

Wprowadzenie do równań różniczkowych zwyczajnych

Zadania

1. (1 punkt) Wyznacz równanie różniczkowe pierwszego rzędu opisujące rodzinę krzywych:

$$x^3 y - C y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Narysuj te krzywe (dla kilku wartości stałej C). Czy rozwiązanie równania dla dowolnego warunku początkowego jest jednoznaczne?

2. (2 punkty) Narysuj pole kierunków związane z równaniem różniczkowym:

$$(x^2 + 1) x' = x - t. \quad (2)$$

Następnie rozwiąż (analitycznie lub numerycznie) zagadnienia dla powyższego równania z warunkami początkowymi:

$$x(0) = -1, \quad x(0) = 0, \quad x(0) = 1 \quad (3)$$

(rozważamy trzy oddzielne zagadnienia, każde z innym warunkiem początkowym) i nanieś rozwiązania na otrzymany wykres pola kierunków.

3. (1 punkt) Znajdź rozwiązanie ogólne podanego równania drugiego rzędu:

$$x'' - 6x' + 9x = 9t^2 - 12t + 2. \quad (4)$$

Otrzymany wynik jest warstwą dwuwymiarowej podprzestrzeni liniowej rozpiętej na dwóch wektorach bazowych, tzn.

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + x_s(t). \quad (5)$$

Narysuj (na jednym wykresie) rozwiązania dla różnych wartości parametrów C_1 i $C_2 = 0$ oraz (na drugim wykresie) dla różnych wartości C_2 i $C_1 = 0$.