第五章・定积分

第三节・定积分的换元法和分部积分法

■山东财经大学 ■田宽厚

3.1 定积分的换元法

根据牛顿—莱布尼茨公式: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数 $(F'(x) = f(x))$, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

对于一个复合函数 $F(g(x))$ 求导得

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

所以, 根据牛顿—莱布尼茨公式:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

定理 1 若 $g'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 连续, 且 f 在 $u = g(x)$ 的值域连续, 则

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

其中，当 $x = a$ 时，$u = g(a)$；当 $x = b$ 时，$u = g(b)$.

例 1 计算 $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}dx.$

解 设 $u = x^3+1$, $du = 3x^2dx$.

当 $x = -1, u = (-1)^3+1 = 0.$

当 $x = 1, u = (1)^3+1 = 2.$

$$\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx = \int_0^2 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_0^2$$
$$= \frac{2}{3}\left[2^{3/2}-0^{3/2}\right] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

- 必需注意**换元必换限**, 原函数中的变量不必代回.

例 2 (章节 4 不定积分例 20, 课本 p179)

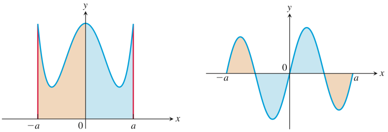
计算 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $(a>0)$.

解 设 $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$, 且 $t = arcsin\frac{x}{a}$.

当 $x = 0, t = arcsin\frac{0}{a} = 0$. 当 $x = a, t = arcsin\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t dt$$
$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

3.2 定积分性质



(a) (b)

(a) 对**偶**函数, 从 $-a$ 到 a 的定积分是从 0 到 a 定积分的两倍.(**偶倍**)

(b) 对**奇**函数, 从 $-a$ 到 a 的定积分是 零.(**奇零**)

奇偶性与定积分

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$.

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$(令 $t=-x$)

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

例 3 计算 $\int_{-2}^{2} \frac{x^{27}(\arctan x)^4 \cos 2x}{\sqrt{5-x^2}}dx$

解 被积函数为奇函数. 则原式 $=0.$

例 4 计算 $\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$

解 被积函数为偶函数, 故

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

令 $x=\tan u$, 则 $\left(1+x^2\right)^2 = \sec^4 u$, $dx = \sec^2 u du$

且 $u=\arctan(x)$ 有 $x=0, u=0$, $x=1, u=\frac{\pi}{4}$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^4 u}\cdot \sec^2 u\,du$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\,du = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 1+\cos(2u)\,du$$

$$= u + \frac{1}{2}\sin(2x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+1\right).$$

例 5 $f(x) = \begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0; \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1 < x < 0. \end{cases}$ 求 $\int_{1}^{4} f(x-2)dx.$

解: 设 $x=t+2$, 则 $t=x-2$, $dx=dt$. 且 $x=1, t=-1$, $x=4, t=2$.

$$\int_{1}^{4} f(x-2)dx = \int_{-1}^{2} f(t)dt = \int_{-1}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{2} f(t)dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+\cos t}dt + \int_{0}^{2} te^{-t^2}dt$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}dt - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{-t^2} d\left(-t^2\right)$$

$$= \tan(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}.$$

定理 2

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$ [p213, 例 5]

2 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

证明 (1) 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则 $t = \frac{\pi}{2} - x$, $dx = -dt$, 且

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}; \\ x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

(2) 证 $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx.$

令 $x = \pi - t$, 则 $t = \pi - x$, $dx = -dt$, 且 $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = \pi; \\ x = \pi \Rightarrow t = 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx &= -\int_{\pi}^{0} (\pi - t)f[\sin(\pi - t)]dt \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \\ &= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx - \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx \end{aligned}$$

$\therefore \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

3.3 定积分的分部积分法

定理 3 (定积分的分部积分法) 设函数 $u(x), v(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

或

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

- 根据" 反、对、幂、指、三" 先后顺序设 u.
- 定积分的分部积分公式的适用范围及使用方法与不定积分类同.

例 6 计算 $\int_0^1 \arctan x dx.$

解 设 $u=\arctan x$, $v'=x$, 则 $u'=\frac{1}{x^2+1}$, $v=x$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x dx &= (x\arctan x)\big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

例 7 (多次使用分部积分法) 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx.$

解 设 $u=e^x$, $v'=\sin x$, 则 $u'=e^x$, $v=-\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x\, dx$$

设 $u=e^x, v'=\cos x,$ 则$u'=e^x$, $v=\sin x$

$$= -e^x\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} + e^x\sin x|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\, dx$$

故 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}+1\right).$

- 也可设 $u=\sin x, v'=\mathrm{e}^x$, 但两次所设类型必须一致.

3.4 内容小结

基本积分法 (换元必换限, 配元不换限, 边积边代限.)

- 换元积分法
- 分部积分法

本节完!