第二章 · 函数与极限

第五节 · 微分的概念

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

5.1 微分的引例

函数的改变量

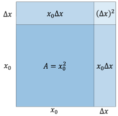
讨论导数, 即讨论

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(\Delta x)}{\Delta x}$$

的极限是否存在, 而不是研究改变量本身. 实践中, 我们关心的是: 当自变量 x 有微小改变量 Δx 时, 函数 y 相应的改变量 Δy 与 Δx 有何关系, 大小又如何?

注　对于函数 $y=f(x)$. 若自变量从 x 变为 $x+\Delta x$，则 y 的相应改变量为 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

函数的改变量



例如　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$. 求此薄片面积的改变量 Δy.

解　正方形面积为 $y=f(x)=x^2$. 则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0=1$, $\Delta x=0.1$ 时，

$$\Delta y=2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.2+0.01.$$

注　若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大. 因此

$$\boxed{\Delta y\approx 2x_0\Delta x}\quad 即\quad \boxed{\Delta y\approx f'(x_0)\Delta x}$$

函数的改变量

定理 1 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$\iff \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

定理 2 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

解 $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\Longrightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\Longrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1 计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解 取 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 再取 $x_0=1$, $\Delta x = 0.02$，则有

$$\begin{aligned}\sqrt{1.02} &= f(1.02) = f(1+0.02)\\ &\approx f(1) + f'(1)\times 0.02 = 1.01\end{aligned}$$

. . . .

注 以后将会学到更准确的近似公式：

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

近似计算

取 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\frac{1}{4(\sqrt{x})^3}$. 再取 $x_0=1$, $\Delta x = 0.02$，则有

$$\begin{aligned}\sqrt{1.02} &= f(1.02) = f(1+0.02)\\ &\approx f(1) + f'(1)\times 0.02 + \frac{f''(1)}{2}\times 0.02^2\\ &= 1 + \frac{1}{2}\times 0.02 - \frac{1}{8}\times 0.02^2 = 1.00995\end{aligned}$$

而准确值为 $\sqrt{1.02} = 1.0099505\cdots$.

5.2 微分的定义

微分的概念

定义 1　对于自变量在点 x 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为

$$dy = A\Delta x.$$

微分的概念

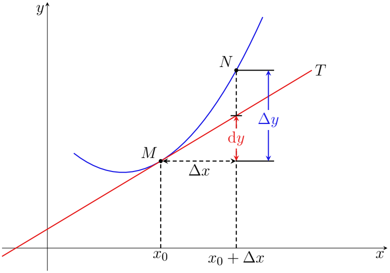
定理 3　$y=f(x)$ 在点 x 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且此时有 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

注　从 $y=x$ 可以得到 $\mathrm{d}x=\Delta x$，故定理中的等式可以写为 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$.

注　根据定理3: 由于可微即可导. 若不会对函数微分, 可先对函数求导, 两边乘以 dx 即可.

$$\frac{dy}{dx}=f'(x) \iff dy=f'(x)dx$$

微分的几何意义：以直代曲



微分的计算

例 2　求 $y=x^2$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

解　$dy=(x^2)'\,\Delta x=2x\Delta x$，所以

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 2\times 2\times 0.01 = 0.04.$$

微分的计算

例 3 求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$.

解 (1) $dy = y'_x dx = (xe^x)'_x dx = (x+1)e^x dx$.

(2) $dy = y'_x dx = \Big(\sin(3x+2)\Big)'_x dx$.

$$= 3\cos(3x+2)dx$$

5.3 形式不变性

微分法则

基本初等函数的微分：

1. $d(C) = 0$
2. $d(x^a) = ax^{a-1}dx$
3. $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$
4. $d(e^x) = e^x dx$
5. $d(\sin x) = \cos x dx$
6. $d(\cos x) = -\sin x dx$

微分的四则运算：

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(Cu) = Cdu$
3. $d(uv) = vdu + udv$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$

微分的形式不变性

- 若 $y = f(u)$，则有 $\mathrm{d}y = f'(u)du$；
- 若 $y = f(u), u = g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y = f'(u)du$.

例如 $[\sin x]' = \cos x$，但是 $[\sin 2x]' \neq \cos 2x$.

$d(\sin x) = \cos x dx \Longrightarrow d(\sin 2x) = \cos 2x d(2x)$.

例 4 $y=\ln\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right)$, 求 dy.

解

$$
\begin{aligned}
dy &= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}} d\left(1+\mathrm{e}^{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}} \cdot \mathrm{e}^{x^2} d\left(x^2\right) \\
&= \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}} \cdot \mathrm{e}^{x^2} \cdot 2x dx \\
&= \frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}} dx
\end{aligned}
$$

例 5 设 $y\sin x-\cos(x-y)=0$, 求 dy.

解 利用一阶微分形式不变性, 有

$$d(y\sin x)-d(\cos(x-y))=0$$

$$\sin x dy+y\cos x dx+\sin(x-y)(dx-dy)=0$$

$$dy=\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}dx$$

5.4 内容小结

内容小结

1. 微分概念
   - 微分的定义及几何意义
   - 可微 $\Longleftrightarrow$ 可导
2. 微分形式不变性: $df(u)=f'(u)du$

   微分运算法则

本章完!