7)

- moment rzędu n rozkładu P(x):

$$m_n = \int_0^{+\infty} x^n P(x)\, dx$$

- dla podanego P(x):

$$m_n = \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x)\left[1 + \epsilon \sin(2\pi \ln x)\right] dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x)\, dx}_{m_n^*} + \epsilon \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x) \sin(2\pi \ln x)\, dx$$

moment rzędu n dla rozkładu lognormalnego

- $J = \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x) \sin(2\pi \ln x)\, dx$

- $y = \ln x \rightarrow x = e^y$, zatem $dx = e^y dy$

$\ln 0 = -\infty$, $\ln \infty = \infty$ zatem zmienia się przedział całkowania

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny} P^*_{LN}(e^y) \sin(2\pi y) e^y\, dy$$

Rozkład lognormalny $P^*_{LN}(x)$ w zmiennej y jest rozkładem normalnym.

- Funkcja gęstości dla standardowego rozkładu normalnego:

$$P^*_{LN}(e^y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin(2\pi y)\, e^y\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin(2\pi y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

Po obliczeniu całki w programie otrzymujemy:

$$J \approx e^{\frac{1}{2}} \quad \text{dla} \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin(2\pi y)\, dy$$

wynikiem będzie $e^{\frac{(n+1)^2}{2} - 2\pi^2} \cdot \sin(2\pi n)$

dla $n \in \mathbb{Z}$ $\sin(2\pi n) = 0$

b

Zatem:

$$m_n = m_n^* + \epsilon \cdot 0$$

$$m_n = m_n^*$$

(