Metoda Gaussa - Seidela

Jakub Mieczkowski

May 12, 2022

Spis treści

1 Wstep

W ramach zadania projektowego zbadałem metode iteracyjna Gaussa-Seidla służaca do przybliżania rozwiazań równań macierzowych. Metoda została zbadana dla równań macierzowych postaci $AX = B$ oraz $XA = B$, przy czym $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times m}$. W swoim raporcie pokaże przykłady macierzy dla których metoda jest zbieżna szybko lub powoli oraz takich dla, których metoda jest rozbieżnych powoli lub szybko, sprawdze czy metoda zwraca identyczne wyniki kiedy $B = I$. Pokaże również, że przy manipulacji jednym elementem w macierzach postaci $AX = B$ oraz $XA = B$ otrzymamy rozbieżność w tym samym momencie.

2 Opis metody dla $AX = B$

Startujemy od pewnego przybliżenia poczatkowego, które jest macierza takich wymiarów, aby zgadzało sie mnożenie macierzy (u mnie jest to macierz samych zer). Kolejne przybliżenia wyznaczamy z nastepujacego algorytmu:

for k=1,2,... (aż do warunku stopu)
  for l=1,2,...n
    for i=1,2,...m
      $x_{i,\,l}^{(k+1)} = (b_{il} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}x_{j,l}^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{m} a_{i,j}x_{j,l}^{(k)})/a_{i,i}$
    end
  end
end

W swoich testach pozwalałem użytkownikowi samodzielnie wybrać liczbe k - kroków, które program ma wykonać. Przy dostatecznie dużej liczbie kroków, jeśli k bedzie bardzo bliskie 0 to oznacza, że metoda jest zbieżna. Natomiast jeśli k od pewnego momentu rośnie to znaczy, że metoda rozbiega.
Zbieżność metody oznacza, że przybliżenie mnożenia macierzy zostało wykonane poprawnie.

3 Opis metody dla $XA = B$

W tym przypadku metoda działa analogicznie, jednak sam algorytm ma troche inne iteracje, co zapisze poniżej:

for k=1,2,... (aż do warunku stopu)
  for l=1,2,...n
    for i=1,2,...m

$x_{i,\,l}^{(k+1)} = (b_{il} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{j,l} x_{i,j}^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{m} a_{j,l} x_{i,j}^{(k)})/a_{l,l}$
    end
  end
end

4 Zbieżność metody

Wyróżniamy dwa podstawowe warunki konieczne zbieżności metody Gaussa-Seidla: dominacja w rzedach oraz dominacja w kolumnach. Mamy też jeden warunek wystarczajacy zbieżności, jednakże nie korzystam z niego, ponieważ jest mało praktyczny i nieoptymalny w obliczeniach numerycznych. Brzmi on nastepujaco: metoda Gaussa-Seidla jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy moduły wszystkich wartości własnych macierzy B sa mniejsze od 1. W swoich przykładach nie bede z niego korzystał.

5 Przykłady obliczeniowe

W tej cześci raportu pokaże na prostym przykładzie, że moja metoda działa oraz przedstawie ciekawe implementacje metody Gaussa-Seidla do wyznaczania równań macierzowych.

5.1 Sprawdzenie działania kodu

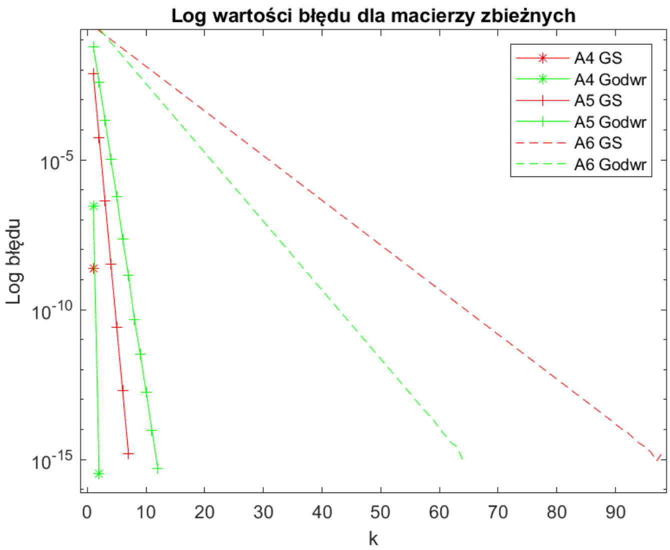
Sprawdzenie poprawności mojego kodu dokonałem poprzez wybór macierzy, która była dominujaca wierszowo, a nastepnie odjałem $A^{-1}B$ i sprawdziłem czy otrzymam macierz samych zer. Otrzymałem nastepujacy wynik :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 5.5 * 10^{-17} & 0 \\ 0 & -1.11 * 10{-}16 & 2.42 * 10{-}17 \\ 1.38 * 10{-}17 & 0 & -1.38 * 10{-}17 \end{bmatrix}.$$

Wynik nie jest dokładnie równy 0, ale bład rzedu 10^{-16} jest akceptowalny.

5.2 Przykłady dla których metoda jest zbieżna

Tutaj przedstawie przykłady macierzy, dla których metoda jest zbieżna bardzo szybko, szybko oraz wolno. Szybkość zbieżności możemy zobaczyć na nastepujacym wykresie ilości kroków iteracji metody Gaussa-Seidla od błedu:



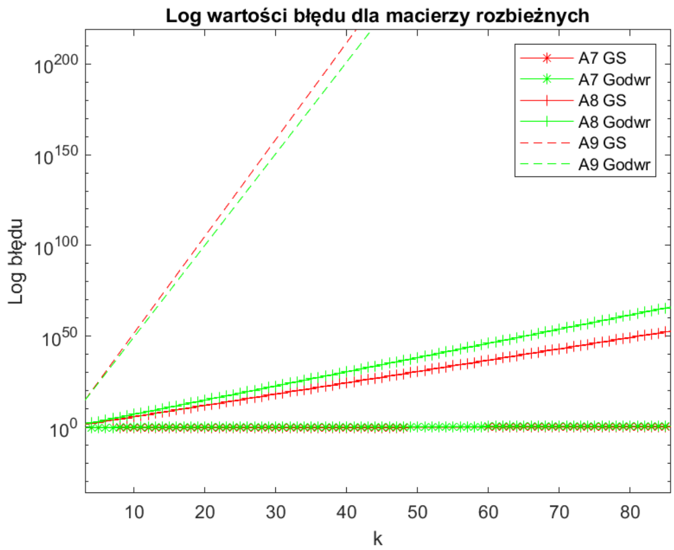
przy czym macierze $A4$, $A5$ oraz $A6$ wygladaja nastepujaco:

$$A4 = \begin{bmatrix} 18 & 1 & 1 \\ 3 & 54 & 1 \\ 2 & 5 & 64 \end{bmatrix}, A5 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 7 \\ 53 & 54 & 1 \\ 12 & 51 & 64 \end{bmatrix}, A6 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 9 \\ 53 & 54 & 51 \\ 15 & 51 & 64 \end{bmatrix}.$$

Macierz B jest dowolna macierza o wymiarach 3×3, taka sama dla $A4$, $A5$ oraz $A6$. Czerwone linie na wykresie oznaczaja zastosowanie metody Gaussa-Seidla dla $AX = B$, natomiast zielone dla $XA = B$. Jak widać na wykresie, dla macierzy $A4$ metoda Gaussa - Seidla jest zbieżna bardzo szybko, dla $A5$ bardzo szybko, natomiast dla $A6$ wolno. Możemy również zauważyć, że zbieżność dla $AX = B$ oraz $XA = B$ odbywa sie w różnym tempie - w dwóch przypadkach $XA = B$ jest szybsza, a w jednym wolniejsza.

5.3 rzykłady dla których metoda jest rozbieżna

W tej cześci raportu analogicznie pokaże przykłady, w których metoda jest rozbieżna w różnym tempie. Tak przestawia sie to na wykresie ilości kroków iteracji od błedu metody:



przy czym macierze $A7$, $A8$ oraz $A9$ wygladaja nastepujaco:

$$A7 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 12 \\ 53 & 54 & 63.4 \\ 15 & 51 & 64 \end{bmatrix}, A8 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 12 \\ 53 & 54 & 86 \\ 15 & 51 & 64 \end{bmatrix}, A9 = \begin{bmatrix} 18 & 11 & 12 \\ 53 & 54 & 786 \\ 15 & 51 & 64 \end{bmatrix}.$$

Macierz $A7$ jest tak wolno rozbieżna, że w porównaniu do pozostałych wyglada jakby watość była stała, jednakże wartości tam powoli rosna, zaś w macierzy $A9$ wartości już około 40 iteracji sa rzedu 10^{200}.

5.4 Czy $AX = I$ oraz $XA = I$ daja takie same wyniki?

Jak wiemy z algebry liniowej w tym przypadku $X = A^{-1}$, a wiec oba warianty metody Gaussa-Seidla powinny zwracać taki sam wynik. Poniżej pokaże, że nie zawsze tak jest. Robiac różne testy w Matlabie zauważyłem, że gdy metoda jest zbieżna dla AX=I to jest również zbieżna dla $XA = I$ i odwrotnie. Dla przykładu macierz

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 1 & 3 \\ 22 & 253 & 215 \\ 1 & 189 & 191 \end{bmatrix}$$

jest dominujaca wierszowo, zatem wiemy że metoda jest zbieżna. Dla sprawdzenia czy zwracane sa takie same wyniki policzyłem macierz $Z = |AX - XA|$ i sprawdziłem czy dla $k = 1000$ zwracane sa wartości bliskie 0. Oto wynik, który otrzymałem:

$$Z = \begin{bmatrix} 5.5 * 10^{-17} & 3.5 * 10^{-18} & 0 \\ 0 & 6.9 * 10^{-18} & 1.39 * 10^{-17} \\ 5.5 * 10^{-17} & 0 & 6.9 * 10^{-18} \end{bmatrix}.$$

Jednakże jeśli weźmiemy przykład macierzy dla której metoda jest rozbieżna możemy otrzymać kompletnie różne wyniki. Np dla:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 14 & 23 \\ 491 & 878 & 697 \\ 1 & 120 & 100 \end{bmatrix}$$

otrzymamy analogiczna jak powyżej macierz o nastepujacych wartościach:

$$Z = \begin{bmatrix} 7.2 * 10^4 & 4.5 * 10^3 & 1.44 * 10^4 \\ 1.1 * 10^5 & 2 * 10^3 & 1.7 * 10^4 \\ 1.2 * 10^5 & 4.1 * 10^3 & 2.3 * 10^3 \end{bmatrix},$$

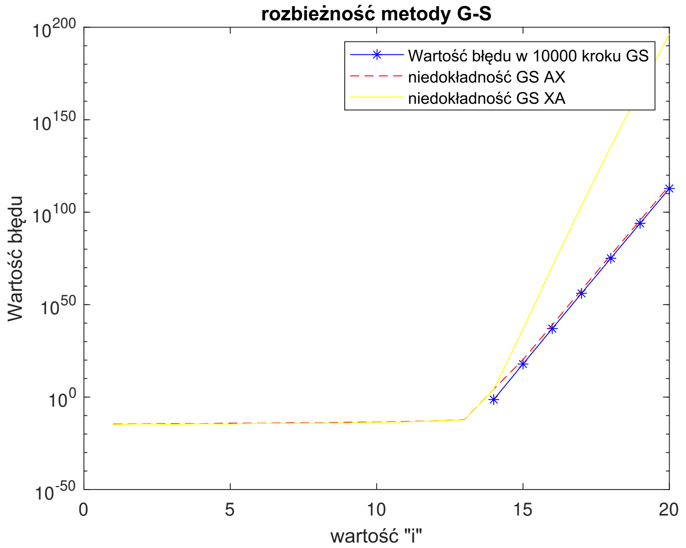
Zatem widzimy, że w tym przypadku $AX \neq XA$.

5.5 Czy $AX = I$ oraz $XA = I$ zaczynaja być rozbieżne w tym samym momencie?

W tym przykładzie skonstruowałem macierz wolno zbieżna. Pokaże że $AX = I$ oraz $XA = I$ stana sie rozbieżne w tym samym momencie gdy bede manipulował jedna wartościa o 0.1. Moja macierz A wyglada nastepujaco:

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 14 & 12 - 0.1 * i \\ 491 & 878 & 697 \\ 1 & 120 & 100 \end{bmatrix},$$

gdzie i jest wartościa która manipuluje. Tak wyglada wykres zależności błedu od wartości i:



Zauważmy, że dla obu macierzy metoda zaczyna być rozbieżna w 13 kroku, czyli wtedy kiedy k staje sie wieksze (pojawia sie niebieska kreska, która wcześniej była równa 0). Jak widać w tym przypadku niedokładność XA jest szybciej rozbieżna, co też powoduje że dla macierzy rozbieżnych zwracane moga być zupełnie różne wyniki.

6 Podsumowanie

W powyższym raporcie sprawdzałem kiedy metoda Gaussa - Seidla jest rozbieżna, czy zwraca różne wyniki dla równań postaci XA=B oraz AX=B oraz pokazałem przykłady macierzy rozbieżnych oraz zbieżnych w różnym tempie. Zauważyłem, że dla macierzy rozbieżnych metoda potrafi zwracać kompletnie różne wyniki, gdy B jest macierza jednostkowa. Interesujacym wnioskiem jest również fakt, że metoda Gaussa-Seidla dla macierzy AX=I oraz XA=I zaczyna rozbiegać w tym samym momencie, co pokazuje że zbieżność metody dla $XA = I <=>$ zbieżności metody dla $AX = I$.