第三章 · 导数的应用

第四节 · 函数的极值与最值

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

4.1 函数的极值

最值

定义 1

设 $f(x)$ 在其定义域 D 上有定义, 且存在一点 $\xi \in D$.

(1) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(x) \leq f(\xi)$

- $f(\xi)$ 为函数 $f(x)$ 的一个最大值.

(2) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(x) \geq f(\xi)$

- $f(\xi)$ 为函数 $f(x)$ 的一个最小值.

注

- 函数的最值是函数的全局性质.

极值

定义 2

设 $f(x)$ 在其定义域 D 上有定义, 且存在一点 $\xi \in D$.

(1) 若 $x \in \mathring{U}(\xi)$, 都有 $f(x) \leq f(\xi)$, 则称

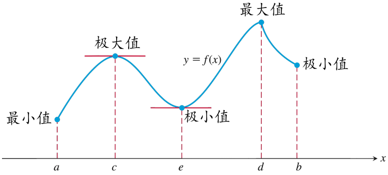
- $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 使得对所有 $x \in D$ 都有, $f(x) \geq f(\xi)$

- $f(\xi)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

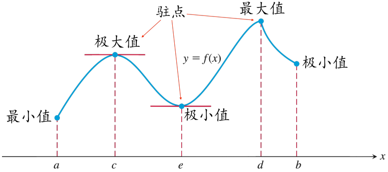
注

- 函数的极值是函数的局部性质;



注

- 全局性质满足局部性质;
- 最小值也是极小值, 最大值也是极大值;
- 极大值和极小值统称为极值.
- 极大值点和极小值点统称为极值点.



定理 1 (极值的必要条件)

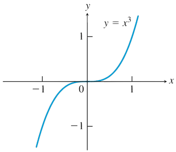
若函数 $f(x)$ 在点 ξ 可导, 且在 ξ 点取得极值, 则

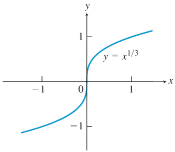
$$f'(\xi) = 0.$$

定义 3 导数为零或者不存在的点称为函数的驻点.

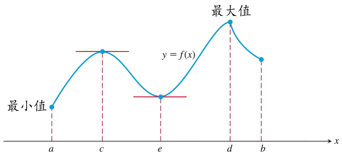
注 课本只定义导数为零的点是驻点.

驻点未必都是极值点, 也存在与在闭区间的端点处





4.2 最大值最小值问题



若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，则其最值只能在驻点或端点处达到.

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导.则可按照下面步骤求出函数的最值：

1. 求一阶导函数，得 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内的极值可疑点
$$x_1, x_2, \cdots, x_m$$
2. 求可疑极值点函数值;
3. 判别最大值，最小值:

最大值
$$M=\max\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \cdots, f\left(x_m\right), f(a), f(b)\right\}$$
最小值
$$m=\min\left\{f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \cdots, f\left(x_m\right), f(a), f(b)\right\}$$

例 1　求函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[-2,\ 1]$ 上的最值.

解

1. 求驻点: $f'(x)=2x=0$，得 $x=0$ 且 $x\in[-2,\ 1]$.
2. 求驻点和区间端点处的函数值:
   - $f(0)=0$;
   - $f(-2)=4$;
   - $f(1)=1$.
3. 最大值 $f(-2)=4$，和最小值 $f(0)=0$.

例 2　求函数 $f(x)=x^{2/3}$ 在区间 $[-2,\ 3]$ 上的最值.

解

1. 求驻点: $f'(x)=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\neq 0$，
   $x=0$ 使得导数不存在，且 $0\in[-2,\ 3]$.
2. 求驻点和区间端点处的函数值:
   - $f(0)=0$;
   - $f(-2)=(-2)^{2/3}=\sqrt[3]{4}$;
   - $f(3)=(3)^{2/3}=\sqrt[3]{9}$.
3. 最大值 $f(3)=\sqrt[3]{9}$，最小值 $f(0)=0$，和极大值 $f(-2)=\sqrt[3]{4}$.

例 3 求函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x$ 在闭区间 $\left[-\frac{1}{4},\frac{5}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

解 绝对值函数在 $x=0$ 分段, $x_1=0$ 为可疑极值点.

$$f(x)=\begin{cases}-\left(2x^3-9x^2+12x\right), & -\frac{1}{4}\le x\le 0\\ 2x^3-9x^2+12x, & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}-6(x-1)(x-2), & -\frac{1}{4}\le x<0\\ 6(x-1)(x-2), & 0<x\le\frac{5}{2}\end{cases}$$

$f'(x)=0$, 得可疑极值点 $x_2=1, x_3=2$.

闭区间端点处得可疑极值点 $x_4=-\frac{1}{4}$, $x_5=\frac{5}{2}$.

$f\left(\frac{-1}{4}\right)=3\frac{19}{32}, f(0)=0, f(1)=5, f(2)=4, f\left(\frac{5}{2}\right)=5.$

故函数在 $x=0$ 取最小值 0; 在 $x=1$, $\frac{5}{2}$ 取极大值 5.

注

- 如果函数 $f(x)$ 在区间上可导, 且只有一个驻点 ξ. 则 $f(\xi)$ 为极大值时就是最大值, 为极小值时就是最小值.
- 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调时, 最值必在端点处达到.
- 对应用问题, 有时可根据实际意义判别求出的可疑点是否为最大值点或最小值点.

4.3 内容小结

内容小结

1. 最值: 函数的全局性质;
2. 极值: 函数的局部性质;
3. 极大值和极小值统称为极值.
4. 极大值点和极小值点统称为极值点;
5. 极值的必要条件: $f'=0$;
6. 导数为零或者不存在的点称为函数的驻点;
7. 极值可疑点: 驻点, 区间端点.

本节完!