第二章 · 函数与极限

第二节 · 函数的求导法则

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

2.1 四则运算的求导法则

四则运算的导数

定理 1 设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x 可导，则有

$$[Cu(x)]' = Cu'(x) \tag{1}$$

$$u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \tag{2}$$

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \tag{3}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} \tag{4}$$

四则运算的求导法则

例 1 $y = \sqrt{x}\left(x^3 - 4\cos x - \sin 1\right)$, 求 y', $y'|_{x=1}$.

解

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})'\left(x^3 - 4\cos x - \sin 1\right) \\ &\qquad + \sqrt{x}\left(x^3 - 4\cos x - \sin 1\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(x^3 - 4\cos x - \sin 1\right) + \sqrt{x}\left(3x^2 + 4\sin x\right) \\ y'\Big|_{x=1} &= \frac{1}{2}(1 - 4\cos 1 - \sin 1) + (3 + 4\sin 1) \\ &= \frac{7}{2} + \frac{7}{2}\sin 1 - 2\cos 1 \end{aligned}$$

四则运算的求导法则

例 2 求证 $(\tan x)' = \sec^2 x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$.

解 记 $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x.$$

类似可证:$(\cot x)' = -\csc^2 x$, $\quad (\sec x)' = \sec x \tan x$

例 3 求 $(\log_a x)'$

解

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot \ln a - (\ln a)' \cdot \ln x}{(\ln a)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln a}{(\ln a)^2} = \frac{1}{x \ln a}$$

注 特别当 $a = e$ 时,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

基本导数公式 II

$$(\tan x)' = \sec^2 x \tag{1}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x \tag{2}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x \tag{3}$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \tag{4}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \tag{5}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{6}$$

其中，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$.

多个函数乘积的导数

定理 2 由两个函数乘积的导数公式，可以得到多个函数乘积的导数公式，例如：

$$\begin{aligned}\Big(u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)\Big)' = \ & u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) \\ & + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) \\ & + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x)\end{aligned}$$

例 4 求 $f(x) = e^x \cdot x^2 \cdot \sin x$ 的导数.

2.2 反函数的求导法则

反函数的导数

定理 3 设 $x=f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导，且 $f'(y)\neq 0$，则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 I_x 内可导，且有

$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)} \quad 或 \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

注

- 求 $f^{-1}(x)$ 导数的方法，$f(x)$，$f^{-1}(x)$ 导数互为倒数.
- $\frac{dy}{dx}$ 不仅仅是导数符号，也可以看作 dy 除以 dx

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例 5 求反三角函数导数.

解 设 $y=\arcsin x$，则 $x=\sin y$，$y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

利用 $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

类似可求得 $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$， $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

例 6 求指数函数的导数.

解 设 $y=a^x\ (a>0,a\neq 1)$，则 $x=\log_a y, y\in(0,+\infty)$

$$(a^x)'=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} \quad (例3)$$

$$=y\ln a=a^x\ln a$$

注 特别当 $a=e$ 时，

$$(e^x)'=e^x$$

基本导数公式 III

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{7}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{8}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \tag{9}$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \tag{10}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{11}$$

$$(e^x)' = e^x \tag{12}$$

2.3 复合函数求导法则

复合函数的导数

定理 4 设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

推广: 此法则可推广到多个中间变量的情形.

例如 设 $y=f(u)$, $u=g(v)$, $v=h(x)$. 则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\ &= f'(u) \cdot g'(v) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

注 搞清复合函数结构, 由外向内逐层求导.

复合函数的导数

例 7　设 $y=\ln\cos(e^x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}\cdot(-\sin(\mathrm{e}^x))\cdot\mathrm{e}^x\\&=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)\end{aligned}$$

例 8　设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x\right)\\&=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

注

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x))=\frac{f(x)'}{x}$$

2.4　内容小结

内容小结

1. 有限次四则运算的求导法则

$$\begin{array}{ll}(u\pm v)'=u'\pm v' & (Cu)'=Cu'\\(uv)'=u'v+uv' & \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\end{array}$$

2. 复合函数求导法则

$$y=f(u),u=\varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

3. 基本导数公式 II, III.

本节完!