第三章 · 导数的应用

第一节 · 微分中值定理

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

1.1 罗尔中值定理

费马引理

费马引理 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且 $\forall x \in U(x_0)$ 有 $f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$）. 如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导. 则有 $f'(x_0) = 0$.

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

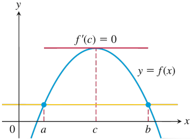
(2) 在开区间 (a, b) 上可导，

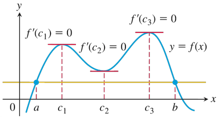
(3) 在端点处 $f(a) = f(b)$，

则至少存在一点 $c \in (a, b)$，使得 $f'(c) = 0$.

罗尔定理

罗尔定理告诉我们，如果一条可导的函数曲线与一条横线相交于两点 a, b, 那么该曲线在区间 $[a, b]$ 中 至少有一条横切线.



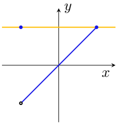


注　如果定理的三个条件中有一个不满足，则结论可能不成立.

罗尔定理

例 1　下列函数只满足罗尔定理的条件 (2) 和 (3)，不满足条件 (1)，因此没有导数为零的点.

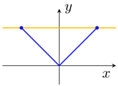
$$f(x)=\begin{cases} x, & -1 \le x < 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$



罗尔定理

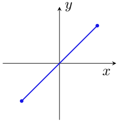
例 2　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (3)，不满足条件 (2)，因此没有导数为零的点.

$$f(x)=|x|, -1 \le x \le 1$$



例 3　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (2)，不满足条件 (3)，因此没有导数为零的点.

$$f(x)=x, -1 \le x \le 1$$



例 4　证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于 1 的正实根.

证明

存在性: 设 $f(x)=x^5-5x+1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续, 且 $f(0)=1, f(1)=-3$. 由零点定理 (章节 1.8 定理 2) 知存在 $x_0 \in (0,1)$, 使 $f(x_0)=0$, 即方程有小于 1 的正根 x_0. 唯一性: 假设另有 $x_1 \in (0,1), x_1 \ne x_0$, 使 $f(x_1)=0$, 因为 $f(x)$ 在以 x_0, x_1 为端点的区间满足罗尔定理条件, 所以在 x_0, x_1 之间至少存在一个点 c, 使得 $f'(c)=0$. 但 $f'(x)=5\left(x^4-1\right)<0, x \in (0,1)$ 矛盾, 故假设不真!

1.2 拉格朗日中值定理

拉格朗日定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a, b) 内可导，

则至少存在一点 $c \in (a, b)$ 使得 $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日定理

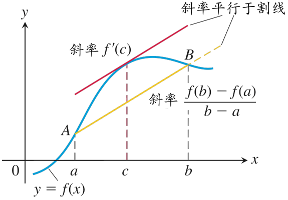
推论 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上满足 $f'(c) = 0$, $f(x)$ 在区间 I 上必是一个常数.

推论 2 若两个函数 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上每一点的导数都相等，即 $f'(x) = g'(x)$ 则在区间 I 上这两个函数至多只相差一个常数，即

$$f(x) = g(x) + c, \quad (c\text{为常数}).$$

拉格朗日定理

拉格朗日定理告诉我们, 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 中存在点 c, 该点的斜率一定平行于割线 AB.



对数函数不等式

例 5　证明不等式 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$.

证明　设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则 $f(t)$ 在 $[0,\,x]$ 上满足拉格朗日中值定理条件, 因此

$$f(x)-f(0)=f'(c)(x-0),\quad 0<c<x$$

即

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+c},\quad 0<c<x$$

因为 $\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+c}<x$ 故

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x\quad (x>0).$$

例 6　证明等式 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$

证明　设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, 则在 $(-1,\,1)$ 上

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv 0$$

由推论可知 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=C$.

由 $x=0\Rightarrow C=\frac{\pi}{2}$.

又 $f(\pm 1)=\frac{\pi}{2}$, 故所证等式在定义域 $[-1,\,1]$ 上成立.

经验: 欲证 $x\in I$ 时 $f(x)=C$, 只需证在 I 上 $f'(x)=0$ 且 $\exists x_0\in I$, 使 $f(x_0)=C$.

同理可证: $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$.

例 7　证明 $\frac{\sin x}{x}>\cos x,\quad 0<x<\pi$

证明　由于

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}$$

设 $f(t)=\sin t$, 且 $f(t)$ 在 $[0,\,x]$ 上满足拉格朗日定理，则存在 $c\in(0,\,x)$, 使得 $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

即

$$\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=\cos c$$

由 $0<c<x<\pi, \cos c>\cos x\quad\Rightarrow\quad\frac{\sin x}{x}>\cos x$

1.3　柯西中值定理

柯西定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导，

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明至少存在疑点 $c\in(0,1)$，使

$$f'(c)=2c[f(1)-f(0)]$$

证明 问题转化为证

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(c)}{2c}=\frac{f'(x)}{(x^2)'}|x=c$$

设 $F(x)=x^2$，则 $f(x),F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足柯西中值定理条件，因此在 $(0,1)$ 内至少存在一点 c，使得

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(c)}{2c}\quad\Rightarrow\quad f'(c)=2c[f(1)-f(0)]$$

关键: 利用逆向思维设辅助函数.

1.4 内容小结

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系;
   - 罗尔定理
   - 拉格朗日中值定理
   - 柯西中值定理
2. 微分中值定理的应用
   - 证明恒等式
   - 证明不等式
   - 证明有关中值问题的结论

本章节内容可直接上接章节 1.8.

本节完!