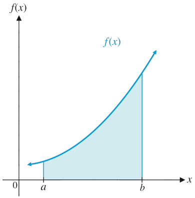
第五章 · 定积分

第一节 · 定积分的概念与性质

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

1.1 定积分的思想

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 那么函数 $f(x)$ 与 x 轴，以及两条直线 $x = a$, $x = b$ 所围成的曲面梯形的面积 A 是多少?



解法

第一步: 求 A 的近似面积

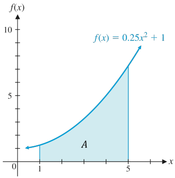
1. 点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间 $[a, b]$ 平均分成 n 个小区间. 每个子区间宽度为
$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}.$$
2. 每个子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 构建宽为 Δx_k 的竖直矩形.
3. 所有子区间矩形面积总和得近似值; 误差 ε 存在.

第二步: 去误差得真实面积 A

4. 取极限, 去误差, 得面积值.

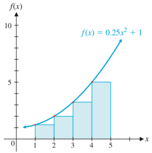
A 的近似值

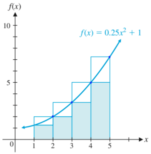
分析 求 $f(x) = 0.25x^2 + 1$ 在 $[a, b] = [1, 5]$ 上连续，所围成的阴影部分面积 A.



1 若取 $n = 4$, 把区间 $[1, 5]$ 均分成 4 等份. 每个子区间宽度为 $\Delta x_k = 1$.

A 的近似值

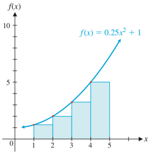


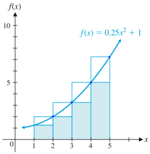


2 在每个子区间构造矩形;

- 在子区间左端点构造左矩形(左图).
- 在子区间右端点构造右矩形(右图).

A 的近似值





3 设 L_n, R_n 为左、右矩形在区间 $[a, b]$ 面积和.

$$L_4 = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 = 11.5.$$

$$R_4 = f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + f(5) \cdot 1 = 17.5.$$

A 的近似值

得 A 的估值范围;

$$11.5 = L_4 < A < R_4 = 17.5.$$

同理, 若 $n = 16, 100$ 时有,

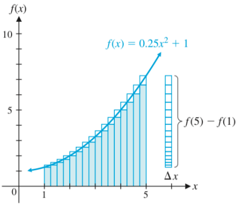
$$13.59 = L_{16} < A < R_{16} = 15.09.$$

$$14.214 = L_{100} < A < R_{100} = 14.454.$$

结论

- 计算结果得近似值, 表明误差 ε 的存在性.
- n 取值越大, 估值越接近真实值 A; 误差 ε 随着 n 的增大而变小.

去误差 ε



$$\begin{aligned}\varepsilon = |A - L_n| &= |A - R_n| \\ &< |f(b) - f(a)|\Delta x_k \\ &= |f(b) - f(a)|\frac{b-a}{n}\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \varepsilon < \lim_{n\to\infty} |f(b) - f(a)| \cdot \frac{b-a}{n} = 0.$$

当 $n \to \infty$ 时, $\Delta x \to 0$, 误差 $\varepsilon \to 0$.

注　若区间不均等分, 当 $n \to \infty$ 时, 只要宽度最大的区间

$$P := \max_{1\le k\le n} \{\Delta x_k\}$$

趋近于零, 误差也趋近于零.

结论　若函数 $f(x) > 0$ 在区间 $[a, b]$ 单调, 若 $n \to \infty$ 时, 其矩形总面积**等于**所求面积真实值. 即

$$A = \lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} R_n.$$

1.2 定积分

黎曼和公式

定义 1　若 $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, 则公式

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

称为黎曼和公式.

例如　左矩形面积总和公式: $\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k$ 与
右矩形面积总和公式: $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$ 是黎曼和公式

分析　若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, 已知当 $n \to \infty$ 或 $P \to 0$ 时, 黎曼和公式 S_n 极限存在. 由此我们可以总结一个结论.

黎曼和极限

定义 2 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 连续, $\forall \xi_k \in [x_{k-1},\ x_k] \subset [a,\ b]$, 当 $n \to \infty$ 时, 黎曼和极限存在

$$\lim_{P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = I.$$

其中 $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, 且 $P = \max_{1 \le i \le n} \{\Delta x_k\}$.

定积分的概念

定义 3 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 连续, 则黎曼和极限存在，我们称此极限为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上的定积分; 记作

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间

注 1 定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注 2 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a,b]$ 上是可积的．

注 3 设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 A

- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x) \ge 0$, x 轴上方的累计面积为正, 则定积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A.$$
- 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x) \le 0$, x 轴下方的累计面积为负, 则定积分
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -A.$$

例 1 利用定积分定义计算 $\int_0^1 x^2\,dx$.

解 $\because f(x) = x^2 \in C[0,1] \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx$.

把区间 $[0,\ 1]$ 分为 n 等份, 等份点为 $x_i = \frac{i}{n}$.

取 $\xi_i = x_i = \frac{i}{n}, \Delta x_i = \frac{1}{n}, (i = 1, 2, \cdots, n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}$$

1.3 定积分的基本性质

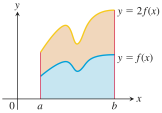
性质 1 (线性性质)

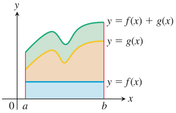
- 常数不参与积分运算:

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$$

- 函数可加性:

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$$





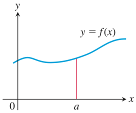
性质 2

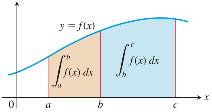
- 点的面积为零:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

- 区间可加性: 若 $a < b < c$, 则

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$





性质 3　定积分上下限互换, 结果反号:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

性质 2 中, 取 $c = a$ 得证.

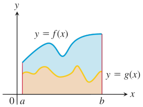
性质 4　设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

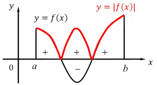
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$.





例 2　比较大小

(1) $\int_1^2 x^2\,dx,\ \int_1^2 x^3\,dx$　　(2) $\int_1^2 \ln x\,dx,\ \int_1^2 (\ln x)^2\,dx$

解:

(1) 因为在 $[1, 2]$ 上, $x^2 < x^3$

$$\therefore \int_1^2 x^2\,dx < \int_1^2 x^3\,dx$$

(2) 因为在 $[1, 2]$ 上, $\ln x > (\ln x)^2$

$$\therefore \int_1^2 \ln x\,dx > \int_1^2 (\ln x)^2\,dx$$

性质 5

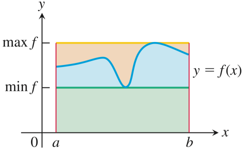
$$\int_a^b 1\,dx = \int_a^b dx = b - a.$$

推论

$$\int_a^b k\,dx = k(b - a).$$

性质 6 (估值定理) 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$



例 3 估计积分值 $\int_1^4 \left(x^2+1\right) dx$

解: $f(x) = x^2+1$ 在 $[1,4]$ 上单调递增，最小、最大值分别为 $m=f(1)=2, M=f(4)=4^2+1=17.$

$$2(4-1) \leq \int_1^4 \left(x^2+1\right) dx \leq 17(4-1)$$

所以

$$6 \leq \int_1^4 \left(x^2+1\right) dx \leq 51.$$

性质 7 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

证明 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有最值 m, M; $m \leq f(x) \leq M$,

估值定理得: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

由介值定理, $\exists \xi \in [a,b]$, 使得 $f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ 即

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

注 上述性质也是说，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

分析

$$f(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)\,\Delta x_i}{b-a}, \quad \Delta x_i = \frac{1}{n}(b-a)$$

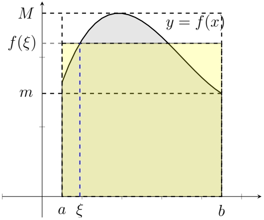
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{\Delta x_i}{b-a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n f(x_i)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

由此可见, $f(\xi)$ 是函数 $f(x)$ 在 $[a,\,b]$ 上的算术平均值.

积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



1.4 内容小结

- 定积分的定义：黎曼和的极限.
- 定积分的性质.
- 积分中值定理 $\Rightarrow$ 连续函数在区间上的平均值公式.

你们课上学到了什么知识，不是最重要的，学到了，那也仅仅是一门课而已．你们这一辈子要学习的东西有很多，但你们一定要了解自己．了解自己想做什么，了解自己喜欢什么，了解自己想成为一个什么样的人．而你们要了解自己，就必须要了解这个世界，了解其他人和其他事．所有你们现在还未知的，就是你们未来要探索的．悦己而后悦世人，知世人而后知己．