概率论与数理统计

第一章 · 随机事件

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

第一节 随机事件

1.1 随机试验与事件

随机试验

定义 (Random Experiment) 如果一项试验能够在相同条件下重复进行，并且每次试验至少有两种可能的结果，但是在一次试验前无法确定哪个结果会实现，则称之为随机试验. 换言之，随机试验就是无法确切预知结果的一种机制.

在本课程中，我们一般用试验代指随机试验, 记 E. 且有以下特点

1. 可以在相同的条件下重复进行;
2. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果;
3. 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验

随机试验的例子：

1. 投掷一颗筛子，观察所掷的点数是几；
2. 将一枚硬币抛掷两次, 观察每次试验的结果；
3. 记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数；
4. 记录某地的最低与最高气温.

样本空间

定义 (sample point and sample space) 随机试验的每个可能结果称为一个样本点，全体样本点组成的集合称为样本空间.

注 习惯上分别用 ω 和 Ω 或者 Ω 和 Ω 表示样本点与样本空间.

例 1 E_1 : 投掷一枚筛子，观察出现的点数.

$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

例 2 E_2 : 将一枚硬币抛掷两次, 每次试验有两种可能的结果: “正面朝上 (H) ” 和 “反面朝上 (T) ”

$$\Omega_2 = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$$

注 Ω_2 是二维样本点, 具体在多维章节细讲.

例 3　E_3 : 记录电话交换台一分钟内接到的呼叫次数.

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

例 4　E_4 : 假设 t_0 为某地区的最低气温，t_1 为该地区最高气温. 令 t 表示该地区可能的气温值，则 t 样本空间为

$$\Omega_4 = \{t \in \mathbb{R} : t_0 \le t \le t_1\}$$

问题 1　通常用 $|\cdot|$ 表示一个集合所包含元素的个数, 例如 $|\Omega_1| = 6$, $|\Omega_2| = 4$. 那么 Ω_3, Ω_4 包含多少样本点?

问题 2　$|\Omega_3|$ 与 $|\Omega_4|$ 有何不同?

集合的分类

定义 (Countable Set)　如果集合的每个元素与自然数集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ 中的每个元素一一对应, 我们称该集合为可数集, 如果它既不是可数集也不是有限集, 我们称该集合为不可数集.

$$\text{样本空间} = \begin{cases} \text{有限集合.} \\ \text{无限集合} = \begin{cases} \text{可数集合;} \\ \text{不可数集合.} \end{cases} \end{cases}$$

- Ω_1 与 Ω_2 是有限集合, Ω_3 是无限可数集合, Ω_4 是无限不可数集合.
- 可数样本空间与不可数样本空间的差别决定了概率表示方式的不同.

随机事件

在随机试验中不是单纯的观察样本空间的所有元素了事，为了探讨所关注的概率问题，我们引入事件这一基本概念.

定义 (Event)　样本空间的任意一个子集称为一个随机事件，简称事件. 事件常用大写字母 A, B, C 等表示. 在试验中，当事件中的一个样本点出现时，称该事件发生.

随机事件

随机事件的分类：

- 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
- Ω：必然事件
- $\varnothing$：不可能事件

注　必然事件与不可能事件都不是随机事件, 为了讨论问题的方便, 作为随机事件的两个极端情况处理.

从数学意义上说，一个事件等同于一个集合. 因此，本书中的“集合”与“事件”两个概念可以互换.

例 5　定义 A 为“投掷筛子的结果是偶数”的事件，B 为“投掷筛子的结果大于等于 4" 的事件, 则

$$A = \{2, 4, 6\}. \quad B = \{4, 5, 6\}$$

显然，样本空间、基本结果和事件之间三者间的关系如下:

$$\text{基本结果} \subseteq \text{事件} \subseteq \text{样本空间.}$$

例 6　计算 303 路公交车在大学站候车人数, 若 N 是最大可能上限人数, 则

- 样本空间 $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \cdots, N\}$;
- 事件 $A_1 = \{$ 至少有 20 人候车 $\} = \{20, 21, \cdots, N\}$;
- 事件 $A_2 = \{$ 有 21 人候车 $\} = \{21\}$

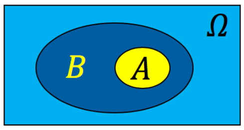
1.2 事件的关系与运算

(1) 包含关系，相等关系

若事件 A 发生时，事件 B 一定发生．则称事件 A 包含于事件 B（或事件 B 包含 A），记作

$$A \subset B \ (\text{或} B \supset A)$$

对任意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$



$A \subset B$

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

例如　例6中，设

事件 $A_1 = \{$ 至少有 20 人候车 $\} = \{20, 21, \cdots, N\}$;

事件 $A_2 = \{$ 有 21 人候车 $\} = \{21\}$，则

$$A_2 \subset A_1$$

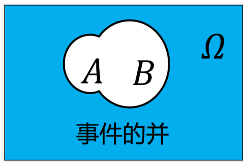
(2) 和事件

以下事件

“事件 A、B至少有一个发生”

称为事件 A 与 B 的和或并(union)，记作

$$A \cup B$$



从集合的观点来看，

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$$

(2) 和事件

事件的并可以推广到多个的情形：

如 n 个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \cdots, A_n \text{至少有一个发生”}$$

当 $n \to \infty$，有可数个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \cdots \text{至少有一个发生”}$$

(2) 和事件

定义 (collectively exhaustive)　假设 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 是样本空间 Ω 中的 n 个事件，n 为任意正整数．若 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称这 n 个事件是完全穷尽的．

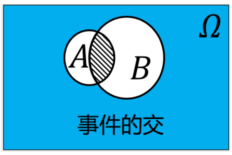
(3) 积事件

以下事件

“事件 A、B 同时发生”

称为事件 A 与 B 的积或交(intersection)，记作

$$A \cap B$$



从集合的观点来看，

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$

- 通常，我们用 AB 来表示 $A \cap B$.

(3) 积事件

事件的交可以推广到多个的情形：

有限 n 个事件的积

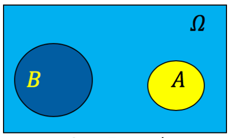
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \cdots, A_n \text{ 全都发生”}$$

当 $n \to \infty$，有可数个事件的积

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \cdots \text{ 全都发生”}$$

(4) 两事件互不相容 (互斥)

若 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 互斥（或称 A 与 B 不相容），即 A 与 B 不可能同时发生.



$A \cap B = \emptyset$

- 当 A, B 为互斥事件时，我们记 $A \cup B$ 为 $A + B$

定义 1 (mutually exclusive) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 中任意两个事件互不相容，即

$$A_i A_j = \varnothing, \ (1 \le i, j \le n).$$

则称这 n 个事件是两两互斥(或两两互不相容).

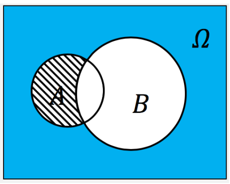
(5) 差事件

以下事件

“事件 A 发生，但 B 不发生”

称为事件 A 与 B 的差，记作

$$A - B$$



从集合的观点来看，

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$$

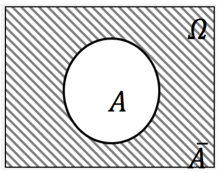
性质 对任意两个事件 A 和 B，总有 $A - B = A - AB$.

(6) 逆事件 (对立事件)

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件（或称 A 的补），记为 $\overline{A}$ 或 A^c.

$$A^c = \Omega - A.$$

它表示 “事件 A 不发生”.



对立事件表示，每次试验事件 A 和事件 A^c 有且仅有一个事件发生. 因此，我们有如下性质:

- 空集 $\varnothing$ 与样本空间 Ω，互为对立事件;
- $(A^c)^c = A$.

互不相容与对立

性质 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$ (A, B 互斥) $\Leftrightarrow$ A 与 B 互为对立事件.

注 从该性质可以看出; 两事件对立, 必定互不相容, 反之不然. 从随机事件间的关系和运算可以看出:

- 互不相容的概念适用于多个事件, 但对立的概念只适用于两个事件;
- 两事件互不相容只表明不能同时发生 (至多只能发生其中之一), 但可以都不发生;
- 而对立则表示有且仅有一个发生 (肯定了至少有一个发生).

练习 Consider the sample space $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Let

$$A := \{2, 4, 6\}, \qquad B := \{4, 5, 6\}.$$

Then it follows that

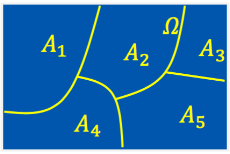
$$\begin{aligned}
&A = \{2, 4, 6\}, &&B = \{4, 5, 6\} \\
&A^c = \{1, 3, 5\}, &&B^c = \{1, 2, 3\} \\
&A - B = \{2\}, &&B - A = \{5\} \\
&A \cap B = \{4, 6\}, &&A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \\
&A \cap A^c = \varnothing, &&A \cup A^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega
\end{aligned}$$

定义 2 (Partitions) 设 Ω 为样本空间, 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$

(1) 两两互斥 $A_i A_j = \varnothing \, (i \neq j)$,

(2) 完全穷尽 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$.

则称 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为完备事件组 或 划分.



(7) 事件间的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算:

1. 交换律 (Commutative laws)
   - $AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律 (Associative laws)
   - $(AB)C = A(BC)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律 (Distributive laws)
   - $A(B \cup C) = AB \cup AC$,
   - $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$
4. 对偶律/德摩根律 (De Morgan's laws)
   - $\overline{\bigcup_{j=1}^{n} A_j} = \bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}$, $\overline{\bigcap_{j=1}^{n} A_j} = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{A_j}$

事件运算常用等式

性质 设 A, B 为两个事件, 则有

1. $A\overline{B} = A - AB$;
2. $A = AB \cup A\overline{B}$.

解 用事件运算的分配律:

1. $A\overline{B} = A(\Omega - B) = A\Omega - AB = A - AB$;
2. $AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A\Omega = A$.

例 7 设 A, B, C 是试验 E 的随机事件, 试用事件的运算符号表示下列事件

1. A 发生: A
2. 只有 A 发生, 而 BC 不发生: $A\overline{BC}$
3. A, B, C 中恰有一个发生: $A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$
4. A, B, C 同时发生: ABC
5. A, B, C 中至少有一个发生: $A \cup B \cup C$
6. A, B, C 中至多有一个发生: $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}C$
7. A, B, C 中至少有两个发生: $AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC + ABC$ 或 $AB + AC + BC$

例 8　从一批产品中每次取出一个产品进行检验 (每次取出的产品 A_i 不放回)

1. 三次都取到了合格品 (记为 E_1);
$$E_1 = A_1A_2A_3.$$
2. 三次中至少有一次取到合格品 (记为 E_2);
$$E_2 = A_1 + A_2 + A_3.$$
3. 三次中恰有两次取到合格品 (记为 E_3);
$$E_3 = A_1A_2\overline{A_3} + A_1\overline{A_2}A_3 + \overline{A_1}A_2A_3.$$
4. 三次中最多有一次取到合格品 (记为 E_4);
$$E_4 = A_1\overline{A_2A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1A_2}A_3 + \overline{A_1A_2A_3}.$$

例 9　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标（$i = 1, 2, 3$）. 试用事件的运算符号表示下列事件：

1. $A_1 + A_2$: 前两次射击中至少有一次击中目标.
2. $\overline{A}_2$: 第二次射击没有击中目标
3. $A_1A_2A_3$: 三次射击都击中目标.
4. $A_2 - A_3 = A_2\overline{A}_3$: 第二次射击击中目标而第三次没有击中目标.
5. $\overline{A_1 + A_3} = \overline{A}_1\overline{A}_3$: 第一次和第三次射击都没有击中目标.
6. $\overline{A_1} + \overline{A_3}$: 第一次、第三次射击中至少有一次没击中目标.

本节完!

第二节　事件的概率

随机事件的概率

在实际应用中我们常希望用一个准确的数值来度量在一次试验中某个事件发生的可能性的大小.

这种表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数, 就称为概率.

为此, 先看一下与其密切相关的一个概念, 频率.

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小.

在概率论的发展历史上, 曾有过多种概率定义方法：

- 概率的统计定义;
- 概率的古典定义;
- 概率的几何定义.

2.1 概率的统计定义

事件的频率

定义 (frequency)　设在 n 次试验中, 事件 A 发生了 m 次, 则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率.

注　它是一个集合函数, 自变量是一个集合. 反映了事件 A 发生的频繁程度.

事件的频率

频率 $f_n(A)$ 显然有以下几个性质:

1. 值域: $0 \le f_n(A) \le 1$
2. 归一性: $f_n(\Omega) = 1$
3. 若 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是两两互不相容的事件, 则有

$$f_n\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = f_n\left(A_1\right) + f_n\left(A_2\right) + \ldots + f_n\left(A_k\right)$$

思考　是否能用频率来作为事件发生的概率?

事件的频率

历史上的掷硬币试验:

试验者	投掷次数 n	正面次数 n_A	频率 $f_n(A)$
Buffon	4040	2048	0.5069
Kerrich	10000	5067	0.5067
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

事件的频率

大量的实验表明, 频率具有如下特点:

1. 频率有随机波动性.
2. 事件 A 发生的频繁程度越大, 频率也越大, 事件 A 在一次试验中出现的可能性也越大.
   - 它说明频率可在一定程度上反映事件发生的可能性大小, 但无法准确表达.

事件的频率

3. 实验的次数 n 较小时, $f_n(A)$ 在 0 和 1 之间的随机波动性较大.
   - 因此, 此时的频率值没有参考价值.
4. n 增大时, $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数, 对于每个事件 A 都有这样一个稳定的常数.

这种频率的稳定性, 就是一种隐藏在随机现象中的统计规律性, 并被人们长期的实践所证实.

思考　用频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的吗？

第五章证明，大量试验所得频率的稳定值用来描述概率是合理的；

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = P(A)$$

这种收敛是统计意义上的收敛.

R.von 米泽斯把这个固定数定义为该事件的概率，这就是概率的频率定义．雅各布 · 伯努利首次给出了证明．从理论上讲，概率的频率定义是不够严谨的.

当无法理论计算时，可以用大量重复实验后的频率稳定值来近似事件发生的概率.

例如　测试生产的灯泡的平均寿命，炮弹的可靠性.

概率的频率定义似乎并不简洁，也存在一定缺陷．而根据频率的性质假设一些更简单，更直接的关于概率的公理，再由此推导出概率的各种性质和结论，则更为容易被人接受，这就是概率的公理化定义.

概率的公理化定义

定义　给定一个随机试验，Ω 为相应的样本空间，对每一个事件 A，规定一个实数 $P(A)$ 与之对应，且满足如下公理：

公理1　非负性：$P(A) \geq 0$；

公理2　规范性：$P(\Omega) = 1$；

公理3　可数可加性：即对任意一列两两互不相容事件 $A_1, A_2 \dots A_n \dots$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率的性质

性质 1 (不可能事件的概率为零)　$P(\varnothing) = 0$. 反之不然.

性质 2 (有限可加性)　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容；

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

证明　因 $\sum\limits_{n=1}^{n} A_i = \sum\limits_{n=1}^{n} A_i + \varnothing + \cdots$ 由公理 3 得

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(\varnothing) + \cdots$$

而 $P(\varnothing) = 0$，故 $P\left(\sum\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$.

概率的性质

推论 1　若 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是完备事件组 (定义 1.1.2)，$\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

推论 2　若事件 AB 互不相容，则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

性质 3　设 $\overline{A}$ 是事件 A 的对立事件，则 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

证明　因 $\overline{A} + A = \Omega$, $\overline{A}A = \varnothing$ 由性质 2 有
$P(\overline{A} + A) = P(\overline{A}) + P(A)$ 又 $P(\overline{A} + A) = P(\Omega) = 1$
故 $P(\overline{A}) + P(A) = 1$，即 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

概率的性质

性质 4　若 $A \subset B$，则 $P(A-B) = P(A) - P(B)$，且 $P(A) < P(B)$.

证明　因 $A = B + (A - B)$，　且.B 与 $A - B$ 互斥，由性质 2 得：$P(A) = P(B) + P(A - B)$，即 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

注　对于任意事件 A, B，有 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

概率的性质

性质 5 (加减法公式)　设 A, B 为任意两个事件, 则

- $P(A-B) = P(A) - P(AB)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

证明　因 $A+B = A+(B-AB)$ 且 $A \cap (B-AB) = \varnothing$，由性质 2 得:

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P[A+(B-AB)] \\ &= P(A) + P(B-AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

2.2　概率的古典定义

古典概率模型

试验 E_1 抛一枚硬币, 观察其 H, T 出现的情况；

$$\Omega_1 = \{H, T\}$$

试验 E_2 抛一枚骰子, 观察其出现的点数；

$$\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

这些试验有两个明显特点：

1. Ω 中的元素只有有限个;
2. 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

这样的试验大量存在, 称为等可能概型. 由于它是概率论发展初期的研究对象, 又叫古典概型.

古典概率模型

定义　如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等,

则称此随机试验是古典型的．此时对每个事件 $A \subset \Omega$,

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点的总数}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

称为事件 A 的古典概率.

古典概型的一般问题

例 1　一枚硬币抛三次, 设事件 A : 恰有一次出现正面, 求 $P(A)$

解　首先正确给出样本空间:

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

事件 $A = \{HTT, THT, TTH\}$
每个基本事件发生的可能性相同——等可能概型

$$\therefore P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点的总数}} = \frac{3}{8}.$$

古典概率的计算关键在于算对两个数, $|A|$, $|\Omega|$. 而计算二者需要排列、组合的计算基础.

求概率问题 $\Rightarrow$ 记数问题

2.3　基本计数原理与排列组合

基本计数原理

加法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式，进行过程 II 有 n_2 种方式．那么，进行过程 I 或 II 共有 n_1+n_2 种方式．

乘法原理 假定进行过程 I 有 n_1 中方式，而对于过程 I 的每一个方式，进行过程 II 都有 n_2 种方式．那么，依次进行过程 I 与 II 共有 $n_1\cdot n_2$ 种方式．

例如 Suppose we have 4 shirts of different colors and 3 pants of different colors. How many different outfits are there? For each shirt there are 3 different colors of pants, so altogether there are $4\times 3=12$ possibilities

Combinatorics

$$
\text{排列组合}=\begin{cases}\text{排列}=\begin{cases}\text{重复排列;}\\ \text{不重复排列.}\end{cases}\\ \text{组合}=\begin{cases}\text{重复组合;}\\ \text{不重复组合.}\end{cases}\end{cases}
$$

注　二者区别在于顺序是否有关, 有关则排列, 无关则组合.

排列

定义 (permutation)　从 n 个不同元素中, 任取 $r\,(r\leq n)$ 个元素, 按照一定顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个排列.

例如　行李箱上的三位密码锁, 需把三个数字按照一定顺序" 组合" 在一起, 密码 123, 231 和 312 不一样.

重复排列

定义　从 n 个不同的元素中，有放回地取出 r 个元素组成的可重复排列的种数为 n^r 种．

分析　从 n 个元素中取一个 (有 n 种方法可选), 再将该元素放回, 并且重复这种选择 r 次.

这样排列的总数, 根据乘法原理为:

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n}_{r\text{次}}=n^r.$$

重复排列

例 2　由 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 可以组成多少个三位数?

解　第一位可以是 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 中的任何一个, 因而有 9 种确定第一位的方式.

由于题目中没有限制数字不重复, 即允许数字重复, 因而第二位, 第三位都各有 9 种确定的方式.

因此可以组成 $9\times 9\times 9=9^3$ (个) 三位数.

例 3　How many different license plate numbers with 3 letters followed by 3 numbers are possible?

解　$(26)^3(10)^3$. Indeed, the English alphabet has 26 different letters, therefore there are 26 possibilities for the first place, 26 for the second, 26 for the third, 10 for the fourth, 10 for the fifth, and 10 for the sixth. We multiply.

(不重复) 排列

定义 从 n 个不同的元素中，不放回地取出 r 个元素组成的不重复排列的种数为 $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

分析 从当前 n 个元素中取一个 (有 n 种方法可选); 若该元素不放回, 使得每次可选取的元素数量比前一次少一个; 重复这种选择 r 次.

这样排列的总数, 根据乘法原理为:

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}_{r\text{次}}$$

(不重复) 排列

$$\begin{aligned}&\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}_{r\text{次}}\\ =&\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)\cdot(n-r)\cdots2\cdot1}{(n-r)\cdots2\cdot1}\\ =&\frac{n!}{(n-r)!}\end{aligned}$$

- 当 $r=n$ 时, 这个排列称为全排列; 记

$$P_n=n(n-1)(n-2)\cdots3\times2\times1=n!.$$

- 当 $r<n$ 时, 这个排列称为选排列；记 $P_n^r:=\frac{n!}{(n-r)!}$.

(不重复) 排列

例 4 若在 4 个元素 $ABCD$ 中, 不重复地任取 2 个元素, 则排列方法有多少种?

解 4 个元素中任取 2 个元素, 则不重复的排列为 $P_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=12$ 种.

组合

定义 (combination) 从 n 个不同元素中, 任取 $r\,(r\le n)$ 个元素, 不管其顺序合成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 r 个元素的一个组合.

例如 水果沙拉.

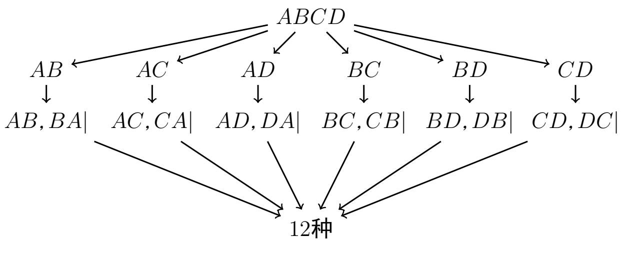
(不重复) 组合

问题 若在 4 个元素 $ABCD$ 中, 不重复地任取 2 个元素, 则组合方法有多少种?

分析 对比排列与组合的定义, 他们的不同在于抽取的元素排列顺序是否有关.当顺序有关时, 我们称其为排列. 当顺序无关时, 我们称其为组合.

(不重复) 组合

例4中, 已知 4 选 2 的排列方法为 $P_4^2=12$ 种



在顺序无关的情况下, 组合的方法有 $\frac{P_4^2}{2!}=\frac{4!}{(4-2)!}\cdot\frac{1}{2!}=\frac{12}{2}=6$ 种.

可以把组合看作于顺序无关的排列. $\Rightarrow\frac{P_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$

不重复组合

定义 1 从 n 个不同的元素中, 不放回地取 r 个组成的组合，种数为 $\frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$. 记 C_n^r 或 $\binom{n}{r}$. 则

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}.$$

例 5 How many ways can one choose a committee of 3 out of 10 people?

解 $\binom{10}{3} = 120$

例 6 Suppose there are 8 men and 8 women. How many ways can we choose a committee that has 2 men and 2 women?

解 We can choose 2 men in $\binom{8}{2}$ ways and 2 women in $\binom{8}{2}$ ways. The number of possible committees is then the product

$$\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{2} = 28\cdot 28 = 784$$

例 7 Suppose one has 9 people and one wants to divide them into one committee of 3, one committee of 4, and the last one of 2. There are $\binom{9}{3}$ ways of choosing the first committee. Once that is done, there are 6 people left and there are $\binom{6}{4}$ ways of choosing the second committee. Once that is done, the remainder must go in the third committee. So the answer is

$$\frac{9!}{3!6!}\frac{6!}{4!2!} = \frac{9!}{3!4!2!}$$

例 8 两封信向标号为 I, II, III, IV 的 4 个邮筒投寄. 求:

(i) 前两个邮筒各投入 1 封信的概率.
(ii) 第 II 个邮筒投入 1 封信的概率.
(iii) 两封信投入不同邮筒的概率.

解：设 A 表事件 (i), B 表事件 (ii), C 表事件 (iii); 投递第一封信有 4 个邮筒可供选择, 第二封信有 4 个邮筒可供选择, 则向四个邮筒投递两封信件的样本空间包含的基本事件总数: $|\Omega| = 4\cdot 4 = 16$.

(1) 前两个邮筒各投入 1 封信的概率.

事件 A 中包含的基本事件个数: $|A| = 2! = 2$. 则

$$P(A) = \frac{2}{16}.$$

(2) 第 II 个邮筒投入 1 封信的概率.

选一封信投到 II 号邮筒 $C(2,1)$, 余下的 3 个邮筒放另一封信 $C(3,1)$. 事件 B 中包含的基本事件个数: $|B| = C_2^1 C_3^1 = 6$. 则

$$P(B) = \frac{6}{16}.$$

(3) 两封信投入不同邮筒的概率.

事件 C 中包含的基本事件个数: $|C| = C_4^1 C_3^1 = 12$. 则

$$P(C) = \frac{12}{16}.$$

例 9 一袋中有 5 个白球 4 个黑球, 从中任取 3 个球. 求:

(i) 恰有 2 个白球 1 个黑球的概率.

(ii) 没有黑球的概率.

(iii) 颜色相同的概率.

解 从 9 个球中任取 3 个的的样本空间包含的基本事件总数 C_9^3.
设 A 表事件 (i), B 表事件 (ii), C 表事件 (iii),
则 $P(A) = \frac{C_5^2 C_4^1}{C_9^3}$, $P(B) = \frac{C_5^3}{C_9^3}$, $P(C) = \frac{C_5^3 + C_4^3}{C_3^9}$.

例 10 一袋内装有大小相同的 7 个球, 其中 4 个白球, 3 个黑球. 从中任取 3 个, 求至少有 2 个白球的概率.

解 设 A 表示“3 个球中至少有 2 个白球”,
A_2 表示“3 个球的恰好有 2 个白球”,A_3 表示“3 个球都是白球”.
$A = A_2 + A_3$, 且 $A_2 A_3 = \varnothing$.

$$P(A_2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} \qquad P(A_3) = \frac{C_4^3}{C_7^3}$$

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{22}{35} \approx 0.63$$

例 11 一批产品共 20 件，其中一等品 6 件，二等品 10 件, 三等品 4 件. 从中任取 3 件，求至少有两件产品等级相同的概率？

解 设 A 表示“至少有两件产品等级相同”.$\overline{A}$ 表示“3 件产品等级全不相同”.

$$P(\overline{A}) = \frac{C_6^1 C_{10}^1 C_4^1}{C_{20}^3} = \frac{4}{19}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19} \approx 0.789$$

例 12 有两部电话，在一小时内第一部电话占线的概率为 0.6，第二部电话占线的概率为 0.7，两部电话都不占线的概率为 0.2，求在一小时内至少有一部电话不占线的概率.

解 设 A 表示第一部电话不占线，B 表示第二部电话不占线. 在一小时内至少有一部电话不占线表示为 $A \cup B$

$$P(A) = 1 - 0.6 = 0.4, P(B) = 1 - 0.7 = 0.3, P(AB) = 0.2$$

由性质 5 得,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= 0.4 + 0.3 - 0.2 = 0.5. \end{aligned}$$

2.4 几何概型

定义 2　若试验具有下列两个特征：

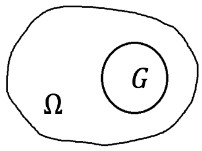
- 样本空间的元素有无限个；
- 每个样本点的发生具有某种等可能性.

则称此试验为几何概型试验.

设试验的每个样本点是等可能落入区域 Ω 上的随机点 M, 且 $G\subseteq\Omega$ 则 M 点落入子区域 G(事件 A) 上的概率为：

$$P(A)=\frac{m(G)}{m(\Omega)}$$

其中 $m(\cdot)$ 为自然测度. 测度可能是长度、面积、体积，甚至是质量.



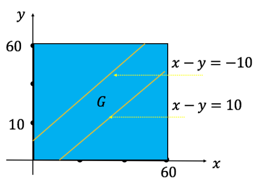
例 13　49 路公共汽车每隔 6 分钟来一辆，现有某人在等车，问他等车不超过 4 分钟的概率.

解　设 A “等车不超过 4 分钟” $A=[0,4]$, 样本空间 $\Omega=[0,6]$，则

$$P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

例 14 (碰面问题)　甲, 乙两人约定在中午的 12 时到 13 时在学校咖啡屋碰面, 并约定先到者等候另一人 10 分钟, 过时即可离去. 求两人能碰面的概率.

解　设甲乙到达咖啡屋的时间分别为 x,y, 且 $x,y\in[0,60]$. 则样本空间 $\Omega=\{(x,y)|0\leq x\leq 60, 0\leq y\leq 60\}$. $G=\{(x,y)|0\leq|x-y|\leq 10\}$ 且 $G\subset\Omega$. 两人能碰面的事件所对应的区域为图中 G 区域



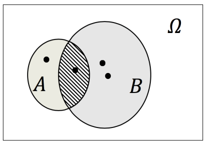
所求概率为: $P=\frac{m(G)}{m(\Omega)}=\frac{60^2-50^2}{60^2}=\frac{11}{36}$.

本节完!

第三节 条件概率与乘法公式

3.1 条件概率

条件概率



由图可知样本空间样本点的数量为 $|\Omega| = 4$, 根据等概型定义:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{4}.$$

问：在事件 B 已发生的前提条件下, $P(B) > 0$, 事件 A 发生的概率, $P(A|B)$, 是多少?

由图可知: $P(A|B) = \frac{1}{3}$.

分析

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B| \cdot \frac{1}{|\Omega|}}{|B| \cdot \frac{1}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

条件概率

定义 (conditional probability)　给定一个随机试验, Ω 为相应的样本空间, 任意两个事件 A, B, 其中 $P(B) > 0$, 称

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

为已知事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率, 简称 A 对 B 的条件概率.

条件概率

把无条件概率与条件概率比较

$$P(A) = P(A|\Omega) = \frac{P(A \cap \Omega)}{P(\Omega)}; \qquad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

发现

- 条件概率的实质是样本空间发生了变化, 由 Ω 变为 B.
- 条件概率也是概率, 满足概率定义中的三个基本属性.

条件概率的公理化性质

公理1^+　非负性: $P(A|B) \geq 0$;

公理2^+　规范性: $P(\Omega|B) = 1$;

公理3^+　可数可加性: 即对任意一列两两互不相容事件 $A_1, A_2 \ldots A_n$.

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B).$$

概率的性质

性质1$^+$ $P(\varnothing|B)=0$.

性质2$^+$ 有限可加性: 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为两两互不相容;

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i|B\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B).$$

性质3$^+$ 对任意事件 A 有; $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$.

性质4$^+$ 若 $A\subset C$, 则 $P(A|B)<P(C|B)$.

性质5$^+$ 设 A, C 为任意两个事件, 则

- $P(A-C|B)=P(A|B)-P(AC|B)$.
- $P(A\cup C|B)=P(A|B)+P(C|B)-P(AC|B)$.

例 1 全年级 100 名学生, 如图所示, 求 $P(A), P(B)$, $P(A\cap B)$, $P(A|B)$.

	北京 (B)	非北京	总计
男 (A)	12	68	80
女	8	12	20
总计	20	80	100

解 $P(A)=80/100$, $P(B)=20/100$, $P(A\cap B)=12/100$

解法 1: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{12/100}{20/100}=\frac{12}{20}$.

解法 2: $P(A|B)=\frac{n(AB)}{n(B)}=\frac{12}{20}$.

例 2 在 10 件产品中, 有 3 件不合格品, 任取两次, 每次取 1 件, 取出后不放回, 若已经发现第 1 件是合格品, 求第 2 件也是合格品的概率.

解 设 $A_i=\{$ 第 i 次取到合格品 $\}$, $i=1,2$.

解法 1 (利用公式) $P(A_1)=\frac{7}{10}$, $P(A_1A_2)=\frac{7\times 6}{10\times 9}$

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

解法 2 (直接由题意求) $P(A_2|A_1)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.

例 3 设 A, B 是两随机事件, 且 $P(A)=P(B)=0.3$, $P(A+B)=0.4$, 求 $P(A|B), P(A-B), P(A|\bar{B})$.

解 因为 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$, 所以

$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A+B)=0.2$, 则

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.3}=\frac{2}{3}$$

$$P(A-B)=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.1$$

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A-AB)}{1-P(B)}=\frac{0.1}{1-0.3}=\frac{1}{7}$$

注 $P(A|B)+P(A|\bar{B})\neq 1$.

3.2 乘法公式

乘法公式

当飞机在雷达探测区域出现时, 雷达探测到并报警的概率为 99%. 当没有飞机时, 雷达虚假报警的概率为 10%. 假设一架飞机出现在达探测区域的概率为 5%.

(1) 飞机没有出现在该区域而雷达虚假报警的概率有多大?

(2) 飞机出现在该地区而雷达没有探测到的概率有多大?

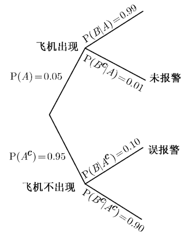
设事件 A, B 及其补集:

$A=\{$飞机出现$\}$,

$A^c=\{$ 飞机不出现$\}$,

$B=\{$ 雷达报警$\}$,

$B^c=\{$ 雷达未报警$\}$



由树形图可知

(1) $P\left(A^{c} \cap B\right)=P\left(A^{c}\right) P\left(B \mid A^{c}\right)=0.95 \times 0.10=0.095$;

(2) $P\left(A \cap B^{c}\right)=P(A) P\left(B^{c} \mid A\right)=0.05 \times 0.01=0.0005$.

数学上可以这样来表示: 事件 A 发生的充要条件是一系列事件 $A_1, \cdots, A_n$ 全都发生, 即 $A=A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. A 发生就是 A_1 发生, 接着 A_2 发生, 接着 A_3 发生......

A 发生的概率由如下规则给出

$$P(A)=P\left(A_1\right) P\left(A_2 \mid A_1\right) P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right) \cdots P\left(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i\right)$$

乘法公式

定理 1 (multiplication rules)

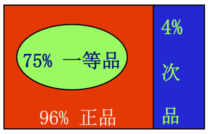
- 当 $P(A)>0$ 时, $P(AB)=P(A)P(B|A)$.
- 当 $P(B)>0$ 时, $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

注

- 当 $P(AB)$ 不容易直接求得时, 可考虑利用乘法公式去求.
- 乘法公式主要解决那些完成一项任务需要分多个步骤的情况, 把每个步骤的概率相乘就得到完成该事件的概率.

例 4 一批产品的次品率为 4%, 正品中一等品率为 75%, 现从中任意取一件, 求恰好取到一等品的概率.

解



记 $A=\{$ 取到一等品 $\}$,
$B=\{$ 取到正品 $\}$,
$\bar{B}=\{$ 取到次品 $\}$.

则 $P(B)=1-4\%=0.96, P(A \mid B)=0.75$.
由于 $A \subset B$, 故 $A=AB$, 于是

$$\begin{aligned} P(A) & =P(AB)=P(B) P(A \mid B) \\ & =0.96 \cdot 0.75=0.72 \end{aligned}$$

例 5 10 张考签中有 4 张难签, 甲、乙、丙 3 人参加抽签 (不放回), 甲先, 乙次, 丙最后, 求下列事件的概率:

(1) 甲抽到难签;
(2) 甲、乙都抽到难签;
(3) 甲没抽到难签而乙抽到难签;
(4) 甲、乙、丙都抽到难签.

解 设事件 A, B, C 分别表示甲、乙、丙抽到难签;

(1) $P(A)=\frac{4}{10}=0.4$.

(2) $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}=\frac{2}{15}$.

(3) $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}=\frac{4}{15}$.

(4) $P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8}=\frac{1}{30}$.

例 6 一批零件共 100 个, 其中有次品 10 个. 每次从其中任取一个零件, 取出的零件不再放回去. 现在任取三次零件, 求第三次才取到合格品的概率.

解 设 $A_i\,(i=1,2,3)$ 表示“第 i 次取到合格品”, 则

$$\begin{aligned} P\left(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3\right) & =P\left(\bar{A}_1\right) P\left(\bar{A}_2 | \bar{A}_1\right) P\left(A_3 | \bar{A}_1 \bar{A}_2\right) \\ & =\frac{10}{100} \times \frac{9}{99} \times \frac{90}{98}=0.00835 . \end{aligned}$$

例 7 同宿舍共三位同学, 每人制作一件礼物参加元旦舍友互庆会, 他们首先将三件礼物编号, 然后每人各抽一个号码, 按号码领取礼品, 求三人都得到别人赠送的礼品的概率.

解 设甲乙丙各抽到自己的礼物的事件为 A, B, C. 则由乘法公式得,

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) & =P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) \cdot P(\bar{C}|\bar{A}\bar{B}) \\ & =\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

例 8　市场供应的灯泡中，甲厂占 60%，乙厂占 40%. 甲厂产品合格品率为 90%，乙厂产品合格品率为 80%. 求:

(1) 从市场上买一灯泡是甲厂生产的合格品的概率;

(2) 从市场上买一灯泡是乙厂生产的合格品的概率.

解　记 A 甲厂生产的灯泡, B 合格灯泡. AB 甲厂产的合格品, $\bar{A}B$ 乙厂产的合格品.
已知: $P(A)=0.6$, $P(\bar{A})=0.4$, $P(B|A)=0.9$, $P(B|\bar{A})=0.8$.
则由乘法公式得,

(1) $P(AB)=P(A)P(B|A)=0.6\times 0.9=0.54$

(2) $P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.4\times 0.8=0.32$

本节完!

第四节　全概率公式与贝叶斯公式

4.1　全概率公式

引例　市场上供应的灯泡中，甲厂占 60%，乙厂占 40%. 甲厂产品的合格品率为 90%，乙厂产品的合格品率为 80%. 求市场上灯泡的合格品率.

解　设 A “甲厂产品”，$\overline{A}$ “乙厂产品”，B “合格品”
$P(A)=0.6$, $P(\overline{A})=0.4$, $P(B|A)=0.9$, $P(B|\overline{A})=0.8$
所以 $P(B)=P(BA)+P(B\overline{A})$

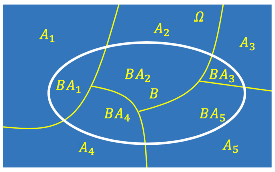
$$=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$

$$=0.6\cdot 0.9+0.4\cdot 0.8=0.86$$

- 事件 $\{A,\overline{A}\}$ 构成了一个完备事件组 (定义 1.1.2).

全概率公式

定理 (rule of total probability)　设事件 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是试验的一个完备事件组，且 $P(A_i)>0$，则对任意事件 B，



如图，$B=\bigcup_{i=1}^n BA_i$，则有

$$P(B)=\sum_{i=1}^n P(BA_i)$$
$$=\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$$

- $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})$.
- 直观上，该定理之所以被称作全概率公式，是因其指出若事件 B 可被划分为一个互斥子事件的集合，那么事件 B 的概率就等于 B 中包含的这些互斥子事件的概率之和.

- 若试验可看作分两个阶段进行，而第一阶段有多种可能的结果 (即不确定的)，要求的是第二阶段中某个结果 B 发生的概率，就用全概率公式.
- 在较复杂情况下直接计算 $P(B)$ 不易，但 B 总是伴随着某个 A_i 出现，可以将 B 分解成互不相容事件 A_iB 的和，所以在使用全概率公式时,关键在于寻找完备事件组 $A_1, A_2, \ldots$ 就是寻找导致 B 发生的各种原因，或伴随 B 发生的各种情况.

例 1　有甲，乙两个口袋，甲袋中装有两个白球一个黑球；乙袋中装有一个白球两个黑球. 由甲袋任取一个球放入乙袋，再从乙袋中任取一球，求从乙袋中取到白球的概率.

分析　试验分为两个阶段：第一阶段从甲袋取一个球，且结果有两种可能，这两种可能结果正是导致 B 发生的原因. 求的是第二阶段 (从乙袋取球) 的结果 (白球) 的概率.

解　设 A 表示从甲袋取出的是白球；$\overline{A}$ 表示从甲袋取出的球是黑球; B 表示从乙袋中取出的球是白球，由全概率公式得

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

例 2　甲，乙，丙三台机床加工同一种零件，零件由甲，乙，丙机床加工的概率为分别为 $0.5, 0.3, 0.2$，甲，乙，丙各机床加工的零件为合格品的概率分别是 $0.9, 0.8, 0.7$，求零件的合格品率.

解　设 A_1, A_2, A_3 分别表示甲，乙，丙机床加工的零件，B 表示零件是合格品. 则 A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组. 由题设知

$$P(A_1) = 0.5, \quad P(A_2) = 0.3, \quad P(A_3) = 0.2,$$

$$P(B|A_1) = 0.9, \quad P(B|A_2) = 0.8, \quad P(B|A_3) = 0.7.$$

由全概率公式 $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) P(B|A_i) = 0.83.$

例 3　某工厂有四条流水线生产同一产品，该四条流水线的产量分别占总产量的 $15\%, 20\%, 30\%, 35\%$，不合格率分别为 $0.05, 0.04, 0.03, 0.02$，现从出厂产品中任取一件，问恰好取到不合格品的概率是多少？

解　设 A_i 表示第 i 条流水线的产品 $(i = 1, 2, 3, 4)$，B 表示不合格品，则 $P(A_1) = 0.15$，$P(A_2) = 0.20$，$P(A_3) = 0.30$，

$$P(A_4) = 0.35, \; P(B|A_1) = 0.05, \; P(B|A_2) = 0.04,$$

$$P(B|A_3) = 0.03, \; P(B|A_4) = 0.02.$$

由全概率公式，得 $P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(A_i) P(B|A_i) = 0.0315.$

例 4　某商店销售一批收音机共有 10 台，其中有 3 台次品. 现已经出售了 2 台，问从剩下的收音机中任取一台是正品的概率为多少？

解　设 A_i 表示出售的 2 台中有 i 台正品 $(i = 0, 1, 2)$; B 表示剩下的收音机中任取一台是正品,则

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_0) P(B|A_0) + P(A_1) P(B|A_1) + P(A_2) P(B|A_2) \\ &= \frac{C_3^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{7}{8} + \frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2}\cdot\frac{6}{8} + \frac{C_7^2}{C_{10}^2}\cdot\frac{5}{8} \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

例 5 一箱产品有 10 件，其次品数从 0 到 2 是等可能的，开箱检验时，从中任取一件，若检验出是次品，则认为该箱产品不合格而拒收. 由于检验有误，一件正品被误检为次品的概率是 0.02，一件次品被误判为正品的概率为 0.05，求该箱产品通过验收的概率.

解 取出正品和取出次品. 设 A_i 表示 10 件中有 i 件次品 $(i = 0,1,2)$; B 表示该箱产品通过验收,则

$$P(A) = P(A_0)P(A|A_0) + P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10} = 0.9$$

且 $P(\overline{A}) = 0.1$. 再由全概率公式得：

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})$$
$$= 0.9\cdot(1-0.02) + 0.1\cdot 0.05 = 0.887.$$

4.2 贝叶斯公式

贝叶斯公式

实际中还有一类问题—“已知结果求原因”. 这类问题在实际中常见 (如流水线追究责任问题), 已知某结果发生的条件下, 求各原因发生的可能性大小, 即求条件概率. 贝叶斯公式就解决这类问题.

定理 (Bayes' Theorem) 设事件 $\{A_i\}_{i=1}^n$ 是试验 E 的一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0$, B 为 E 的任一事件, 则当 $P(B) > 0$ 时,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

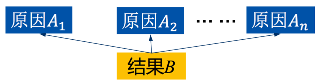
证明

第一个等式: 根据条件概率, $P(A_i)P(B \mid A_i) = P(A_i \mid B)P(B)$, 因为它们都等于 $P(A_i \cap B)$.

第二个等式: 利用 $P(B)$ 的全概率公式.

贝叶斯公式的意义

贝叶斯公式常用来进行因果推理, 即可从结果分析原因: 假设导致“结果” B 发生的“原因” $A_i \quad (i = 1,2,\cdots)$ 两两不相容, 现已知事件 B 发生了, 若要计算导致 B 出现的“原因” A_i 的概率 $P(B|A_i)$, 则可用贝叶斯公式求.



- 贝叶斯公式是已知“结果”，推断该“结果”由某“原因”发生的概率.

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)}.$$

贝叶斯公式的意义

- 在贝叶斯公式中，$P(A_i), (i = 1,2,\cdots)$ 是在没有新的信息 (不知道结果 B 是否发生) 的情况下, 人们对原因 A_i 发生可能性大小的认识.
- 当有了新的信息 (知道结果 B 发生), $P(A_i|B)$ 是人们对原因 A_i 发生可能性大小的新的认识.
- $P(A_i)$ 和 $P(A_i|B)$ 分别称为原因 A_i 的先验概率和后验概率. 应用贝叶斯公式计算后验概率，以此作出某种判断或决策.

贝叶斯公式

例如 令 A 表示事件“今年 IBM 的股票价格浪幅将达 30%”. 一位投资者长期关注 IBM 股票，基于历史数据形成了关于 IBM 股票收益率的先验概率判断 $(P(A))$. 现在假设该投资者参加了由股票分析师组织的研讨会，并得知分析师大力推荐 IBM 的股票. 在分析师力荐 IBM 股票的情况下 (事件 B)，该投资者可能会对 IBM 的股票更有信心并因此修正其关于 IBM 股票收益 $(P(A \mid B))$ 的先期判断.

例如　举个例子，令 A 表示事件"今年 IBM 的股票价格浪幅将达 30%"．一位投资者长期关注 IBM 股票，基于历史数据形成了关于 IBM 股票收益率的先验概率判断 $(P(A))$．现在假设该投资者参加了由股票分析师组织的研讨会，并得知分析师大力推荐 IBM 的股票．在分析师力荐 IBM 股票的情况下 (事件 B)，该投资者可能会对 IBM 的股票更有信心并因此修正其关于 IBM 股票收益 $(P(A \mid B))$ 的先期判断．

例 6　某厂有四条流水线生产同一种产品，其产量分别占总产量的 15%，20%，30%，35%．又这四条流水线的不合格率依次为 $0.05, 0.04, 0.03, 0.02$．现从出厂产品中任取一件，结果是次品 (设为事件 B)，问该次品属于第四条流水线生产的可能性有多大？

解　$$P\left(A_4 \mid B\right)=\frac{P\left(A_4\right) P\left(B \mid A_4\right)}{\sum_{i=1}^4 P\left(A_i\right) P\left(B \mid A_i\right)}=\frac{0.35 \cdot 0.02}{0.0315} \approx 0.222$$

例 7　某医院对某疾病有一种有效的检验方法，可对 95% 的该病患者和 90% 的无病患者诊断无误，又由历史资料知道该病的发病率为 0.0004，现在有一人用这种检验方法检验出患此病，求此人确患此病的概率．

解　设 A 表示患有该病，B 表示检查出患有该病．由题意知，

$$P(A)=0.0004, \quad P(\overline{A})=0.9996,$$

$$P(B \mid A)=0.95, \quad P(B \mid \overline{A})=0.1.$$

由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned} P(A \mid B) & =\frac{P(A) P(B \mid A)}{P(A) P(B \mid A)+P(\overline{A}) P(B \mid \overline{A})} \\ & =\frac{0.0004 \cdot 0.95}{0.0004 \cdot 0.95+0.9996 \cdot 0.1}=0.0038 . \end{aligned}$$

例 8　有三只箱子：第一个箱子中有四个黑球和一个白球；第二个箱子中有三个黑球和三个白球；第三个箱子中有三个黑球和五个白球．任取一箱，再从中任取一个球．求：

(1)　取到白球的概率；

(2)　已知取到的是白球，则这个白球属于第二个箱子的的概率

解　设 $A_i (i=1,2,3)$ 分别表示取到的是第 i 个箱子，B 表示取到的是白球，则事件组 A_1, A_2, A_3 构成一个完备事件组．且 $P\left(A_1\right)=P\left(A_2\right)=P\left(A_3\right)=\frac{1}{3}$．又

$$P\left(B \mid A_1\right)=\frac{1}{5}, \quad P\left(B \mid A_2\right)=\frac{1}{2}, \quad P\left(B \mid A_3\right)=\frac{5}{8}.$$

(1)　所以，由全概率公式得;

$$\begin{aligned} P(B) & =\sum_{i=1}^3 P\left(A_i\right) P\left(B \mid A_i\right) \\ & =\frac{1}{3} \cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)=\frac{53}{150}. \end{aligned}$$

(2)　再由贝叶斯公式得

$$P\left(A_2 \mid B\right)=\frac{P\left(A_2\right) P\left(B \mid A_2\right)}{P(B)}=\frac{20}{53}.$$

例 9　店中有若干箱灯管，每箱内有 20 只，其中有 $0,1,2$ 只次品的概率分别为 $0.8, 0.1, 0.1$．一位顾客从其所购的一箱中任取 4 只查看，有次品则退货，否则买下整箱灯管．求：(1) 买下整箱灯管的概率；(2) 若买下，在该箱中确无次品的概率．

解　A_i " 箱内有 i 只次品" $(i=0,1,2)$．B" 取出的 4 只都是正品".由题设知：

$$P\left(A_0\right)=0.8, P\left(A_1\right)=0.1, P\left(A_2\right)=0.1.$$

$$P\left(B \mid A_0\right)=\frac{C_{20}^4}{C_{20}^4}=1, P\left(B \mid A_1\right)=\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4}=0.8.$$

$$P\left(B \mid A_2\right)=\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4} \approx 0.63.$$

$$
\begin{aligned}
(1)\quad P(B) &= P(A_0)P(B|A_0)+P(A_1)P(B|A_1) \\
&\quad + P(A_2)P(B|A_2) \\
&= 0.8\cdot 1+0.1\cdot 0.8+0.1\cdot 0.63 \\
&= 0.943.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad P(A_0|B) &= \frac{P(A_0)P(B|A_0)}{P(B)} \\
&= \frac{0.8\cdot 1}{0.943}\approx 0.848.
\end{aligned}
$$

本节完!

第五节 事件的独立性

5.1 两个事件的独立性

两个事件的独立性

1.4 节中我们引入了条件概率 $P(A|B)$ 的概念. 这个条件概率刻画了事件 B 的发生给事件 A 带来的信息. 一个有趣且重要的特殊情况是事件 B 的发生并没有给事件 A 带来新的信息, 它没有改变事件 A 发生的概率, 即

$$P(A\mid B)=P(A)$$

在上述等式成立的情况下，我们称事件 A 是独立于事件 B 的. 由条件概率的定义可知 $P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, 上式等价于

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

两个事件的独立性

定义 (independent) 若

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

成立, 称事件 A 独立于事件 B.

- 定义中 A 和 B 具有对称的地位. 因此 A 独立于 B 蕴涵着 B 独立于 A. 这样我们可以称 A 和 B 是相互独立的, 或 A 和 B 是相互独立的事件.
- 独立性是相对于概率 P 而言的, 指两事件发生的可能性互不影响.

两个事件的独立性

人们容易从直观判定独立性. 例如, 若它们分别是在两个不同的并且没有相互作用的物理过程的控制下发生的事件, 我们就可以判定它们相互独立.

- 投掷硬币 (或筛子), 我们相信每次的结果都不受以前结果的影响;
- 在相同条件下做实验, 一般假定每次的实验误差相互独立;
- 一般假定生产中不同的流程 (机器, 人) 也是相互独立的.

例 1　分别掷两枚均匀的硬币, 令

$$A = \{\text{硬币甲出现正面}\}, \qquad B = \{\text{硬币乙出现正面}\}.$$

验证事件 A, B 是相互独立的.

解　$\Omega = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反})\}$

$A = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反})\}$, $\quad B = \{(\text{正}, \text{正}), (\text{反}, \text{正})\}$,

$AB = \{(\text{正}, \text{正})\}$

由此 $P(A) = P(B) = 1/2, P(AB) = 1/4$.
于是 $P(AB) = P(A)P(B)$. 所以 A, B 是相互独立的.

两个事件的独立性

注　若 A 与 B 相互独立, 且 B 与 C 相互独立, 则 A 与 C 未必相互独立.

例如　从全体有两个孩子的家庭中随机选择一个家庭, 并考虑下面三个事件:

- A 为 "第一个孩子是男孩",
- B 为 "两个孩子不同性别",
- C 为 "第一个孩子是女孩".

容易验证 A 与 B 相互独立, B 与 C 相互独立, 但是 A 与 C 不独立.

两个事件的独立性

性质 1　若事件 A 与 B 相互独立, 则

$$\bar{A} \text{ 与 } B, A \text{ 与 } \bar{B}, \bar{A} \text{ 与 } \bar{B}$$

也是相互独立的.

性质 2　若 $P(A) = 0$ 或 $P(A) = 1$, 则 A 与任意事件独立.

例 2　甲, 乙两人各投篮一次, 设甲投中的概率为 0.6, 乙投中的概率为 0.7, 求: (1) 甲, 乙两人都投中的概率; (2) 甲, 乙两人至少有一人投中的概率; (3) 甲乙两人都没投中的概率.

解　A "甲投中", B "乙投中". 显然, A 与 B 独立.

(1)　$P(AB) = P(A)P(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$

(2)　$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$= 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$

(3)　$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B})$

$= (1 - 0.6) \times (1 - 0.7) = 0.12$

事件独立与事件互不相容的区别

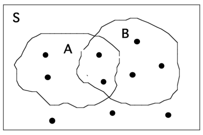
事件之间的独立性不能直观地从样本空间中的事件看出来. 通常认为, 若两个事件互不相容, 就可以判定它们相互独立, 事实上, 恰巧相反.

推论　若事件 A 和事件 B 互不相容, 并且 $P(A) > 0$ 和 $P(B) > 0$ 成立, 则它们永远不会相互独立.

证明　因为 $A \cap B = \varnothing$, 从而 $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

- 不相容 $\Rightarrow$ 不独立: 若 A 与 B 不相容, 则 A, B 必不独立.
- 独立 $\Rightarrow$ 相容: 若事件 A 与 B 相互独立, 则 A, B 必相容.

例 3　事件 A, B 在样本空间 S 中是否独立？



解　如图, $P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{5}{10}$, $P(AB)=\frac{2}{10}$,
事件 A 对于事件 B 的条件概率为：

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2/10}{1/2}=\frac{2}{5}.$$

因 $P(A|B)=P(A)$, 所以事件 A, B 在样本空间 S 中独立.

例 4　已知 $P(A\cup B)=0.9, P(A)=0.4$, 求 $P(B)$.

(1) 如果 A 与 B 互不相容时

(2) 如果 A 与 B 互相独立时.

解　(1) 如果 A 与 B 互不相容, 则 $P(AB)=0$, 由有限可加性得,

$$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.9-0.4=0.5.$$

(2) 当 A 与 B 独立时, $P(AB)=P(A)P(B)$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(AB)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\end{aligned}$$

得, $P(B)=\frac{5}{6}$.

5.2　多个事件的独立性

多个事件的独立性

定义　称 $n(n\geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 如果对任意一组指标

$$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_k\leq n \quad (k\geq 2)$$

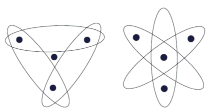
都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

多个事件的独立性

例 5　三个事件 A, B, C 相互独立的条件是

1. 两两独立：$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\end{cases}$
2. $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$



注　由 A, B, C 独立，可得两两独立；反之不然.

多个事件的独立性

性质　设 $n(n\geq 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立, 则

1. 其中任意 $k(k\geq 2)$ 个事件也是相互独立的.
2. 将若干个 A_i 用 $\bar{A}_i$ 替换后, 得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地, 我们有

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1)\cdots P(\bar{A}_n).$$

例 6　甲, 乙, 丙三人各投篮一次, 他们投中的概率分别为 $0.7, 0.8, 0.75$ 求

(1) 三人中恰好有一人投中的概率 p_1,
(2) 三人都投中的概率 p_2,
(3) 三人中至少有一人投中的概率 p_3.

解: 设 A, B, C 分别表示甲, 乙, 丙投中, 则

$$p_1 = P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C)$$
$$p_2 = P(ABC)$$
$$p_3 = P(A+B+C)$$

由题意知 A, B, C 相互独立, 且

$$P(A) = 0.7, P(B) = 0.8, P(C) = 0.75$$

(1) $p_1 = P(A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C)$

$= P(A\bar{B}\bar{C}) + P(\bar{A}B\bar{C}) + P(\bar{A}\bar{B}C)$

$= P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(B)P(\bar{C}) + P(\bar{A})P(\bar{B})P(C)$

$= 0.7 \times 0.2 \times 0.25 + 0.3 \times 0.8 \times 0.25 + 0.3 \times 0.2 \times 0.75$

$= 0.14.$

(2) $p_2 = P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

$= 0.7 \times 0.8 \times 0.75 = 0.42.$

(3) $p_3 = P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})$

$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C})$

$= 1 - 0.3 \times 0.2 \times 0.25 = 0.985.$

例 7　甲乙丙三人独立地破译密码, 他们能破译出密码的概率分别为 $0.45, 0.55$, 0.60. 求密码被破译的概率

解: 用 A_i 表示第 i 个人破译出密码 $(i = 1, 2, 3)$, B 表示密码被破译. 由题设知

$$P(A_1) = 0.45, \quad P(A_2) = 0.55, \quad P(A_3) = 0.60$$

且 $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

$$\begin{aligned} P(B) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P\left(\bar{A}_1\right) P\left(\bar{A}_2\right) P\left(\bar{A}_3\right) \\ &= 1 - (1-0.45)(1-0.55)(1-0.60) \\ &= 1 - 0.55 \times 0.45 \times 0.40 = 0.901. \end{aligned}$$

5.3　伯努利概型

试验的独立性: 所谓两个试验 E_1 和 E_2 独立, 是指试验 E_1 的结果的发生和试验 E_2 的结果的发生互不影响. 即试验 E_1 的任一事件和试验 E_2 的任一事件是互相独立的.

独立试验序列: 多个试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$, $A_1, A_2, \cdots A_n$ 分别是试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 的任一事件, 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互相独立的, 则称试验 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 独立试验序列.

n 重独立试验: 将一个试验 E 重复进行 n 次所得的独立试验序列, 称为一个 n 重独立试验序列, 记为 E^n

定义　若试验 E 的样本空间, $\Omega=\{A,\bar{A}\}$, 则称 E 为伯努利试验.

n 重伯努利试验: 将伯努利试验重复进行 n 次, 每次试验中事件 A 的概 $P(A)=p$ 保持不变. 称为 n 重伯努利试验.

引例　一批产品的废品率为 0.1, 每次取一个, 观察后放回, 下一次再取一个, 共重复取三次, 求下列事件的概率: (1) 三次都没有取到废品的概率; (2) 三次恰有一次取到废品的概率; (3) 三次恰有两次取到废品的概率; (4) 三次都取废品的概率.

解　设 A_i 表示三次中恰有 i 次取到废品 $(i=0,1,2,3)$

$(1)\quad P(A_0)=P(\text{正},\text{正},\text{正})=0.9^3=C_3^0\times 0.1^0\times 0.9^3$

$\because A_1=(\text{废},\text{正},\text{正})+(\text{正},\text{废},\text{正})+(\text{正},\text{正},\text{废})$

$(2)\quad P(A_1)=P(\text{废},\text{正},\text{正})+(\text{正},\text{废},\text{正})+(\text{正},\text{正},\text{废})$

$=0.1\times 0.9\times 0.9+0.9\times 0.1\times 0.9+0.9\times 0.9\times 0.1$

$=3\times 0.1\times 0.9^2=C_3^1\times 0.1\times 0.9^2$

$\because A_2=(\text{废},\text{废},\text{正})+(\text{废},\text{正},\text{废})+(\text{正},\text{废},\text{废})$

$(3)\quad P(A_2)=P(\text{废},\text{废},\text{正})+(\text{废},\text{正},\text{废})+(\text{正},\text{废},\text{废})$

$=0.1\times 0.1\times 0.9+0.9\times 0.9\times 0.1+0.9\times 0.1\times 0.1$

$=3\times 0.1^2\times 0.9=C_3^2\times 0.1^2\times 0.9$

$(4)\quad P(A_3)=P(\text{废},\text{废},\text{废})=0.1^3=C_3^1\times 0.1^3\times 0.9^0$

由引例, 可得到如下定理——重伯努定理.

定义 (伯努利定理)　在伯努利试验中, 事件 A 发生的概率为 $P(A)=p$, $(0<p<1)$, 则在 n 重伯努利试验中, 事件 A 恰发生 k 次的概率 $P_n(k)$ 为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}\quad (k=0,1,2,\ldots,n).\tag{1}$$

其中 $q=1-p$. (1) 称二项概率公式.

例 8　一批产品的废品率为 0.1, 每次抽取一个, 观察后放回去, 下次再取一个, 共重复三次, 求下列事件的概率:

(1)　三次中恰有一次取到废品,

(2)　三次中恰有两次取到废品,

(3)　三次都取到废品,

(4)　三次都取到正品.

解: 重复抽取三次, 可以看成 3 重伯努利试验. 设 A 表示取到废品, $P(A)=0.1, P(\bar{A})=0.9$. B_i 表示三次中恰有 $i=0,1,2,3$ 次取到废品.

(1) $P(B_1)=C_3^1\times 0.1\times 0.9^2=0.243.$

(2) $P(B_2)=C_3^2\times 0.1^2\times 0.9=0.027.$

(3) $P(B_3)=C_3^3\times 0.1^3\times 0.9^0=0.001.$

(4) $P(B_0)=C_3^0\times 0.1^0\times 0.9^3=0.729.$

例 9 随机地掷一个筛子, 连掷 6 次, 求:

(1) 恰有一次出现 3 点的概率,

(2) 至多有两次出现 3 点的概率,

解 设 A 表示出现 3 点, 则 $P(A)=\frac{1}{6}$. 连掷 6 次筛子, 可以看成 6 重贝努利试验, 其中 $p=\frac{1}{6}$.

(1) 恰有一次出现 3 点的概率:

$$P_6(1)=C_6^1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^5=0.402.$$

(2) 至多有两次出现 3 点的概率:

$$C_6^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^6+C_6^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^5+C_6^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$=0.335+0.402+0.201=0.938$$

例 10 某厂生产的灯泡使用寿命在 1000 小时以上的概率为 0.2, 求 3 个灯泡中最多有 1 个寿命不足 1000 小时的概率.

解 设 A “灯泡寿命不足 1000 小时”, 则

$P(A)=1-0.2=0.8,\quad n=3$

设 B “3 个灯泡中最多有 1 个寿命不足 1000 小时”.

$P(B)=P_3(0)+P_3(1)$

$\qquad =C_3^0(0.8)^0(0.2)^3+C_3^1(0.8)^1(0.2)^2=0.104.$

例 11 一条自动生产线上产品的一级品率为 0.6, 现检查了 10 件, 求至少有两件一级品的概率.

解 设 A “产品为一级品”, 则

$P(A)0.6,\quad n=10$. 设 B “10 件中至少有两件一级品”.

$P(B)=P_{10}(2)+P_{10}(3)+\cdots P_{10}(10)$

$\qquad =1-P_{10}(0)-P_{10}(1)$

$\qquad =1-C_{10}^0(0.6)^0(0.4)^{10}-C_{10}^1(0.6)^1(0.4)^9$

$\qquad \approx 0.998.$

本章完!