第三章 · 导数的应用

第三节 · 泰勒公式

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

3.1 泰勒公式

一阶泰勒公式

假设 $f(x)$ 在 x_0 有一阶导数, 那么根据定义, 就有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) \tag{1}$$

由无穷小量与函数极限的关系 (章节 1.4 定理 1):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$$

其中, $\alpha(x)$ 是该极限过程下的某个无穷小量. 所以公式 (1) 可写为

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) + \alpha_1(x) \tag{2}$$

其中 $\alpha_1(x) \to 0\,(x \to x_0)$.

一阶泰勒公式

再进一步变形，就可得到

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha_1(x)\cdot(x-x_0) \tag{3}$$

问题　公式 3 可解读为: 函数值 = 估值 +误差. 已知 $\alpha_1(x)$ 是一个无穷小量, 那么这个新误差 $\alpha_1(x)\cdot(x-x_0)$ 具体有多小?

答案　$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)\cdot(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \alpha_1(x) = 0$, 知分子是分母的高阶无穷小. 即

$$\alpha_1(x)\cdot(x-x_0) = o_1(x-x_0)\,.$$

一阶泰勒公式

因此公式 (3) 进一步改写为

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o_1\left(x-x_0\right)$$

称一阶泰勒公式.

二阶泰勒公式

一阶泰勒公式:

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o_1\left(x-x_0\right)$$

问题 $o_1\left(x-x_0\right)$ 有哪些因素组成, 误差能否再小一些?

分析

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{o_1\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2}&=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f\left(x_0\right)-f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2}\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'\left(x_0\right)}{2\left(x-x_0\right)}\qquad\boxed{\text{洛必达法则}}\\&=\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\qquad\boxed{\text{导数的定义}}\end{aligned}$$

二阶泰勒公式

再由无穷小量与函数极限的关系 (章节 1.4 定理 1) 得

$$\frac{o_1\left(x-x_0\right)}{\left(x-x_0\right)^2}=\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)+\alpha_2(x)$$

其中 $\alpha_1(x)\to 0\,(x\to x_0)$.

进一步变形，就可得到

$$o_1\left(x-x_0\right)=\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+\alpha_2(x)\cdot\left(x-x_0\right)^2$$

基于同样的理由, $\alpha_2(x)\cdot\left(x-x_0\right)^2=o_2\left(\left(x-x_0\right)^2\right)$.

所以

$$o_1\left(x-x_0\right)=\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+o_2\left(\left(x-x_0\right)^2\right)$$

再将其代入一阶泰勒公式

二阶泰勒公式

$$\begin{aligned}f(x)=f\left(x_0\right)&+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\\&+\frac{1}{2}f''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2+o_2\left(\left(x-x_0\right)^2\right)\end{aligned}$$

称二阶泰勒公式.

与一阶泰勒公式比照

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+o_1\left(x-x_0\right)$$

同理得泰勒公式.

带佩亚诺余项的泰勒公式

定理 1

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \mathrm{o}\big((x - x_0)^n\big)$$

$\mathrm{o}\big((x - x_0)^n\big)$ 称为 n 阶泰勒公式的佩亚诺 (Peano) 余项.

在需要余项的精确表达式时, 泰勒公式可写为:

带佩亚诺余项的泰勒公式

定理 2

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数, 则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间. 称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项.

麦克劳林公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ ………………………… 佩亚诺余项

或者 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ………………… 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi = \theta x$，则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

3.2 几个初等函数的麦克劳林公式

(1) $f(x)=e^x$

$\because\ f^{(k)}(x)=e^x,\quad f^{(k)}(0)=1\quad(k=1,2,\cdots)$

$\therefore\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

其中 $R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).$

麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(2) $f(x)=\sin x$

$\because\ f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m\\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases}\quad(m=1,2,\cdots)$$

$\therefore\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$

其中 $R_{2m}(x)=\frac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1).$

麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$

其中 $R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}x^{2m+2}\quad(0<\theta<1).$

麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(4) $f(x)=(1+x)^\alpha,\quad(x>-1)$

$\because\quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

$\quad f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\quad(k=1,2,\cdots)$

$$\therefore\quad (1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

麦克劳林公式:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

(5) $f(x) = \ln(1+x) \quad (x > -1)$

已知 $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}(k = 1, 2, \cdots)$

因此可得 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$

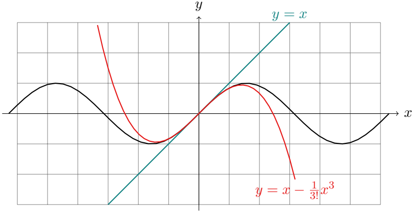
其中 $R_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \theta < 1)$

麦克劳林公式:

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

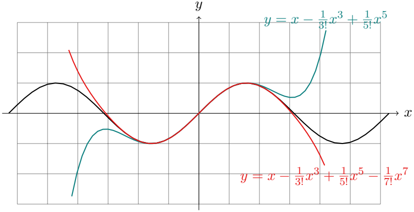
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

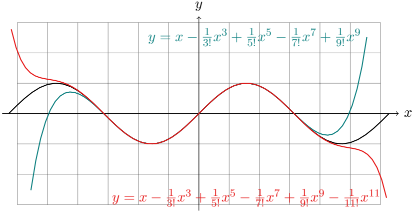
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

返回

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



3.3 泰勒公式的应用

在近似计算中的应用

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$ M 为 $\left|f^{(n+1)}(x)\right|$ 在包含 $0, x$ 的某区间上的上界.

需解问题的类型:

1. 已知 x 和误差限, 要求确定项数 n;
2. 已知项数 n 和 x, 计算近似值并估计误差;
3. 已知项数 n 和误差限, 确定公式中 x 的适用范围.

例 1 计算无理数 e 的近似值, 使误差不超过 10^{-6}.

解 已知 e^x 的麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (0 < \theta < 1)$$

令 $x = 1$, 得

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

由于 $0 < e^\theta < e < 3$, 欲使

$$|R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6}$$

由计算可知当 $n = 9$ 时上式成立, 因此

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718282$$

注 注意舍入误差对计算结果的影响.

本例 $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{9!}$

若每项四舍五入到小数点后 6 位, 则

各项舍入误差之和不超过 $7 \times 0.5 \times 10^{-6}$

总误差限为 $7 \times 0.5 \times 10^{-6} + 10^{-6} < 5 \times 10^{-6}$

这时得到的近似值不能保证误差不超过 10^{-6}.

因此计算时中间结果应比精度要求多取一位.

例 2 用近似公式 $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$ 计算 $\cos x$ 的近似值, 使其精确到 0.005, 试确定 x 的适用范围.

解 近似公式的误差

$$R_3(x)| = |\frac{x^4}{4!}\cos(\theta x)| \leq \frac{|x|^4}{24}$$

令 $\frac{|x|^4}{24} \leq 0.005 \quad \Rightarrow \quad x \leq 0.588.$

即当 $x \leq 0.588$ 时, 由给定的近似公式计算的结果能准确到 0.005.

利用泰勒公式求极限

例 3 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$

解 用洛必达法则不方便! 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4} = 2\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2 + o\left(x^2\right)$$

$$\sqrt{4-3x} = 2\left(1-\frac{3}{4}x\right)^{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2 + o\left(x^2\right)$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2 + o\left(x^2\right)}{x^2} = -\frac{9}{32}.$$

利用泰勒公式证明不等式

例 4 证明 $\sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$

解

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad (x > 0)$$

3.4 内容小结

内容小结

1. 泰勒公式;
2. 常用函数的麦克劳林公式:

$$e^x,\ \sin x,\ \cos x,\ (1+x)^\alpha,\ \ln(1+x)$$

3. 泰勒公式的应用
   - 近似计算;
   - 利用多项式逼近函数;
   - 其他应用: 求极限, 证明不等式等.

本节完!