7)

- moment rzędu n rozkładu $P(x)$:

$$m_n = \int_0^{+\infty} x^n P(x)\, dx$$

- dla podanego $P(x)$:

$$m_n = \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x)\left[1+\epsilon \sin(2\pi \ln x)\right] dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x)\, dx}_{m^*_n} + \epsilon \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x) \sin(2\pi \ln x)\, dx$$

moment rzędu n dla rozkładu lognormalnego

- $J = \int_0^{+\infty} x^n P^*_{LN}(x) \sin(2\pi \ln x)\, dx$

- $y = \ln x \rightarrow x = e^y$, zatem $dx = e^y dy$

$\ln 0 = -\infty$, $\ln \infty = \infty$ zatem zmienia się

przedział całkowania

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny} P^*_{LN}(e^y) \sin(2\pi y)\, e^y\, dy$$

Rozkład lognormalny $P^*_{LN}(x)$ w zmiennej y jest rozkładem normalnym.

- Funkcja gęstości dla standardowego rozkładu normalnego:

$$P^*_{LN}(e^y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ny} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin(2\pi y)\, e^y\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+1)y} e^{-\frac{y^2}{2}} \sin(2\pi y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dy$$

- Wartość oczekiwana dla rozkładu normalnego:

$$E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

dla całki: $J = E\left(\sin(2\pi Y)\, e^{(n+1)Y}\right)$

$\sin(2\pi Y)$ jest funkcją nieparzystą $\rightarrow f(-x) = -f(x)$

$e^{(n+1)Y}$ jest funkcją parzystą $\rightarrow f(-x) = f(x)$

Iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej jest funkcją nieparzystą.
Wartość oczekiwana dla funkcji nieparzystej wynosi 0.

$$J = E\left(\sin(2\pi Y)e^{(n+1)Y}\right) = 0$$

zatem:

$$m_n = m_n^* + 6 \cdot 0$$

$$m_n = m_n^*$$