第六章 · 多元函数

第二节 · 多元函数的概念

■ 山东财经大学 ■ 田宽厚

2.1 区域

平面点集的分类

有界集 限制在有限范围的点集

无界集 延伸到无穷远的点集

开区域 不包含边界的区域

闭区域 包含边界的区域

问题 如何准确描述上述几种平面点集?

直线点集与平面点集

直线 $\mathbb{R}$	平面 $\mathbb{R}^2$
邻域	邻域
有界集	有界集
无界集	无界集
开区间	开区域
闭区间	闭区域
端点	边界

注 我们希望这里定义的开区域（闭区域）概念是上册的开区间（闭区间）概念在 $\mathbb{R}^n$ 中的推广.

平面中的邻域

定义　平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

例如　在平面上的圆邻域

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

注　若不需要强调邻域半径 δ，也可写成 $U(P_0)$

平面中的邻域

定义　平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

有界集　存在某个 $r>0$，使得 $E\subset U(O,r)$.

无界集　对于任何 $r>0$，总有 $E\not\subset U(O,r)$.

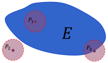
点与点集的关系

设有点集 E 及一点 P_1, P_2, P_3:

内点　若存在点 P_1 的某个邻域 $U(P_1)$ 使得 $U(P_1)\subset E$，则称 P_1 为 E 的内点.

外点　若存在 P_2 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P_2 为 E 的外点.

边界点　若 P_3 的任何邻域，既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P_3 为 E 的边界点.



显然, E 的内点必属于 E; 外点必不属于 E; 边界点可能属于 E 也可能不属于 E.

点集的特征

边界　E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记为 ∂E.

开集　若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E\cap E=\varnothing$，则称 E 为开集.

闭集　若 E 的边界点都属于 E，即 $\partial E\subset E$，则称 E 为闭集.

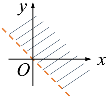
连通集　若 E 中任何两点都可用 E 中的折线联结起来. 则称 E 为连通集.

开区域 连通开集称为开区域.

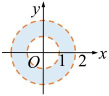
闭区域 开区域及其边界一起构成的点集称为闭区域.

有界域 对区域 D, 若存在正数 K, 使一切点 $P \in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP| \le K$, 则称 D 为有界域, 否则称为无界域.

例如 在平面上

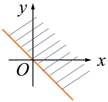


$\{(x,y)|x+y>0\}$ 是无界开区域

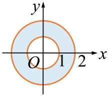


$\left\{(x,y)| < x^2+y^2 < 4\right\}$ 是有界开区域

例如 在平面上



$\{(x,y)|x+y\ge 0\}$ 是无界闭区域.



$\left\{(x,y)|1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}$ 是有界闭区域

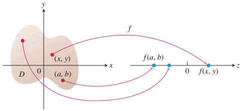
2.2 二元函数的极限

二元函数

定义　从平面 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集 D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

称为二元函数，其中 f 将点 (x, y) 对应到 $f(x, y)$. 记为 $z = f(x, y)$. x 和 y 称为自变量，z 称为因变量.



D 是 f 的定义域, 记作 D_f. 而 f 取的 z 的值的集合是它的值域, 记作 R_f.

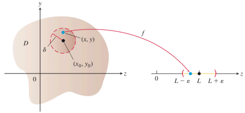
定义

定义 1　如果任意给定 $\varepsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当点 $(x, y) \in \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

总成立，则称当 (x, y) 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 以 L 为极限. 记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(x, y) = L.$$

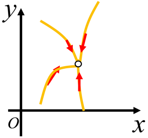


注　在二元函数极限的定义中，不要求函数在 P_0 的某个去心邻域有定义，只要求 P_0 是定义域 D 的聚点.

定义　若 $\forall \delta > 0$，$\mathring{U}(P_0, \delta)$ 内总有 D 中的点，则称 P_0 为 D 的聚点.

解释

注　函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ 成立等价条件是当 (x, y) 以任意方式趋于 (x_0, y_0) 时，$f(x, y)$ 总趋于 L.



若函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定函数极限不存在.

例 1 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 不存在

证明 设点 $P(x,\ y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋进于 $(0,\ 0)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同! 所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

注 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}$

不同.

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在, 推不出其他二者存在.

例如 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 显然

$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=0,\ \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=0.$

但由例1 知它在 $(0,0)$ 点二重极限不存在.

二重极限的运算法则

注 二元函数的极限运算法则与一元函数的类似.

例 2 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,5)}\dfrac{x}{\sin xy}$.

解 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1,$

原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\dfrac{xy}{\sin xy}\cdot\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\dfrac{xy}{\sin xy}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 5}}\dfrac{1}{y}=1\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{5}.$

例 3 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

解 $\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=x\cdot\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有 $0\leq\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\leq 1.$

所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 有界.

又因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0.$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}=0.$$

例 4　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$.

解　已知 $|x+y| \le |x|+|y|$. (三角形不等式).

当 $(x,y)\ne(0,0)$, $x\to\infty, y\to\infty$ 时

$$0 \le \left|\frac{x+y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} \le \frac{|x|+|y|}{2|x|\cdot|y|} = \frac{1}{2|y|}+\frac{1}{2|x|} \to 0$$

夹挤定理得,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

2.3　多元函数的连续性

连续函数

定义 2　设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义, 若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，或者称 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的一个连续点.

注　函数 $f(x,y)$ 的不连续点 (x_0,y_0) 称为间断点.

例如　例1中, 已证函数 $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 极限不存在, 不满足极限定义的第二个条件. 因此函数不连续, 且 $(0,0)$ 为其间断点.

二元连续函数的性质

性质 1　二元初等函数在定义区域上总是连续的.

闭区域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

性质 2　若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则有

1. $f(x,y)$ 在 D 上有界，且能取得最大值和最小值.
2. $f(x,y)$ 能取到介于最大值和最小值之间的任何值.

2.4 内容小结

内容小结

1 区域
- 邻域: $U(P_0,\delta)$, $\mathring{U}(P_0,\delta)$;
- 区域: 连同的开集;

2 多远函数概:
- 常用二元函数, 图形一般为空间曲面;
- 极限, 定义1;

3 多元函数连续性
- 连续的 3 个条件, 定义2;
- 闭域上的多元连续函数的性质:
  有界定理; 最值定理; 介值定理;
- 一切多元初等函数在定义区域内连续.

本节完!