第一章 · 函数与极限

# 第四节 · 无穷小量与无穷大量

■山东财经大学 ■田宽厚

## 4.1 无穷小量



## 无穷小量

**定义** 若 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时, 函数 $f(x) \to 0$, 则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小量. 简称无穷小.

**注** 类似地，可以定义 $x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 时的无穷小量.



## 无穷小量

**例 1** $0$、$x$、$x^2$、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 $e^x-1$ 都是 $x \to 0$ 时的无穷小量.

**例 2** 函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

**例 3** 函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷小量?

注　在理解和使用无穷小量定义时应注意:

1. 不能将无穷小量与很小的数混为一谈．无穷小量是自变量在某变化过程中极限为零的变量，不是常量．
2. 无穷小量是相对于极限过程而言的，一个变量在某个极限过程中是无穷小量，而在另一个极限过程中却不一定是无穷小量．例如 $x \to -\infty$ 当时, $e^x$ 是无穷小量，而当 $x \to \infty$ 时，$e^x$ 却不是无穷小量.
3. 常数零是唯一的无穷小量，而无穷小量不一定是零．



## 无穷小量与函数极限的关系

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \rightleftarrows f(x) = A + \alpha$, 其中 $\alpha$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

证明　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

$\rightleftarrows \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - A - 0| < \epsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - A = 0.$

设 $\alpha = f(x) - A$

$\rightleftarrows \lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0.$

对自变量的其他变化过程类似可证.



## 无穷小运算法则

定理 2

1. 两个无穷小量的和差还是无穷小量．
2. 两个无穷小量的乘积还是无穷小量．
3. 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量．



例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$．

解　因为 $|\sin x| \le 1$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

利用定理 2.3 可知

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \sin x = 0.$$

## 4.2 无穷大量



**定义** 若任给 $M>0$, 总存在 $\delta>0$(正数 $N$), 使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>N$) 的 $x$, 总有

$$|f(x)|>M$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时为无穷大量, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \quad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty).$$

**注**

1. 无穷大量是个变量, 并不是很大的数, 它不能作为实数参与实数的运算法则, $\lim f(x)=\infty$ 是描述函数的一种状态, 不要勿认为 $\infty$ 是 $f(x)$ 的极限.
2. 函数为无穷大, 必定无界. 但反之不真!



### 无穷大量 $(x\to\infty)$

**例 5** $x$, $x^2$, $x+1$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷大量, 即

$$\lim_{x\to\infty} x=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty.$$

**例 6** $e^x$ 是 $x\to+\infty$ 时的无穷大量, 即

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=\infty.$$



### 无穷大量 $(x\to x_0)$

**例 7** $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x\to 0$ 时的无穷大量.

**例 8** $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x\to 1$ 时的无穷大量.

**例 9** 函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷大量?

## 4.3 无穷小与无穷大的关系



## 无穷大量与无穷小量的关系

**定理 3** 在自变量的同一变化过程中
若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小;
若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

**注** 据此定理, 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

例如 (例 3.6 继续) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-1}{3x+4} = \frac{2-0}{3\times 0+4\times 0} = \frac{2}{0} = ?$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{2x^2-1} = \frac{0}{2} = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x+4} = \infty.$$



## 有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{2x^2+5x} = \frac{3}{2}\ (\text{例}3.4) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{3x^2+1} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x^2+2} = 0\ (\text{例}3.5) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{3x+4} = \infty\ (\text{例}3.6)$$

---

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

其中 $a_0, b_0 \neq 0, m, n$ 为非负常数.



## 4.4 内容小结

## 内容小结

1. 无穷小量
2. 无穷小量与函数极限的关系, 定理 1
3. 无穷小小运算法则, 定理 2
4. 无穷大量
5. 无穷小量与无穷大量之间的关系, 定理 3



本节完!