

1. Докажите, что вписанный угол равен половине соответствующего центрального угла (или дуги) окружности.

34. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

93. Теорема о касательной и секущей. Из одной точки проведены касательная и секущая к некоторой окружности. Докажите, что произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату длины отрезка касательной.

217. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c . Докажите, что

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

369. Теорема Брахмагупты. Диагонали вписанного четырёхугольника перпендикулярны и пересекаются в точке P . Докажите, что прямая, проходящая через точку P и перпендикулярная одной из сторон четырёхугольника, делит противоположную сторону пополам.

430. Точки A , B и C расположены на окружности. Биссектриса угла BAC пересекает окружность в точке M . Докажите, что треугольник BMC — равнобедренный.

452. Докажите, что площадь треугольника равна его полупериметру, умноженному на радиус вписанной окружности.

1192. Докажите, что биссектрисы двух внешних углов и третьего внутреннего угла треугольника пересекаются в одной точке.

1689. Замечательное свойство окружности. Найдите геометрическое место точек M , из которых данный отрезок AB виден под прямым углом (т. е. $\angle AMB = 90^\circ$).

1691. BM и CN — высоты треугольника ABC . Докажите, что точки B , N , M и C лежат на одной окружности.

1713. Докажите, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC , точки B и C , а также точка пересечения биссектрис внешних углов с вершинами B и C лежат на одной окружности.

1762. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K . Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K , в точке M . Докажите, что $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$.

2729. Теорема Пифагора. Докажите, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

4770. Докажите, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$, а из центра Q невписанной окружности, касающейся стороны BC , — под углом $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

4831. Диагональ AC вписанного четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой угла DAB . Докажите, что один из двух треугольников, отсекаемых от треугольника ABC диагональю BD , подобен треугольнику ABC .