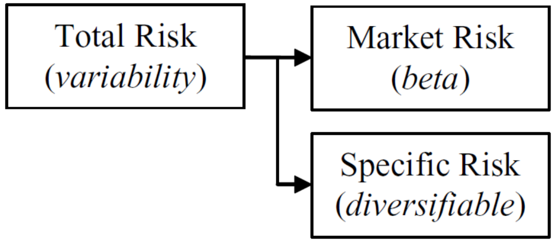
Pattern Causality in pairs trading

Relative value investing and neutrality

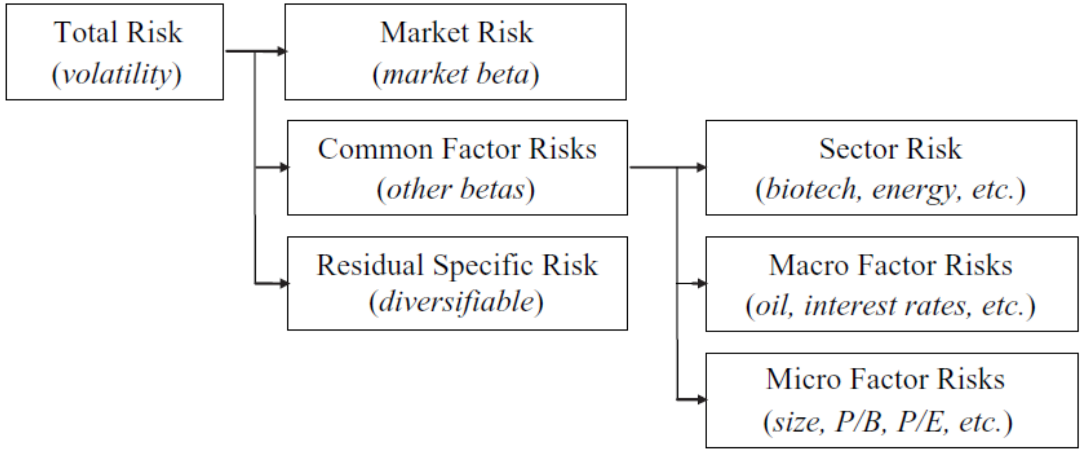


Разделение риска акции или портфеля акций на компонент рыночного риска и компонент специфического риска

Цель менеджеров, нейтральных к рынку акций, заключается в том, чтобы избежать любой чистой рыночной экспозиции в своем портфеле.

Продажа и покупка больше не являются последовательными независимыми действиями; они становятся связанными, а в некоторых случаях даже одновременными.

Кроме того, длинные и короткие позиции регулярно балансируются, чтобы всегда оставаться нейтральными по отношению к рынку, так что вся прибыль портфеля формируется исключительно за счет выбора акций, а не за счет рыночных условий.

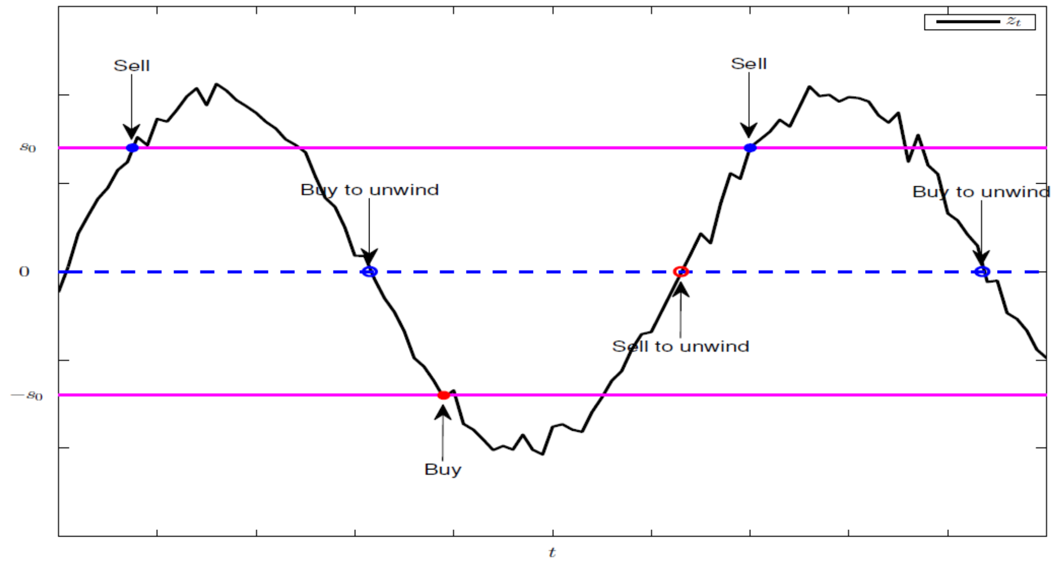


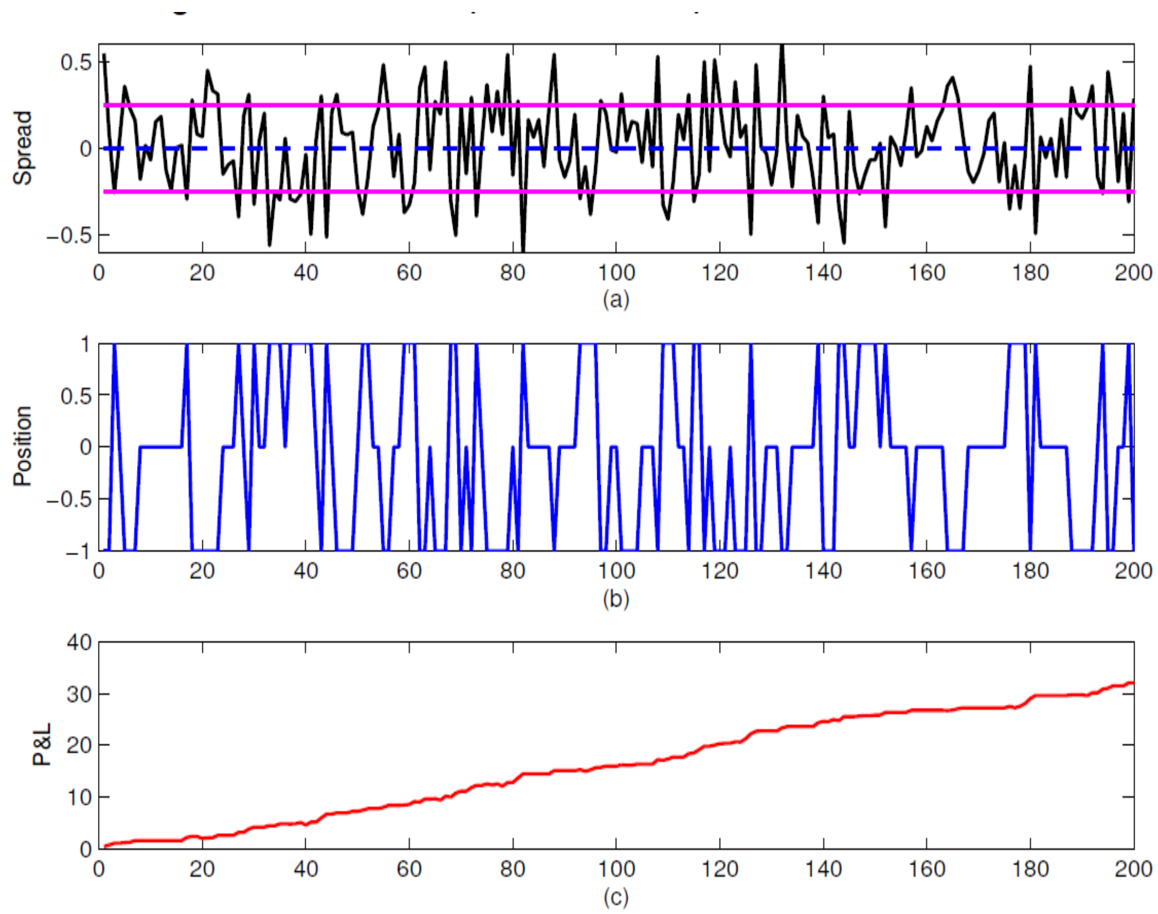
Разложение риска портфеля акций

dollar neutral: мы должны иметь равные долларовые инвестиции в длинные и короткие позиции, например, $9 миллионов в длинные позиции и $9 миллионов в короткие.

beta neutral: считается, что портфель нейтрален к рынку, если он генерирует доходность, некоррелированную с доходностью некоторого рыночного индекса. Поскольку бета рассчитывается на основе коэффициента корреляции, нулевая корреляция подразумевает нулевую бету.

Pairs trading

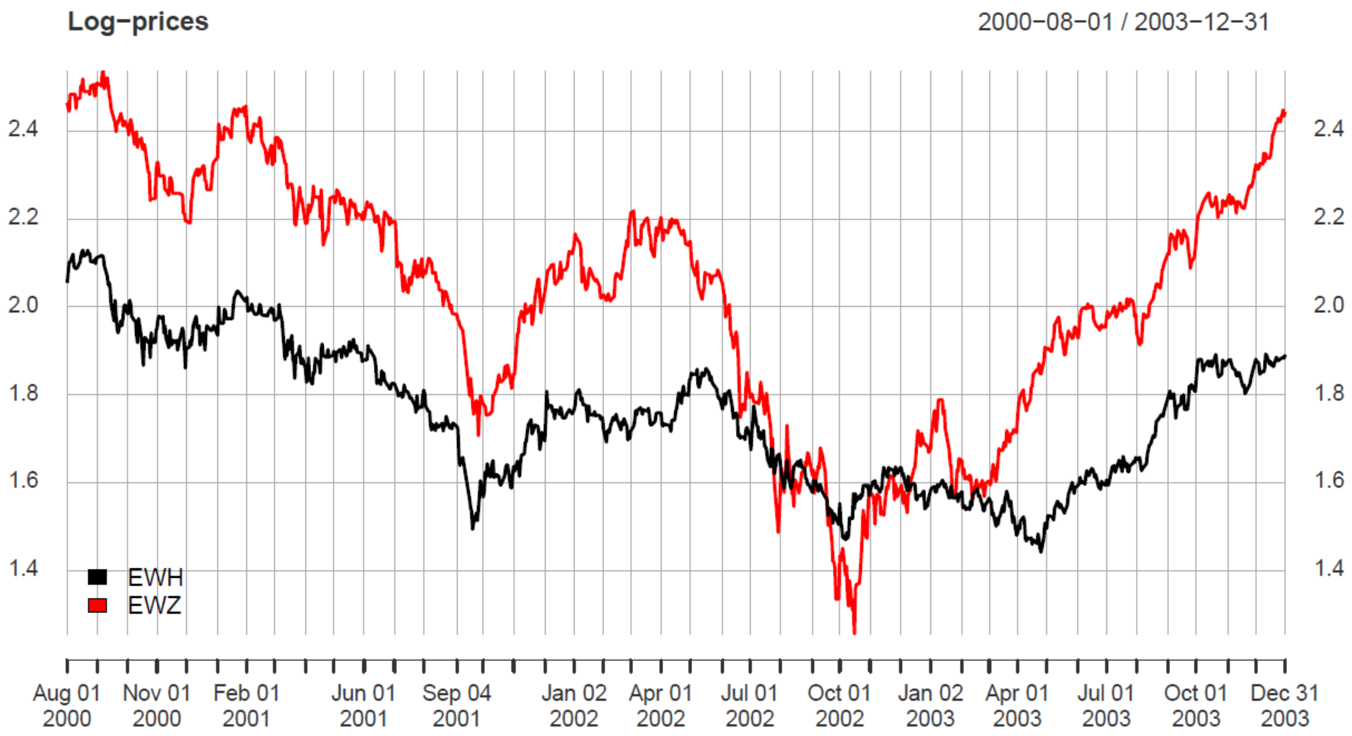


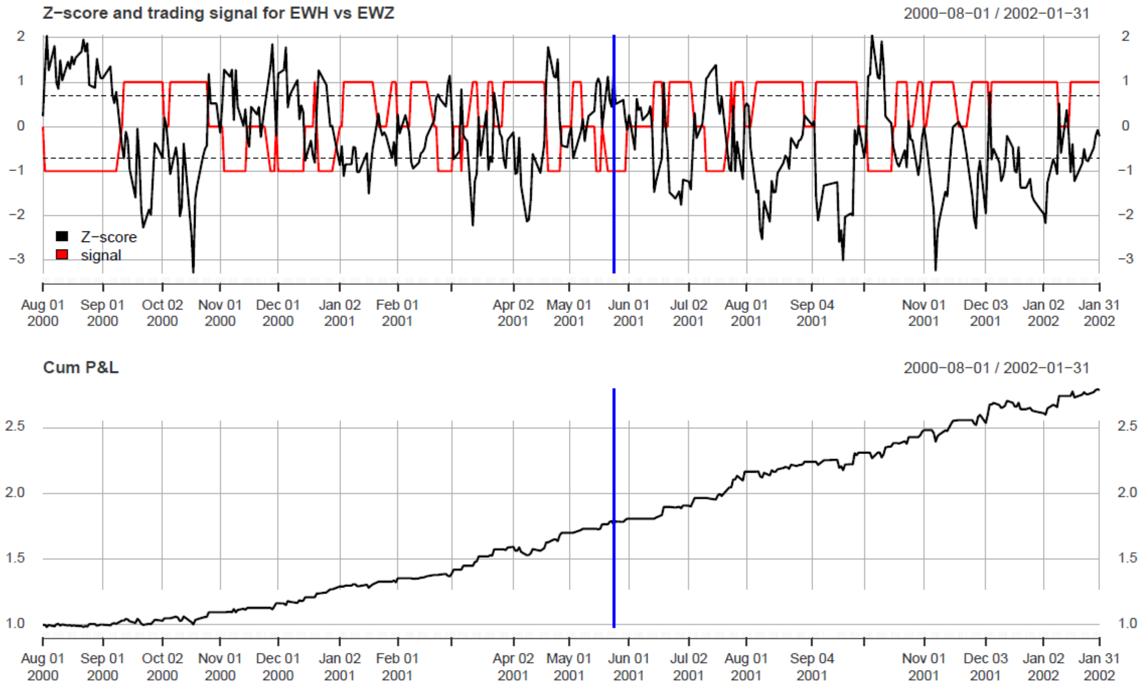


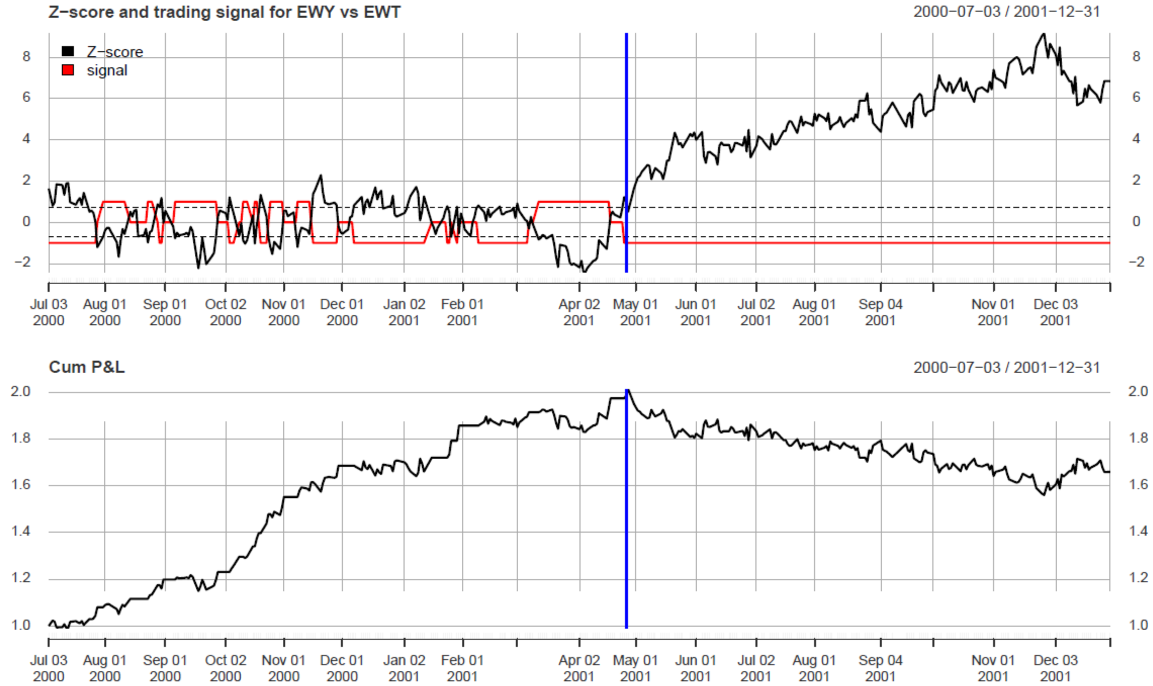
Пример:

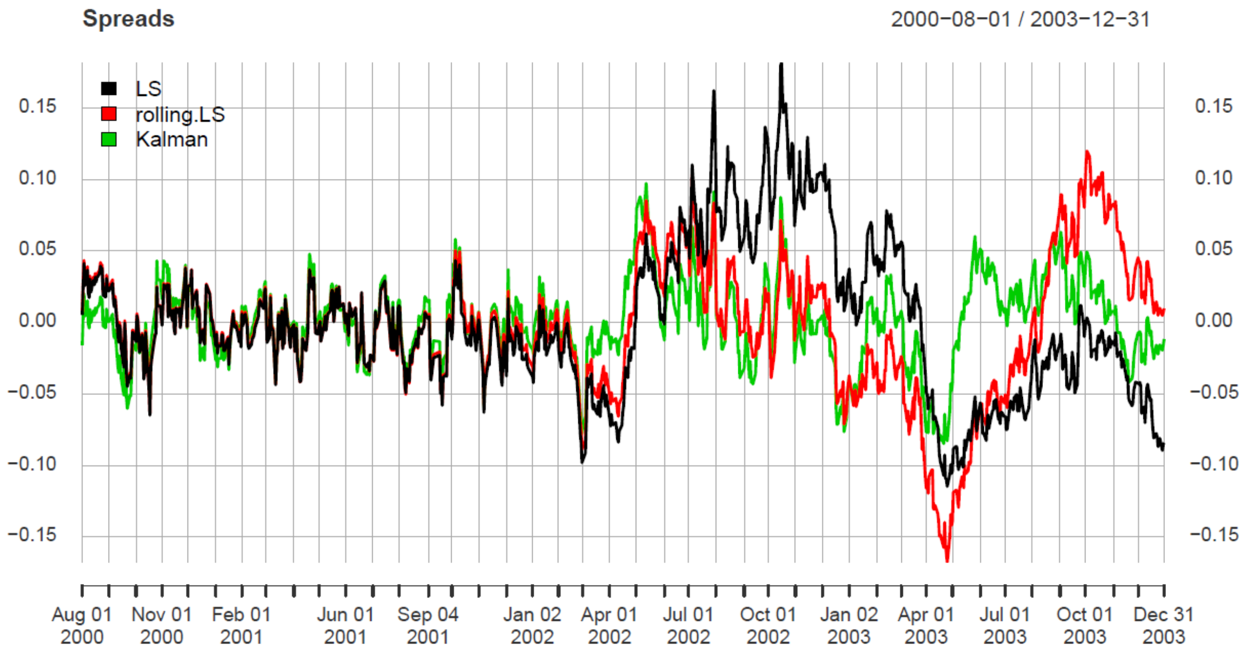
Long: EWH iShares MSCI Hong Kong ETF

Short: EWZ iShares MSCI Brazil ETF

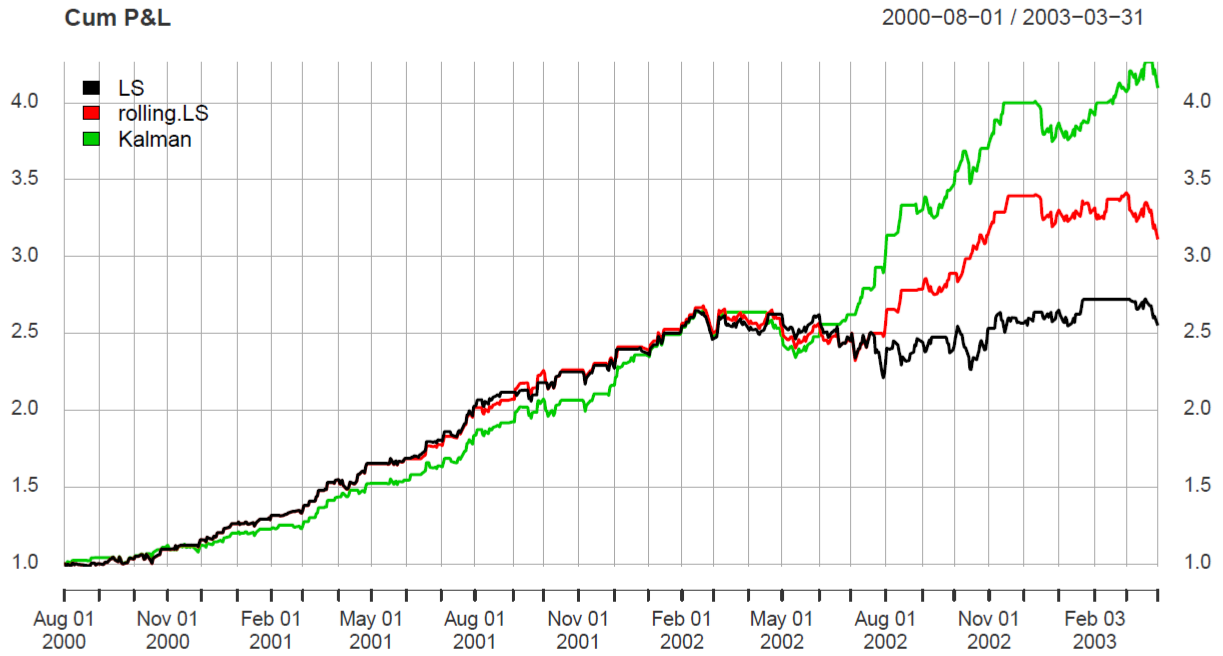



Z–score and trading signal for EWH vs EWZ
2000–08–01 / 2002–01–31
Z–score
signal
Cum P&L
2000–08–01 / 2002–01–31


Z–score and trading signal for EWY vs EWT
2000–07–03 / 2001–12–31
Z–score
signal
Cum P&L
2000–07–03 / 2001–12–31

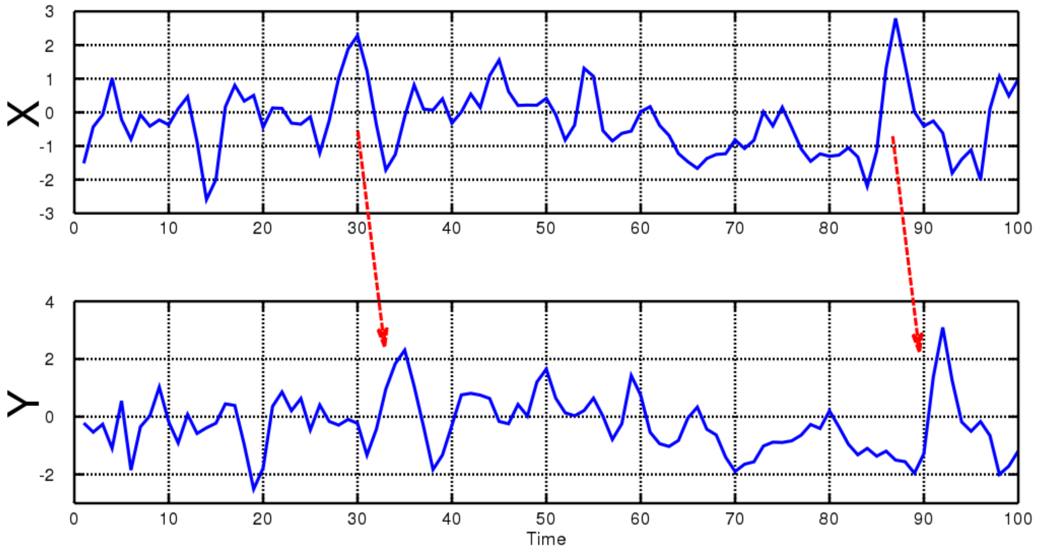


Spreads
2000−08−01 / 2003−12−31
LS
rolling.LS
Kalman
0.15
0.10
0.05
0.00
−0.05
−0.10
−0.15
Aug 01 2000
Nov 01 2000
Feb 01 2001
Jun 01 2001
Sep 04 2001
Jan 02 2002
Apr 01 2002
Jul 01 2002
Oct 01 2002
Jan 02 2003
Apr 01 2003
Jul 01 2003
Oct 01 2003
Dec 31 2003



Cum P&L
2000−08−01 / 2003−03−31
LS
rolling.LS
Kalman
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
Aug 01 2000
Nov 01 2000
Feb 01 2001
May 01 2001
Aug 01 2001
Nov 01 2001
Feb 01 2002
May 01 2002
Aug 01 2002
Nov 01 2002
Feb 03 2003

Granger Causality test



- Пусть x, y – стационарные временные ряды.

$$H_0: x \text{ не является причиной } y \text{ по Грэнджеру}$$

$$H_1: \ H_0 \text{ неверна}$$

1) Определить желаемое количество лагов и построить регрессию:

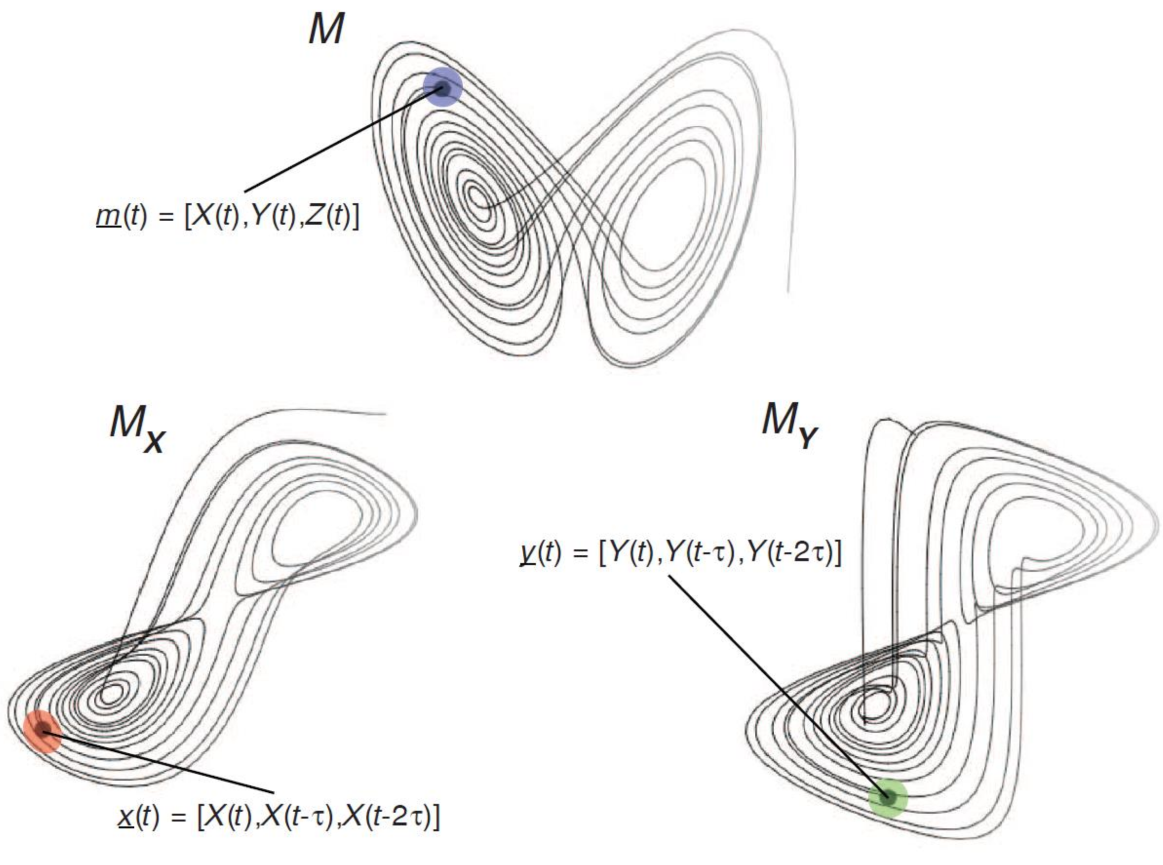
$$y_t = a_0 + \ a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} + error_t$$

2) Аугментировать регрессию значениями лагов временного ряда x:

$$y_t = a_0 + \ a_1 y_{t-1} + \cdots + a_m y_{t-m} + b_p x_{t-p} + \cdots + b_q \ x_{t-q} + error_t$$

- Оставить только те лаги x_i, t-статистики которых значимы (при дополнительном условии общей значимости регрессии, проверяемой с помощью $F - test$). Нулевая гипотеза отвергается, если впоследствии данной процедуры не остается ни одного x_i

Алгоритм Convergent Cross Mapping (CCM)



Рассмотрим два временных ряда длины L,
{X} = {X(1), X(2), ..., X(L)} и
{Y} = {Y(1), Y(2), ..., Y(L)}.

1) По данным τ, E сформируем матрицу эмбеддингов для ряда MX и MY:
x(t) = <X(t), X(t-τ), X(t-2τ), ..., X(t-(E-1)τ)> для t = 1+(E-1)τ до t = L.
y(t) = <Y(t), Y(t-τ), Y(t-2τ), ..., Y(t-(E-1)τ)> для t = 1+(E-1)τ до t = L.
Эти наборы векторов является "реконструированными многообразиями" или «shadow manifolds" MX и MY соответственно.

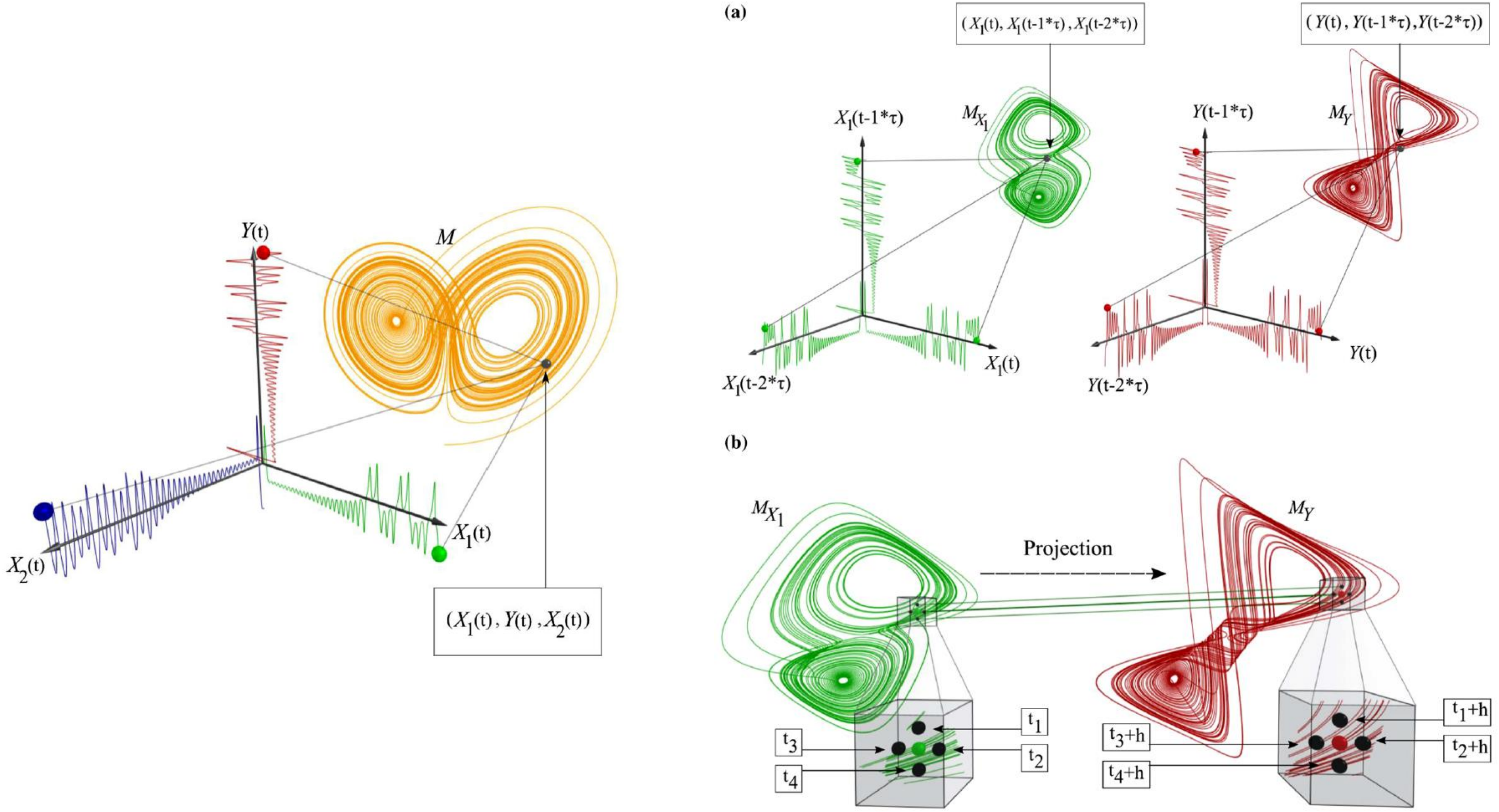
2) Для каждого эмбеддинга x(t) находим его E+1 ближайших соседей в этой же матрице MX.

3) Сохраним все временные индексы и расстояния этих E+1 ближайших соседей для каждого x(t) (от ближайшего до самого дальнего) через t1, tE+1. Получим веса этих соседей через их экспоненциально взвешенные расстояния.

4) Применим эти индексы и веса от каждого эмбеддинга на MX для определения соответствующего локально взвешенного среднего значения Ŷ(t)|MX на MY.

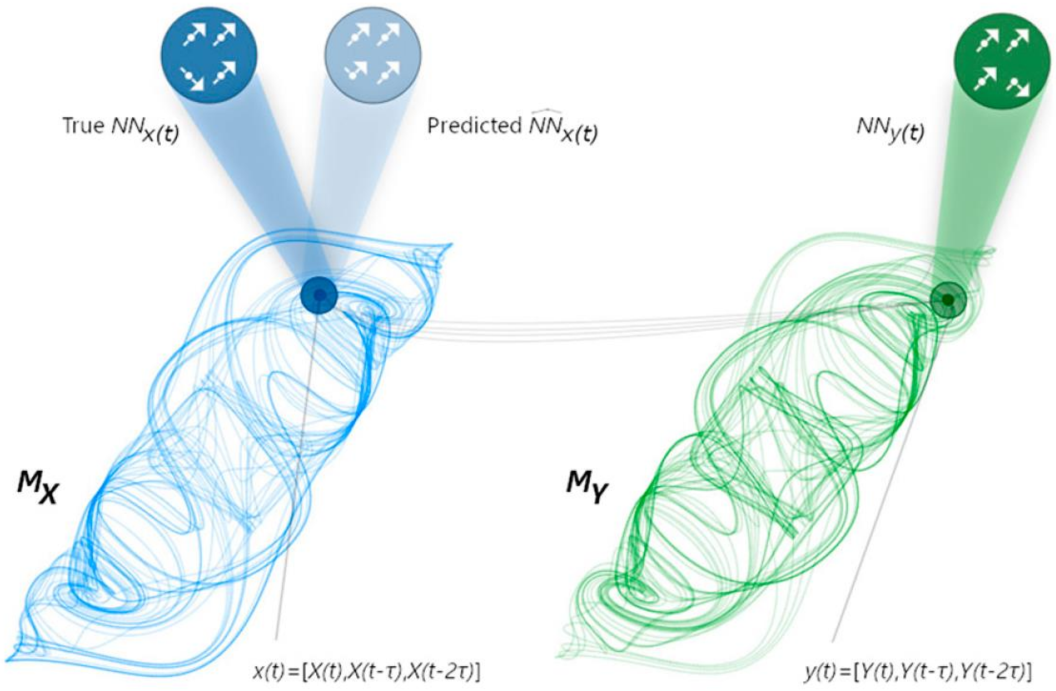
5) Используем корреляцию для оценки соответствия полученного взвешенного значения Ŷ(t)|MX с реальным значением Y(t).

Если X и Y динамически связаны, то ближайшие соседи MX должны определять временные индексы соответствующих ближайших соседей на MY. По мере увеличения L многообразие заполняется и расстояния между ближайшими соседями E+1 уменьшаются.



Y(t)
M
X1(t)
X2(t)
(X1(t), Y(t), X2(t))
(a)
(X1(t), X1(t-1*τ), X1(t-2*τ))
(Y(t), Y(t-1*τ), Y(t-2*τ))
X1(t-1*τ)
MX1
Y(t-1*τ)
MY
X1(t)
X1(t-2*τ)
Y(t)
Y(t-2*τ)
(b)
MX1
MY
Projection
t1
t2
t3
t4
t1+h
t2+h
t3+h
t4+h

Алгоритм Pattern Causality (PC)



Рассмотрим два временных ряда длины L,
{X} = {X(1), X(2), ..., X(L)} и
{Y} = {Y(1), Y(2), ..., Y(L)}.

1) По данным τ, E сформируем матрицу эмбеддингов для ряда MX и MY:
x(t) = <X(t), X(t-τ), X(t-2τ), ..., X(t-(E-1)τ)> для t = 1+(E-1)τ до t = L.
y(t) = <Y(t), Y(t-τ), Y(t-2τ), ..., Y(t-(E-1)τ)> для t = 1+(E-1)τ до t = L.
Эти наборы векторов является "реконструированными многообразиями" или «shadow manifolds" MX и MY соответственно.

2) Для каждого эмбеддинга x(t) находим его E+1 ближайших соседей в этой же матрице MX.

3) Сохраним все временные индексы и расстояния этих E+1 ближайших соседей для каждого x(t) (от ближайшего до самого дальнего) через t1, tE+1. Получим веса этих соседей через их экспоненциально взвешенные расстояния.

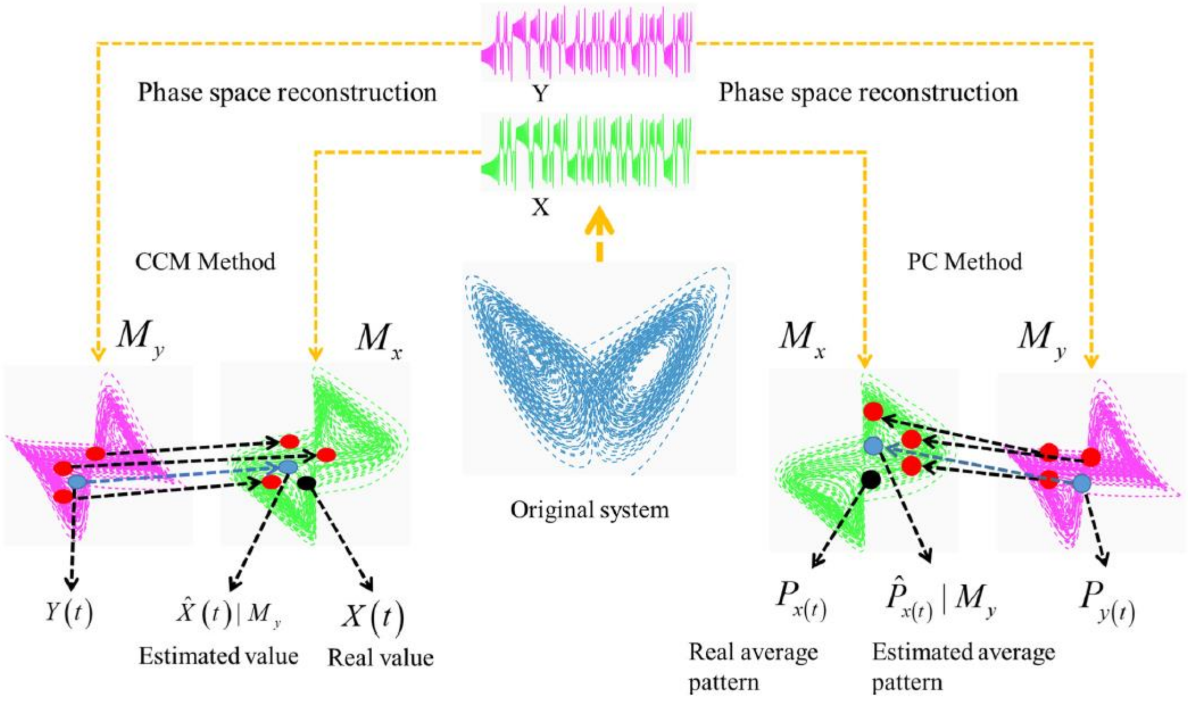
4) Находим доходности внутри каждого эмбеддинга ближайших соседей для каждого эмбеддинга на MX.

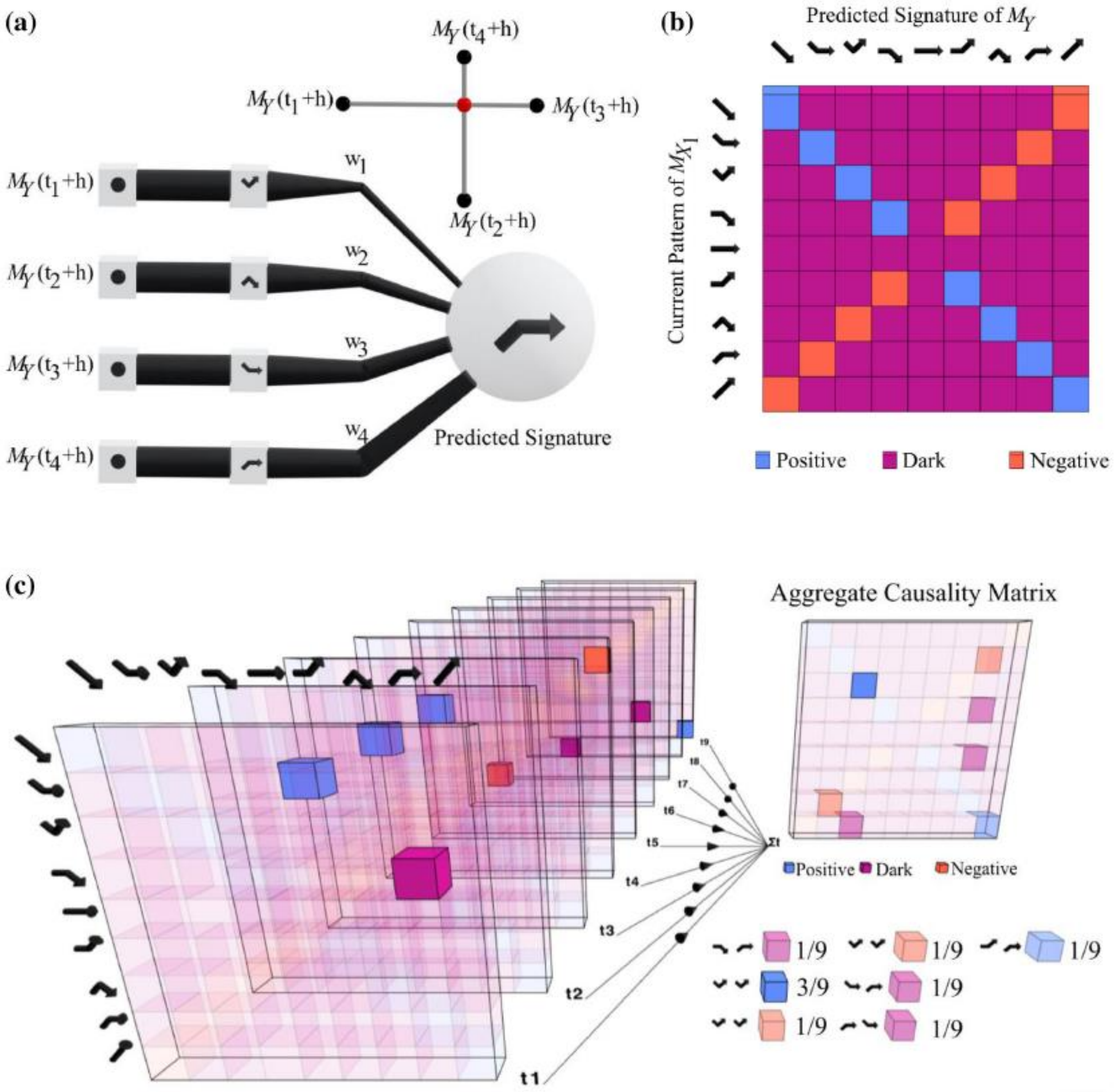
5) Считаем его средневзвешенную доходность на основе softmax весов и конвертируем значения доходностей в символы (-1, 0, 1)

6) На основе индексов и весов 4)-5) для MY и находим оценки доходностей и символы

7) Сравниваем эти символы на соответствие и помещаем их PC матрицу

8) Используем веса совпадений для оценки полученного значения доходностей Ŷ(t)|MX с реальными значениеми доходностей Y(t).


Phase space reconstruction
Y
Phase space reconstruction
X
CCM Method
PC Method
M_y
M_x
M_x
M_y
Original system
$Y(t)$
$\hat{X}(t)|M_y$
$X(t)$
Estimated value
Real value
$P_{x(t)}$
$\hat{P}_{x(t)}|M_y$
$P_{y(t)}$
Real average pattern
Estimated average pattern


(a)
$M_Y(t_4+h)$
$M_Y(t_1+h)$
$M_Y(t_3+h)$
$M_Y(t_2+h)$
$M_Y(t_1+h)$
$M_Y(t_2+h)$
$M_Y(t_3+h)$
$M_Y(t_4+h)$
w_1
w_2
w_3
w_4
Predicted Signature
(b)
Predicted Signature of M_Y
Current Pattern of M_{X_1}
Positive
Dark
Negative
(c)
Aggregate Causality Matrix
t1
t2
t3
t4
t5
t6
t7
t8
t9
Σt
Positive
Dark
Negative
1/9
1/9
1/9
3/9
1/9
1/9
1/9

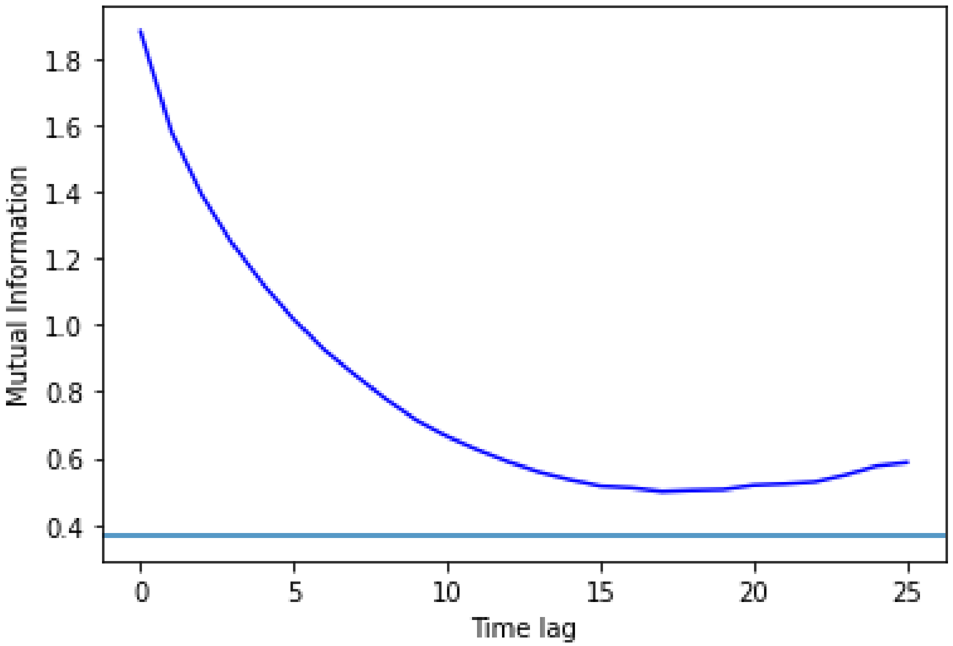
Нахождение значения лага tau

Average Mutual Information (AMI)

$$I(x(t), x(t+\tau)) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) \log\left(\frac{p_{ij}(\tau)}{p_i p_j}\right)$$

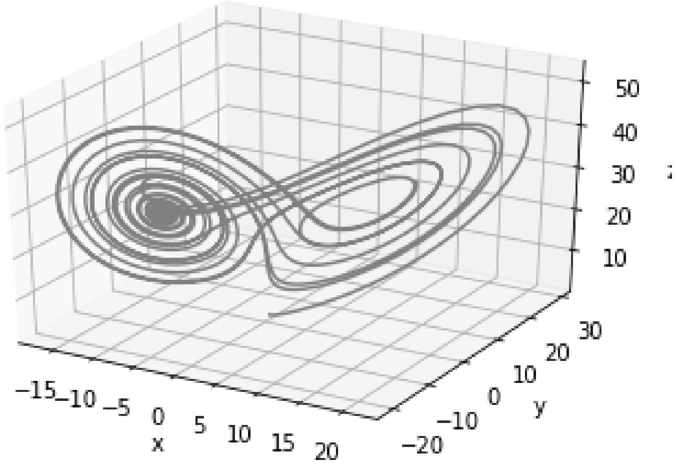
$$\tau_{optimal} = argmin I(x(t), x(t+\tau))$$

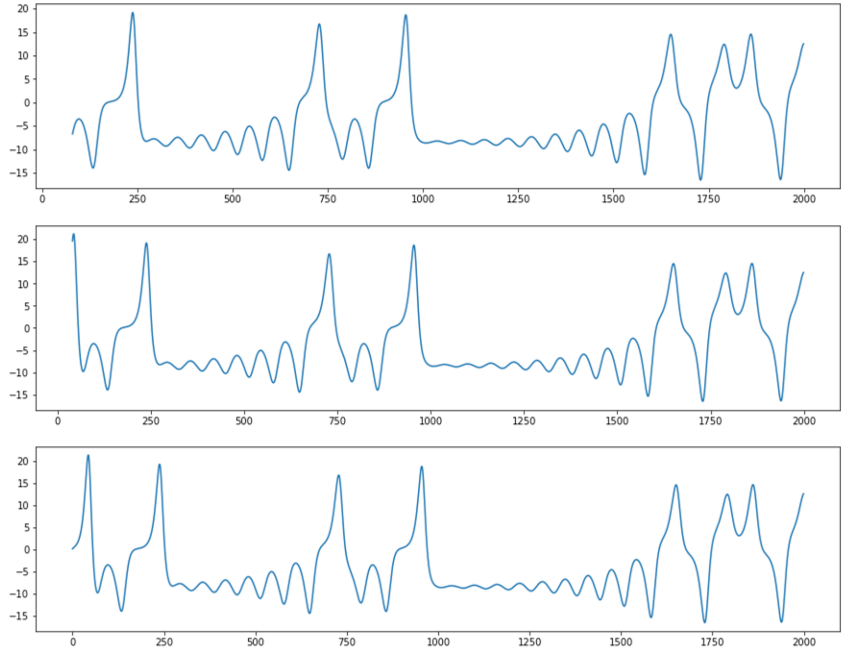
$$\mathbf{y}(t) = (x(t), x(t+\tau), \ldots, x(t+(D-1)\tau))$$



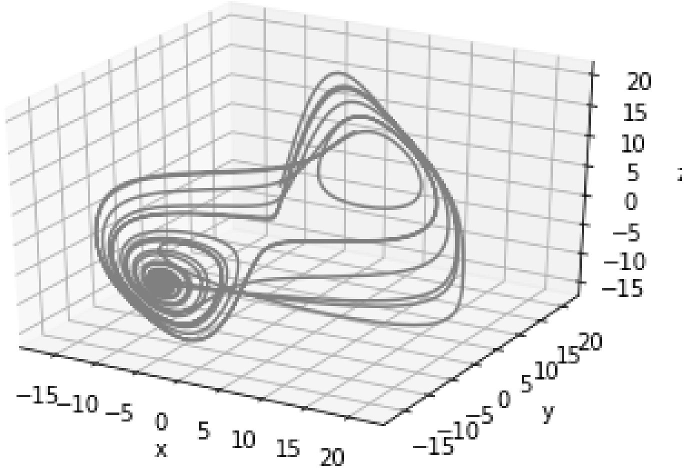
Результат работы метода AMI на аттракторе Лоренца

Average Mutual Information (AMI)





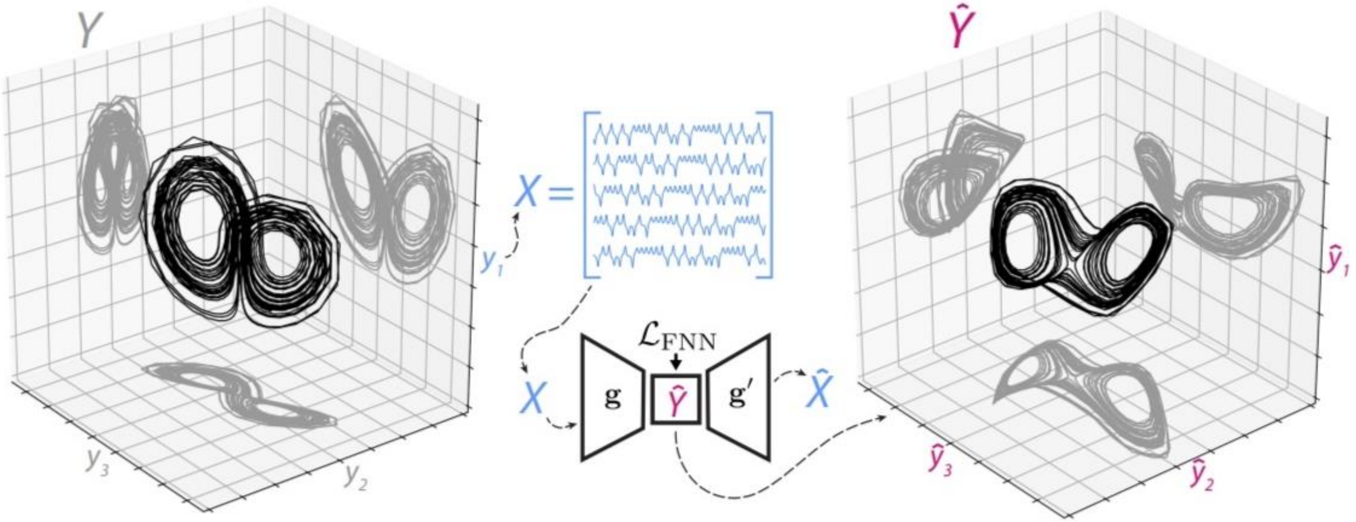
Временной ряд аттрактора Лоренца на плоскости оси X со сдвигом 40



Реконструированный аттрактор Лоренца с помощью сдвига

Нахождение размера эмбеддинга E

Deep reconstruction of strange attractors from time series



$$\mathcal{L}(X, \hat{X}, \hat{Y}) = \|X - \hat{X}\|^2 + \lambda\, \mathcal{L}_{\text{FNN}}(\hat{Y})$$

Фильтр Калмана (теория)

Составляется линейная модель зависимости одного инструмента от другого в момент t

$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + \varepsilon_t$, (α_t, β_t) – параметры, зависящие от времени, $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma -$ параметр, который задается (можно оценить с помощью ЕМ до времени, с которых начитает работать алгоритм).

Предположим, что параметры $(\alpha_{t+1}, \beta_{t+1})^T = T(\alpha_t, \beta_t)^T + \zeta_t$ медленно изменяются со временем с некоторыми возмущениями. Где $\zeta_t \sim N(0, \mathrm{Q})$, $\mathrm{Q} -$ матрица ковариации возмущений параметров тоже задается как параметр (можно оценить с помощью ЕМ до времени, с которых начитает работать алгоритм), а $T -$ матрица перехода состояний (может быть как стационарной, так и динамичной).

Фильтр Калмана (алгоритм обновления параметров)

С помощью итерационного обновления и корректировки $(\alpha_{t+1},\ \beta_{t+1})^T$, с учетом свойств нормального распределения можно получить множество параметров $\{(\alpha_t,\ \beta_t)\}_{t=0}^{t=T}$.

$\widehat{\mathrm{P}} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ (возмущаем)

$\mathrm{H} = (1,\ x_t)$

$\mathrm{K} \ = \ \widehat{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}}(\mathrm{H}\widehat{\mathrm{P}}\mathrm{H}^{\mathrm{T}} + \sigma^2)^{-1}$ (корректировка)

$(\alpha_t,\ \beta_t)^T = (\alpha_{t-1},\ \beta_{t-1})^T + \mathrm{K}(y_t - \ \mathrm{H}(\alpha_{t-1},\ \beta_{t-1})^T)$ (обновление параметров)

$\mathrm{P} \ = (\mathrm{I} - \mathrm{KH}\ )\widehat{\mathrm{P}}$ (обновление матрицы ковариации перехода состояний)

Фильтр Калмана (стратегии)

Рассмотрим стратегию торговли двух акций, которая была реализована с помощью фильтра Калмана.

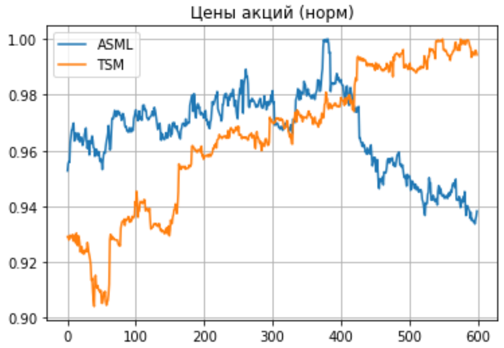
Для периода t используется итерационное обновление Калмана для расчета коэффициента β_t. Затем рассчитывается ошибка линейной модели без коэффициента пересечения $y_{t-1} - \beta_{t-1} x_{t-1}$. Далее, стандартизируем ошибку с помощью скользящего среднего, где длинна окна взято как “half-life mean reversion” $dy(t) = (\lambda y(t-1) + \mu)dt + d\varepsilon$ (получаем Z оценку).

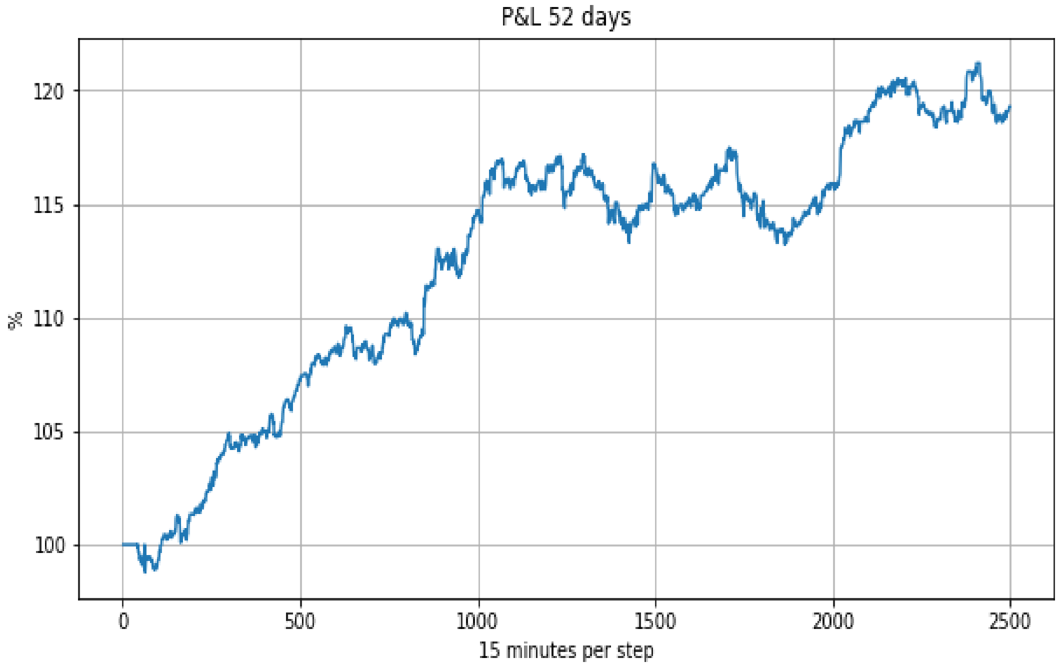
- Когда Z выходит за верхнюю Z оценку входа, переходим к шорт позиции. После закрываем позицию и обновляем Z как Z оценку для ухода с позиции.

- Когда Z выходит за нижнюю Z оценку для входа, открываем лонг позицию. После закрываем позицию и обновляем Z как Z оценку для ухода с позиции.

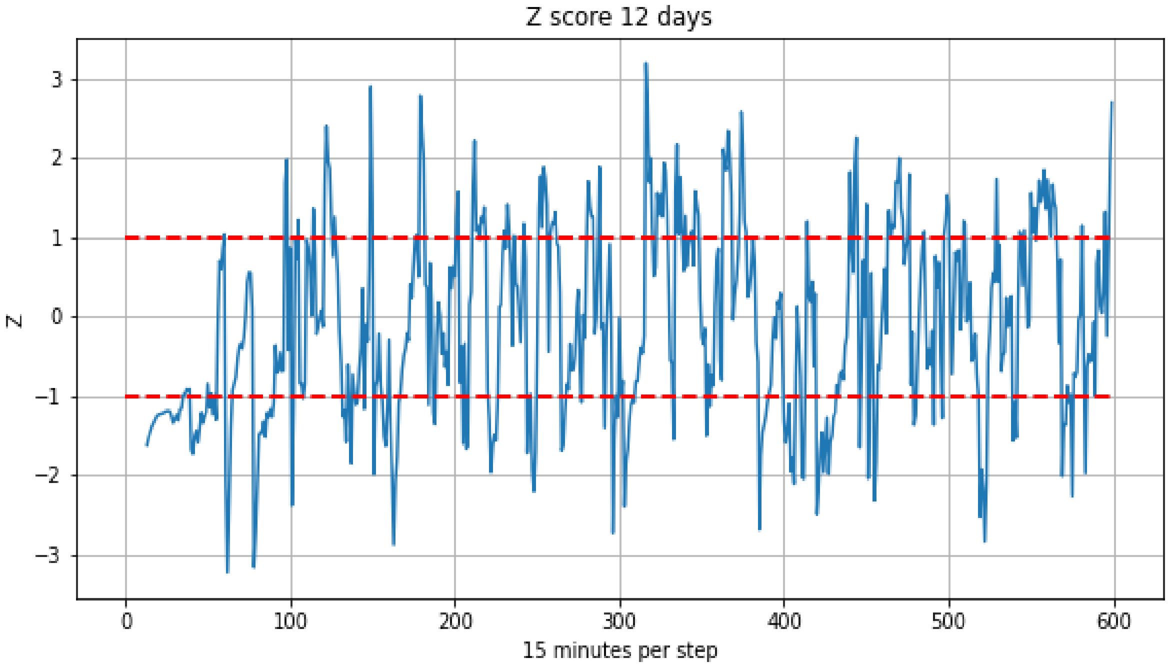
Фильтр Калмана (пример торговли)

Торговля с двух акций (пример):





Выручка с торговли ASML и TSM при коридоре $(-1,\ 1)$



Z score с торговли ASML и TSM при коридоре $(-1,\ 1)$