第七章・无穷级数

第二节・正项级数

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

2.1 基本收敛定理

定义 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geq 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1 (基本收敛定理)

正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

证明

$\Rightarrow$ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\{S_n\}$ 收敛, 故有界.

$\Leftarrow$ 因为 $u_n \geq 0$, 所以部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增, 又已知 $\{S_n\}$ 有界, 故 $\{S_n\}$ 收敛, 从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

注 正项级数加括号后，其敛散性不变.

2.2 正项级数敛散性的判别

定理 2 (比较判别法) 对于两个正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，若有 $c > 0$ 使得 $u_n \le c v_n$，对所有 n，

1. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；
2. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

注

- 比较判别法: 将要判定的级数与已知收敛或发散的级数作比较.
- 弱级数发散, 强级数发散; 强级数收敛, 弱级数收敛.

例 1 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$, $u_n = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散，故原级数发散.

例 2 若 $a > 0$, 证明下面级数收敛

$$\frac{1}{(2+a)} + \frac{1}{(2^2+a)} + \frac{1}{(2^3+a)} + \dots + \frac{1}{(2^n+a)} + \dots$$

解 因为 $0 < u_n = \frac{1}{(2^n+a)} < \frac{1}{2^n}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故原级数收敛.

p 级数的敛散性

例 3 讨论 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$ 的敛散性.

解法 1 当 $p > 0$ 时, $u_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$, 而 $f(x) = \frac{1}{x^p} > 0$ 且在区间 $[1, \infty]$ 连续递减. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_1^{\infty}$.

- 当 $p > 1$ 时, 指数 $(-p+1)$ 为负值，所以分子的 x^{-p+1} 可以移到分母，$\left.\frac{1}{x^{p-1}(1-p)}\right|_1^{\infty} = 0 + \frac{1}{1-p}$, 积分收敛.
- 当 $p < 1$ 时, 指数 $(-p+1)$ 为正值, 积分发散.
- 当 $p = 1$ 时, 已知 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x|_1^{\infty} = \infty$ 发散

因此由积分检验法得, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{当} p > 1 \text{时, 收敛} \\ \text{当} p \le 1 \text{时, 发散.} \end{cases}$

解法 2　当 $p \le 1$ 时; 因为对一切 $n \in \mathbb{N}^+$, 有 $\frac{1}{n^p} \ge \frac{1}{n}$.

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

由比较判别法可知 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. 当 $p > 1$ 时; 因为当 $n-1 \le x \le n$ 时, 有 $\frac{1}{n^p} \le \frac{1}{x^p}$.

所以, $\frac{1}{n^p} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{n^p} dx \le \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^p} dx$

$$= \frac{1}{p-1}\left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right] \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

考虑级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right]$

其部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \left[1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right] + \left[\frac{1}{2^{p-1}} - \frac{1}{3^{p-1}}\right] \\ &\quad + \cdots + \left[\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right] \\ &= 1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} \end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) = 1.$

强级数收敛, 故当$p > 1$时, 由比较判别法知 p 级数收敛.

结论　关于 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{当}p > 1\text{时, 收敛} \\ \text{当}p \le 1\text{时, 发散.} \end{cases}$$

例如

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散;
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.

注　结论与等比级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 相反. 当 $|q| < 1$ 时, 级数收敛, 反之发散.

p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 和调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是两个常用的比较级数.若存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 对一切 $n \ge N$,

1. $u_n \ge \frac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;
2. $u_n \le \frac{1}{n^p}$, 若 $p > 1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例 4　判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

解　(1) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1}$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散.比较判别法得, 原级数发散.

(2) $u_n = \frac{1}{(n+1)(n+4)} < \frac{1}{n \cdot n} = \frac{1}{n^2}$.

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

例 5　判别下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{5^n}$

解　(1) 当 $n \geq 2$ 时,$u_n = \frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{n^2}$ (或 $\leq \frac{1}{2^n}$),

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

(2) $u_n = 2^n \sin \frac{\pi}{5^n} \leq 2^n \cdot \frac{\pi}{5^n} = \pi \left(\frac{2}{5}\right)^n$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \pi \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 收敛, 故原级数收敛.

定理 3 (比较判别法的极限形式)　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$.

1 若 $0 < l < +\infty$，两个级数同时收敛或发散；

2 若 $l = 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

3 若 $l = +\infty$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

例 6　判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

解　(1) 设有一发散级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 取 $v_n = \frac{1}{n}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin 1/n}{1/n} = 1$.因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

(2) 设有一收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 取 $v_n = \frac{1}{n^2}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1/n^2)}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = \ln e = 1$.

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

2.3 比值/根值判别法

定理 4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则有

1. 若 $l < 1$，则级数收敛；
2. 若 $l > 1$(或 ∞) 时，则级数发散；
3. 若 $l = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

注　比值判别法的优点:不必找参考级数.

例 7　判别级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n-1)!}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0 < 1$

级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{10} = \infty$

级数发散.

例 8　判别级数的敛散性 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{2^n \cdot n!} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n \\
&= 2\lim_{n\to\infty} (1+\frac{-1}{n+1})^n = 2\lim_{n\to\infty} e^{\frac{-1}{n+1}\cdot n} \\
&= 2e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} < 1.
\end{aligned}
$$

所以级数收敛.

例 9 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n \ (r>0)$ 的敛散性.

解 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)r^{n+1}}{nr^n}$$
$$=r\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=r.$$

当 $0<r<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ 收敛;

当 $r>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nr^n$ 发散;

当 $r=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n$ 发散. (7.1 例 1)

例 10 判别级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\frac{1}{2}<1 \quad \text{级数收敛.}$$

(2) $u_n=\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}\le\frac{n}{2^n}=v_n$.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n}=\frac{1}{2}<1.$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

故原级数收敛.

定理 5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，则有

1. 若 $\rho<1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho>1$ 时，则级数发散；
3. 若 $\rho=1$，则级数可能收敛也可能发散.

注 和比值判别法标准一样. 当级数通项含有阶乘或者幂函数, 比值判别法. 若含有幂指函数, 根值判别法.

例 11 判别级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$.

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0<1$ 级数收敛.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{9}<1 \text{ 级数收敛.}$$

2.4 内容小结

内容小结

- 基本收敛定理;

  正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 有界.

- $p>1$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛, 反之发散;

- p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, 和调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是两个常用的比较级数. 对一切 $n\ge N$,

  1. $u_n\ge\frac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散;
  2. $u_n\le\frac{1}{n^p}$, 若 $p>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

内容小结

判别正项级数敛散性的方法与步骤:

1. 必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$. 不满足 $\Rightarrow$ 发散
2. 满足 $=\begin{cases}\text{比值判别法: } \lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\\ \text{根值判别法: } \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\end{cases}$

   $\rho<1$ 收敛; $\rho>1$ 发散.
3. $\rho=1$ 不定: $\begin{cases}\text{部分和极限}\\ \text{比较判别法}\\ \text{比较判别法的极限形式}\end{cases}$

本节完!