第一章 · 函数与极限

第二节 · 数列的极限

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

2.1 数列极限的定义

数列的定义

定义 1 一列按照顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{x_n\}$. 第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项.

问题 随着 n 的增大，x_n 也跟着变化. 当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

例如 数列极限(点击浏览网页).

数列的例子

1. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ $\quad \longrightarrow 0$
2. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ $\quad \longrightarrow 1$
3. $x_n = 2^n$ $\quad 2, 4, 8, 16, \cdots$ $\quad$ ✗
4. $x_n = (-1)^n$ $\quad -1, 1, -1, 1, \cdots$ $\quad$ ✗

定义 (不严格) 如果当 n 趋于无穷大时，x_n 无限接近一个确定的常数 A, 我们称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

否则，称数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在，或者称数列发散.

$\boxed{5}$ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots \quad \longrightarrow 1$

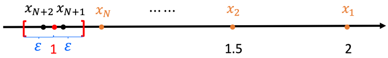
数列 (5) 当 $n \to \infty$ 时, $x_n \to 1$.

$\Longleftrightarrow \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, $|x_n - 1|$ 可以任意小.

如果任意小这个概念我们用 $\varepsilon > 0$ 表示.

$\Longleftrightarrow \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - 1| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - 1| < \varepsilon$.



数列的极限

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为一个数列, 如果存在常数 A, 对任何 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 总有

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A, 或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A, 记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A$$

如果这样的常数 A 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

$\boxed{5}$ $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \cdots \quad \longrightarrow 1$

问题 当 ε 分别取 $\frac{11}{10}, \frac{10}{10}, \frac{9}{10}$ 时, 正整数 N 取何值之后不等式 $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立?

- 令 $\varepsilon = \frac{11}{10}, |x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{11}{10}, \rightarrow n > \frac{10}{11} = 0.909$
  从第 0.909 项之后, $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立
- 令 $\varepsilon = 1, |x_n - 1| = \frac{1}{n} < 1, \rightarrow n > 1$
  从第 1 项之后, $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立
- 令 $\varepsilon = \frac{9}{10}, |x_n - 1| = \frac{1}{n} < \frac{9}{10}, \rightarrow n > \frac{10}{9} = 1.111$
  从第 1.111 项之后, $|x_n - 1| < \varepsilon$ 成立

$N = 0.909$ 和 $N = 1.111$ 存在吗?

ε 与 N 的关系

关于 N

- 为了解决 0.909 和 1.111 的问题, 借助向下取整函数 $[\cdot]$. 设
$$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1.$$
- 或限制 $\varepsilon \in (0, 1)$, 单独解决 0.909 的问题. $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$.
- ε 越小, N 越大.
- 不唯一 (参考例1).

ε 与 N 的关系

关于 ε

- 任意变小，是用来刻划数列 x_n 与极限的接近程度的.
- 相对固定，根据给定的 ε 找 N.

数列极限的解题思路

例 1　已知 $x_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

分析

$$|x_n - 0| = \left|\frac{(-1)^n}{(n+1)^2} - 0\right| = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n+1}$$

$\forall\varepsilon > 0$，欲使 $|x_n - 0| < \varepsilon$，只要 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$，即 $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$. 则当 $n > N$，就有 $|x_n - 0| < \varepsilon$. 故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = 0$$

解　绿色字体. 也可由 $|x_n - 0| = \frac{1}{(n+1)^2}$ 取 $N = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} - 1\right]$.

数列极限的基本公式

1. $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$，$(k > 0)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0$，$(k > 0)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = 0$，$(|a| > 1)$

数列极限

例如　设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明　$\forall\varepsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon.$$

例如　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明　$\forall\varepsilon > 0$，取 $N = \frac{1}{\varepsilon}$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

数列极限

例如　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

例如　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

证明　$\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

其中不等式 $2^n>n$ 可由数学归纳法得到.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n=2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n=(-1)^n$.

2.2　数列极限的运算

数列极限的四则运算

定理 1　如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$, 那么

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$；
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\cdot B$；
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{A}{B}$ （要求分母不为零）.

推论　$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot x_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

四则运算法则

证明 (1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 得到, $\exists N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时总有

$$|x_n - A| < \varepsilon_1;$$

再取 $\varepsilon_2 = \varepsilon/2$, 则由 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$ 得到, $\exists N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时总有

$$|y_n - B| < \varepsilon_2$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时总有

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (A + B)| &= |(x_n - A) + (y_n - B)| \\ &\le |x_n - A| + |y_n - B| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon.\end{aligned}$$

例 2 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$.

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 1 - 0 = 1$.

例 3 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}$

$= \dfrac{1}{1+0} = 1.$

数列极限的计算

例 4 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{n^2+4n}$.

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+4\cdot\dfrac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + 4\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}}$

$= \dfrac{3+0}{1+4\cdot 0} = 3.$

数列极限的计算

例 5 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+4}{n^2+1}$.

解 原式 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n}+4\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + 4\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{0+4\times 0}{1+0} = 0.$

数列极限的计算

例 6 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

数列极限的计算

例 7 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times 3^n}{3^n+1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}}$

$$=\frac{2}{1+0}=2.$$

2.3 数列极限的性质

数列极限的性质

性质 1 (唯一性) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则其极限是唯一的.

数列极限的性质

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛, 则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \le M$.

例如 $x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 1, 此时有 $|x_n| \le 4$.

注

- 如果数列无界，那么数列一定发散．(逆否定理)
- 如果数列有界，数列不一定收敛．(逆命题不成立)
  - 数列 $\left\{(-1)^{n+1}\right\}$ 虽有界但不收敛.

数列极限的性质

性质 3 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$）, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明 取 $\varepsilon = A/2$, 则存在 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

例如 $x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 $1 > 0$, 此时当 $n > 5$ 时, 有 $x_n > 0$.

数列极限的性质

定理 (保号性) 设数列 $x_n \ge 0$（或 $x_n \le 0$）, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 则有 $A \ge 0$（或 $A \le 0$）.

推论 如果 $x_n \ge y_n$, 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, 则有 $A \ge B$.

子数列

定义 3 在数列中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序, 这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列 (或子列).

收敛数列与其子数列间的关系

定理 收敛数列的任一子数列收敛于同一极限.

注

- 子数列收敛的数列未必收敛.
- 子数列发散的数列必发散.
- 由此性质可知, 若数列有两个子数列收敛于不同的极限, 则原数列一定发散.

例如 $x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, \cdots)$ 发散.

$\{x_{2k-1}\} : 1, 1, \cdots \quad \longrightarrow 1$

$\{x_{2k}\} : -1, -1, \cdots \quad \longrightarrow -1$

收敛数列与其子数列间的关系

我们常用下列结论判断某些数列是否收敛:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = a$$

例如 数列 $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \cdots\cdots \longrightarrow 0.$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

所以 $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, \cdots\cdots$ 收敛, 且极限为 0.

2.4 内容小结

内容小结

1. 数列极限的定义及应用.
2. 收敛数列的性质:
   - 唯一性; 有界性; 保号性;
   - 任一子数列收敛于同一极限.

本节完!