.

解 1: 作拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{40x}{5+x}+\frac{20y}{10+y}-x-y+\lambda(x+y-25).$$

解方程组

$$\begin{cases} L'_x=\frac{200}{(5+x)^2}-1+\lambda=0\\ L'_y=\frac{200}{(10+y)^2}-1+\lambda=0\\ L'_\lambda=x+y-25=0\end{cases}$$

得 $x=15,\ y=10$. 此唯一驻点即为最大值点.

即两种手段的广告成本分别为 15 万元、10 万元时, 利润最大.

解 2: 将条件极值转化为无条件极值计算

由 $x+y=25$, 得 $y=25-x$，代入 $f(x,y)$, 得利润是 x 的一元函数

$$f(x)=\frac{40x}{5+x}+\frac{500-20x}{35-x}-25,\quad x\in[0,25]$$

令

$$f'(x)=\frac{200}{(5+x)^2}+\frac{-200}{(35-x)^2}=0,$$

得唯一驻点 $x=15$.

又 $f''(15)<0$, 故 $f(x)$ 在 $x=15$ 处取得极大值, 同时也是最大值.

此时 $y=10$.

拉格朗日乘数法 II

问题 求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法 令

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z).$$

由下面方程组

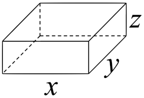
$$\begin{cases} L'_x(x,y,z)=0,\quad L'_y(x,y,z)=0,\quad L'_z(x,y,z)=0\\ g(x,y,z)=0,\quad h(x,y,z)=0\end{cases}$$

消去 λ 和 μ，解得的 (x,y,z) 即为极值可疑点.

例 8　要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解　设 x, y, z 表示长、宽、高, 则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda\,(xyz - V_0)$



$$\begin{cases} F'_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F'_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F'_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F'_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}, \lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$ 长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.

6.4　内容小结

内容小结

1. 函数的极值问题
   - 极值的必要条件, 定理1.
   - 极值的充分条件, 定理2.
2. 函数在闭区域的最值问题
   - 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件);
   - 比较驻点及边界点上函数值的大小, 或根据问题的实际意义确定最值
3. 函数的条件极值问题
   - 简单问题用代入法;
   - 一般问题用拉格朗日乘数法.

本节完!