第一章 · 函数与极限

第五节 · 两个重要极限

山东财经大学　田宽厚

5.1　重要极限 I

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I - 夹挤准则)　如果数列

1. $x_n \le y_n \le z_n$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$;

则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

注　在上述定理中，如果不等式 $x_n \le y_n \le z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

极限存在准则 I

例 1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=1$

证明　利用夹挤准则, 由

$$\frac{n^2}{n^2+n} < \left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right) < \frac{n^2}{n^2+1}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} = 1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right) = 1.$$

极限存在准则 I

定理 1 (极限存在准则 I - 夹挤准则) 如果函数

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;
2. $\lim f(x) = A$, $\lim h(x) = A$;

则有 $\lim g(x) = A$.

注 在上述定理中，如果不等式 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

重要极限 I

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$$

重要极限 I

例 2 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 原式

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\times\frac{1}{1} = 1$$

重要极限 I

例 3 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

解 令 $t = \arcsin x$, 则 $x = \sin t$, 因此

$$\text{原式} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$$

注 了解复合函数求极限之后, 可用 $f(f^{-1}(x)) = x$ 得极限. 同理可证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x} = 1$.

重要极限 I

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}]^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

注　计算中注意利用 $\lim\limits_{\phi(x)\to 0}\dfrac{\sin\phi(x)}{\phi(x)}=1.$

5.2　重要极限 II

极限存在准则 II

定理 2 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注　若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};\quad \xRightarrow{u=1/x}\quad \lim_{u\to 0}\left(1+u\right)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$

简单情形

例 5 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^2=\mathrm{e}^2$$

简单情形

例 6 求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^x$

解 原式 $=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{-1/3}$$

简单情形

例 7 求极限 $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解 原式 $=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}}\right]^{-\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{-1/2}$$

注 在简单情形下，若无穷小量与无穷大量互为倒数，则

$$\lim(1+K\cdot\text{无穷小量})^{\text{无穷大量}}=e^K$$

幂指情形

定理 (幂指函数的极限)

若 $\lim u(x) = A > 0$，$\lim v(x) = B$，则有

$$\lim u(x)^{v(x)} = A^B.$$

幂指情形

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2x}{x-1}} = \mathrm{e}^2.$$

幂指情形

例 9 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$= \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3x}{\sin x}} = \mathrm{e}^3.$$

幂指情形

例 10 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解 因为当 $x\to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小量，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1 = 2$.

5.3 内容小结

内容小结

极限存在准则 I(定理1)

$\Downarrow$

重要极限 I

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

极限存在准则 II(定理2)

$\Downarrow$

重要极限 II

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

本节完!