

Projekt 1 z przedmiotu Metody Numeryczne

Autor Jakub Rymarski

Treść zadania:

Wyznaczanie zer wielomianu (i wizualizacja szybkości zbieżności metody) $w(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ w dziedzinie zespolonej metodą Halley'a. Do obliczania wartości wielomianu i jego pochodnej należy zastosować algorytm Hornera.

1. Opis metody (Metoda Halley' a):

Metoda Halley' a to metoda iteracyjna wyznaczania przybliżonej wartości miejsca zerowego funkcji $f(x)$. W zadaniu przybliżenie początkowe jest postaci $x = x_k + y_j$, gdzie $x_k \in [a, b]$ oraz $y_j \in [c, d]$. Kolejne przybliżenia oblicza się w sposób rekurencyjny.

Niech $f : C \rightarrow C$ będzie klasy $C^2(C)$ oraz niech $x_0 \in C$ będzie danym przybliżeniem początkowym.

Korzystając z notatek z wykładu:

Wykorzystując rozwinięcie funkcji $f(x)$ w szereg Taylora w otoczeniu punktu x_k otrzymujemy przybliżenie p funkcji f :

$$p(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x - x_k)^2.$$

Następnie przyjmujemy:

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Po przekształceniu:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{1}{2}f''(x_k)(x_{k+1} - x_k)}.$$

Wartość x_{k+1} po prawej stronie przybliżamy metodą Newtona (tj. podstawiamy $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$) otrzymując wzór określający metodę Halleya:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - f''(x_k) \frac{f(x_k)}{2f'(x_k)}} \quad \text{dla } k = 0, 1, \dots$$

Idea metody Halleya: kolejne przybliżenie x_{k+1} jest miejscem zerowym hiperboli przybliżającej funkcję $f(x)$ w punkcie x_k .

W algorytmie wykorzystałem warunek stopu $|x_{k+1} - x_k| < \text{tol}$, gdzie tol określa dokładność.

Zbieżność:

Wykładnikiem zbieżności metody iteracyjnej nazywamy największą liczbę $p \geq 1$ taką, że: $|e_{k+1}| \leq C|e_k|^p$, gdzie $e_k = x_k - x$ jest błędem w k -tym kroku, a C pewną stałą (nieujemną).

Dla metody Halley'a $p = 3$, czyli metoda ma zbieżność sześcienną.

W moim projekcie szybkość zbieżności badałem za pomocą liczby iteracji w metodzie

Halley' a do momentu znalezienia pierwiastka, który spełnia warunek stopu.

2. Opis programu:

Program składa się z 4 funkcji:

Funkcja Horner.m wylicza wartości wielomianu, jego pierwszej i drugiej pochodnej.

W funkcji Sprawdzenie.m sprawdzam czy wyniki funkcji Horner.m są tożsame z wynikami działania wbudowanych funkcji.

Następnie wykorzystuję funkcję Horner.m w funkcji Halley_method.m, która zwraca pierwiastek i liczbę iteracji wykonanych do jego znalezienia.

Ostatnim etapem jest Wizualizacja.m, która tworzy grafikę ukazującą szybkość zbieżności Metody Halley' a dla danych przybliżeń początkowych.

Poniżej dokładny opis poszczególnych funkcji:

- [result] = Horner (A, x)

W funkcji wykorzystałem algorytm Hornera podany na wykładzie, również w taki sam sposób oznaczałem zmienne.

Funkcja Horner zwraca 3-elementowy wektor result o wartościach (kolejno):

- wartość wielomianu (w) w punkcie x

- wartość pochodnej wielomianu (p) w punkcie x

- wartość drugiej pochodnej wielomianu (2*r) w punkcie x

parametr A - (n+1)-elementowy wektor liczb (zespólonych) a_0, a_1, \dots, a_n ,
gdzie $a_i = A(i+1)$

parametr x - argument funkcji, dla którego liczymy dane wartości

Gdy mamy mniej niż 2 parametry zwracamy NaN.

-[out] = Sprawdzenie(A, x)

Funkcja sprawdza poprawność algorytmu Hornera, który wylicza wartość wielomianu, jego pierwszej i drugiej pochodnej

zwraca out - błędy danych wyników (w porównaniu z funkcjami wbudowanymi, polyval, polyder)

parametr A - (n+1)-elementowy wektor liczb (zespólonych) $a_n, a(n-1), \dots, a_0$
gdzie $a_i = A(i+1)$

parametr x - argument funkcji, dla którego liczymy dane wartości

-[out] = Halley_method(A, x0, tol, N)

Funkcja Halley_method szuka miejsca zerowego wielomianu za pomocą metody Halleya i zwraca out - liczba wykonanych iteracji do znalezienia szukanego miejsca zerowego, (jeśli go nie znajdzie w ciągu N iteracji to zwraca N+1) parametr A - parametr A - (n+1)-elementowy wektor liczb (zespólonych a_0, a_1, \dots, a_n , (współczynniki wielomianu), gdzie $a_i = A(i+1)$)
parametr x0 - przybliżenie początkowe
W przypadku błędu (niepoprawnych danych) lub nieznaalezienia miejsca zerowego zwracany jest NaN
tol-dokładność potrzebna do warunku stopu
N-maksymalna ilość iteracji
Gdy mamy mniej niż 2 parametry zwracamy NaN.

-[out] = Wizualizacja(A, a, b, c, d, n, m)

Funkcja wizualizacja zwraca out - obrazowo przedstawioną macierz, która przedstawia liczbę wykonanych iteracji w metodzie Halleya dla przybliżeń początkowych będących punktami siatki $[a, b] \times [c, d]$
parametry a, b, c, d, n, m: $[a, b] \times [c, d]$ wymiar obszaru prostokąta, na którym tworzymy siatkę punktów (x_i, y_j) , gdzie x_k należy do $[a, b]$ i y_j należy do $[c, d]$, $x_k = a + kh_1$, $k=0, \dots, n$, $y_j = c + jh_2$, $j=0, \dots, m$,
 $h_1 = (b-a)/n$, $h_2 = (d-c)/m$
Gdy mamy mniej niż 7 parametrów zwracamy NaN.

3. Przykłady i analiza wyników

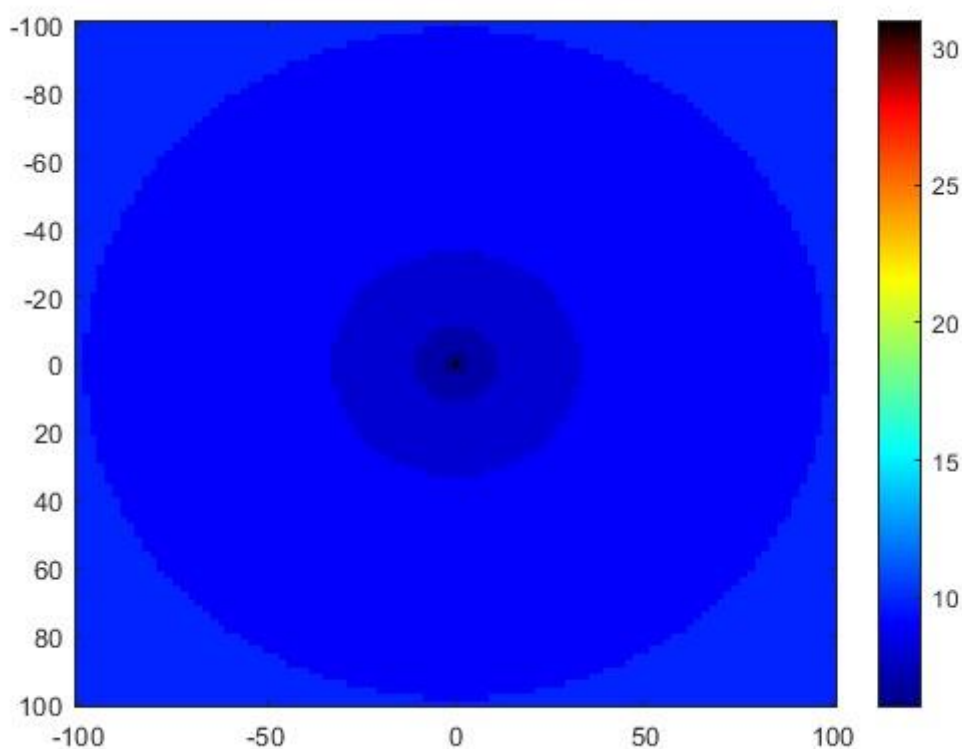
Poniżej przedstawiam wyniki działania funkcji Wizualizacja dla różnych wielomianów i dla przybliżeń początkowych w różnych przedziałach. (Gdy liczba iteracji jest większa od 30 zaznaczyłem miejsce odpowiadające danemu miejscu zerowemu na czarno.)

Przykład 3.1

$$w(x) = x^2$$

Przedział $(-100, 100, -100, 100)$

Na początek przyjrzyjmy się prostej funkcji x^2 .



Analiza wyniku 3.1

Wiemy, że funkcja $w(x) = x^2$ ma podwójne miejsce zerowe w punkcie 0. Widzimy, że gdy przyjmujemy przybliżenie początkowe w punkcie 0,

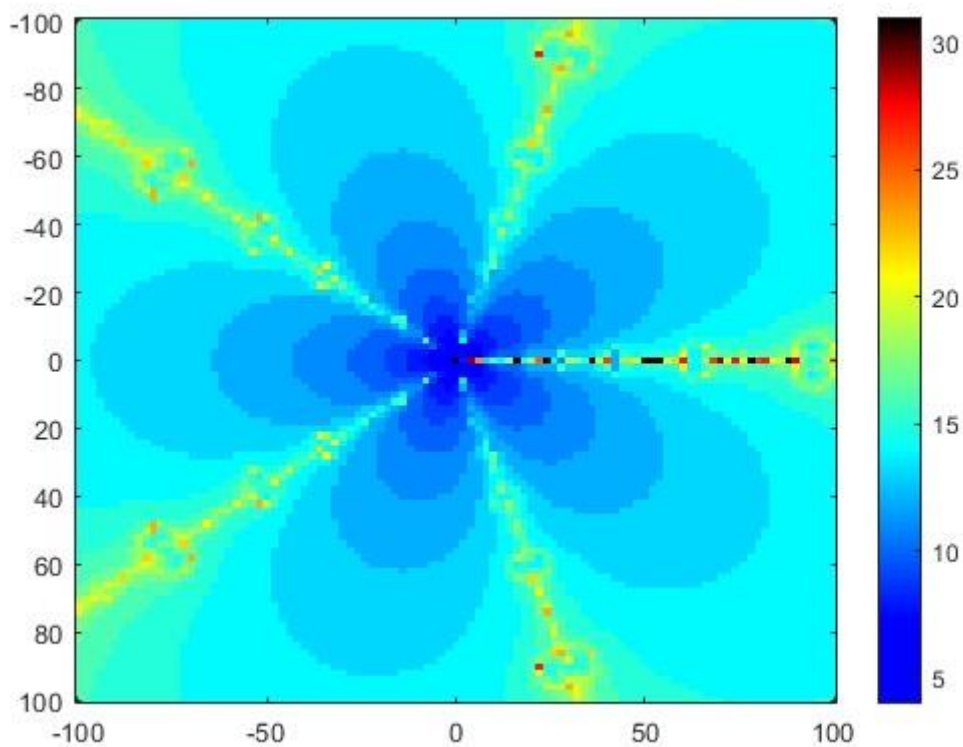
(wtedy styczna w punkcie $x_0 = 0$ jest równoległa do osi OX) nasza metoda nie będzie zbieżna. (Przekroczymy 30 iteracji).

W pozostałych punktach Metoda jest zbieżna, liczba iteracji rośnie wraz ze wzrostem odległości od pierwiastka równego 0.

Przykład 3.2

$$w(x) = x^5 + 1$$

Przedział $(-100, 100, -100, 100)$



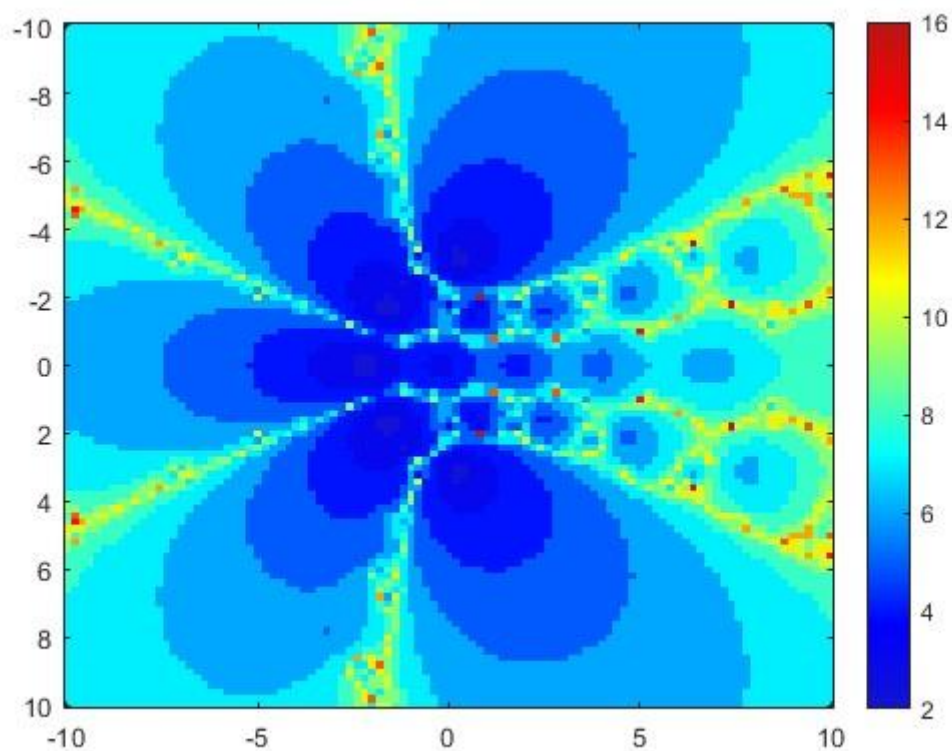
Analiza wyniku 3.2

Wielomian $w(x) = x^5 + 1$ ma w dziedzinie zespolonej 5 miejsc zerowych, równo rozłożonych na okręgu jednostkowym. Widzimy, że układ rysunku wskazuje na taką zależność między pierwiastkami. 5 prostych dzieli obraz na podobne części.

Przykład 3.3

$w(x) = x^5/124 + x^4/24 + x^3/6 + x^2/2 + x + 1$ (przybliżenie liczby e^x szeregiem Taylora)

Przedział $(-10, 10, -10, 10)$



Analiza wyniku 3.3

Pierwiastki tego wielomianu to:

$$0.2398 + 3.1283i$$

$$0.2398 - 3.1283i$$

$$-2.1806 + 0.0000i$$

$$-1.6495 + 1.6939i$$

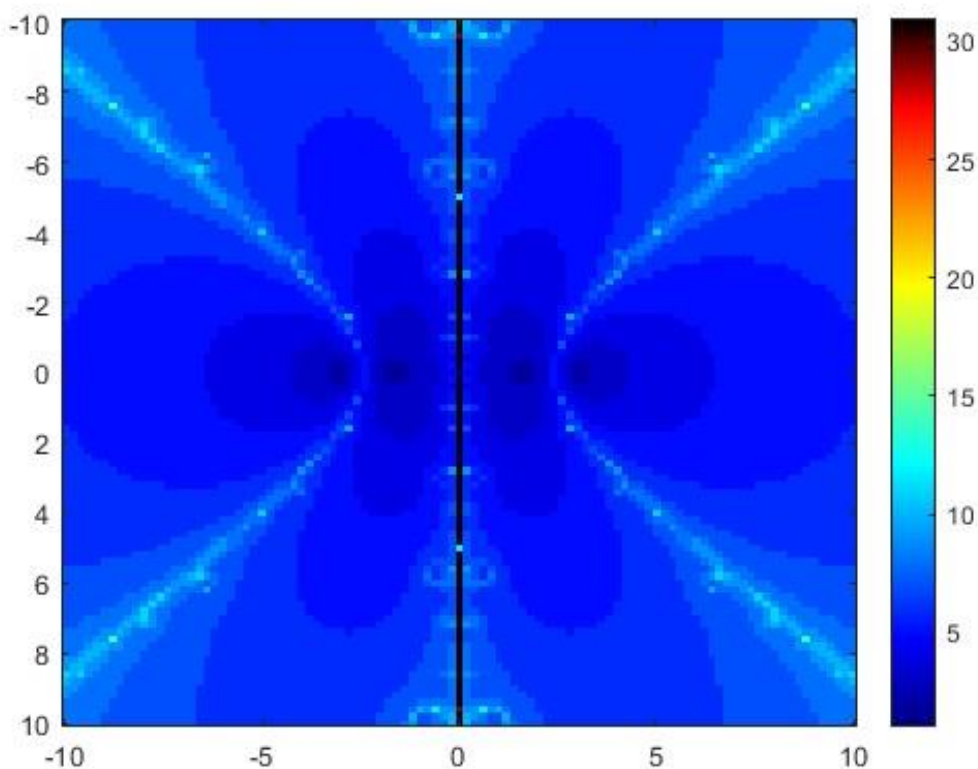
$$-1.6495 - 1.6939i$$

Wybrałem ten wielomian, ponieważ pierwiastki te są na tyle dokładne, że wyznaczone przeze mnie w funkcji Wizualizacja.m punkty tworzące siatkę są od nich różne. Widzimy, że zbieżność przy przybliżeniu początkowym równym pierwiastkowi jest bardzo szybka. (Już na rysunku nie mamy zaznaczonych czarnych punktów jak chociażby w przykładzie 3.1) Oczywiście wynika to z tego, że wybrane przez nas punkty różnią się od dokładnych wartości pierwiastków wielomianu. Przykład ten oprócz tego, że znów widzimy na nim pewne podobieństwa, jeśli chodzi o rozkład pierwiastków, to pokazuje, że nie można wyciągać pochopnych wniosków z danych ilustracji.

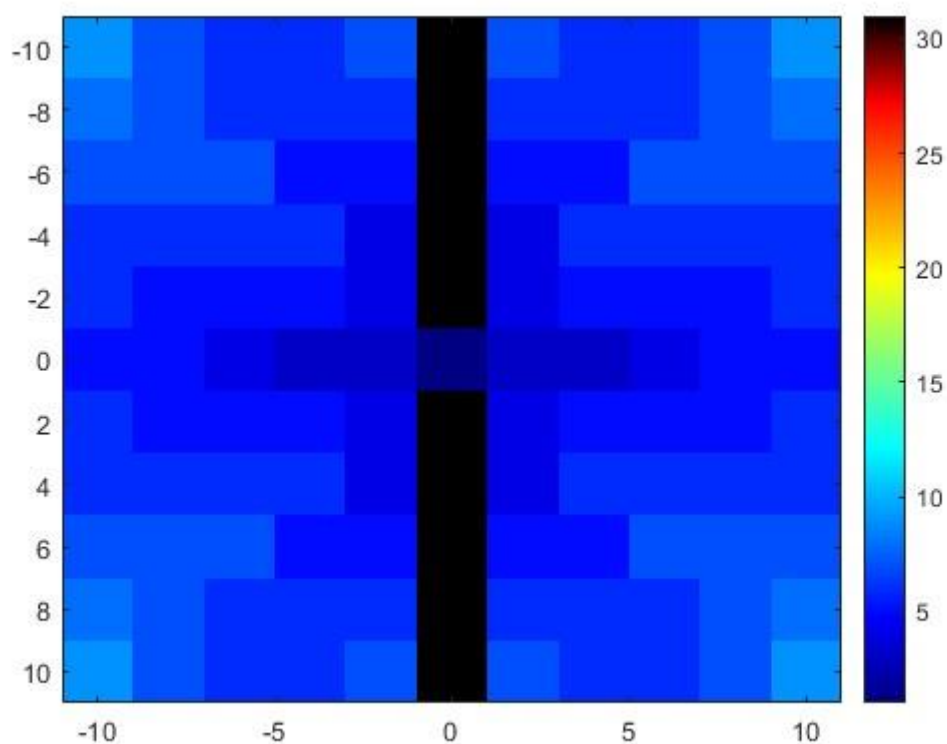
Przykład 3.4

$w(x) = x^4/24 - x^2/2 + 1$ (przybliżenie $\cos(x)$ szeregiem Taylora)
Przedział $(-10, 10, -10, 10)$

Na tym przykładzie porównamy jak parametry n i m funkcji Wizualizacja wpływają na dokładność rysunku.



Rysunek dla $n=100$, $m=100$



Rysunek dla $n=10$, $m=10$

Analiza wyniku 3.4

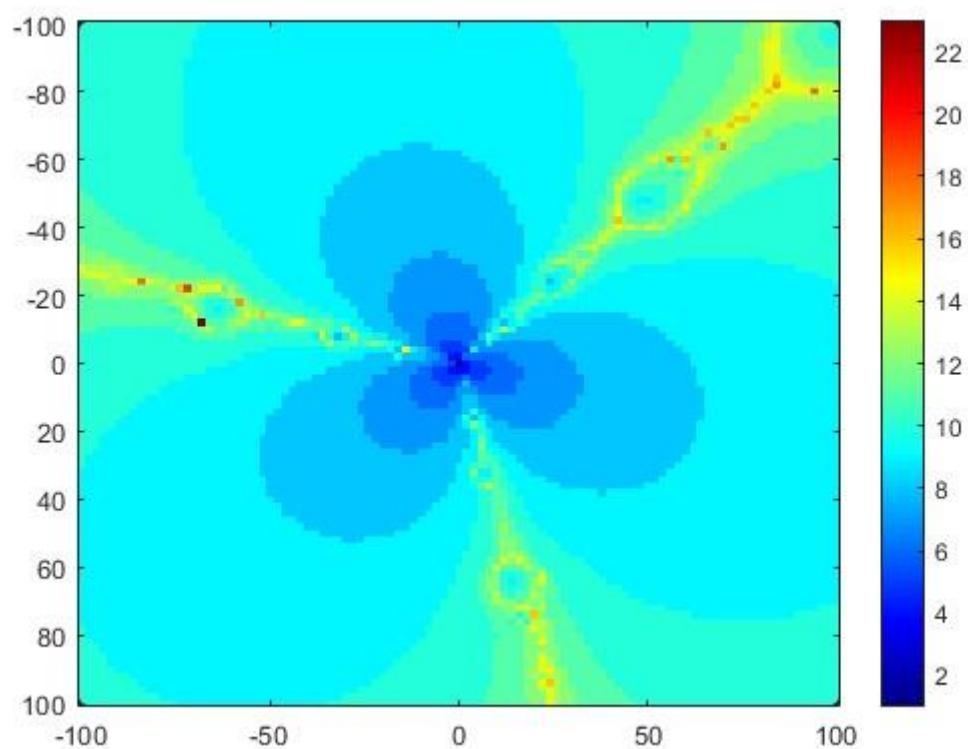
Parametry n i m (ilość punktów, na jaką dzielimy dany przedział) znacząco wpływają na dokładność rysunku. Im więcej punktów tym rysunek wydaje się dokładniejszy. Jednak z obu rysunków możemy zauważyć, że dla przybliżenia początkowego o współrzędnej x -owej równej 0, nasza metoda nie jest zbieżna. Wynika to z tego, że styczna do wykresu funkcji cosinus w punkcie o współrzędnej x -owej 0 jest równoległa do osi OX .

Przykład 3.5

$$w(x) = (1-i)x^3 + ix^2 + i$$

Przedział $(-100, 100, -100, 100)$

Zobaczmy czy współczynniki zespolone zmieniają postać naszego rysunku



Analiza wyniku 3.5

Pierwiastkami danego równania są liczby:

$$1.0415 - 0.4679i$$

$$-0.4277 - 0.7444i$$

$$-0.1138 + 0.7123i$$

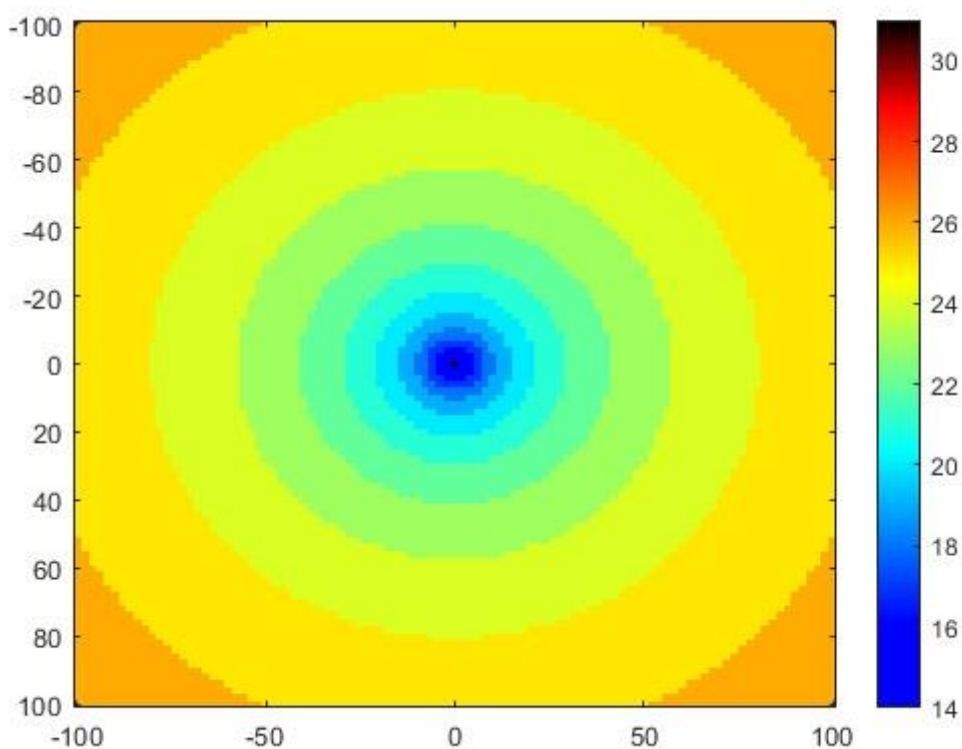
Ilustracja przykładu wydaje się odzwierciedlać rozkład pierwiastków wielomianu. Współczynniki zespolone nie wpływają w znaczący sposób na rysunek, co jest zgodne z intuicją.

Przykład 3.6

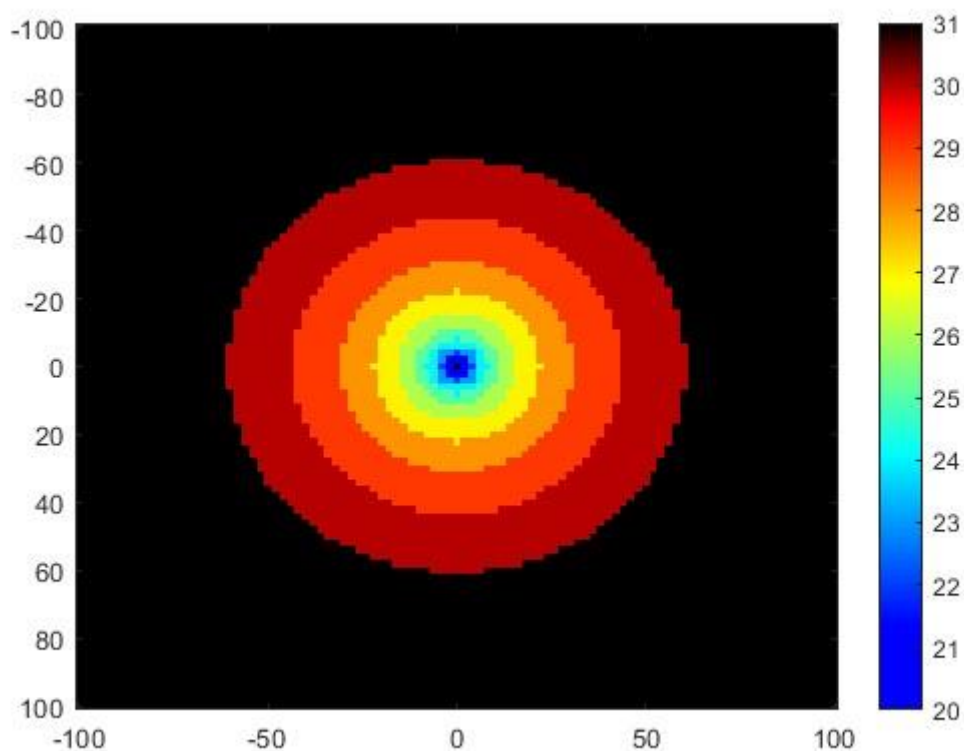
$$w(x) = x^6$$

Przedział $(-100, 100, -100, 100)$

Ten przykład pozwoli nam zbadać różnicę zbieżności w zależności od parametru tol (dokładność).



Rysunek dla $\text{tol} = 0.01$



Rysunek dla $\text{tol} = 0.001$

Analiza wyniku 3.6

Możemy zaobserwować, że mniejsza wartość parametru tol (mniejszy dopuszczalny błąd) spowodowała, że dla większości punktów nasza metoda nie jest zbieżna (ilość iteracji przekroczyła 30) podczas gdy w pierwszym przypadku maksymalna ilość iteracji wynosiła około 26. Wyjątkiem oczywiście jest miejsce zerowe funkcji $x=0$.

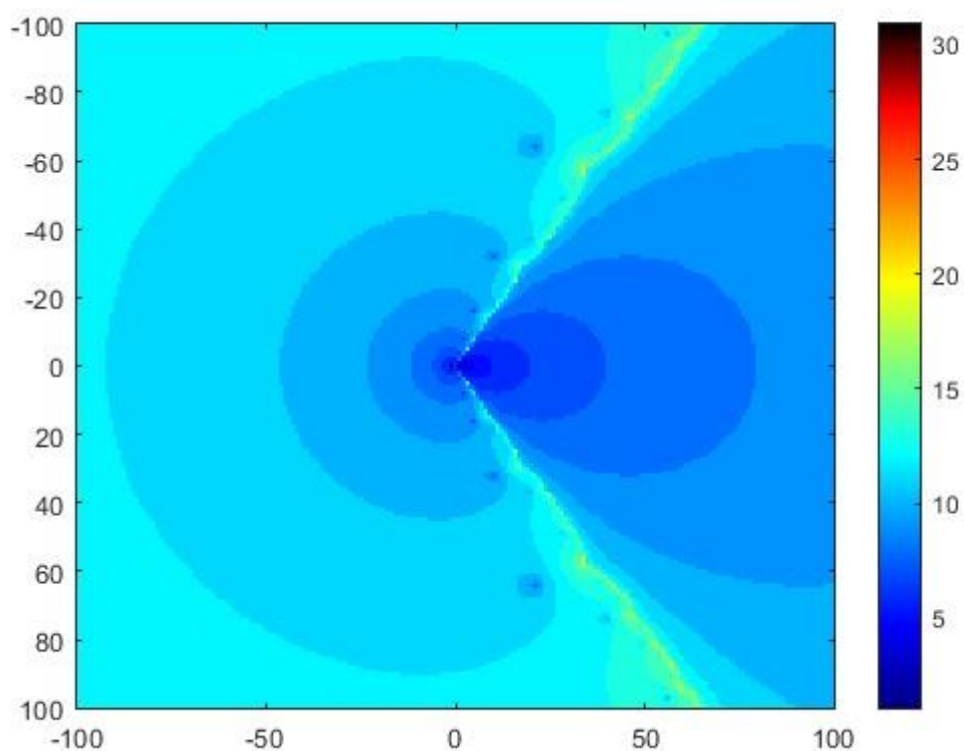
Przykład 3.7

$$w1(x) = (x+1)^2(x-1)$$

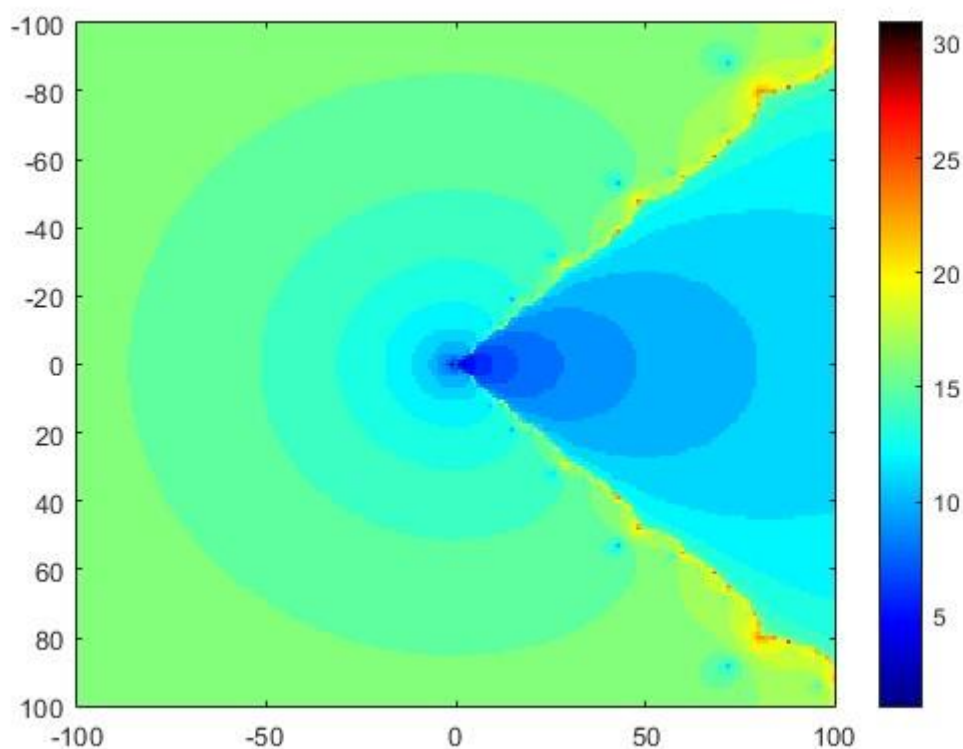
$$w2(x) = (x+1)^3(x-1)$$

Przedział $(-100, 100, -100, 100)$

Pierwszy wielomian ma podwójny pierwiastek -1 i pojedynczy pierwiastek 1, a drugi wielomian ma potrójny pierwiastek -1 i pojedynczy pierwiastek 1. Zbadajmy podobieństwo tych dwóch wielomianów.



Rysunek dla $w1(x)$



Rysunek dla $w_2(x)$

Analiza wyniku 3.7

Można zauważyć, że oba rysunki składają się z dwóch części. Jedna wydaje się odpowiadać pierwiastkom -1 , a druga pierwiastkowi 1 . Proporcje pól tych części wydają się być takie same jak stosunek liczby danych pierwiastków. W pierwszym wypadku jest to $2:1$, a w drugim $3:1$.

Podsumowanie:

Badając wyniki funkcji Wizualizacja możemy wywnioskować, że wizualizacje zależą od rozkładu pierwiastków danych wielomianów. Im bliżej pierwiastka znajduje się początkowe przybliżenie, tym szybciej metoda jest zbieżna. Dla punktów będących pierwiastkami metoda nie jest zbieżna. Dodatkowo dokładność i przejrzystość wizualizacji zależy od parametrów n , m i tol .