第八章 · 常微分方程

第三节 · 高阶微分方程

山东财经大学　田宽厚

3.1 可降阶的高阶微分方程

(一) $y'' = f(x)$ 型

解法　逐次积分.

令 $u = y'$, 则 $\frac{du}{dx} = y'' = f(x)$, 因此 $u = \int f(x)dx + C_1$ 即

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

积分得

$$y = \int [\int f(x)dx + C_1]dx + C_2$$

若原式为 n 阶微分方程, 则依次通过 n 次积分, 可得含 n 个任意常数的通解.

例 1　求 $y''' = e^{2x} - \cos x$ 的通解.

解

$$\begin{aligned} y'' &= \int \left(e^{2x} - \cos x\right) dx + C_1' \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - \sin x + C_1' \\ y' &= \frac{1}{4}e^{2x} + \cos x + C_1'x + C_2 \\ y &= \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + C_1x^2 + C_2x + C_3 \end{aligned}$$

此处 $C_1 = \frac{1}{2}C_1'$.

(二) $y'' = f(x, y')$ 型

解法 令 $p = y'$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶微分方程

$$p' = f(x, p)$$

求得 p' 的解, 通过逐次积分得原方程的通解.

例 2 求解 $\begin{cases} \left(1+x^2\right) y'' = 2xy' \\ y|_{x=0} = 1,\, y'|_{x=0} = 3 \end{cases}$

解 设 $y' = u$, 则 $y'' = u'$, 代入方程得

$$\left(1+x^2\right) u' = 2xu.$$

分离变量

$$\frac{du}{u} = \frac{2xdx}{(1+x^2)}$$

积分得

$$\ln u = \ln\left(1+x^2\right) + \ln C_1$$

即

$$u = C_1\left(1+x^2\right)$$

利用 $y'|_{x=0} = 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 3$, 有

$$y' = 3\left(1+x^2\right).$$

两端再积分得 $y = x^3 + 3x + C_2$.

利用 $y|_{x=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 1.$

因此所求特解为

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

(三) $y'' = f(y, y')$ 型

解法 令 $y' = u$, 则，则 $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$

于是，原方程化为

$$u\frac{du}{dy} = f(y, u)$$

这是一阶微分方程. 设其通解为 $u = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例 3 求解 $yy'' = (y')^2$

解 设 $y' = u$, 则 $y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy}$.

代入方程得 $yu\frac{du}{dy} = u^2$, 即 $\frac{du}{u} = \frac{dy}{y}$

两端积分得 $\ln|u| = \ln|y| + \ln C_1$, 即 $u = C_1 y$

$$\therefore \quad y' = C_1 y \quad \text{(一阶线性齐次方程)}$$

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

3.2 二阶线性齐次微分方程

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1. 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$
3. 求解方程：得 $z = C\mathrm{e}^{-3x}$，即 $y' + y = C\mathrm{e}^{-3x}$
4. 求解方程：得 $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1. 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$
3. 求解方程：得 $z = C\mathrm{e}^{-2x}$，即 $y' + 2y = C\mathrm{e}^{-2x}$
4. 求解方程：得 $y = (C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$
3. 求解方程：得 $z = C\mathrm{e}^{bx}$，即 $y' - ay = C\mathrm{e}^{bx}$
4. 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int C\mathrm{e}^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$
   - 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1\,\mathrm{e}^{ax} + C_2\,\mathrm{e}^{bx}$
   - 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{ax}$

问题　常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

解　a 和 b 是方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根.

假如方程

$$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (a,\ b,\ c,\ \text{常数}) \tag{1}$$

有形如 $y = e^{\lambda x}$ 的解, 则代入方程后, 得

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = (a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0$$

即

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{2}$$

此方程称为原方程的特征方程.

研究二阶常系数线性齐次方程：$y'' + py' + qy = 0$.

. . . .

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
2. 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$
3. 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

例 6　求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解

解　特征方程

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3$$

所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

例 7 求方程 $y'' + 2y' + y = 0$ 的通解

解 特征方程

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$$

所求通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}.$$

例 8 求方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解

解 特征方程

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i$$

所求通解为

$$y = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

3.3 非齐次微分方程的通解

我们将学习如何求解二阶线性非齐次方程

$$ay'' + by' + cy = G(x) \tag{3}$$

其中 a, b, c 为常数, $G(x)$ 为连续函数. 当 $G(x) = 0$ 时,

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4}$$

称方程为二阶线性齐次方程.

非齐次微分方程的特解

由第二节的结论, 一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

即

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

齐次方程通解　　　　非齐次方程特解

定理　非齐次方程 $ay'' + by' + cy = G(x)$ 的通解可写为

$$y = y_p(x) + y_c(x)$$

其中 $y_p(x)$ 是非齐次方程 (3) 的特解, $y_c(x)$ 齐次方程 (4) 的通解.

非齐次方程通解的步骤:

1. 求齐次方程 (4) 的通解 $y_c(x)$;
2. 求非齐次方程 (3) 的特解 $y_p(x)$;
3. $y_p(x) + y_c(x)$

问题　如何求二阶非齐次方程特解?

引例　设 $y = e^{2x}$, 则有

$$y' = 2e^{2x} \quad y'' = 4e^{2x}$$

由 $4e^{2x} - 2e^{2x} + e^{2x} = 3e^{2x}$, 知方程

$$y'' - y' + y = 3e^{2x}$$

成立. 因此 $y = e^{2x}$ 为该方程的通解.

(一) $G(x)$ 是连续函数型

例 9　求方程 $y'' - y' - 6y = e^{2x}$ 的特解

解　设方程特解为 $y_p = Ae^{2x}$,
则

$$y' = 2Ae^{2x},\ y'' = 4Ae^{2x}.$$

代入原方程得

$$4Ae^{2x} - 2Ae^{2x} - 6Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$-4Ae^{2x} = e^{2x}$$

得 $A = -\frac{1}{4}$. 因此, $y = -\frac{1}{4}e^{2x}$ 为方程特解.

当 $G(x)$ 是连续函数时, 求二阶非齐次方程

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

特解的步骤:

1. 设方程特解 $y_p(\alpha, x)$, α 为常量;
2. 把 $y_p(\alpha, x)$ 代入方程, 求得 $y_p(\alpha, x)$ 中的系数 α.
3. 代入原方程验证假设解.

设非齐次方程特解 $y_p(\alpha, x)$ 的方法:

	$G(x)$	设特解$y_p(\alpha, x)$
(1)	常数c	常数k
(2)	$a\cos kx$	$A\cos kx + B\sin kx$
(3)	$a\sin kx$	$A\cos kx + B\sin kx$
(4)	ae^{kx}	Ae^{kx}
(5)	ae^{-kx}	Ae^{-kx}
(6)	多项式, $x^n + \cdots + bx + c$	$Ax^n + \cdots + Bx + C$

例 10 求方程 $y'' - 6y' + 8y = x$ 的特解

解 根据表格, 设方程通解为 $y_p = Ax + B$,
则 $y_p' = Ax$, $y_p'' = 0$. 代入原方程,

$$0 - 6A + 8(Ax + B) = x$$

对应上式两边系数:

$$\begin{cases} 8A = 1 \\ -6A + 8A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{8},\ B = \frac{3}{32}$$

$\therefore y_p = \frac{1}{8}x + \frac{3}{32}x$

注 不能设 $y_p = Ax$, 等式右边虽然是 x, 这是一个一元一次方程.
若根据表格设 y_p 不成立, 则乘以 x 或者 x^2.

例 11 求方程 $y'' - 6y' + 8y = 3\cos x$ 的特解

解 根据表格, 设方程通解为 $y_p = A\cos x + B\sin x$,
则 $y_p' = -A\sin x + B\cos x$, $y_p'' = -A\cos x - B\sin x$.
代入原方程,

$$(7A - 6B)\cos x + (7B + 6A)\sin x = 3\cos x$$

对应上式两边系数:

$$\begin{cases} 7A - 6B = 3 \\ 7B + 6A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{21}{85},\ B = -\frac{18}{85}$$

$\therefore y_p = \frac{21}{85}\cos x - \frac{18}{85}\sin x.$

(二) $G(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

求二阶非齐次方程 $ay''+by'+cy=e^{\lambda x}P_m(x)$ 特解的步骤:

1. 求特征方程 $ar^2+br+c=0$ 根 r_1, r_2.
2. 若 λ 是特征方程的k 重根, 设 $y_p=x^k e^{\lambda x}Q_m(x)$;
3. 把 y_p 代入方程, 求得 $y_p(\alpha,x)$ 中的系数.
4. 代入原方程验证假设解.

- 若 λ 不是特征方程的根 $(k=0)$;
  - 设 $y_p=e^{\lambda x}Q_m(x)$;
- 若 λ 是特征方程的单根 $(k=1)$;
  - 设 $y_p=xe^{\lambda x}Q_m(x)$.
- 若 λ 是特征方程的重根 $(k=2)$;
  - 设 $y_p=x^2e^{\lambda x}Q_m(x)$.

例 12　求方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的一个特解.

解　特征方程为 $r^2-2r-3=0$,而 $\lambda=0$ 不是特征方程的根.所以设所求特解为

$$y_p=b_0x+b_1$$

代入方程:$-3b_0x-3b_1-2b_0=3x+1$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3b_0=3 \\ 2b_0-3b_1=1 \end{cases} \Rightarrow b_0=-1, b_1=\frac{1}{3}$$

因此特解为 $y_p=-x+\frac{1}{3}$

注　当 λ 不是特征方程的根, 且 $\lambda=0$ 时, 方程退化为 $G(x)$ 是连续函数型的情况. 若后者条件不满足, 见例14.

例 13　求方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的一个特解.

解　本题 $\lambda=2$, 特征方程为 $r^2-5r+6=0$,
其根为 $r_1=2, \quad r_2=3$
由于 $\lambda=r_1$ 设非齐次方程特解为

$$y_p=x\left(b_0x+b_1\right)\mathrm{e}^{2x}$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -2b_0=1 \\ 2b_0-b_1=0 \end{cases} \Rightarrow b_0=-\frac{1}{2}, b_1=-1$$

因此特解为 $y_p=-\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)e^{2x}$.

例 14　求方程 $y''' + 3y'' + 2y' = 1$ 的一个特解.

解　本题 $\lambda = 0$, 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 2r = 0$, 其根为

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -2$$

由于 $\lambda = r_1$, 设非齐次方程特解为

$$y_p = bx.$$

代入方程得 $2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.
因此特解为 $y_p = \frac{1}{2}x$.

3.4 内容小结

内容小结

可降阶微分方程的解法-降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$: 逐次积分
2. $y'' = f(x, y')$: 令 $p = y'$，则 $y'' = p'$，原方程化为一阶微分方程
$$p' = f(x, p).$$
3. $y'' = f(y, y')$: 令 $y' = u$, 则，则 $y'' = u\frac{du}{dy}$
于是，原方程化为
$$u\frac{du}{dy} = f(y, u).$$

二阶常系数齐次线性方程:$y'' + py' + qy = 0$.

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2.

1. 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
2. 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda x}$$
3. 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$$

本节完!