第八节 · 二重积分的计算

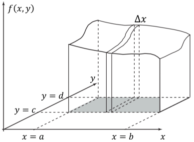
■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

8.1 用直角坐标计算二重积分

立体体积公式 (章节 5.3)

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

其中 $A(x)$ 是平行于 y 轴的横截面面积.

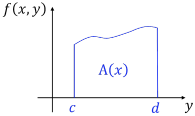


问题　如何求 $A(x)$?

分析　若站在上图物体的右侧且平行于 x 轴, 我们只能看到物体一个面, 如下图:

当 x 固定时, $f(x,y)$ 被当做自变量为 y 的一元函数, 由其在区间 $[c,d]$ 上的定积分, 得

$$A(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$



所以得立体体积公式

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b A(x)\,dx \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

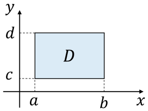
Fubini 定理

定理 1 如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \Big\{(x,y)\Big| a \le x \le b, c \le y \le d\Big\},$$

当函数 $f(x,\,y)$ 在 D 上连续, 则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx$$



例 1 若 $D = \{(x,\,y)|0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$,

求 $\iint\limits_{D} 100 - 6x^2y\,dA$.

解

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_0^2 \left(100 - 6x^2y\right) dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[100x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} (200 - 16y)dy$$

$$= \left[200y - 8y^2\right]_{-1}^{1} = 400$$

用直角坐标计算二重积分

解法 2:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_{-1}^{1} \left(100 - 6x^2y\right) dydx$$

$$= \int_0^2 \left[100y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(100 - 3x^2\right) - \left(-100 - 3x^2\right)\right] dx$$

$$= \int_0^2 200dx = 400$$

可分离变量函数

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \Big\{(x,y)\Big| a \le x \le b, c \le y \le d\Big\},$$

而且被积函数 $f(x,y)$ 可分离变量，即

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

则二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

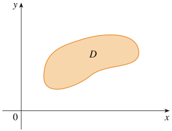
不规则区域中的二重积分

在直角坐标中，我们有 $dA = dxdy$，从而有

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

若 D 是矩形区域可用 Fubini 定理求解二重积分.

问题 1　若积分区域 D 是不规则区域.

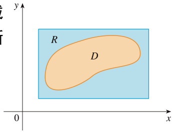


$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = ?$$

不规则区域中的二重积分

假设积分区域 D 包含在矩形积分区域 R 里, 则在定义域 $R = D \cup D^c$ 上的新函数 $F(x,y)$ 可定义为

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{当}(x,y) \in D \\ 0 & \text{当}(x,y) \in D^c \end{cases}$$



若 F 在 R 上可积,

$$\iint_R F(x,y)dA = \iint_D F(x,y)dA + \iint_{D^c} F(x,y)dA = \iint_D f(x,y)dA$$

则函数 f 在 D 上的二重积分为

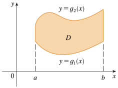
$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA \tag{1}$$

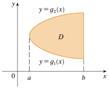
X 型积分区域

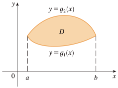
如果区域 D 位于两条关于 x 的连续函数曲线之间, 即

$$D = \left\{(x,y)\middle| a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$$

其中 g_1, g_2 为在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 则称 D 为 X 型区域.



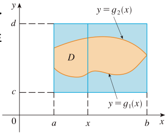




X 型区域的二重积分

当积分区域 D 为 X 型时, 若构造一个可以包含 D 的形区域 R, 则在 R 上存在一个函数

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{当}(x,y) \in D \\ 0 & \text{当}(x,y) \in D^c \end{cases}$$



根据 (1) 和 Fubini 定理,

$$\iint_D f(x,y)dA = \iint_R F(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dydx$$

当 $y < g_1(x)$ 或 $y > g_2(x)$ 时, $F(x,y) = 0$

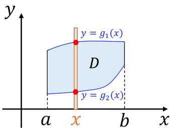
$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,dydx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dydx$$

X 型区域的二重积分

若积分区域 D 为 X 型时

$D = \left\{(x,y) \middle| a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)\right\}$

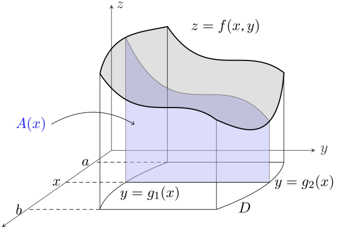
$f(x,\, y)$ 在 D 的二重积分为



$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right] dx.$$

- X 型区域的二重积分顺序: 先 y 后 x, 先内后外;
- 二重积分的外层积分上下限必为常量.

$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x$$

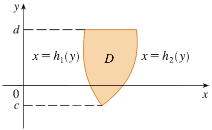


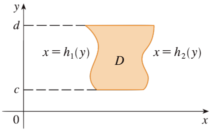
Y 型积分区域

如果区域 D 位于两条关于 y 的连续函数曲线之间, 即

$$D = \left\{(x,y) \middle| c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$$

其中 h_1, h_2 为在闭区间 $[c,d]$ 上的连续函数. 则称 D 为 Y 型区域.



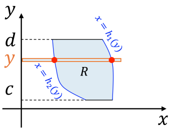


Y 型区域的二重积分

若积分区域 D 为 Y 型时

$D = \left\{(x,y) \middle| c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)\right\}$

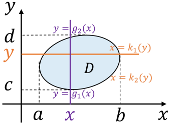
$f(x,\, y)$ 在 D 的二重积分为



$$\iint\limits_D f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)dx\right] dy.$$

- Y 型区域的二重积分顺序: 先 x 后 y, 先内后外;
- 二重积分的外层积分上下限必为常量.

若积分区域既是 X 型区域又是 Y 型区域 (如矩形区域).

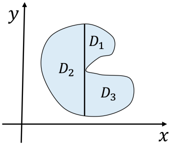


则有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

$$= \int_c^d \left[\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

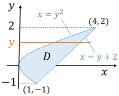
若积分域较复杂, 可将它分成若干 X 型域或 Y 型域.



则有

$$\iint\limits_D = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} + \iint\limits_{D_3}$$

例 2 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,dxdy$ 其中 D 是是由抛物线 $y^2 = x$ 及直线 $y = x - 2$ 所围成的闭区域.



解 若将 D 看做 Y 型区域, 则有

$$D = \left\{(x,y)|y^2 \le x \le y+2, -1 \le y \le 2\right\}$$

$$\iint\limits_D xydxdy = \int_{-1}^{2}\int_{y^2}^{y+2} xydx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{2} \frac{1}{2}y\left[(y+2)^2 - y^4\right] dy = \frac{45}{8}$$

若看做 X 型区域, 计算较为复杂, 但答案相同.

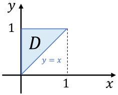
选择积分次序的原则

- 积分区域: 尽量避免分块;
- 被积函数: 第一次积分易积.

习惯上, 如果一个连续函数的原函数不能用初等函数表达出来, 这函数是"积不出"的函数.

- $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$
- $\int \frac{x^n}{\ln x}\,dx$
- $\int \frac{\cos x}{x}\,dx$
- $\int e^{ax^2}\,dx \quad (a \ne 0)$

例 3 计算 $\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy$, 其中 D 是由直线 $x=0$, $y=1$, $y=x$ 围成的区域.



解 如图, 若将 D 看做 X 型区域, 则

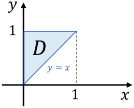
$$R=\{(x,y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}.$$

$$\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1\left(\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^2\left(\int_x^1 e^{-y^2}dy\right)dx \quad \text{不可积.}$$

然而, 若将 D 看做 Y 型区域, 则

$$D=\{(x,y)|0\le x\le y, 0\le y\le 1\}.$$

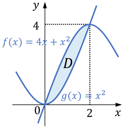


$$\iint_D x^2e^{-y^2}dxdy=\int_0^1\int_0^y x^2e^{-y^2}dx\,dy$$

$$=\int_0^1 e^{-y^2}\cdot\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^y dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}dy=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

例 4 应用二重积分, 求在 xOy 平面上由 $y=x^2$ 与 $y=4x-x^2$ 所围的区域 D 的面积.



解 $D=\left\{(x,y)|0\le x\le 2, x^2\le y\le 4x-x^2\right\}.$

$$A=\iint_D dxdy=\int_0^2\int_{x^2}^{4x-x^2}dy\,dx=\int_0^2\left(4x-2x^2\right)dx=\frac{8}{3}$$

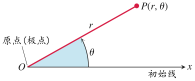
解 2: 定积分的应用 (章节 5.4)

$$A=\int_0^2 f(x)-g(x)\,dx=\int_0^2\left(4x-x^2-x^2\right)dx=\frac{8}{3}.$$

8.2 用极坐标计算二重积分

极坐标

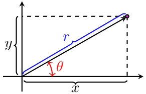
我们首先在平面上选定一点, 称为极点, 并标记为 O. 然后我们画一条从 O 出发的初始线(或极轴). 这条射线水平指向右, 对应直角坐标的 x 轴.



那么每个点都可以用 (r,θ) 定位, 称为极坐标. 记 $P(r,\theta)$.
其中 r 表从 O 到 P 的有向距离, 而 θ 表从初始射线到射线 OP 的角度.

用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x,y) 和极坐标 (r,θ) 的关系为

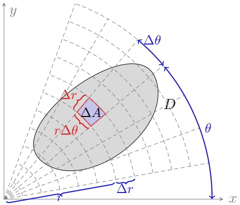


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易. 此时

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr\,\mathrm{d}\theta$$



$\Delta A \approx \Delta r \cdot r\Delta\theta$

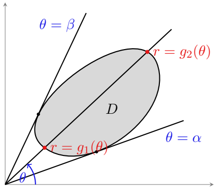
⇨ $\Delta A \approx r \cdot \Delta r \cdot \Delta\theta$

⇨ $dA = rdr\,\mathrm{d}\theta$

极点 O 在区域 R 之外

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) rdr\right] \mathrm{d}\theta$$

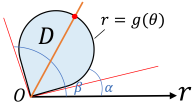


用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围
2. 再求 r 的函数

$$D = \left\{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)\right\}$$

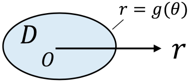
极点 O 在区域 D 的边界上



$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\alpha\le\theta\le\beta,0\le r\le g(\theta)\right\}.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{g(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

极点 O 在区域 D 的内部



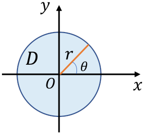
$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le g(\theta)\right\}.$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{g(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$$

例 5 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}dxdy$, $D=\{(x,\ y)|x^2+y^2\le a^2\}$.

解 由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数, 故本题无法用直角坐标计算. 在极坐标系中,

$$D=\{(r,\theta)|0\le\theta\le 2\pi,0\le r\le a\}.$$

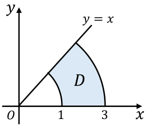


$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy&=\iint\limits_D e^{-r^2}rdrd\theta\\&=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-a^2}\right)d\theta\\&=\pi\left(1-e^{-a^2}\right).\end{aligned}$$

例 6 求 $\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$, D 为圆周 $x^2+y^2=9$ 和 $x^2+y^2=1$ 与直线 $y=x,y=0$ 所围成的第一象限部分.

解 在极坐标系下,

$$D=\left\{(r,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},1\le r\le 3\right\}$$

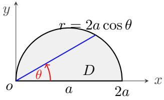


$$\begin{aligned}\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy&=\iint_D \theta\cdot rdrd\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_1^3\theta rdr\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\theta d\theta=\frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

例 7 求 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，$D$ 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 与直线 $y=0$ 所围成的第一象限部分.

解 在极坐标系下，

$$D=\left\{(r,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2a\cos\theta\right\}$$

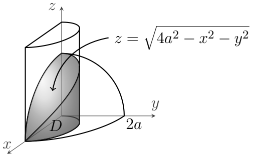


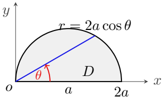
$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_D r^2drd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2dr$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos^3\theta d\theta=\frac{16}{9}a^2.$$

例 8 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.

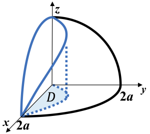




$$x^2+y^2=2ax\Rightarrow(x-a)^2+y^2=a^2$$

解 $x^2+y^2=2ax\Rightarrow r=2a\cos\theta$

$$D=\left\{(r,\theta)|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le r\le 2a\cos\theta\right\}$$



$$V=4V_1=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dA$$

$$=4\iint\limits_D\sqrt{4a^2-r^2}\cdot rdrd\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}rdr$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

注 下面几种情况，通常利用极坐标计算二重积分比较简单

- 当积分区域 D 为圆域或圆域的一部分，或者被积函数为

$$f\left(x^2+y^2\right),f\left(\frac{x}{y}\right),f\left(\frac{y}{x}\right)$$

  等形式时.

- 被积函数在直角坐标系不可积时.

例 9 把直角坐标系转化成极坐标. 其中 $a>0$;

(1) $\left\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\right\}$; (2) $\left\{(x,y)|x^2+y^2\le 2x\right\}$;

解 (1) 已知 $x^2+y^2\le a^2$, $(0,0)$ 为原点, 半径为 a 的圆域.
因此 $0\le r\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$,
$D=\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le a,0\le\theta\le 2\pi\}$
(2) $x^2+y^2\le 2x\Rightarrow(x-1)^2+y^2\le 1$ $(1,0)$ 为原点, 半径为 1 的圆域. 该区域覆盖第一四象限, 所以 $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

$$x^2+y^2\le 2x\ \Rightarrow r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\le 2r\cos\theta$$

$\therefore r\le 2\cos\theta$

$$D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le 2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

例 10 把直角坐标系转化成极坐标.

(3) $\left\{(x,y)|a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}$, $0<a<b$;
(4) $\{(x,y)|0\le y\le 1-x,0\le x\le 1\}$.

解 (3) 已知 $a^2\le x^2+y^2\le b^2$, $(0,0)$ 为原点, 半径为 a,b 的两个圆域的交集. 因此 $a\le r\le b$, $0\le\theta\le 2\pi$

$$D=\{(\rho,\theta)|a\le\rho\le b,0\le\theta\le 2\pi\}$$

(2) $0\le y\le 1-x\Rightarrow r\sin\theta+r\cos\theta<1\Rightarrow r\le\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$.
$\because x,\ y>0$, 积分区域在第一象限, 所以 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

练习 1 求下列积分在极坐标中的积分区域 D

(1) $\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\left(x^2+y^2\right)dy$;

(2) $\int_0^a dx\int_0^x\sqrt{x^2+y^2}dy$;

(3) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dy$;

(4) $\int_0^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx$.

解

(1) $D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le 2a\cos\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$;

(2) $D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le a\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$;

(3) $D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le\tan\theta\sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$;

(4) $D=\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$

8.3 二重积分换元法

二重积分换元法

已知一方程组 $\begin{cases} F(u,v)=0 \\ G(u,v)=0 \end{cases}$

由 F, G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

称为 F, G 的雅可比行列式.

特性:

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

定理 2　设函数 $f(x,y)$ 在 xOy 平面的闭区域 D 上连续, 变换

$$T:\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D'\to R$$

将 uv 平面的闭区域 D' 变为 xy 平面 D, 且满足

(1) $x(u,v),y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数;

(2) 在 D' 上雅可比式 $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

(3) 变换 T 是 D' 与 D 之间的一个一一对应,

则

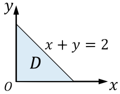
$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

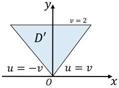
例 11　直角坐标转化为极坐标时 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix}=r$$

$$\therefore \iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta.$$

例 12　计算 $\iint\limits_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy$ 其中 D 是 x 轴 y 轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭域.





解　令 $u=y-x, v=y+x$, 则 $x=\frac{v-u}{2}, y=\frac{v+u}{2}$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{-1}{2}$$

$$\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$
$$= \iint\limits_{D'} e^{\frac{u}{v}} |-1| dudv$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 dv \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}} du$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e - e^{-1}\right) vdv = e - e^{-1}.$$

例 13 计算 $\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, 其中 D 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的区域.

解 作广义极坐标变换 $T: \begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$

其中 $a>0$, $b>0$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. 在该变换下, 与 D 对应的闭区域为

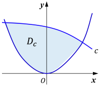
$$D' = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

雅可比式 $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr$

显然, J 在 D' 内仅当 $r=0$ 时为零, 得

$$\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$
$$= \iint\limits_{D} \sqrt{1-r^2}abrdrd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 ab\sqrt{1-r^2}rdr$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3}abd\theta = \frac{2}{3}\pi ab.$$

8.4 无界区域上的广义二重积分



设 D 是平面上一无界区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上有定义. 用任意光滑或分段光滑曲线 c 在 D 中划出有界区域 R_c,

若二重积分

$$\iint\limits_{D_c} f(x,y)\,dA$$

存在, 且当曲线 c 连续变动, 使区域 R_c 无限扩展而趋于区域 D, 不论 c 的形状如何, 也不论 c 的扩展过程怎样.

极限

$$\lim_{D_c\to D}\iint\limits_{D_c} f(x,y)dA$$

总取相同的值 I, 则称 I 为函数 $f(x,y)$ 在无界区域 D 上的二重积分, 记为 $\iint\limits_{D} f(x,y)dA$ 即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dA = \lim_{D_c\to D}\iint\limits_{D_c} f(x,y)dA$$

这时也称 $f(x,y)$ 在 D 上的积分收敛或在 D 上广义可积. 否则积分发散.

例 14 (同例5)　设 D 为全平面, 求 $\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dA$

解　设 D_r 为中心在原点, 半径为 r 的圆域, 则有

$$\iint\limits_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dA = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r e^{-r^2} r dr$$

$$= \pi\left(1-e^{-r^2}\right)$$

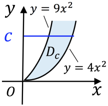
当 $r\to+\infty$ 时, $D_r\to D$, 于是

$$\iint\limits_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dA = \lim_{r\to+\infty}\iint\limits_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}dA$$

$$= \lim_{r\to+\infty}\pi\left(1-e^{-r^2}\right) = \pi$$

例 15　计算二重积分 $\iint\limits_{D} xe^{-y^2}dxdy$, 其中积分区域 D 是曲线 $y=4x^2$ 与 $y=9x^2$ 在第一象限围成的无界区域.

解　设 $D_c=\left\{(x,y)|0\le y\le c, \frac{\sqrt{y}}{3}\le x\le\frac{\sqrt{y}}{2}\right\}$



显然, 当 $c\to+\infty$ 时, 有 $D_c\to D$,

$$\iint\limits_{D_c} xe^{-y^2}dxdy = \int_0^c dy\int_{\frac{1}{3}\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{y}} xe^{-y^2}dx$$

$$\iint\limits_{D_c} xe^{-y^2}dxdy = \int_0^c dy \int_{\frac{1}{3}\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sqrt{y}} xe^{-y^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^c e^{-y^2}\left(\frac{1}{4}y - \frac{1}{9}y\right)dy = \frac{5}{72}\int_0^c ye^{-y^2}dy$$

$$= \frac{-5}{144}e^{-y^2}\Big|_0^c = \frac{-5}{144}\left(e^{-c^2}-1\right).$$

$$\iint\limits_{D} xe^{-y^2}dxdy = \lim_{c\to+\infty}\iint\limits_{D_c} xe^{-y^2}dxdy$$

$$= \frac{5}{144}\lim_{c\to+\infty}\left(1-e^{-c^2}\right) = \frac{5}{144}$$

广义二重积分的计算, 也可化作两次积分进行. 如果无界区域 D 有如下形式:

$$D = \{(x,y)|a \le x < +\infty, b \le y < +\infty\}$$

则可建立计算形式:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_a^{+\infty} dx \int_b^{+\infty} f(x,y)dy$$

或 $$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int_b^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$$

这里假定右端的两次积分存在.

$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ 有时也记作 $\int_a^{+\infty}\int_b^{+\infty} f(x,y)dxdy$

在计算时, 换元法则也可使用.

8.5 内容小结

内容小结

1 直角坐标系下的二重积分

- D 是矩形区域: Fubini 定理, 积分顺序无关;
- $f(x,y)$ 是可分离变量; 分别积分;
- X 型区域, 先 y 后 x 顺序积分;
- Y 型区域, 先 x 后 y 顺序积分.

内容小结

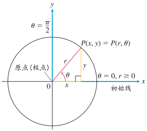
2 极坐标系下的二重积分;

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r dr d\theta$$

当我们在平面上同时使用极坐标和直角坐标时，我们令它们的原点重合，并取极坐标的初始射线为正 x 轴. 射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r > 0$, 就成为正 y 轴.

两 种 坐 标 系 用 下 列 方 程 联 系:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ \frac{y}{x} = \tan\theta \end{cases}$$



本章完!