第二章 · 函数与极限

第四节 · 隐函数求导

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

4.1 隐函数求导

显函数与隐函数

定义 1 若方程 $F(x, y) = 0$ 能确定 y 是 x 的函数，或将一个显函数 $y = f(x)$ 隐藏在方程 $F(x, y)$ 中使得方程恒等 $F(x, y) = 0$. 那么称这种方式表示的函数是隐函数.

例如 当 $y = x - 1$ 时，得恒等式方程

$$y - x + 1 = 0$$

所以称 $y - x + 1 = 0$ 为隐函数.

注 y 在隐函数 $F(x, y) = 0$ 中不是变量，是关于 x 的函数，所以 $y = y(x)$.

隐函数的求导方法

由隐函数转换成显函数，称为隐函数显化，例如：隐函数 $y - x + 1 = 0$ 可以显化为 $y = x - 1$ 从而可以对可显化的隐函数求导. 然而并非所有隐函数都可以显化，例如：

$$y^5 + 2y - x - 3x^7 = 0$$

问题 1 如何对无法显化的隐函数求导？

解法 由于在 $F(x, y) = 0$ 中 $y = y(x)$，所以对方程两边同时对 x 求导.

$$\frac{d}{dx}F(x, y) = 0$$

例 1 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程两边对 x 求导

$$\frac{d}{dx}\left(y^5+2y-x-3x^7\right)=0$$

$$5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

例 2 求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处的切线方程.

解 椭圆方程两边对 x 求导

$$\frac{x}{8}+\frac{2}{9}y\cdot y'=0$$

$$y'=-\frac{9}{16}\frac{x}{y}$$

所以在点 $\left(2,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ 处, $y'=-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

故切线方程为

$$y-\frac{3}{2}\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-2)$$

4.2 幂指函数求导

例 3 求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解 两边取对数, 化为隐式

$$\ln y=\sin x\cdot\ln x$$

$$\Downarrow \text{两边求导 } x$$

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}$$

$$y'=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

例 4　求幂指函数导数 $y=u^v$, 其中 $u=u(x), v=v(x)$.

解　先取对数再求导 x:

$$\ln y = v\ln u$$

$\Downarrow$ 求导

$$\frac{1}{y}y' = v'\ln u + \frac{u'v}{u}$$

$$y' = u^v\left(v'\ln u + \frac{u'v}{u}\right) = u^v\ln u\cdot v' + vu^{v-1}\cdot u'$$

注

- 指数函数求导公式: $u^{v(x)} = u^v\ln u\cdot v'$
- 幂函数求导公式: $u(x)^v = vu^{v-1}\cdot u'$.

例 5　求 $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(a>0, b>0, \frac{a}{b}\neq 1\right)$ 导数.

解　先取对数再求导 x:

$$\ln y = x\ln\frac{a}{b} + a[\ln b - \ln x] + b[\ln x - \ln a]$$

$\Downarrow$ 求导

$$\frac{y'}{y} = \ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

$$y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}\right)$$

注　有些显函数用对数求导法求导很方便.

例 6　求函数 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 导数.

解　先取对数再求导 x:

$$\ln y = \frac{1}{2}[\ln|x-1| + \ln|x-2| - \ln|x-3| - \ln|x-4|]$$

$\Downarrow$ 求导

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}\right]$$

4.3　参数方程求导

参数方程求导

若参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系则 $g'(t) \neq 0$ 时，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{h'(t)}{g'(t)}$$

$h'(t) \neq 0$ 时，有

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{dy} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dy}{dt}} = \frac{g'(t)}{h'(t)}$$

参数方程求导

若上述参数方程中 $g(t), h(t)$ 二阶可导，且 $g'(t) \neq 0$ 则由它确定的函数 $y = f(x)$ 可求二阶导数.

利用新的参数方程 $\begin{cases} x = g(t) \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h'(t)}{g'(t)} \end{cases}$，可得

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{g'^2(t)} / g'(t)$$

$$= \frac{h''(t)g'(t) - h'(t)g''(t)}{g'^3(t)}$$

例 7 设 $\begin{cases} x = f'(t) \\ y = tf'(t) - f(t) \end{cases}$，且 $f''(t) \neq 0$，求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

解

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{tf''(t) + f'(t) - f'(t)}{f''(t)} = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}t = \frac{dt}{dx} = \frac{dt}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{dt}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{f''(t)}.$$

例 8 设由方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ t^2 - y + \varepsilon \sin y = 1 \end{cases}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ 确定函数 $y = y(x)$，求 $\frac{dy}{dx}$.

解 方程组两边对 t 求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t + 2 \\ 2t - \dfrac{dy}{dt} + \varepsilon \cos y \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(t+1) \\ \dfrac{dy}{dt} = \frac{2t}{1 - \varepsilon \cos y} \end{cases}$$

故

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{t}{(t+1)(1 - \varepsilon \cos y)}.$$

4.4 相关变化率

相关变化率

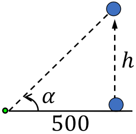
$x=x(t), y=y(t)$ 为两可导函数, x, y 之间有联系 $\Rightarrow \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ 之间也有联系. 这两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

解法

1. 找出相关变量的关系式;
2. 求导, 得相关变化率之间的关系式;
3. 求出未知的相关变化率

例 9 一气球从离开观察员 $500\,\mathrm{m}$ 处离地面铅直上升, 其速率为 $140\,\mathrm{m/min}$, 当气球高度为 $500m$ 时, 观察员视线的仰角增加率是多少?

解



设气球上升 t 分后其高度为 h, 仰角为 α,

则 $\tan\alpha = \frac{h}{500}$.

两边对 t 求导: $\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500}\frac{dh}{dt}$

已知 $\frac{dh}{dt} = 140\,\mathrm{m/min}, h = 500\,\mathrm{m}$

$\tan\alpha = 1, \sec^2\alpha = 1+\tan^2\alpha = 2$

$$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}\cdot 140 = 0.14\,(\mathrm{rad/min})$$

4.5 内容小结

内容小结

高阶导数的求法

1. 隐函数求导法则-直接对方程两边求导, 例1, 2;
2. 对数求导法: 适用于幂指函数 (例3, 4) 及某些用连乘 (例5), 连除 (例6) 表示的函数.
3. 参数方程求导法, 例7, 8;
4. 相关变化率问题, 例9.

列出依赖于 t 的相关变量关系式

$\Downarrow$ 对 t 求导

相关变化率之间的关系式

本节完!