

**Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych**  
**Politechnika Warszawska**

**Modelowanie i identyfikacja**

**Sprawozdanie z projektu nr 2  
Zadanie nr 36**

**Jakub Sikora  
nr albumu 283418**

**Warszawa, 12 czerwca 2018**

# Spis treści

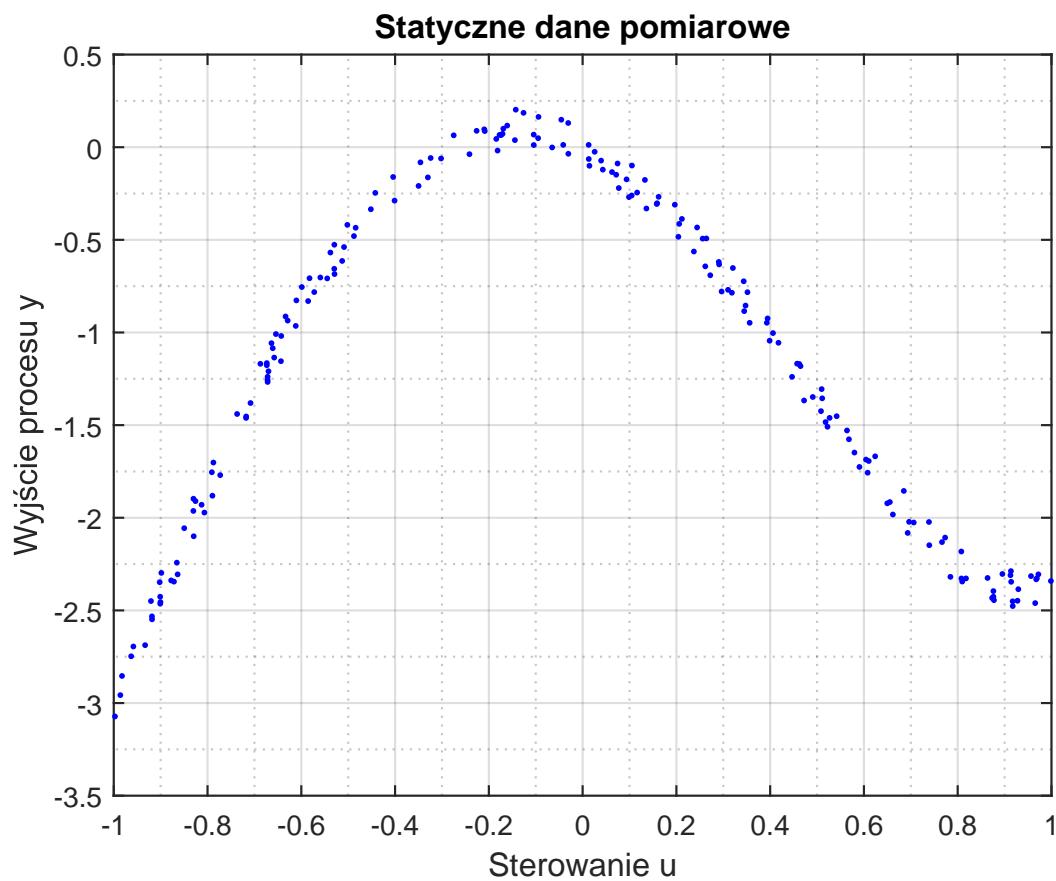
<b>1. Zadania obowiązkowe . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1. Identyfikacja modeli statycznych . . . . .	2
1.1.1. Wykres danych statycznych . . . . .	2
1.1.2. Podział na zbiór uczący i weryfikujący . . . . .	3
1.1.3. Statyczny model liniowy . . . . .	4
1.1.4. Statyczne modele nieliniowe . . . . .	7
1.1.5. Porównanie zidentyfikowanych modeli . . . . .	18
1.2. Identyfikacja modeli dynamicznych . . . . .	19
1.2.1. Zbiory danych . . . . .	19
1.2.2. Dynamiczne modele liniowe . . . . .	22
1.2.3. Dynamiczne modele nieliniowe . . . . .	32
1.2.4. Modele kwadratowe . . . . .	32
1.2.5. Modele stopnia trzeciego . . . . .	47
1.2.6. Modele wyższych stopni . . . . .	62
1.2.7. Modele o mieszanej strukturze . . . . .	65
1.2.8. Podsumowanie . . . . .	68
<b>2. Zadanie dodatkowe . . . . .</b>	<b>69</b>
2.1. Charakterystyka statyczna . . . . .	69

# 1. Zadania obowiązkowe

## 1.1. Identyfikacja modeli statycznych

### 1.1.1. Wykres danych statycznych

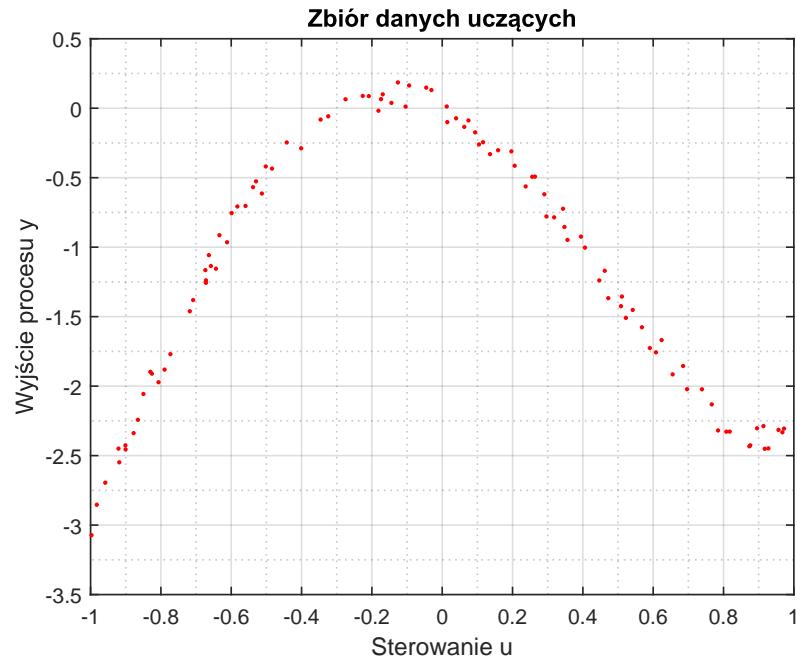
Na rysunku poniżej przedstawiłem dane z pliku `danestat36.txt`. Na osi poziomej przedstawiłem sterowanie, które zmienia się w przedziale  $[-1; 1]$ . Na osi pionowej wykresu znajduje się wyjście procesu, które jest zmienne w zakresie  $[-3, 1; 0, 25]$ . Na pierwszy rzut oka można stwierdzić że badany proces jest nieliniowy i co najmniej 3 rzędu.



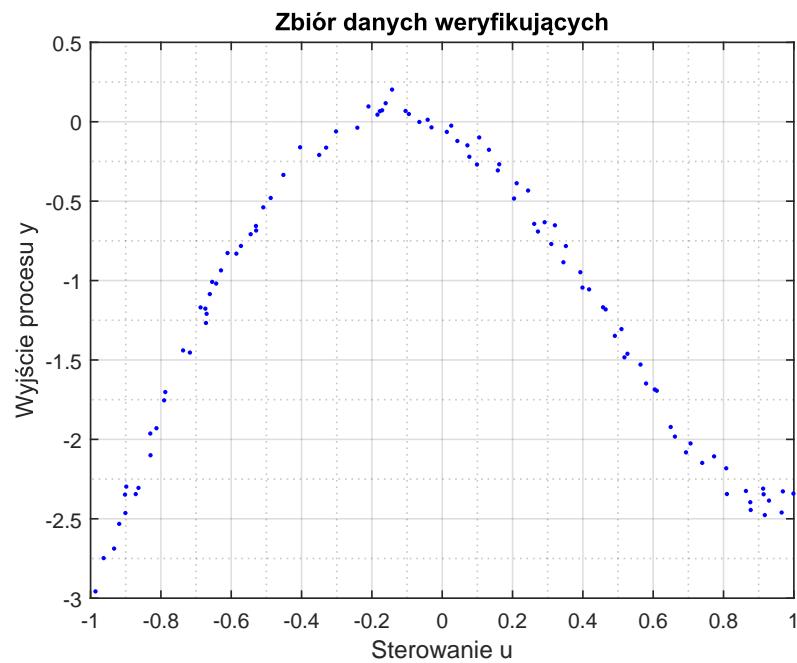
Rysunek 1.1. Przedstawienie statycznych danych pomiarowych

### 1.1.2. Podział na zbiór uczący i weryfikujący

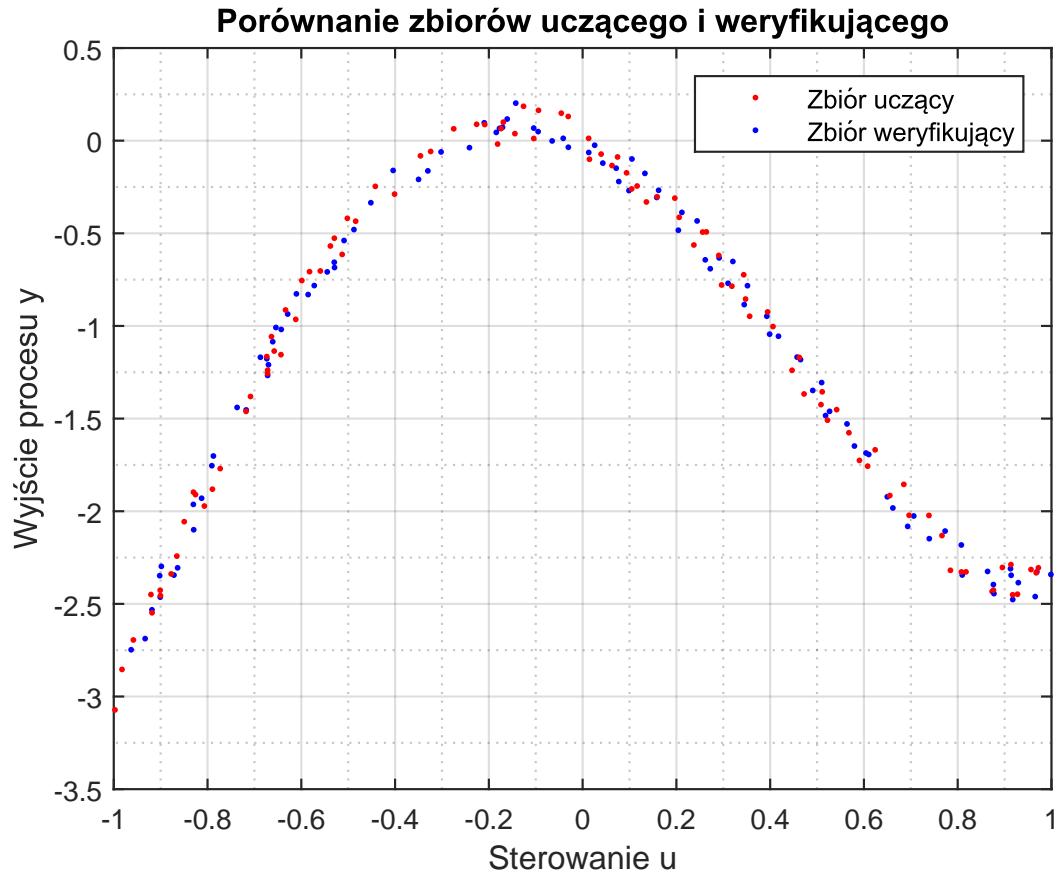
W celu identyfikacji modelu metodą najmniejszych kwadratów, najpierw należy dokonać podziału zbioru danych na zbiór uczący i zbiór weryfikujący. Najprostszą metodą podziału z której powinniśmy uzyskać dwa równomierne zbioru, jest przyporządkowywanie rekordu z posortowanego zbioru danych na zmianę raz do zbioru uczącego a raz do zbioru weryfikującego. Za pomocą matlaba (skrypt `stat/zad_b.m` dokonałem prostego podziału. Oba zbiory przedstawiłem na rysunkach poniżej.



Rysunek 1.2. Zbiór danych uczących



Rysunek 1.3. Zbiór danych weryfikujących



Rysunek 1.4. Porównanie zbiorów: weryfikującego i uczącego.

Na podstawie rysunku 1.4, można stwierdzić że uzyskany podział jest wystarczająco równomierny.

### 1.1.3. Statyczny model liniowy

Wykorzystując zbiór danych uczących można przystąpić do identyfikacji statycznego modelu liniowego postaci:

$$y(u) = w_1 u + w_0$$

gdzie  $w_0, w_1$  są współczynnikami uzyskanymi za pomocą metody najmniejszych kwadratów. W ogólności, metoda ta polega na minimalizacji błędu średniokwadratowego modelu:

$$\min_w \sum_{i=1}^P (y_i - y_i^{mod})^2$$

Za pomocą tej metody możemy zidentyfikować model o dowolnym rzędzie, który będzie najlepiej dopasowany do danych. W tym zadaniu skupiłem się jednak tylko na modelu liniowym. Poszukiwany wektor współczynników:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

W celu wyznaczenia wektora  $w$ , zapisałem nadokreślny układ równań, czyli taki który ma więcej równań niż zmiennych.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & 1 \\ u_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_P & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

Co można w skrócie zapisać:

$$Y = Mw$$

W matlabie, liniowe zadanie najmniejszych kwadratów można rozwiązać za pomocą operatora lewego dzielenia:

$$w = M \setminus Y$$

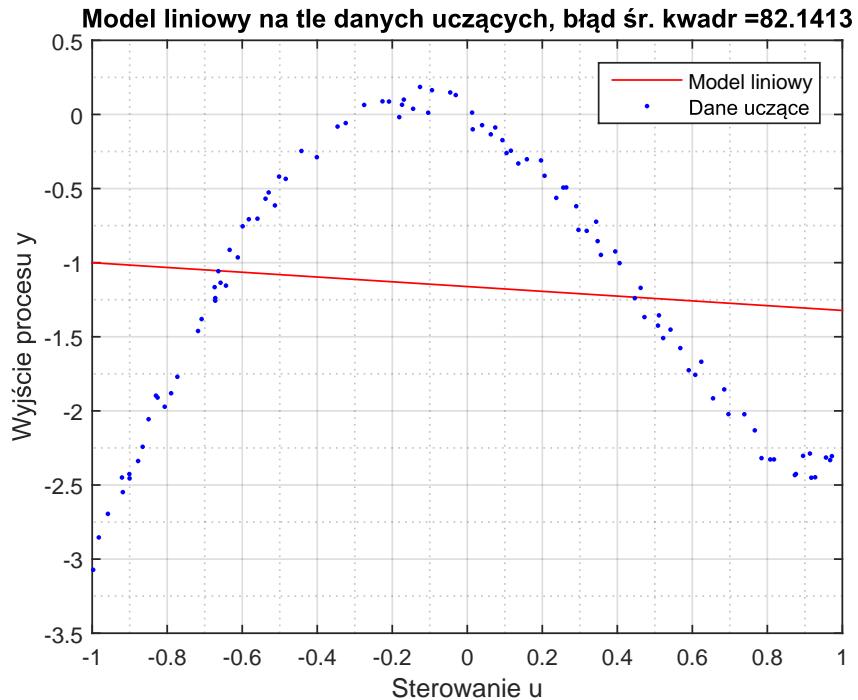
Identyfikacja modelu powinna odbywać się tylko przy pomocy zbioru danych uczących. Dane weryfikujące powinny służyć tylko i wyłącznie do walidacji modelu. W przypadku gdy chcemy uzyskać bardziej dokładne modele możemy skorzystać z walidacji k-krotnej zwanej też sprawdzianem krzyżowym. W takim przypadku z zbiór danych dzielimy na  $k$  podzbiorów i dla każdego podzbioru identyfikujemy model, następnie sprawdzamy go z pozostałymi  $k - 1$  podzbiorami tak aby na końcu wybrać średnią ważoną z wszystkich modeli. W ramach tego projektu ograniczę się jednak do zwykłej metody podziału na zbiór uczący i weryfikujący. Do identyfikacji skorzystałem z podziału na podzbiory wyznaczonego w poprzednim zadaniu.

Za pomocą skryptu `stat/zad_d.m` uzyskałem następujące wartości współczynników:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,59424 \\ -1,0778 \end{bmatrix}$$

Model liniowy jest postaci:

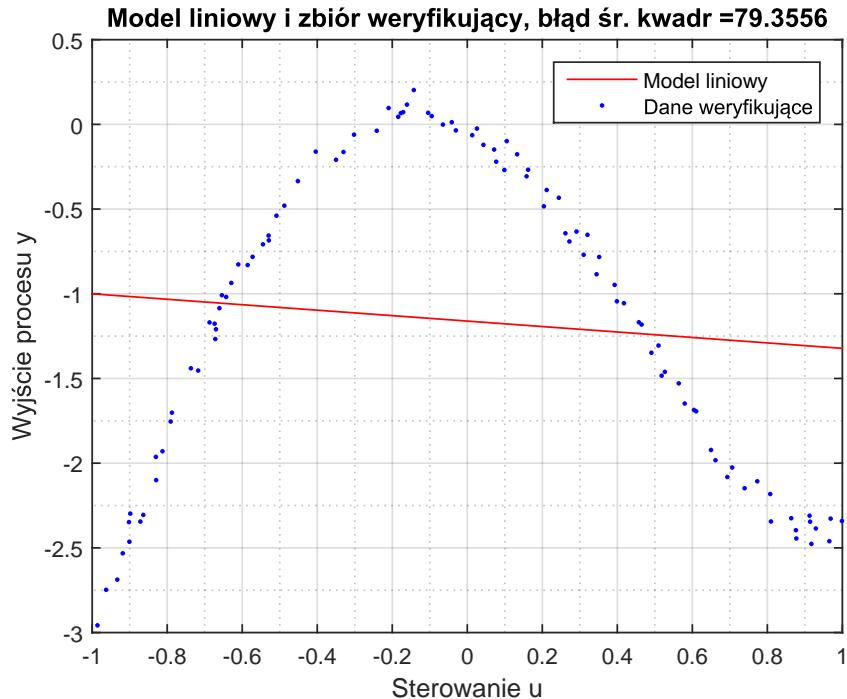
$$y = -0,59424u - 1,0778$$



Rysunek 1.5. Model liniowy na tle danych uczących

Uzyskany błąd średniokwadratowy dla zbioru uczącego wyniósł  $E_{ucz} = 78,0732$ . Już dla zbioru uczącego widać że model bardzo źle przybliża opisywany proces.

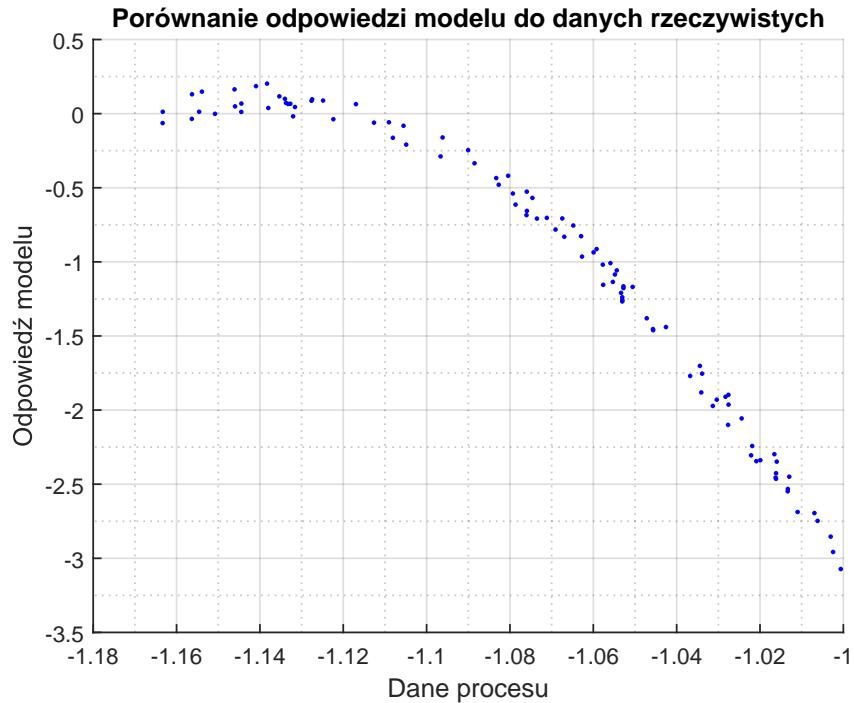
O wiele bardziej interesujące jest zachowanie uzyskanego modelu w porównaniu do danych ze zbioru weryfikującym. Na podstawie błędu modelu możemy uzyskać informację o realnej przydatności modelu.



Rysunek 1.6. Model liniowy na tle danych weryfikujących

W tym przypadku błąd średniokwadratowy wzrósł do wartości  $E_{wer} = 97,1835$ . O przydatności (a raczej o jej braku) modelu dużo można powiedzieć na podstawie samego wykresu. Widać że model liniowy w żadnym stopniu nie aproksymuje danych pomiarowych, przez co jego użyteczność jest niewielka.

Kolejnym sposobem na weryfikację modelu, jest narysowanie wykresu odpowiedzi modelu od rzeczywistych danych pomiarowych, czyli porównanie odpowiedzi rzeczywistej i wyniku modelu dla tych samych wartości  $u$ . W przypadku idealnym wykres powinien ułożyć się w prostą nachyloną pod kątem  $45^\circ$



Rysunek 1.7. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Jak widać na rysunku 1.7, odpowiedź modelu liniowego jest niewspółmierna z rzeczywistymi danymi. W kolejnych zadaniach będę rozważał modele nieliniowe, które powinny znacznie lepiej opisywać ten proces.

#### 1.1.4. Statyczne modele nieliniowe

W przypadku podanych danych, o wiele lepiej sprawdziłyby się modele nieliniowe. Za pomocą skryptu `static/zad_d.m` zidentyfikowałem modele rzędu większego niż 1.

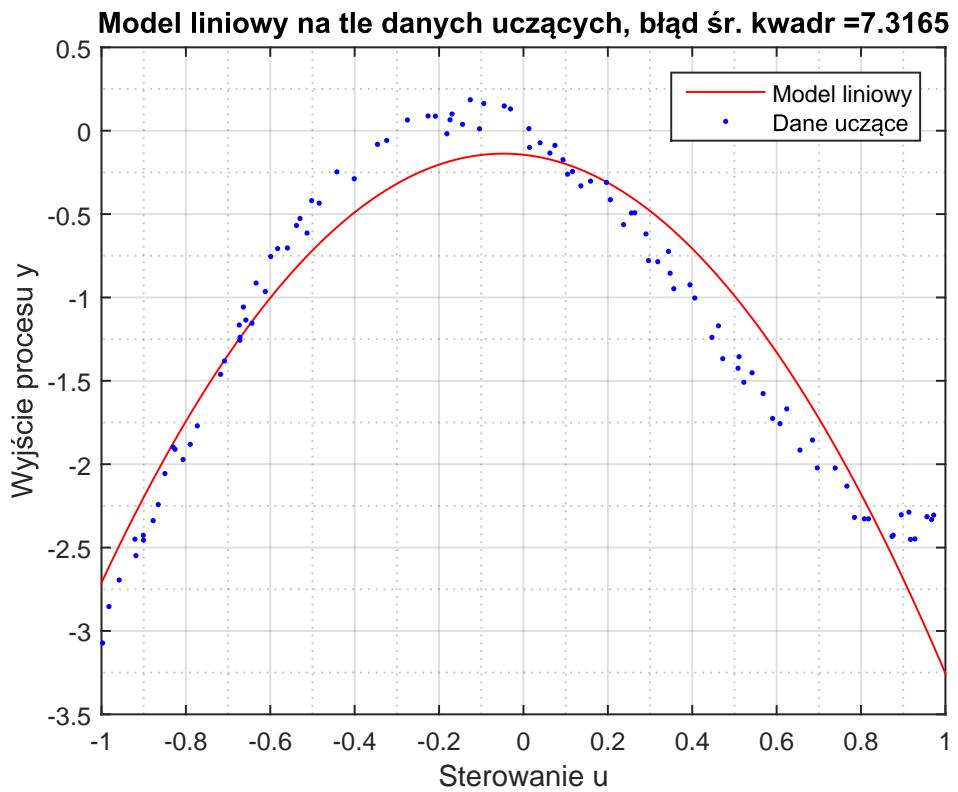
##### Model kwadratowy

Pierwszym rozważanym przeze mnie modelem jest model rzędu drugiego opisany wzorem:

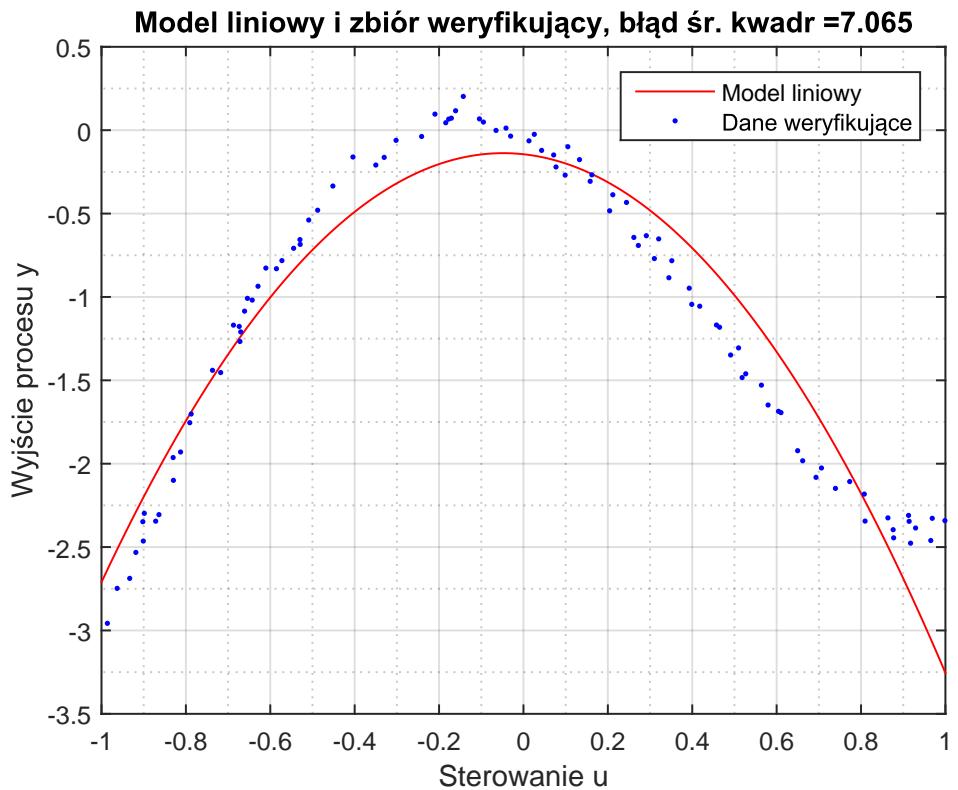
$$y(u) = w_2 u^2 + w_1 u + w_0$$

Wyznaczony wektor współczynników:

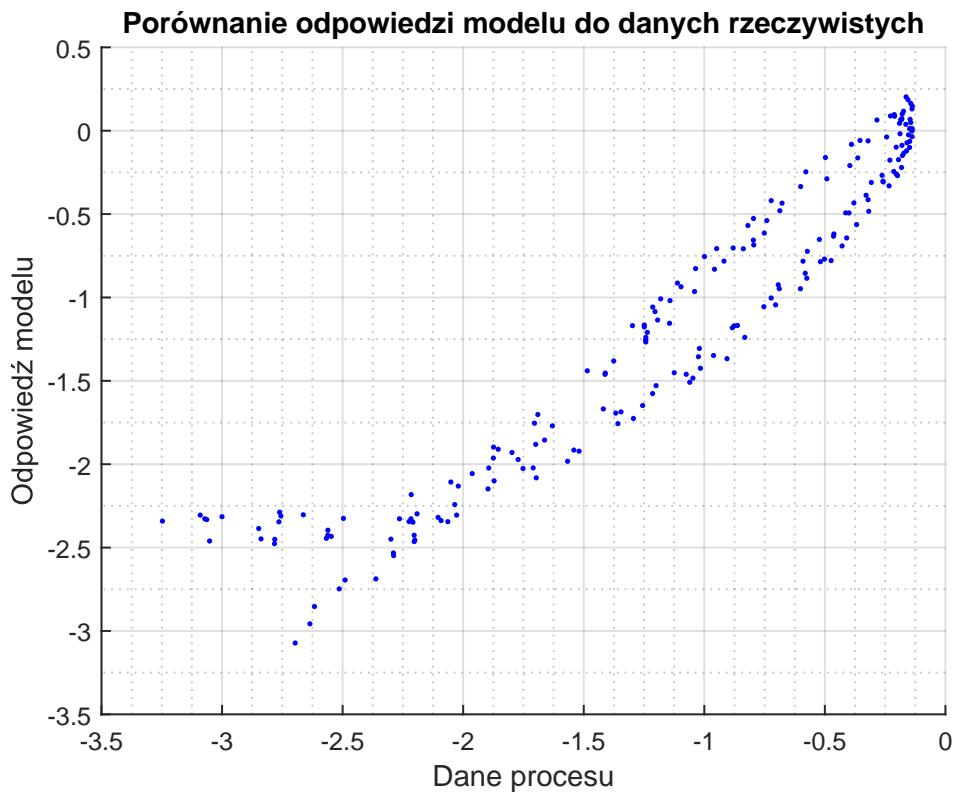
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1192 \\ -0,2390 \\ -2,7422 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.8. Model drugiego rzędu na tle danych uczących



Rysunek 1.9. Model drugiego rzędu na tle danych weryfikujących



Rysunek 1.10. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Jak widać na powyższych wykresach, model kwadratowy znacznie lepiej opisuje zadany proces. Błąd uczący jak i błąd weryfikujący zmalały o rzad wielkości i wynoszą teraz  $E_{ucz} = 7,7713$  i  $E_{wer} = 7,4373$ , a wykres odpowiedzi modelu do danych rzeczywistych zaczyna przypominać prostą.

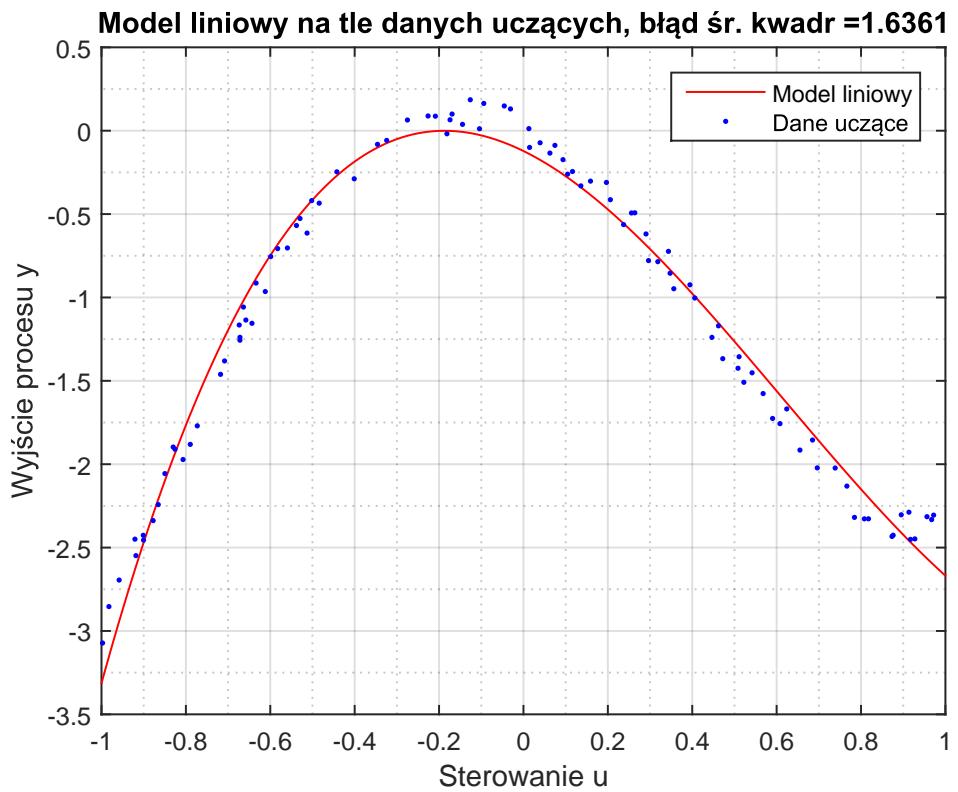
### Model trzeciego rzędu

Model trzeciego rzędu opisany jest wzorem:

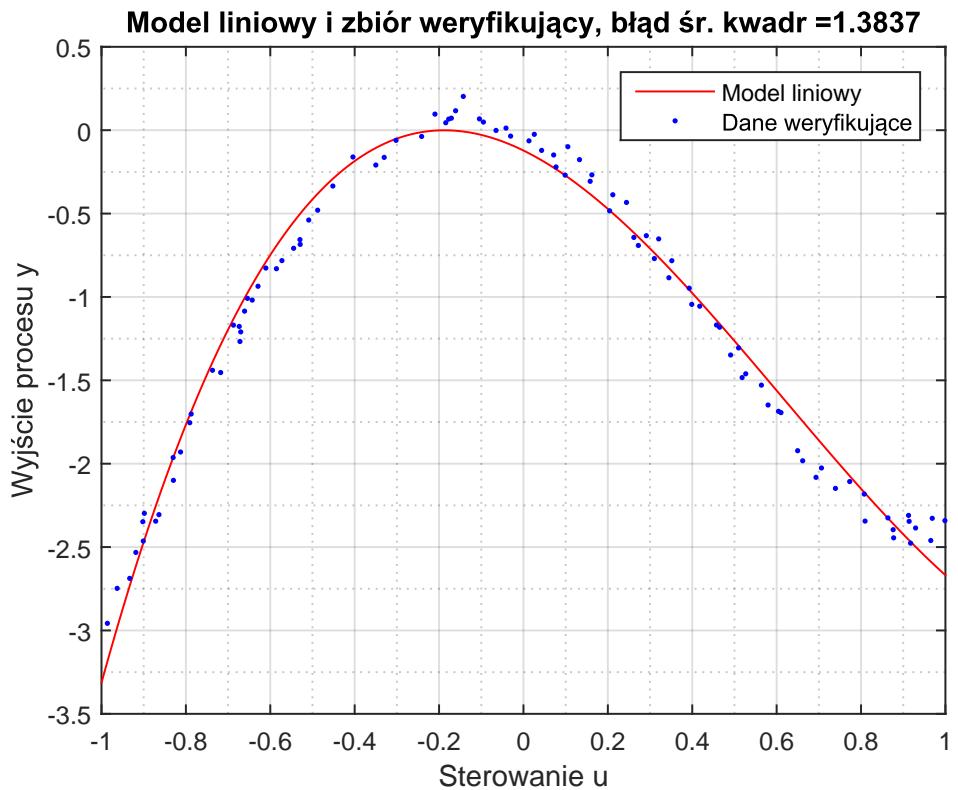
$$y(u) = w_3 u^3 + w_2 u^2 + w_1 u + w_0$$

Wyznaczony wektor współczynników:

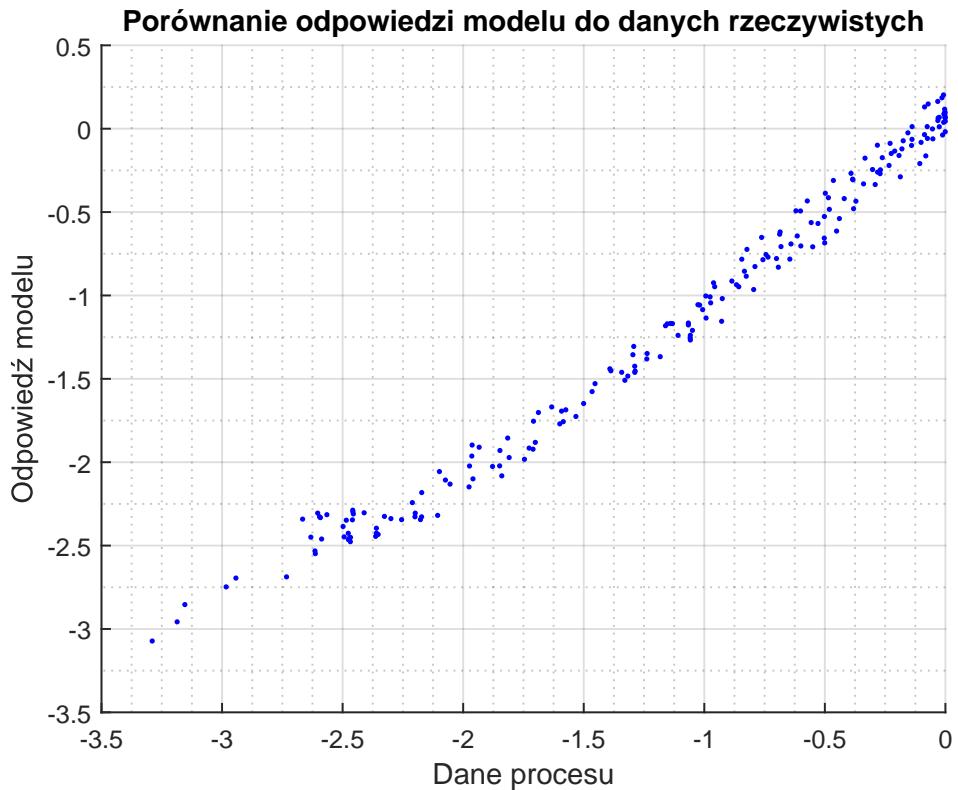
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1183 \\ -1,2736 \\ -2,8837 \\ 1,6696 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.11. Model trzeciego rzędu na tle danych uczących



Rysunek 1.12. Model trzeciego rzędu na tle danych weryfikujących



Rysunek 1.13. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Zgodnie z oczekiwaniami, model trzeciego rzędu jeszcze lepiej opisuje rzeczywisty proces. Błędy uczący weryfikujący zmalały i wynoszą teraz  $E_{ucz} = 1,5862$  i  $E_{wer} = 1,5327$ . Kontrolny wykres odpowiedzi modelu od danych procesu przypomina już w dużej mierze prostą nachyloną pod kątem czterdziestu pięciu stopni. Model ten można by uznać za zadowalający jednak w przedziale sterowań  $[0; 6; 1]$  odpowiedź modelu jeszcze nie do końca odpowiada danym rzeczywistym. Można to poprawić stosując model wyższego rzędu.

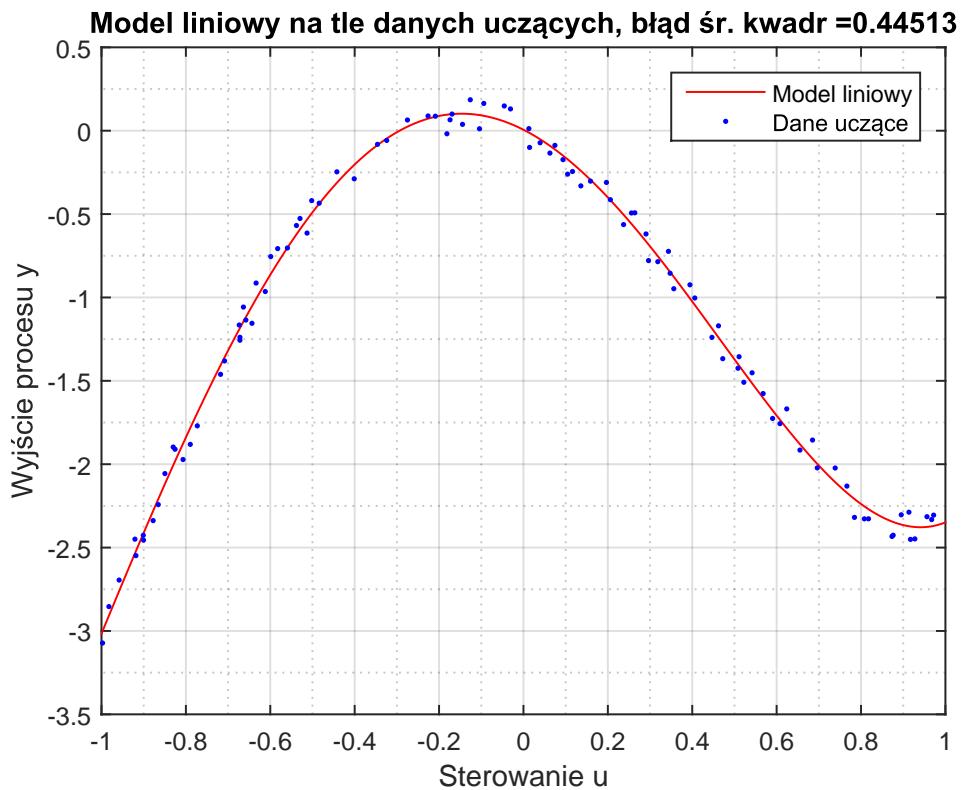
#### Model czwartego rzędu

Model czwartego rzędu opisany jest wzorem:

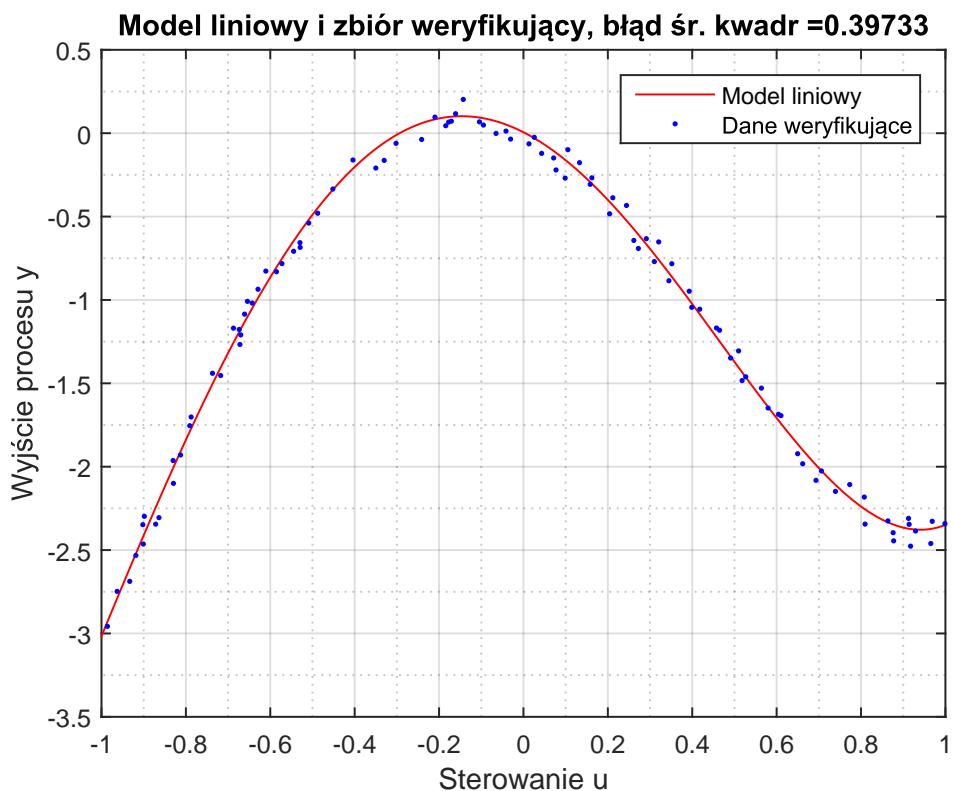
$$y(u) = w_4u^4 + w_3u^3 + w_2u^2 + w_1u + w_0$$

Wyznaczony wektor współczynników:

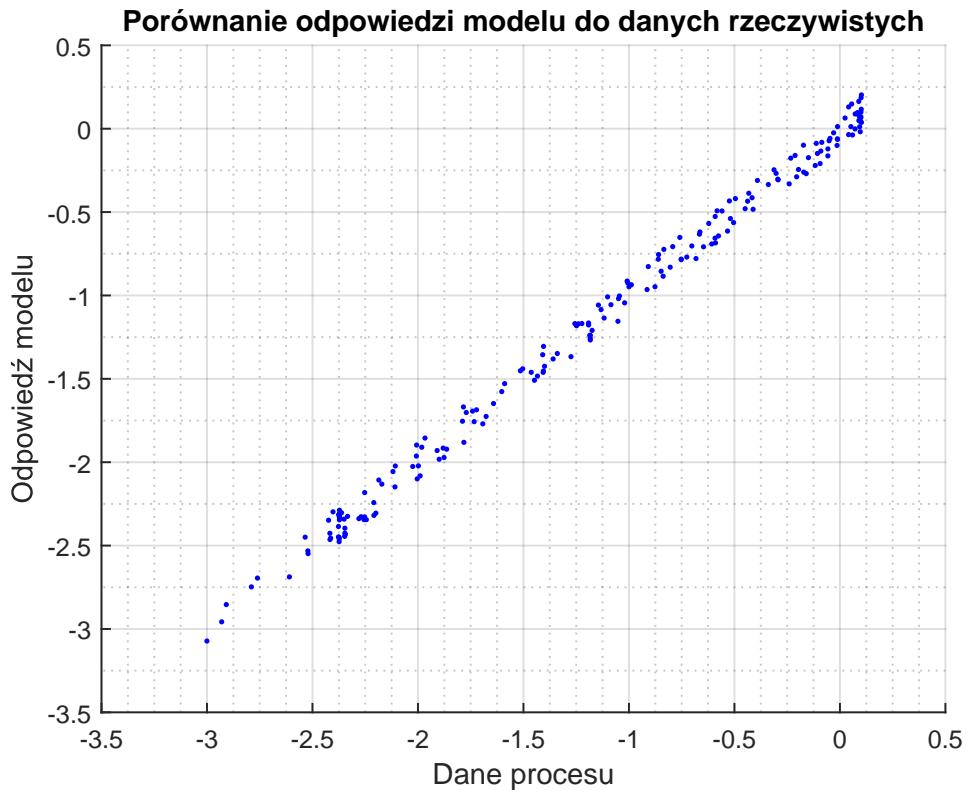
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0050 \\ -1,2565 \\ -4,0568 \\ 1,5953 \\ 1,3547 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.14. Model czwartego rzędu na tle danych uczących



Rysunek 1.15. Model czwartego rzędu na tle danych weryfikujących



Rysunek 1.16. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Stosując model czwartego rzędu udało się zminimalizować błąd modelu w przedziale  $[0, 6; 1]$  o którym mowa było w przypadku poprzedniej wersji modelu. Błędy uczący weryfikujący zmalały i wynoszą teraz  $E_{ucz} = 0,44789$  i  $E_{wer} = 0,49636$ . Wykres kontrolny (1.16) świadczy o doskonałej poprawności modelu.

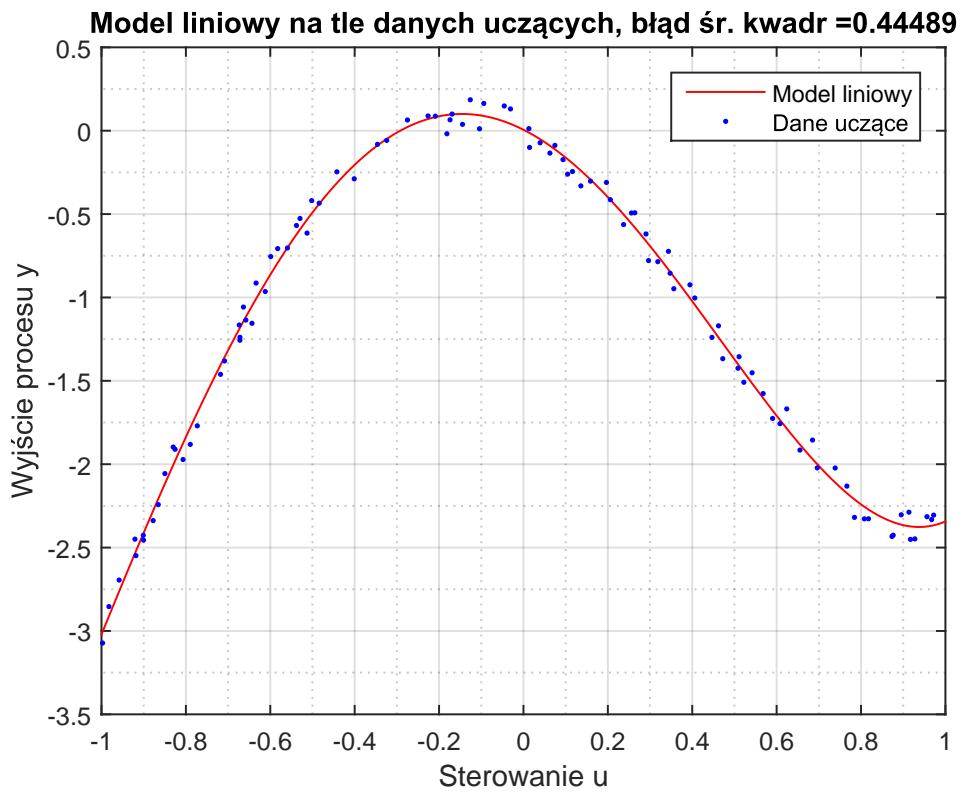
### Model piątego rzędu

Model piątego rzędu opisany jest wzorem:

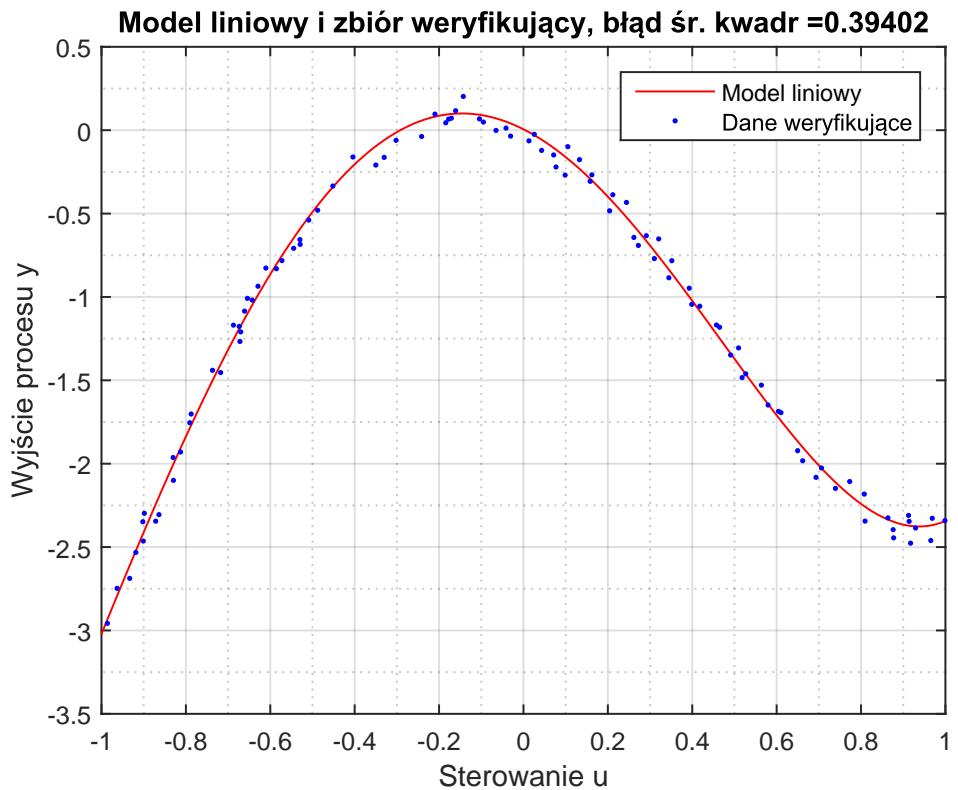
$$y(u) = w_5 u^5 + w_4 u^4 + w_3 u^3 + w_2 u^2 + w_1 u + w_0$$

Wyznaczony wektor współczynników:

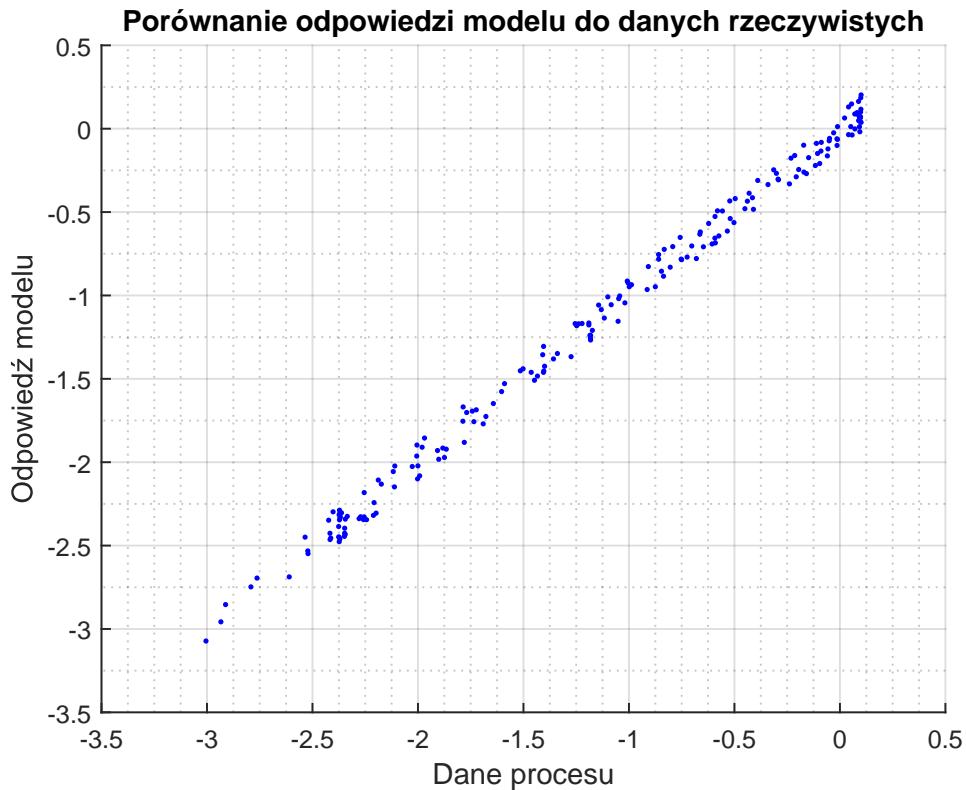
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0046 \\ -1,1810 \\ -4,0509 \\ 1,2576 \\ 1,3542 \\ 0,2973 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.17. Model piątego rzędu na tle danych uczących



Rysunek 1.18. Model piątego rzędu na tle danych weryfikujących



Rysunek 1.19. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Zwiększenie rzędu modelu w tym przypadku nie przyniosło oczekiwanych rezultatów. Błędy ucący i weryfikujący utrzymają się na mniej więcej stałym poziomie. Model jest bardzo dokładny ale zwiększyła się jego złożoność numeryczna. Znacznie prościej i szybciej jest obliczać wartość wielomianu rzędów niższych, co w prostych sterownikach opartych na mikrokontrolerach w których zdolność obliczeniowa jest ograniczona może mieć kolosalne znaczenie.

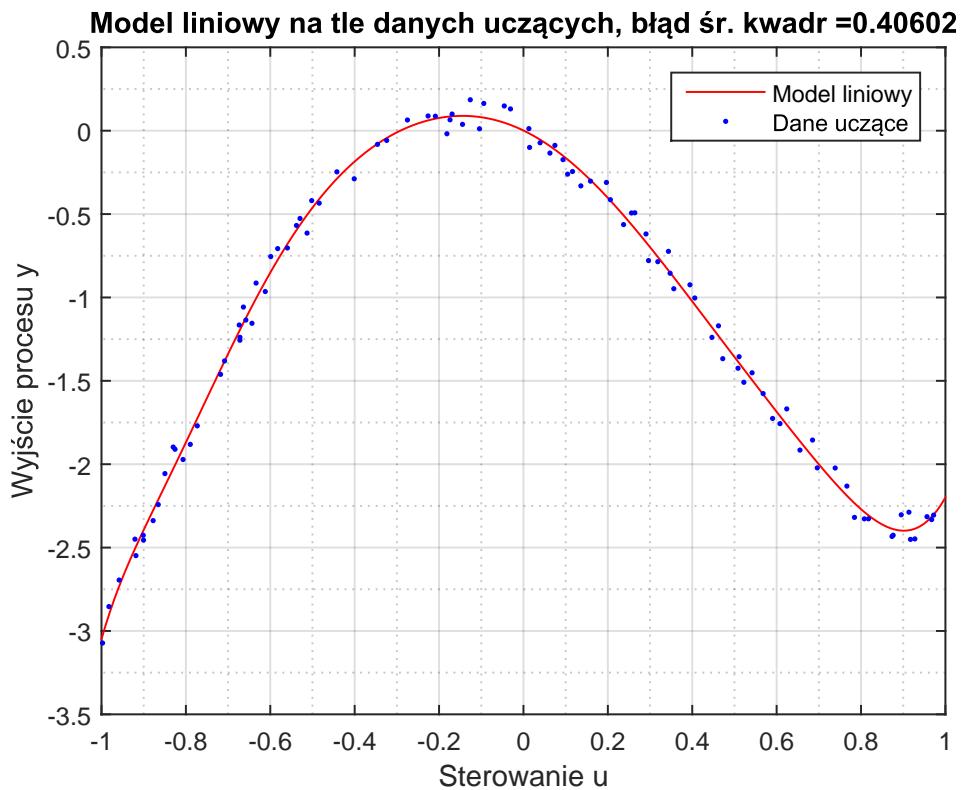
### Model dziesiątego rzędu

Model dziesiątego rzędu opisany jest wzorem:

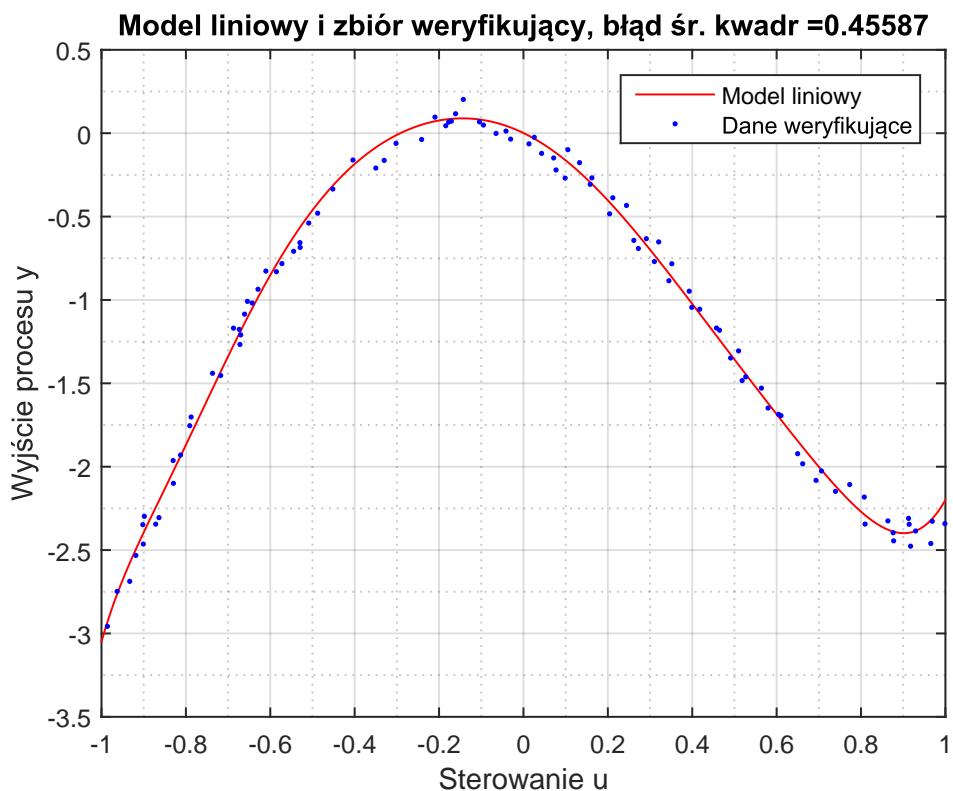
$$y(u) = w_{10}u^{10} + w_9u^9 + w_8u^8 + w_7u^7 + w_6u^6 + w_5u^5 + w_4u^4 + w_3u^3 + w_2u^2 + w_1u + w_0$$

Wyznaczony wektor współczynników:

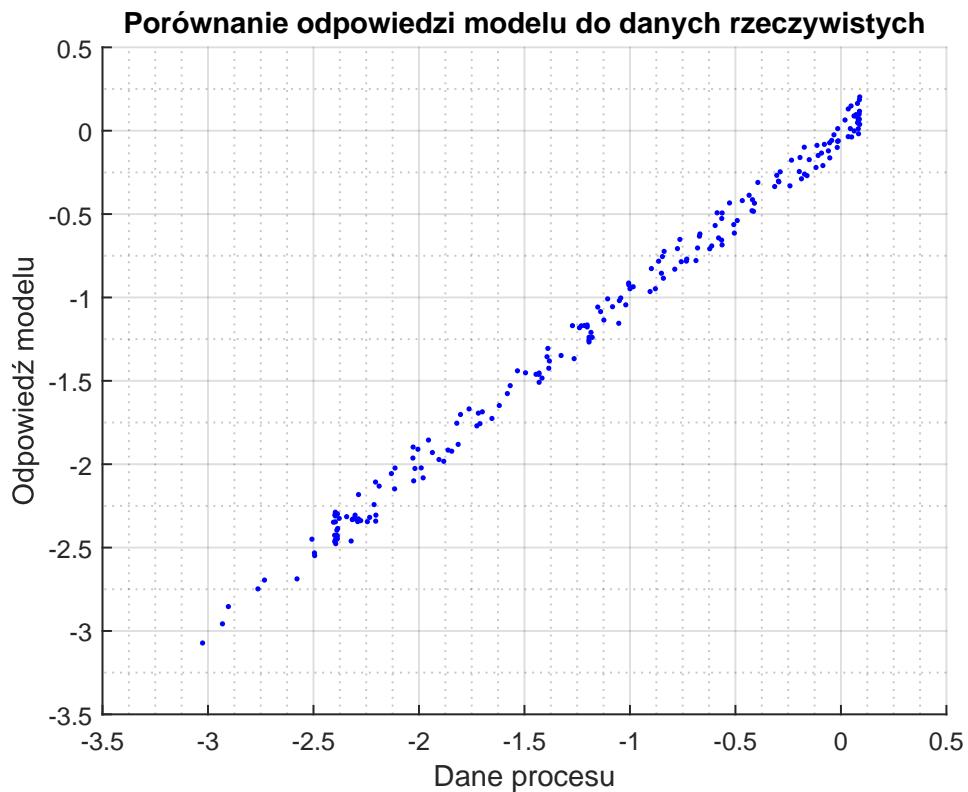
$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \\ w_9 \\ w_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0125 \\ -1,1545 \\ -3,9583 \\ 1,0097 \\ 1,9790 \\ 0,9129 \\ -3,5286 \\ -0,4370 \\ 4,7574 \\ 0,0213 \\ -1,8973 \end{bmatrix}$$



Rysunek 1.20. Model dziesiątego rzędu na tle danych uczących



Rysunek 1.21. Model dziesiątego rzędu na tle danych weryfikujących



Rysunek 1.22. Porównanie odpowiedzi procesu i odpowiedzi modelu

Ostatni eksperyment przeprowadziłem dla modelu rzędu dziesiątego. Pomimo dużego rzędu wielomianu, błąd uczący i weryfikujący jest porównywalny z błędami modelu czwartego rzędu. Zupełny brak zwiększenia dokładności jest niewspółmierny z dużym wzrostem złożoności obliczeniowej.

### 1.1.5. Porównanie zidentyfikowanych modeli

W tabeli poniżej porównałem błąd uczący i błąd weryfikujący wszystkich rozważanych modeli.

Rząd modelu	Błąd uczący	Błąd weryfikujący
1	78,0732	97,1835
2	7,7713	7,4373
3	1,5862	1,5327
4	0,44789	0,39636
5	0,43602	0,40163
10	0,41899	0,41433

Wybierając model do dalszych zastosowań należy kierować się dwoma względami. Wybrany model powinien mieć jak najmniejszy błąd weryfikujący oraz powinien być jak najniższego rzędu. W przypadku przeprowadzonej identyfikacji, wybór ostatecznego modelu statycznego jest sprawą prostą. Najniższy błąd osiągnięty został dla modelu rzędu czwartego. Taki model ma relatywnie niski rząd i jego obliczanie nie jest procedurą złożoną. Dlatego też do projektowania dalszych rozwiązań dla tego procesu (regulatory, obserwatory itp.) wykorzystałbym model rzędu czwartego postaci:

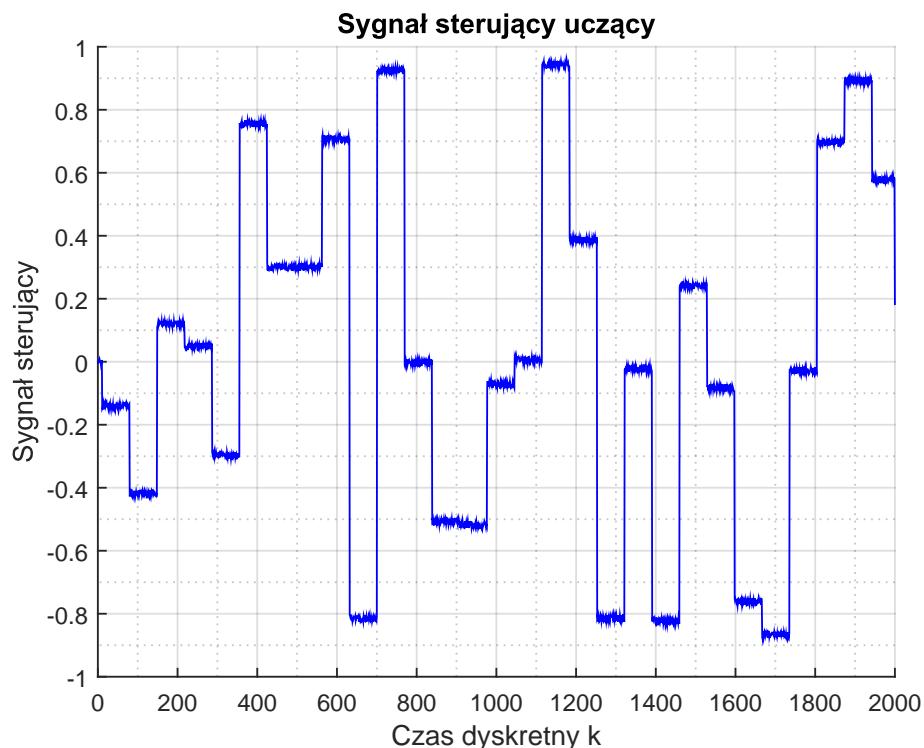
$$y(u) = 1,3547u^4 + 1,5953u^3 - 4,0568u^2 - 1,2565u - 0,0050$$

## 1.2. Identyfikacja modeli dynamicznych

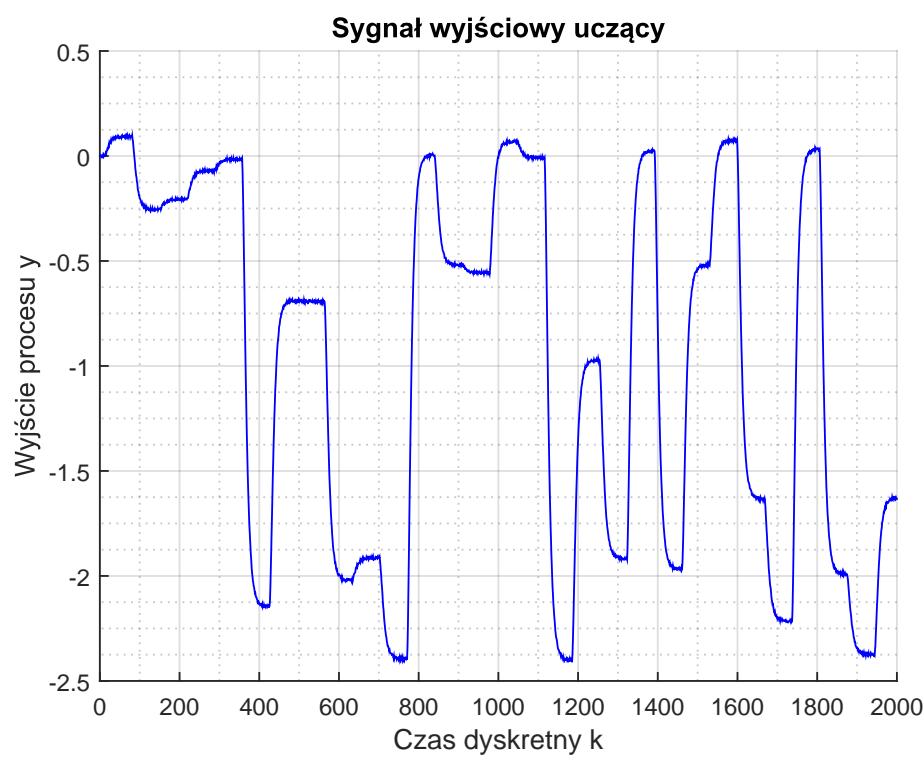
Metoda najmniejszych kwadratów może również służyć do identyfikacji modeli dynamicznych. W tym celu również wymagane są dwa zbiory danych: uczące i weryfikujące, jednak format tych danych jest zgoła odmienny niż w przypadku modeli statycznych. Zbiór danych musi być uporządkowany w czasie aby poprawnie reprezentować dynamikę procesu.

### 1.2.1. Zbiory danych

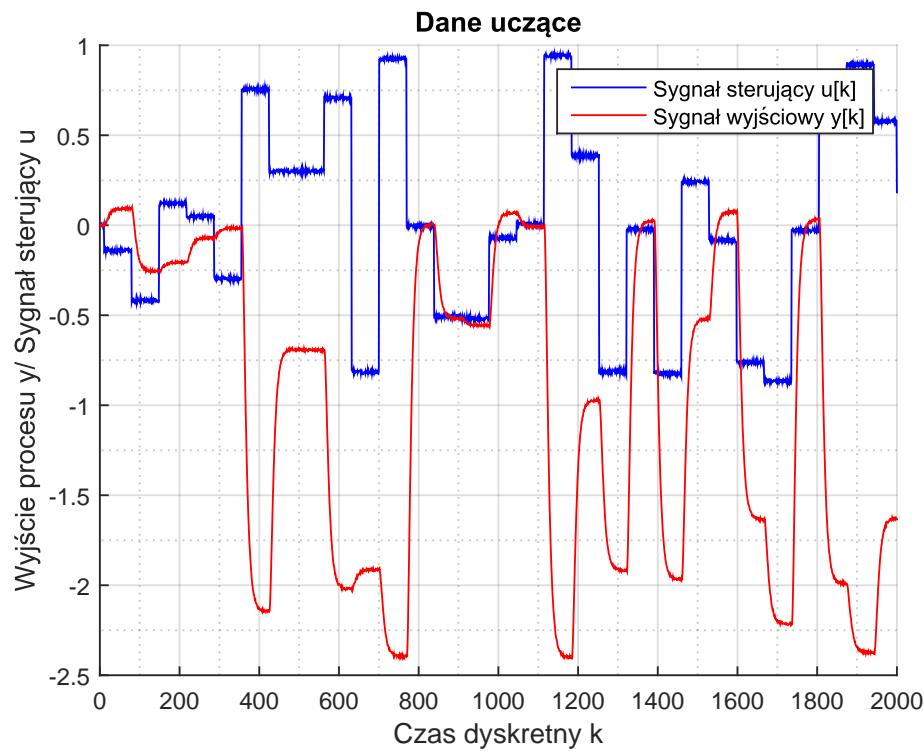
#### Dane uczące



Rysunek 1.23. Przebieg sygnału sterującego

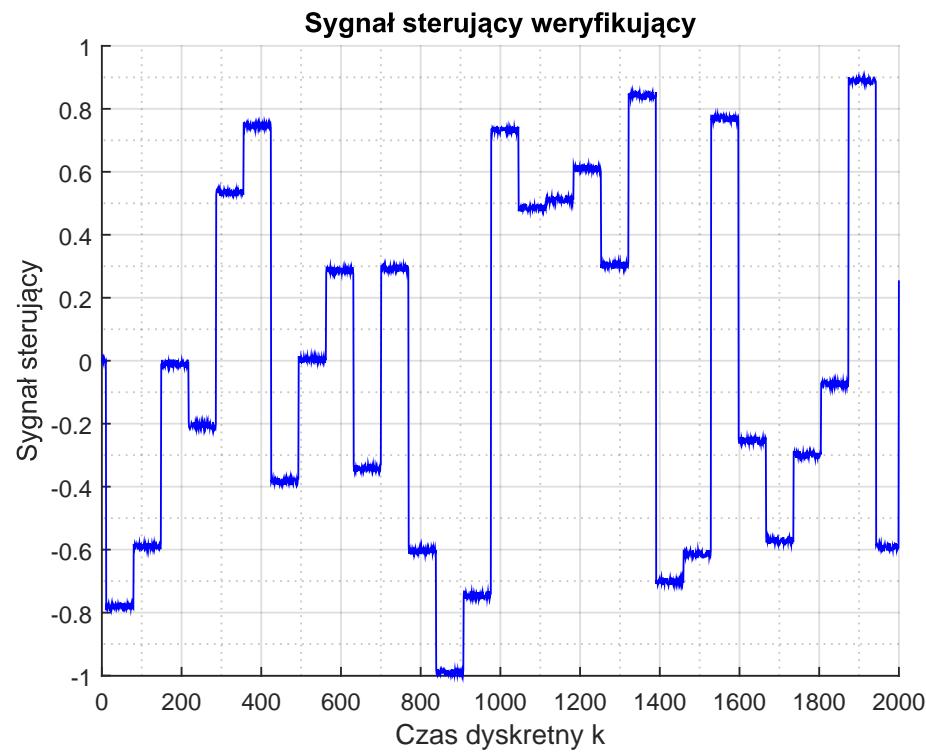


Rysunek 1.24. Przebieg sygnału wyjściowego

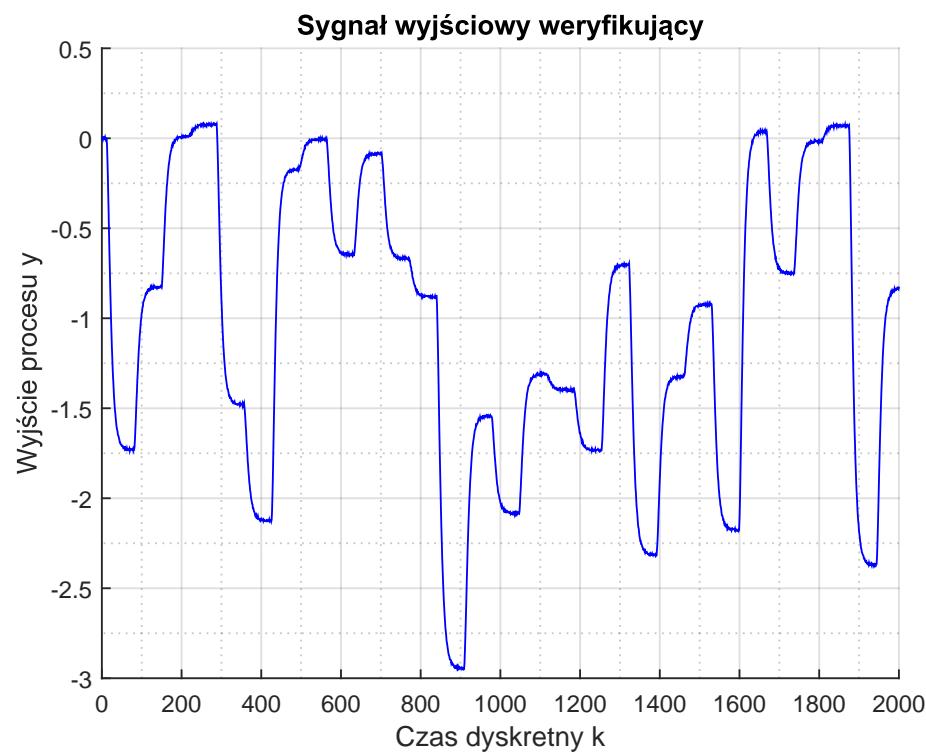


Rysunek 1.25. Porównanie obu sygnałów

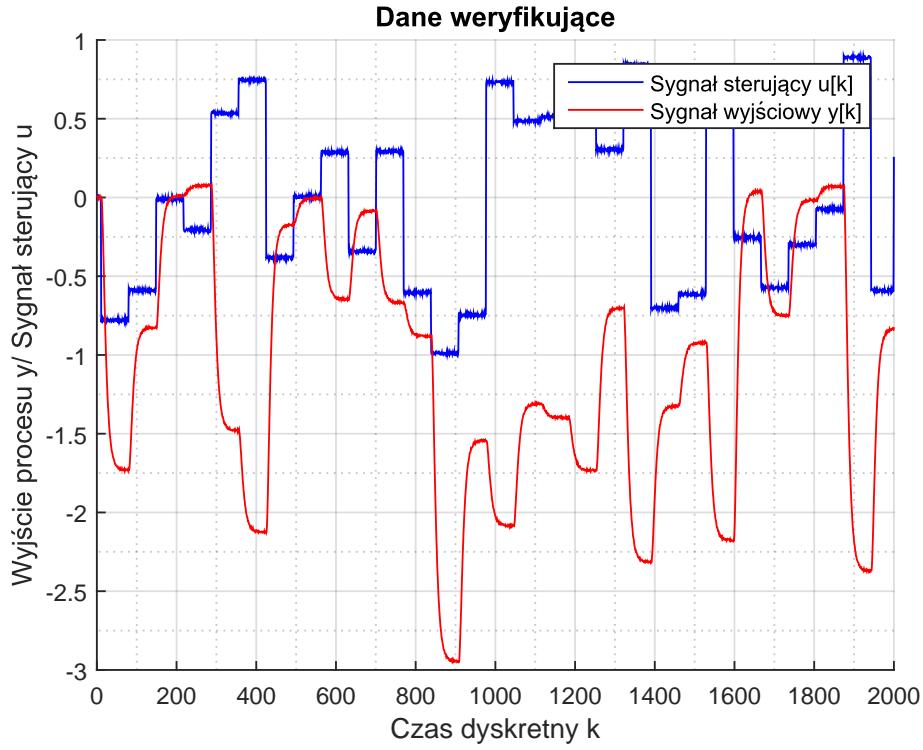
## Dane weryfikujące



Rysunek 1.26. Przebieg sygnału sterującego



Rysunek 1.27. Przebieg sygnału wyjściowego



Rysunek 1.28. Porównanie obu sygnałów

Na pierwszy rzut oka łatwo stwierdzić że badany proces jest mocno nieliniowy. Zależność między poszczególnymi zmianami sygnału wyjściowego w porównaniu do zmian sygnału sterującego nie są proporcjonalne.

### 1.2.2. Dynamiczne modele liniowe

W ramach kolejnego zadania wyznaczyłem szereg modeli liniowych postaci:

$$y[k] = \sum_{i=1}^{n_B} b_i u[k-i] + \sum_{i=1}^{n_A} a_i y[k-i]$$

Podobnie jak w przypadku modeli statycznych zapisałem zadanie najmniejszych kwadratów, jednak w postaci pozwalającej na identyfikację modeli dynamicznych. Dla modeli pierwszego rzędu zadanie jest następującej postaci

$$\begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u[0] & y[0] \\ u[1] & y[1] \\ \vdots & \vdots \\ u[P-1] & y[P-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

,

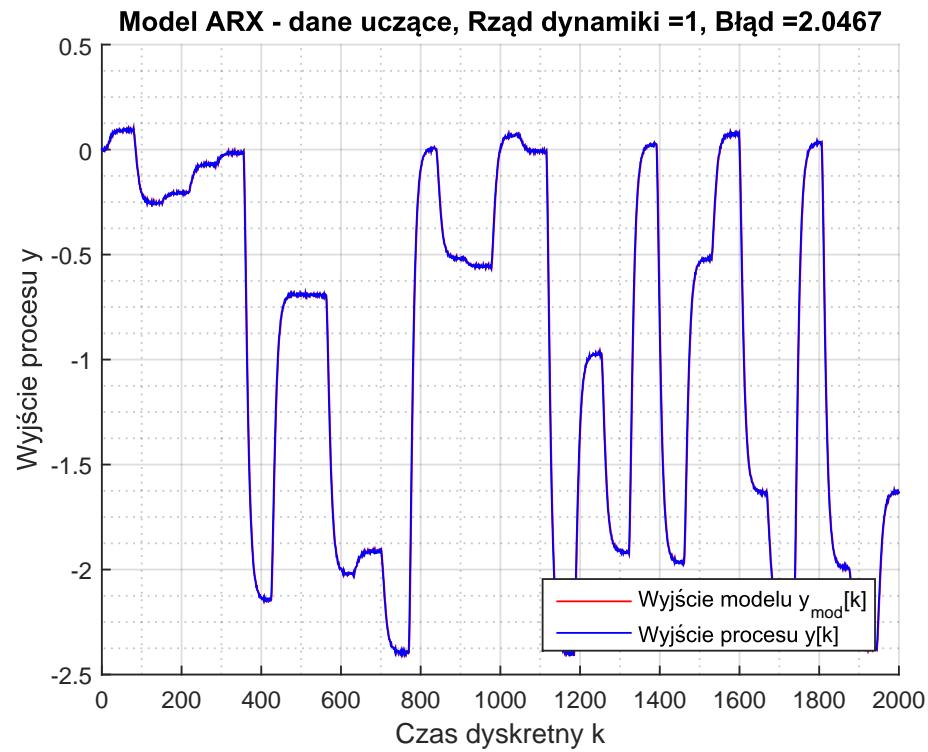
co można w skrócie zapisać:

$$Y = Mw$$

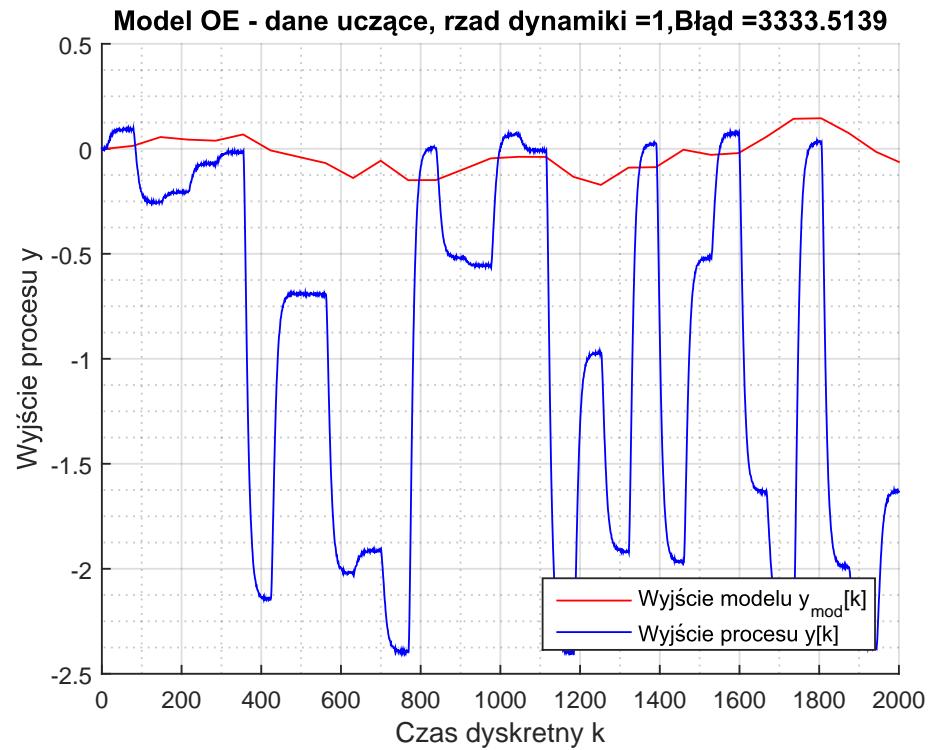
Dla modeli  $n$ -tego rzędu macierz  $M$  będzie postaci:

$$\begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \vdots \\ y[P] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u[0] & \dots & u[-n] & y[0] & \dots & y[-n] \\ u[1] & \dots & u[-n+1] & y[1] & \dots & y[-n+1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u[P-1] & \dots & u[P-n-1] & y[P-1] & \dots & y[P-n-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_0 \end{bmatrix}$$

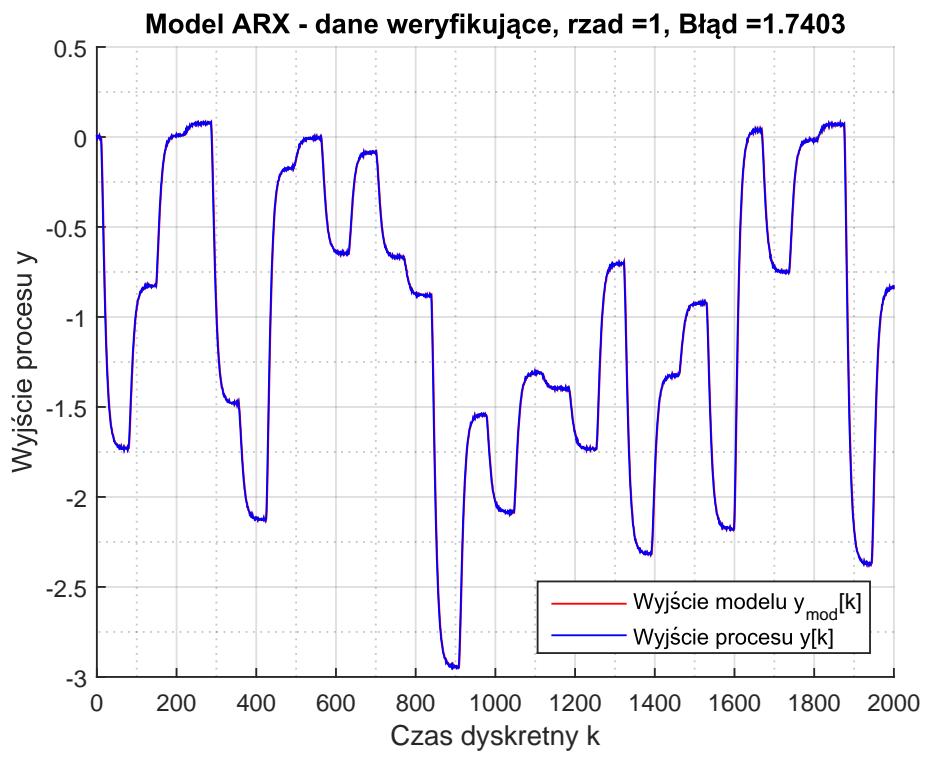
## Model pierwszego rzędu



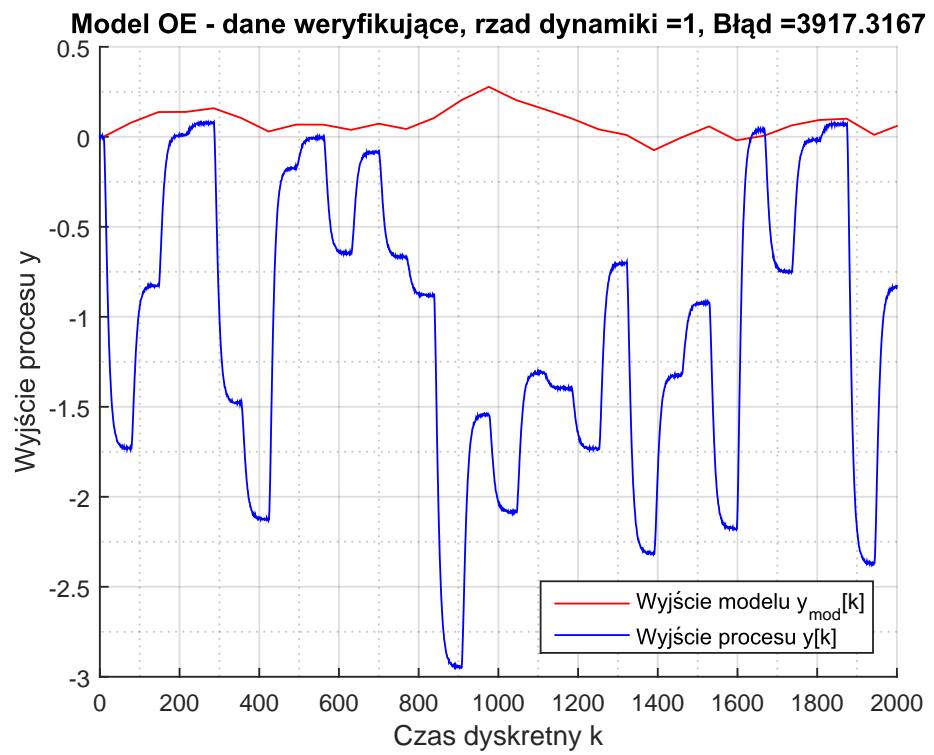
Rysunek 1.29. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



Rysunek 1.30. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

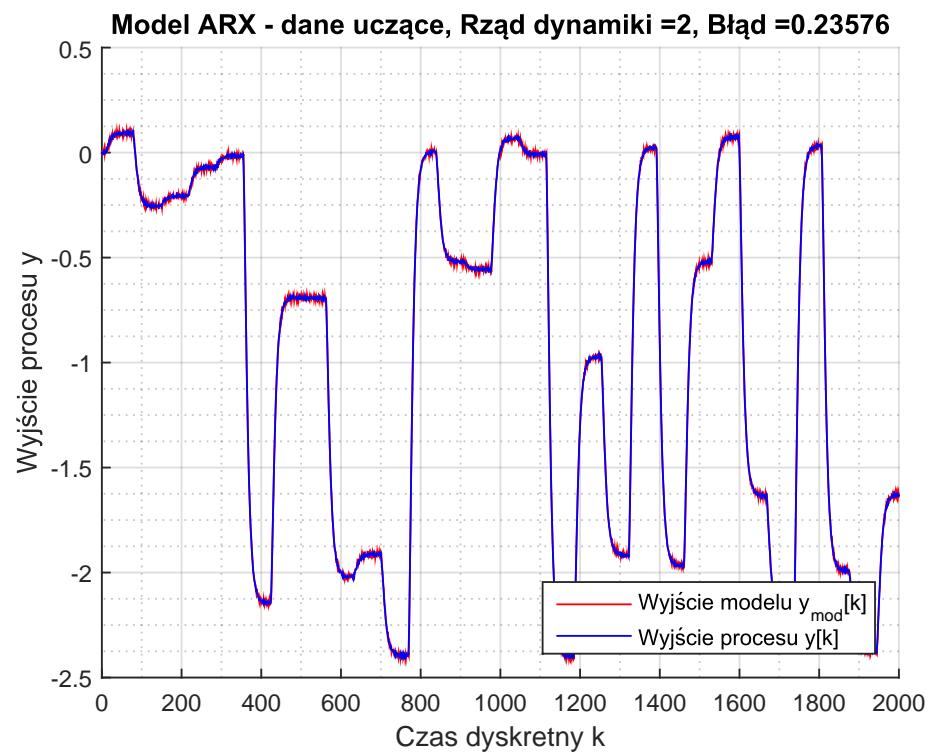


Rysunek 1.31. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

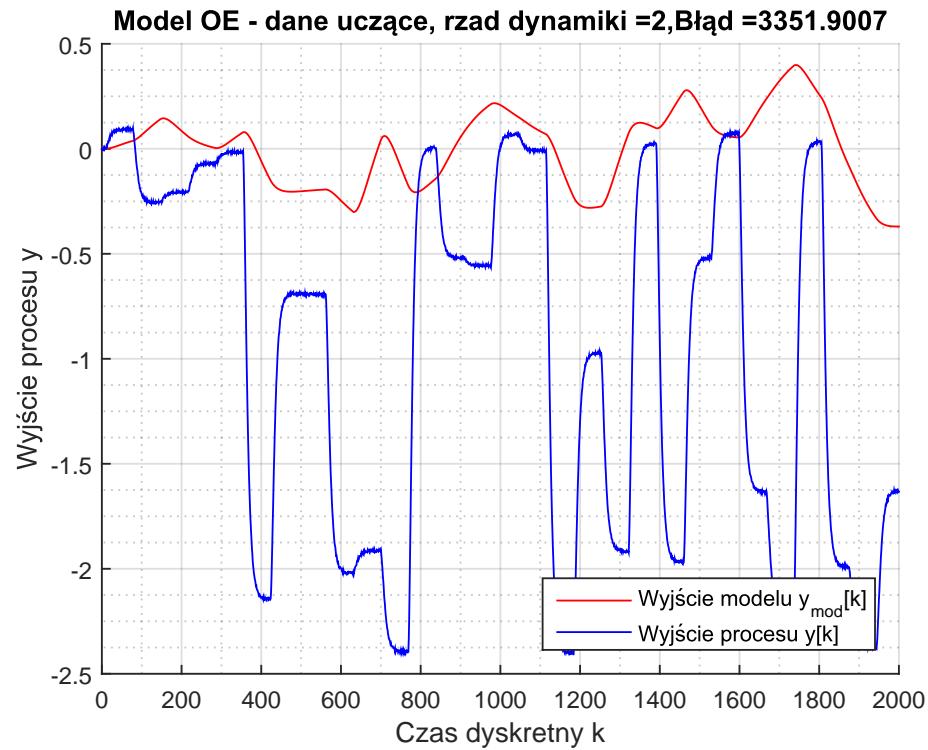


Rysunek 1.32. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

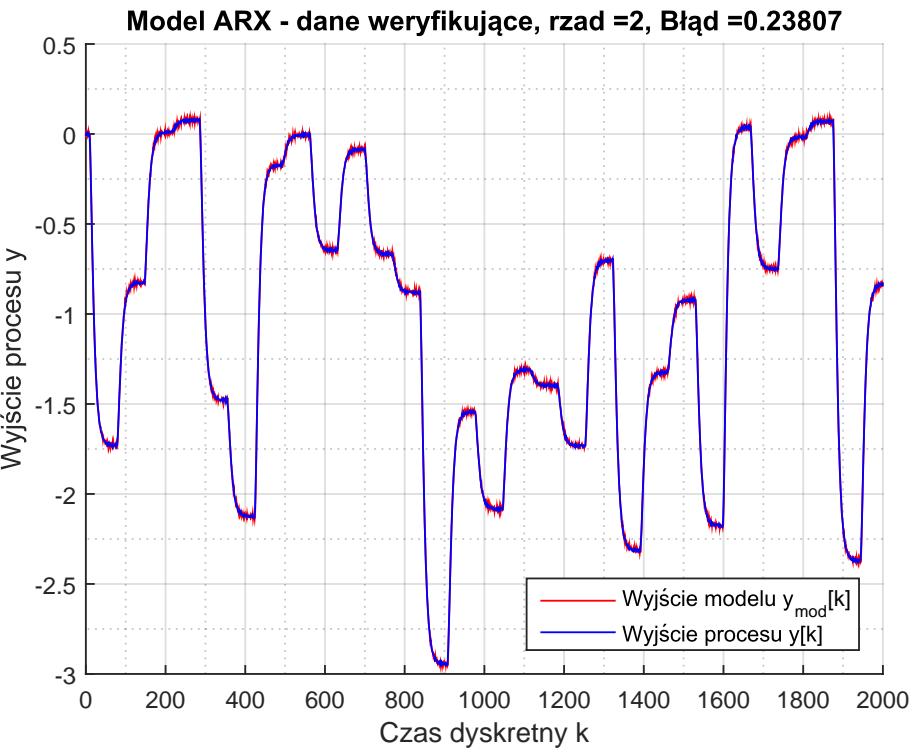
## Model drugiego rzędu



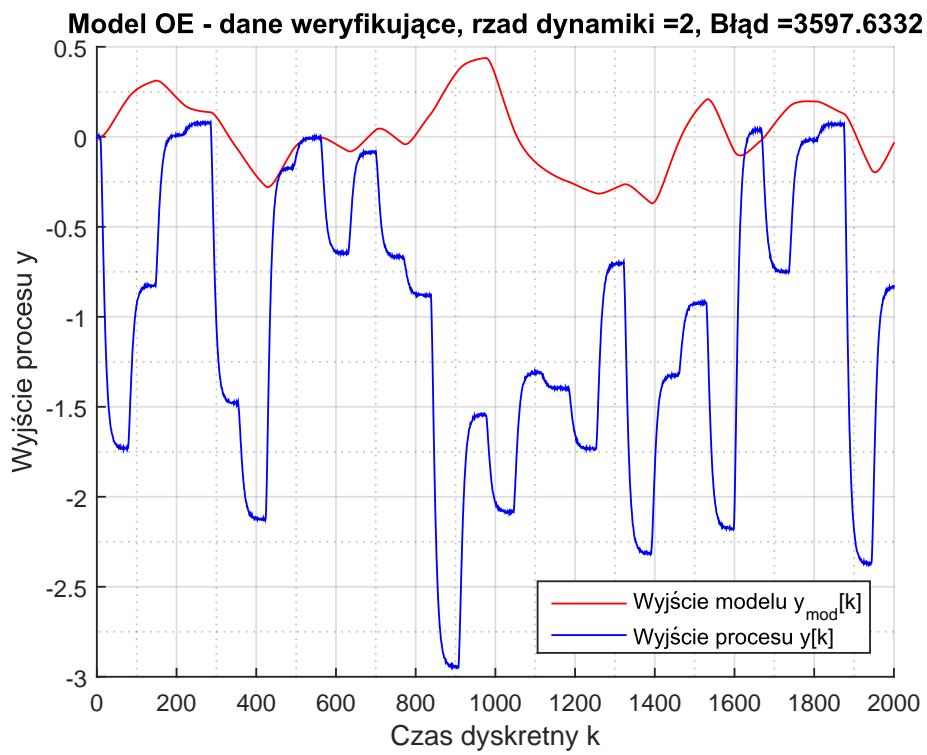
Rysunek 1.33. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



Rysunek 1.34. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

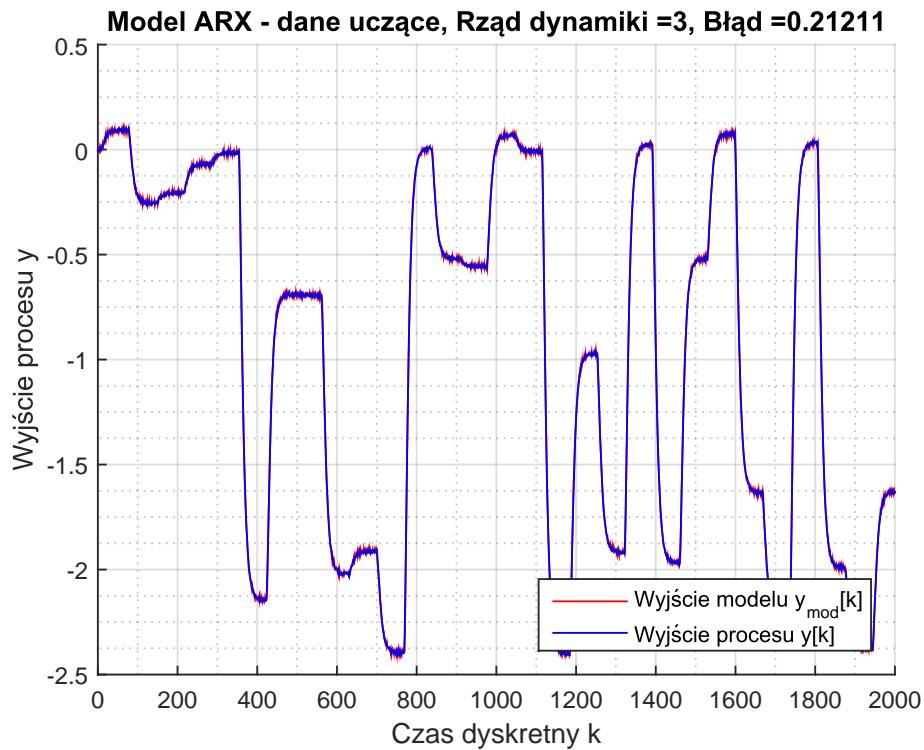


Rysunek 1.35. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

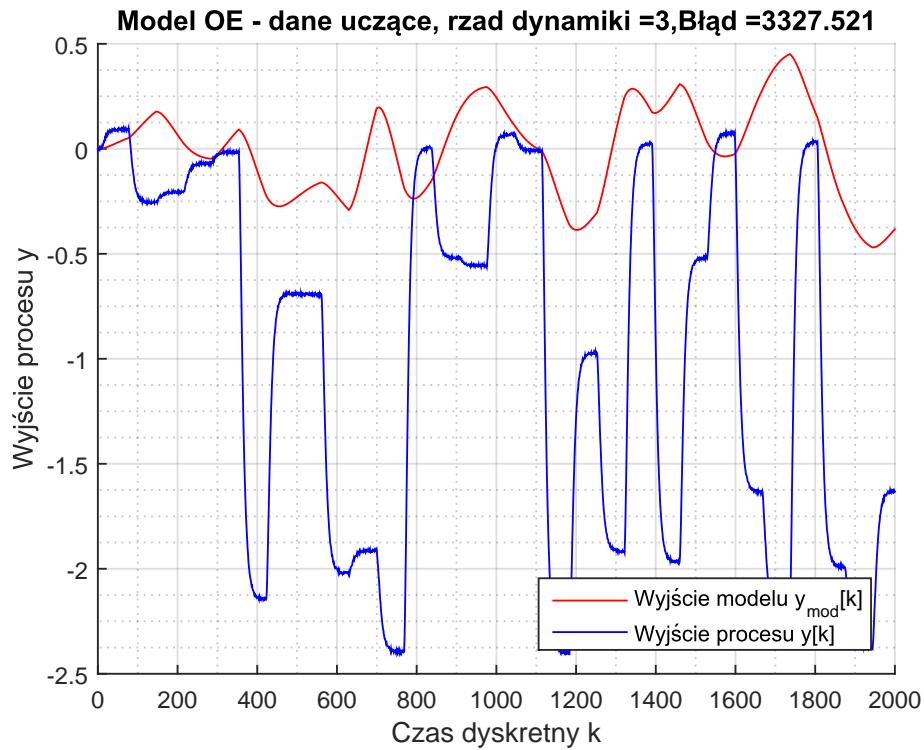


Rysunek 1.36. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

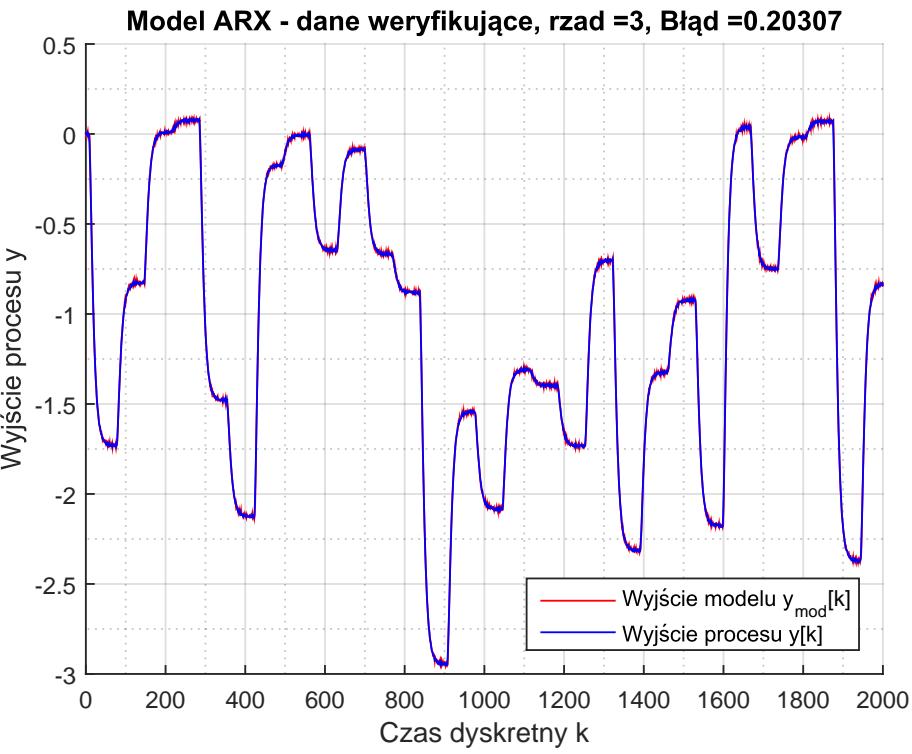
### Model trzeciego rzędu



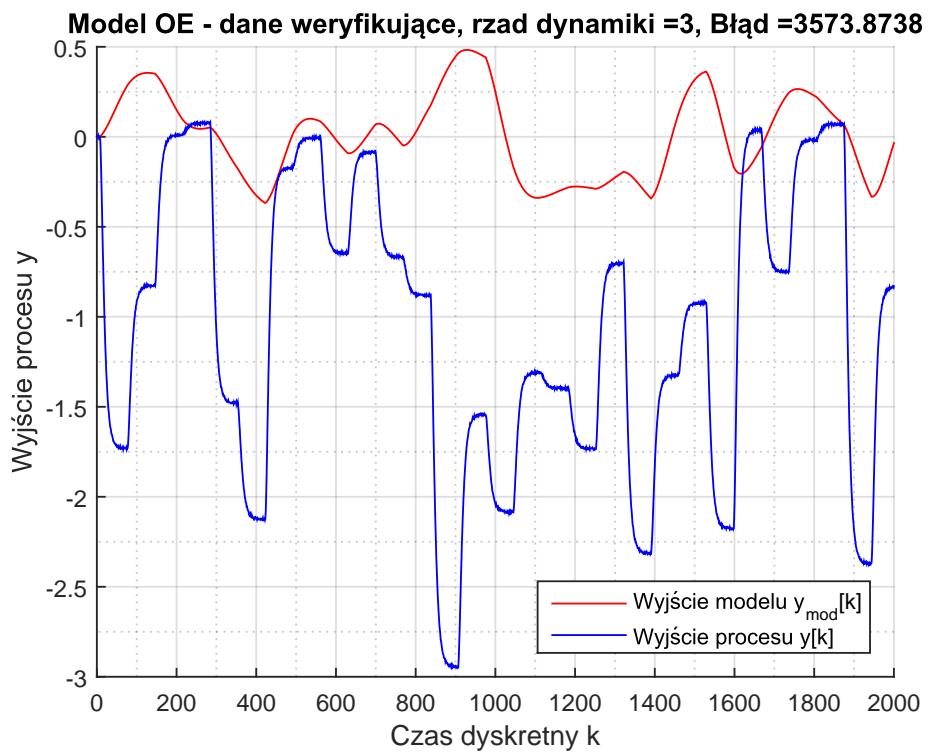
Rysunek 1.37. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



Rysunek 1.38. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących



Rysunek 1.39. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących



Rysunek 1.40. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Komentarz do wyników

W tabeli poniżej znajduje się zestawienie wszystkich uzyskanych wartości błędów dla zadanego modelu.

Tabela 1.1. Błędy modeli dla zadanych rzędów

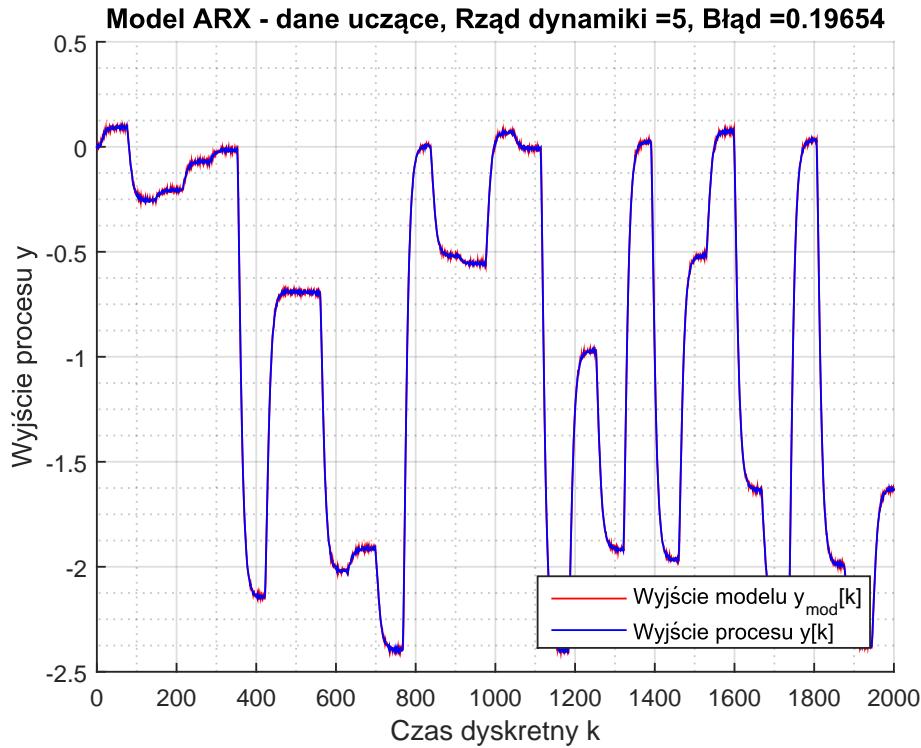
Rząd modelu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
1	2,046683	3333,513	1,740251	3917,316
2	0,235764	3351,900	0,238069	3597,633
3	0,212108	3327,520	0,203074	3573,873

Poniższe dane uznałem za niesatysfakcyjne. Najlepszy model wyszedł dla najwyższego badanego rzędu, dlatego też przeprowadziłem dalsze eksperymenty dla modeli wyższych rzędów.

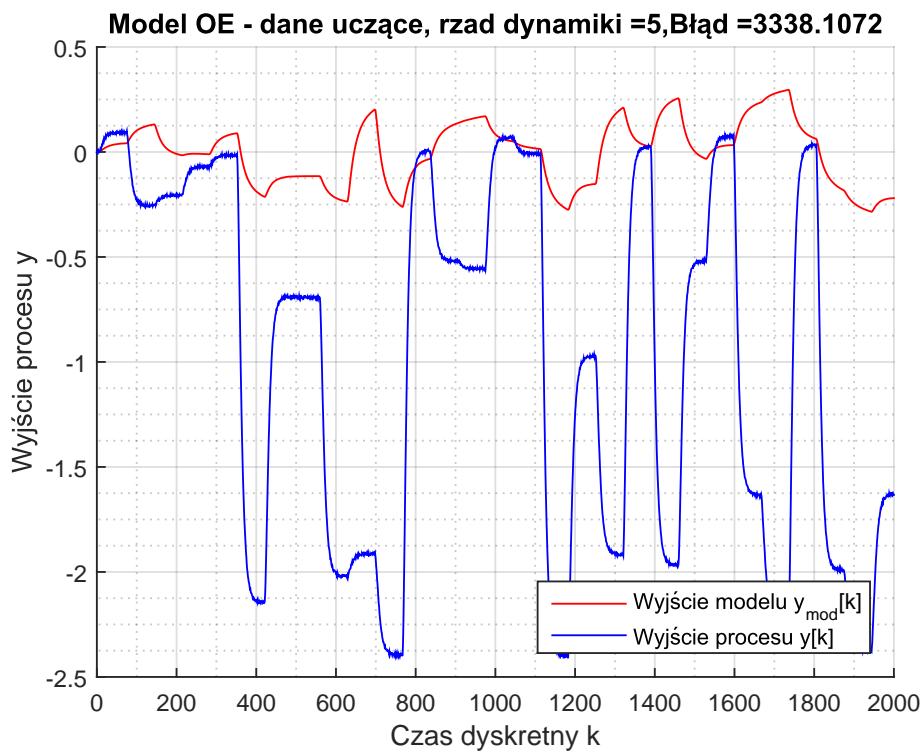
Tabela 1.2. Rozszerzona tabela z uzyskanymi błędami modeli

Rząd modelu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
1	2,046683	3333,513	1,740251	3917,316
2	0,235764	3351,900	0,238069	3597,633
3	0,212108	3327,520	0,203074	3573,873
4	0,208349	3327,278	0,198302	3521,722
5	0,196541	3338,107	0,188608	3489,212
6	0,192738	3350,215	0,183241	3500,315
7	0,192429	3351,484	0,184338	3528,152
8	0,192302	3347,851	0,184251	3513,736
9	0,192214	3349,431	0,184073	3520,368
10	0,192063	3345,570	0,184269	3513,926

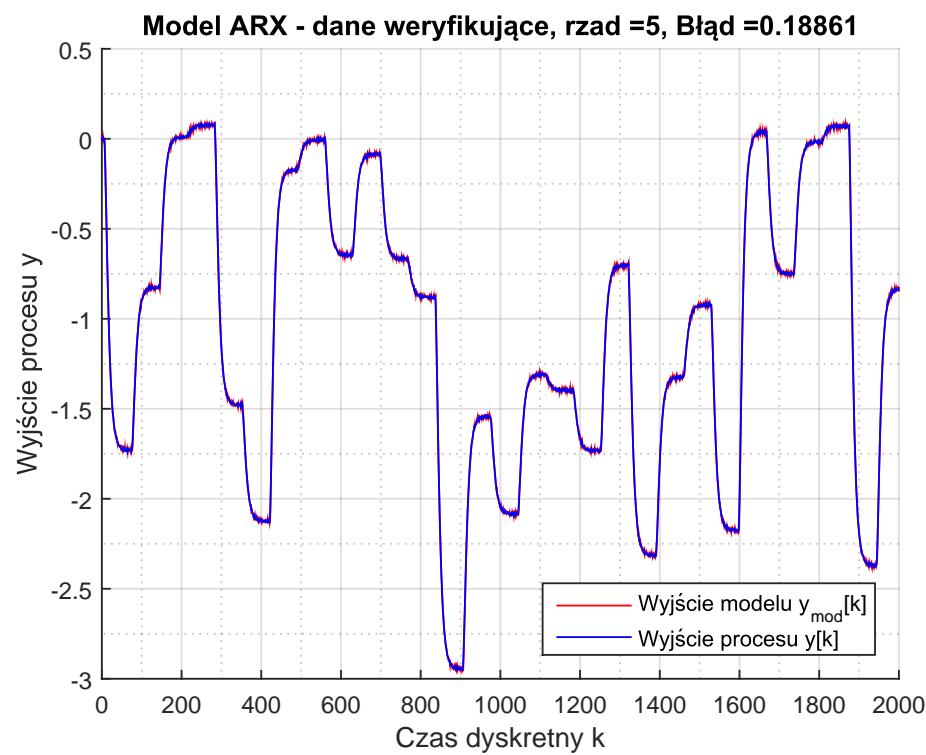
Najmniejszy błąd weryfikacyjny dla modelu z rekurencją uzyskałem dla modelu piątego rzędu. Dodatkowo, ilość parametrów tego modelu jest relatywnie mała.



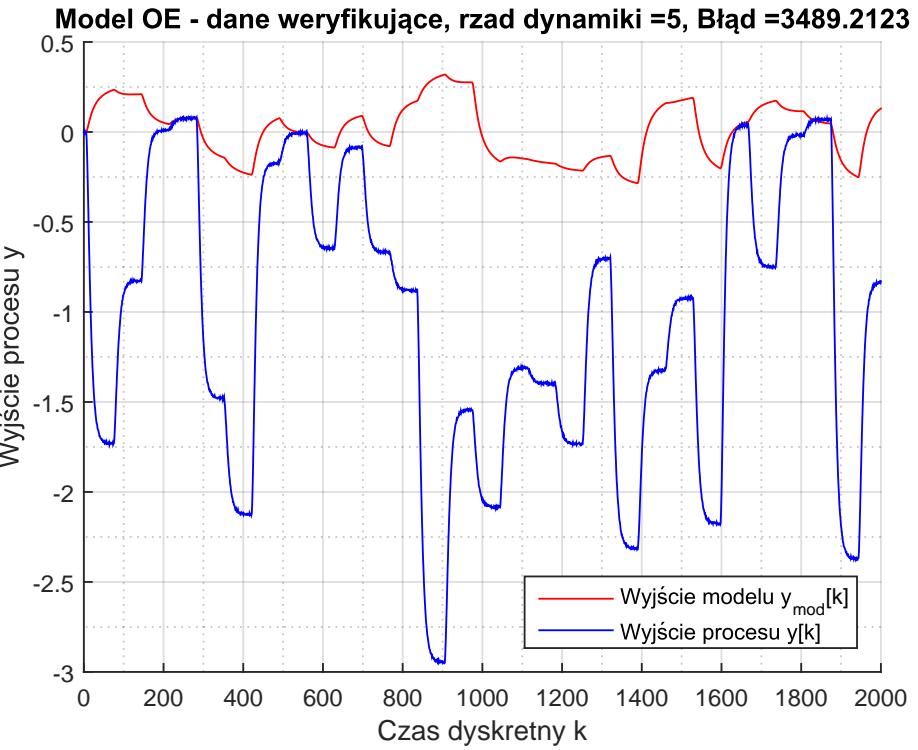
Rysunek 1.41. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



Rysunek 1.42. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących



Rysunek 1.43. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących



Rysunek 1.44. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

Równanie modelu:

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0.0015 \\ -0.0015 \\ -0.0013 \\ 0.0006 \\ 0.0035 \\ 1.6517 \\ -0.1594 \\ -0.4595 \\ -0.2687 \\ 0.2353 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u[k-1] \\ u[k-2] \\ u[k-3] \\ u[k-4] \\ u[k-5] \\ y[k-1] \\ y[k-2] \\ y[k-3] \\ y[k-4] \\ y[k-5] \end{bmatrix}^T$$

Wartość błędu weryfikującego dla modelu piątego rzędu z rekurencją wskazuje na dużą nie-dokładność modelu. Świadczy to o mocnej nieliniowości procesu. Aby dokładniej zamodelować badane zjawisko należy posłużyć się modelami nieliniowymi.

### 1.2.3. Dynamiczne modele nieliniowe

W kolejnym zadaniu posłużyłem się metodą najmniejszych kwadratów w celu wyznaczenia kilkunastu modeli wielomianowych. Modele są postaci:

$$y[k] = \sum_{i=1}^{n_B} \sum_{n=1}^m b_i(u[k-i])^n + \sum_{i=1}^{n_A} \sum_{n=1}^m a_i(y[k-i])^n$$

Modele wielomianowe pierwszego stopnia zostały omówione w poprzedniej sekcji, dlatego też rozpoczęnę od modeli kwadratowych.

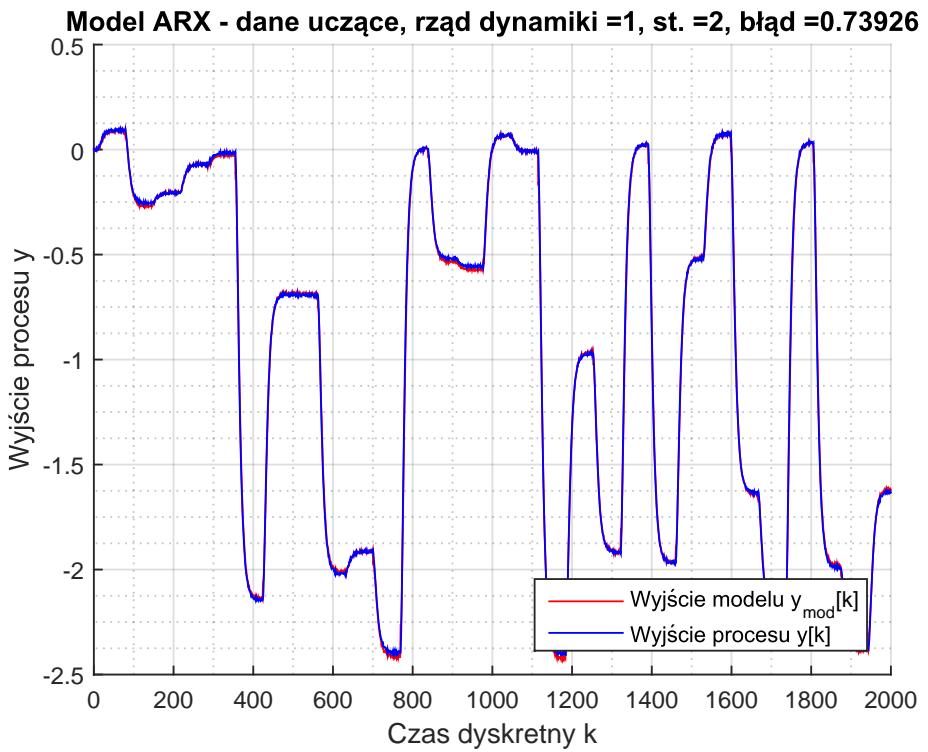
### 1.2.4. Modele kwadratowe

Na pierwszy rzut oka można stwierdzić że dodanie członów nieliniowych do równania modelu znaczco poprawia jego jakość. Błędy znacznie zmalały, choć nadal są dalekie od pożądanych.

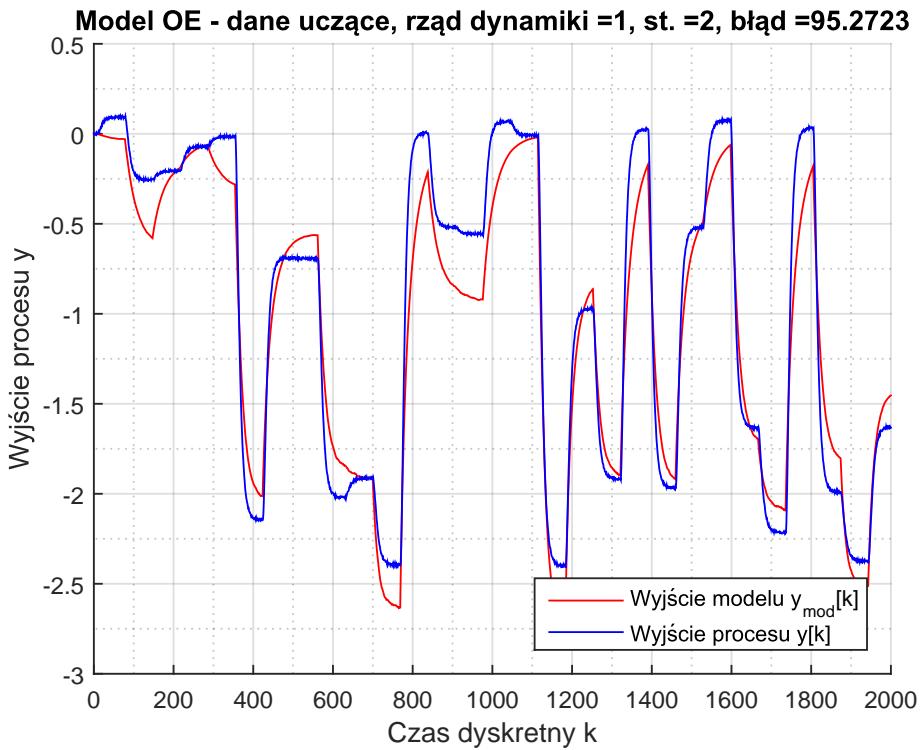
Tabela 1.3. Błędy modeli wielomianowych stopnia drugiego

Rząd modelu	Stopień wielomianu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
1	2	0,739256	95,27229	0,8569819	143,8209
2	2	0,168894	63,64604	0,2019453	105,8382
3	2	0,137727	61,41986	0,1624305	98,17335
4	2	0,126977	61,70969	0,1421674	95,45892
5	2	0,110351	60,58081	0,1197865	94,30556
6	2	0,094504	58,01698	0,1024341	94,130600
7	2	0,087338	54,55316	0,0942585	95,136858

## Dynamika pierwszego rzędu

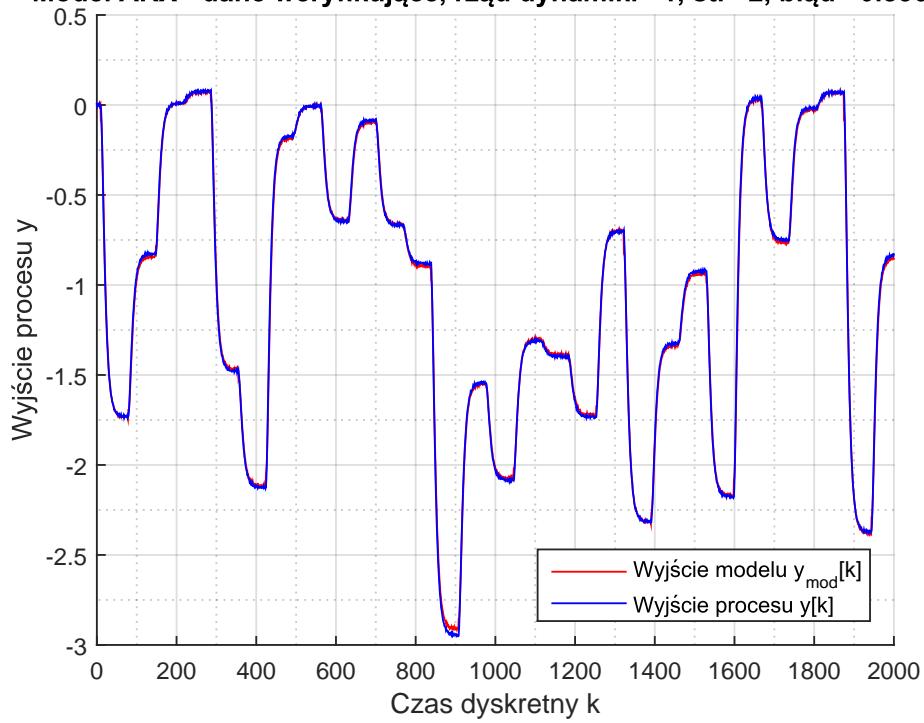


Rysunek 1.45. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



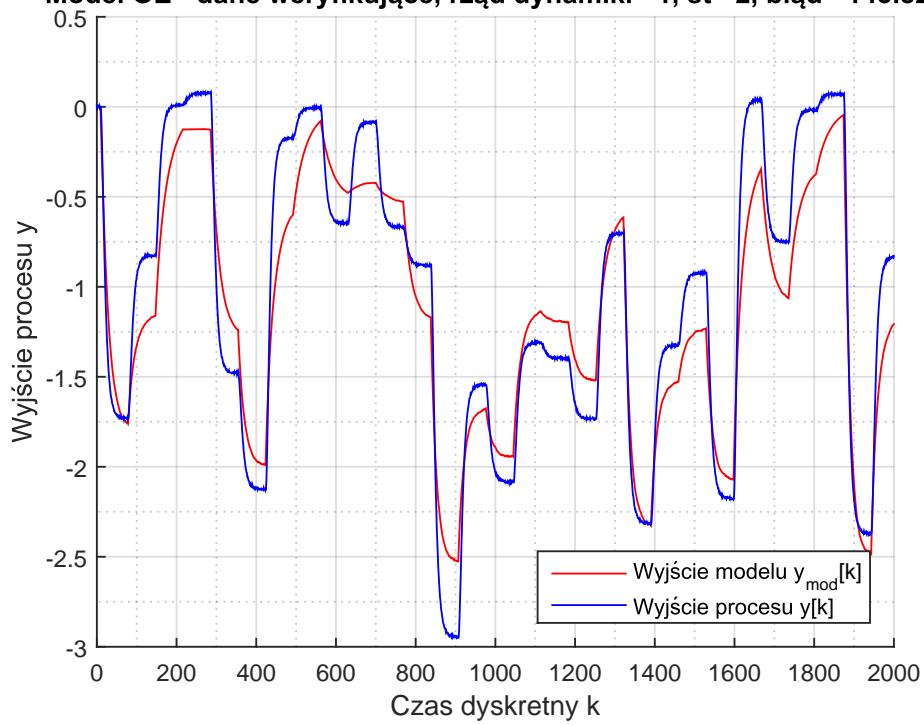
Rysunek 1.46. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =1, st. =2, błąd =0.85698**



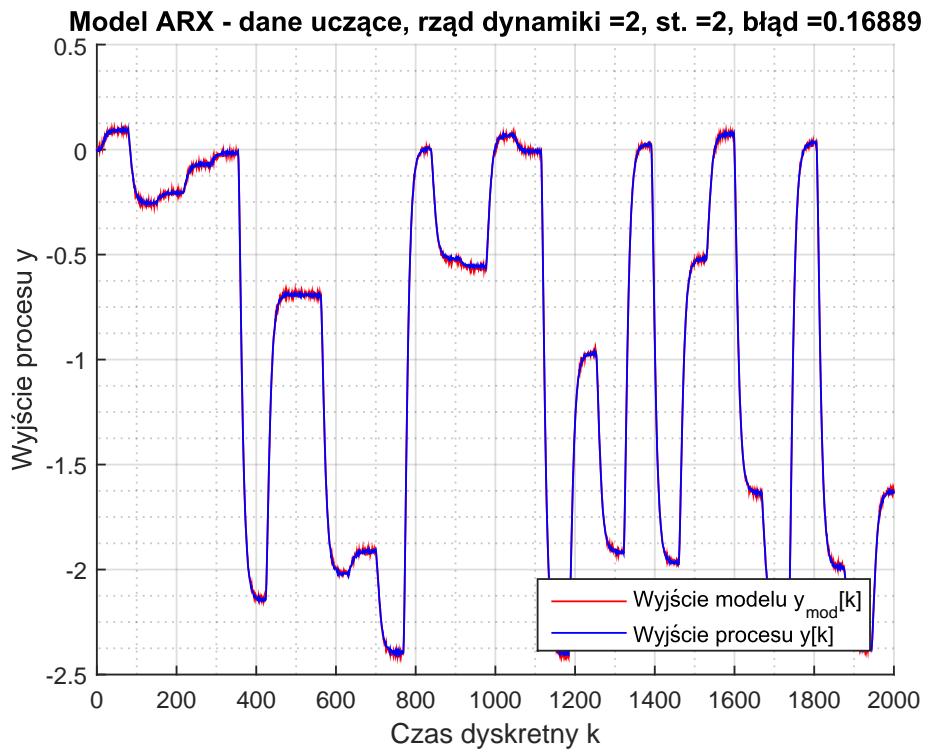
Rysunek 1.47. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =1, st =2, błąd =143.821**

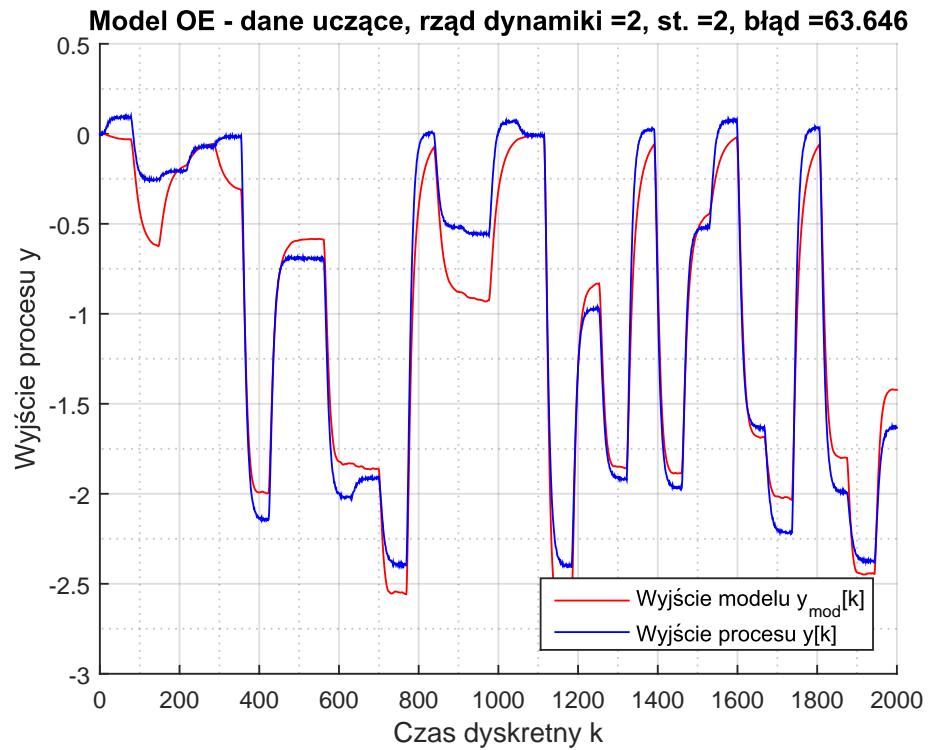


Rysunek 1.48. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika drugiego rzędu

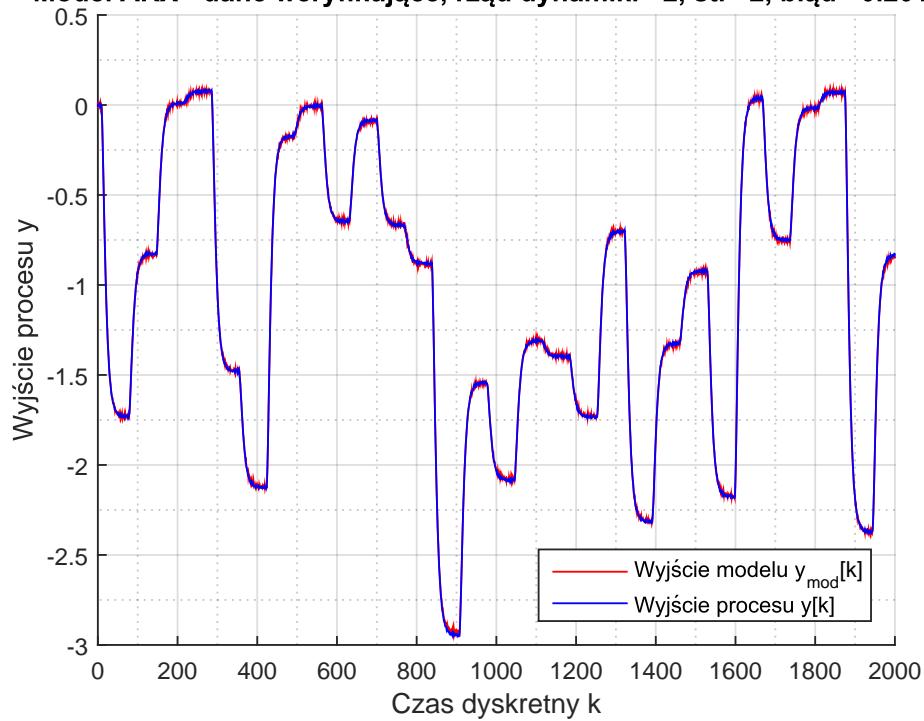


Rysunek 1.49. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



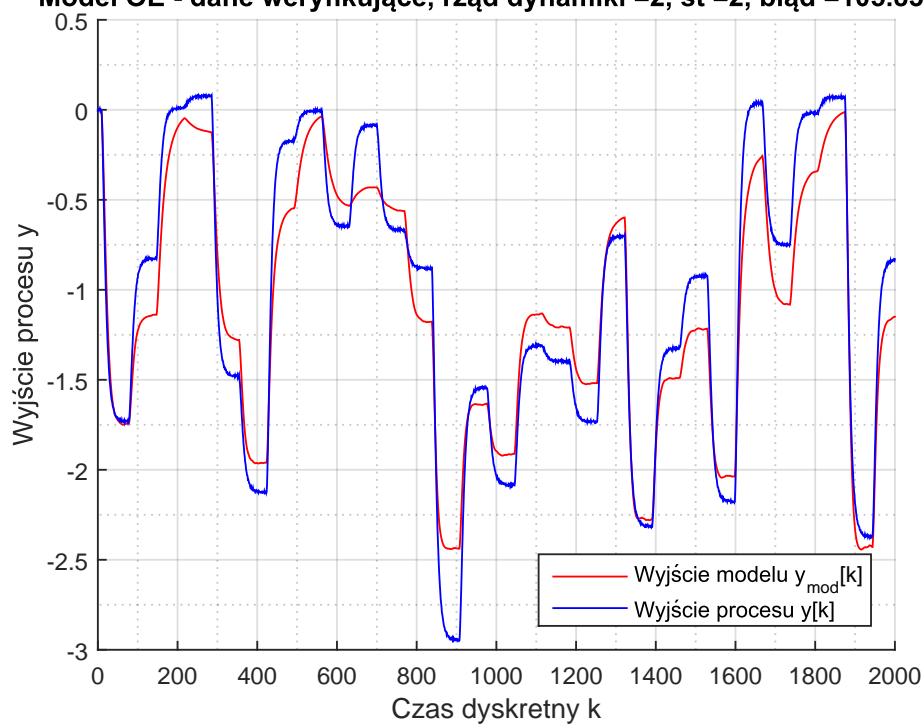
Rysunek 1.50. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =2, st. =2, błąd =0.20195**



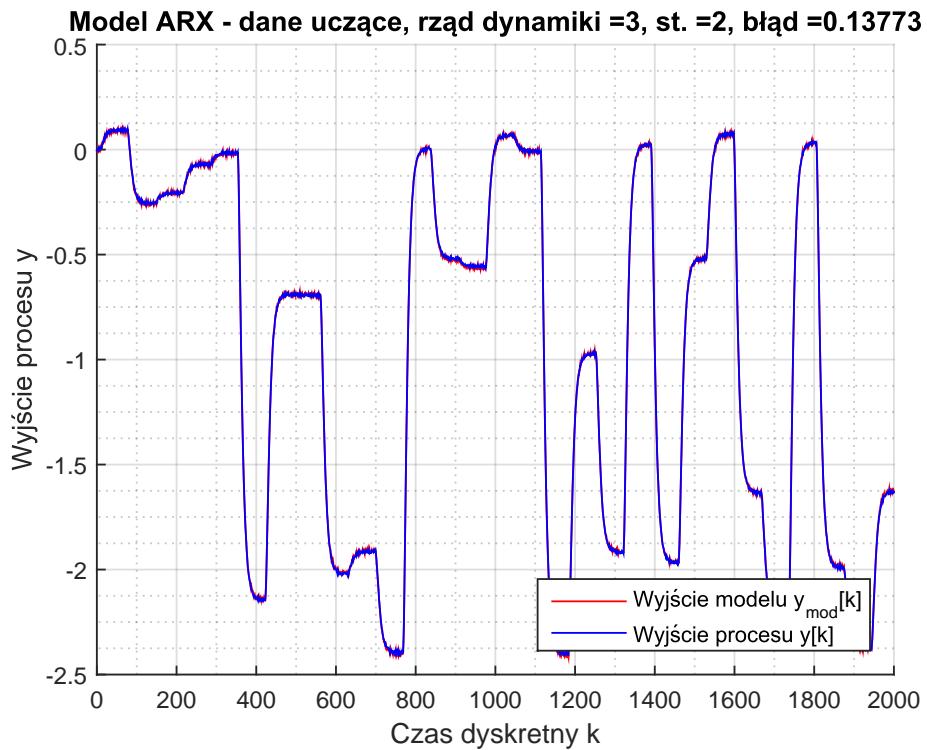
Rysunek 1.51. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =2, st =2, błąd =105.8382**

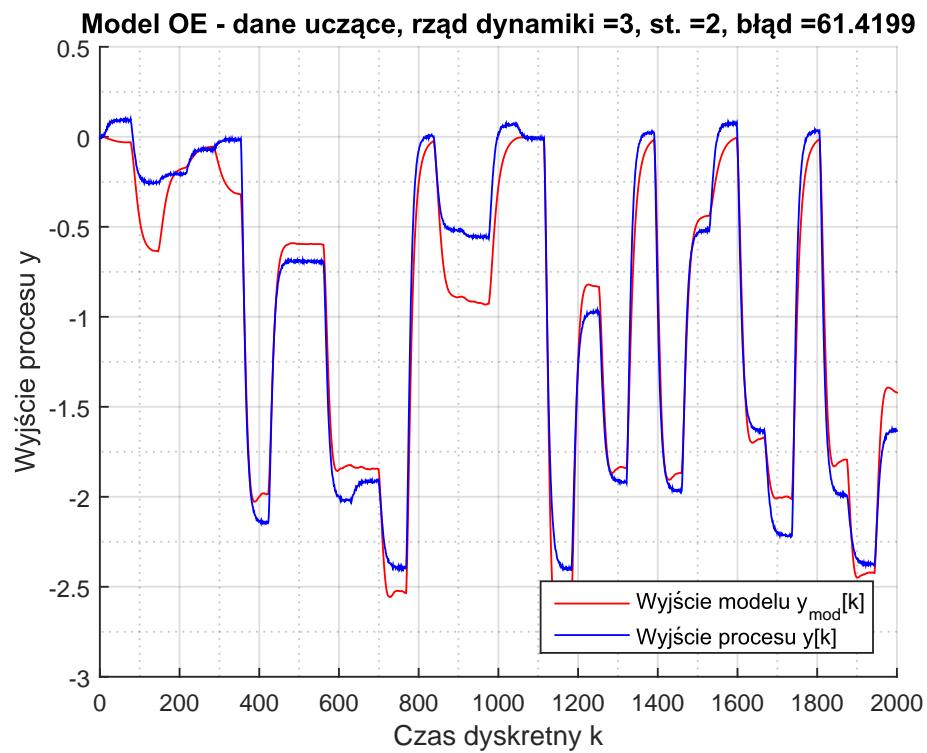


Rysunek 1.52. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika trzeciego rzędu

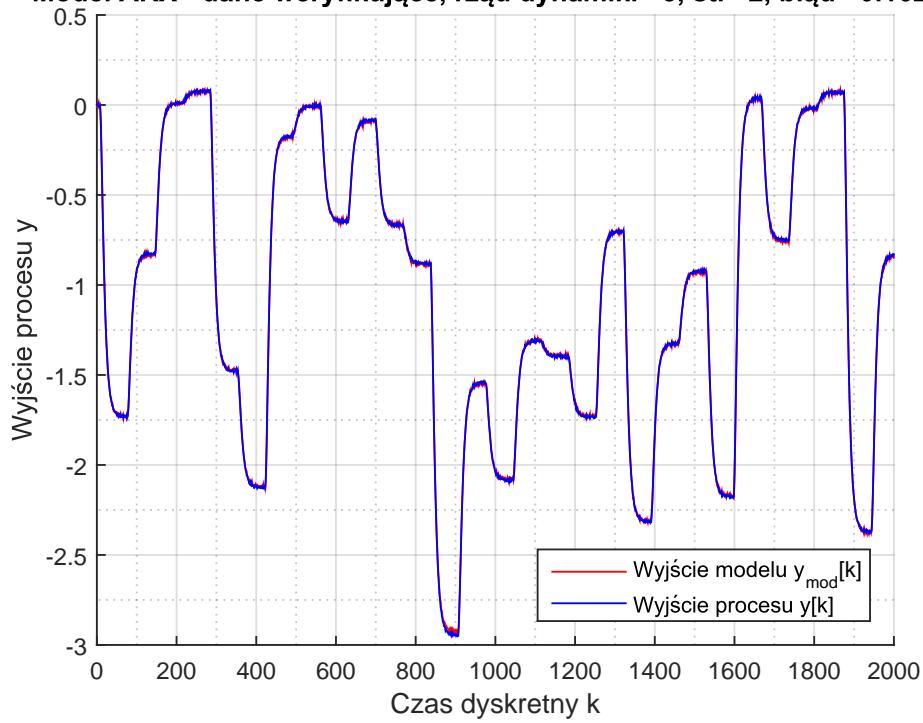


Rysunek 1.53. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



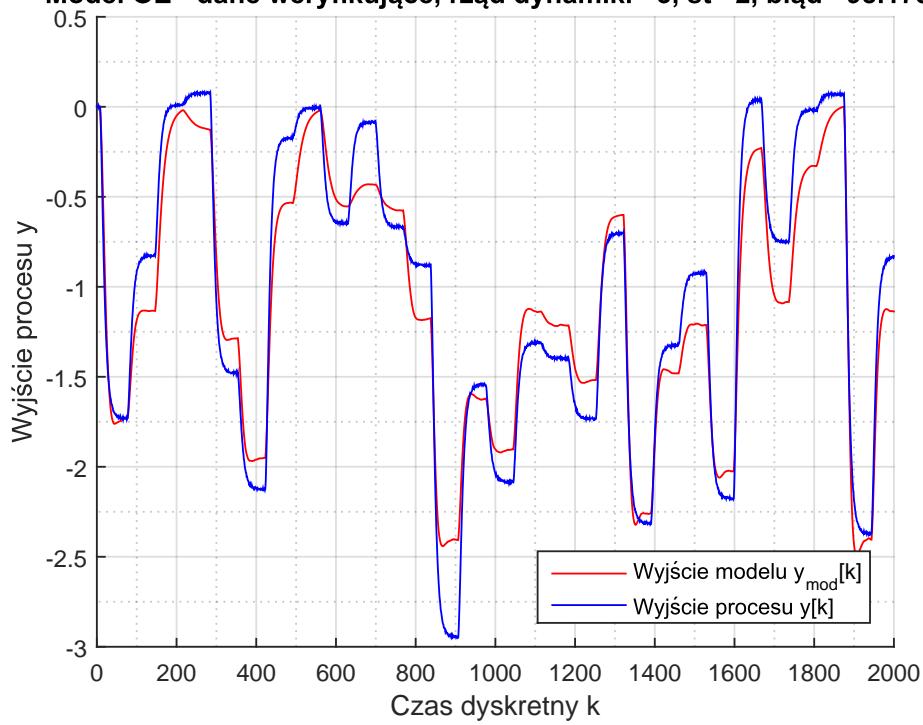
Rysunek 1.54. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =3, st. =2, błąd =0.16243**



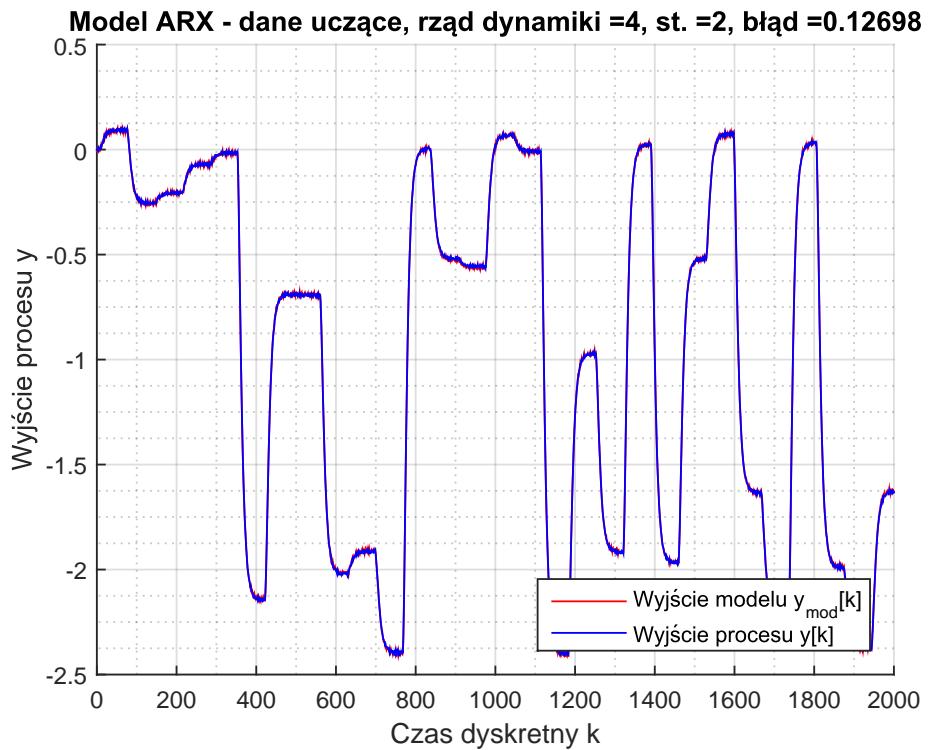
Rysunek 1.55. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rzząd dynamiki =3, st =2, błąd =98.1734**

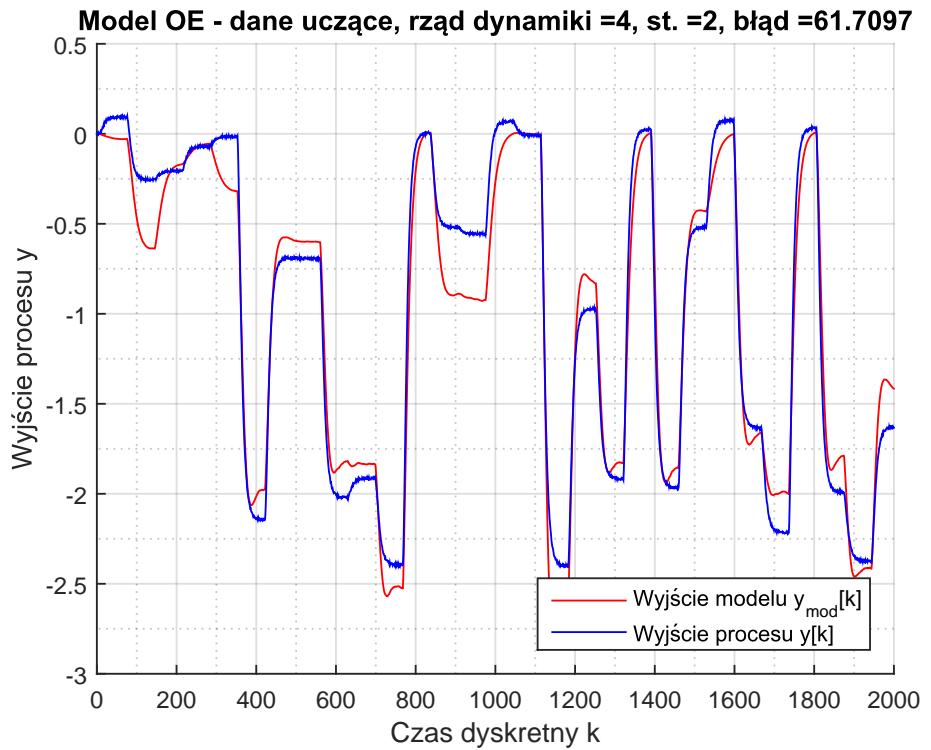


Rysunek 1.56. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika czwartego rzędu

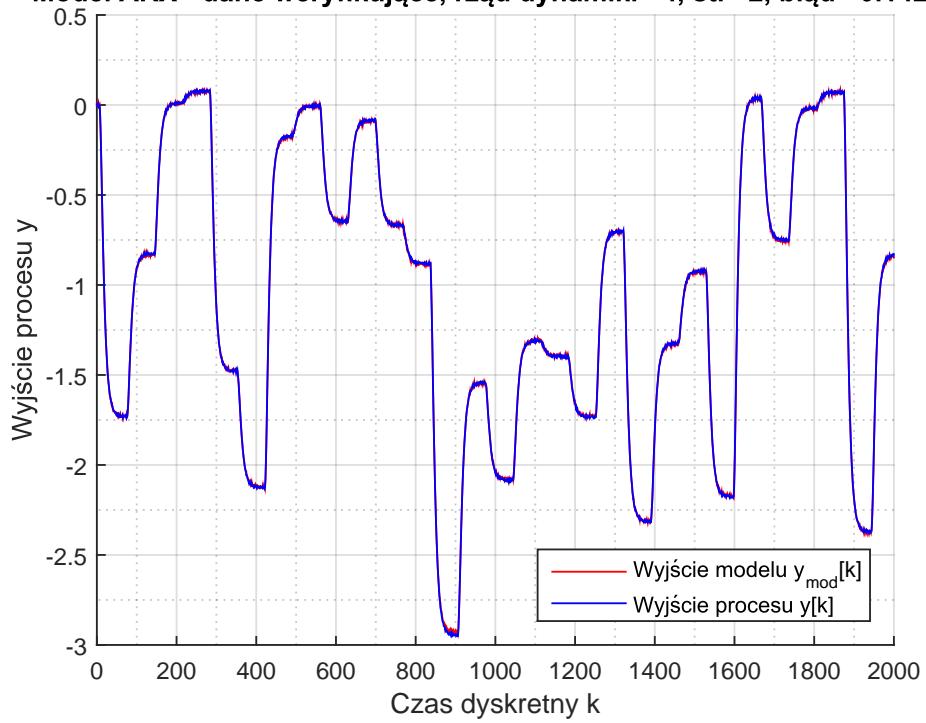


Rysunek 1.57. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



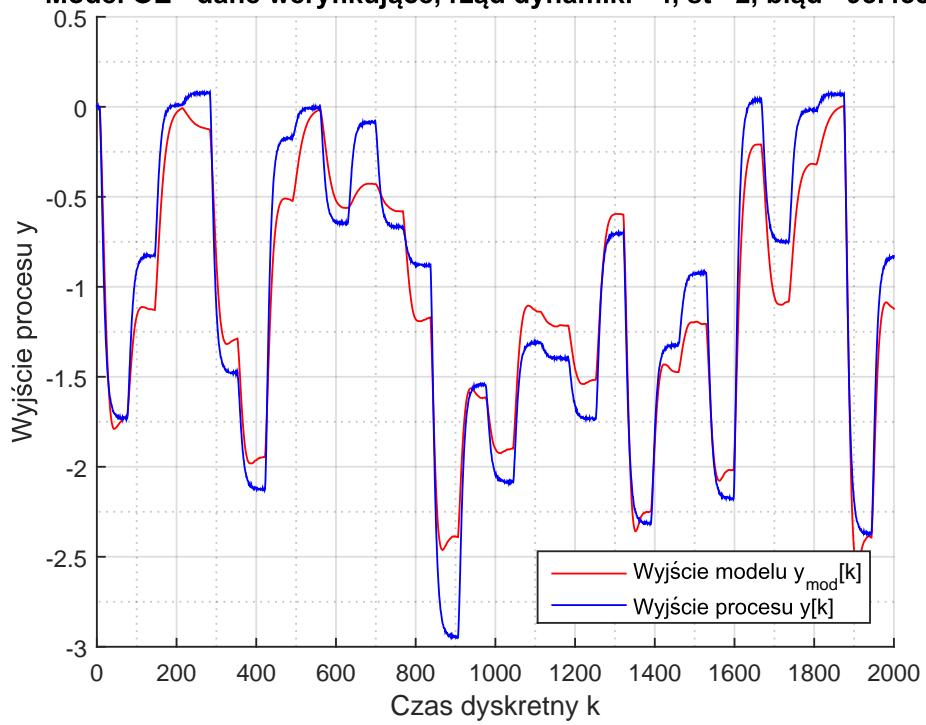
Rysunek 1.58. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =4, st. =2, błąd =0.14217**



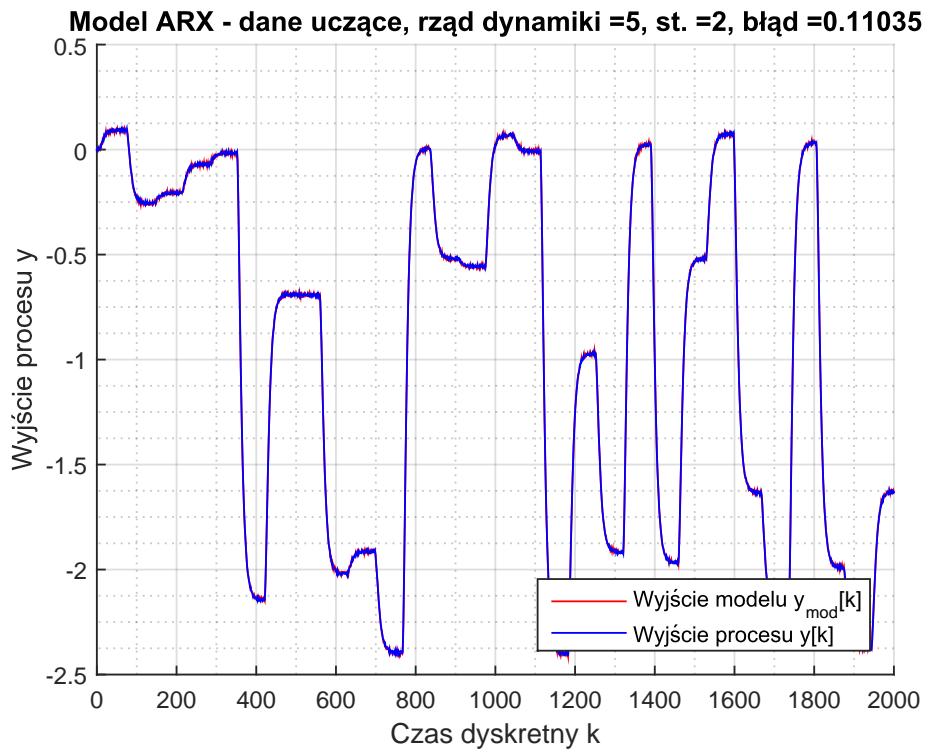
Rysunek 1.59. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =4, st =2, błąd =95.4589**

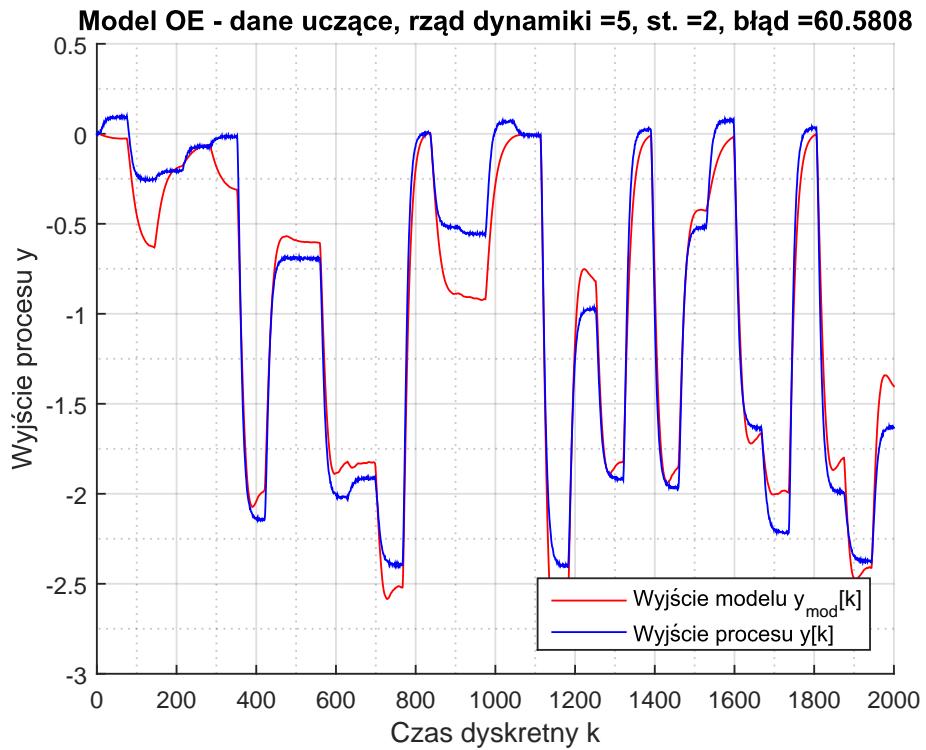


Rysunek 1.60. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika piątego rzędu

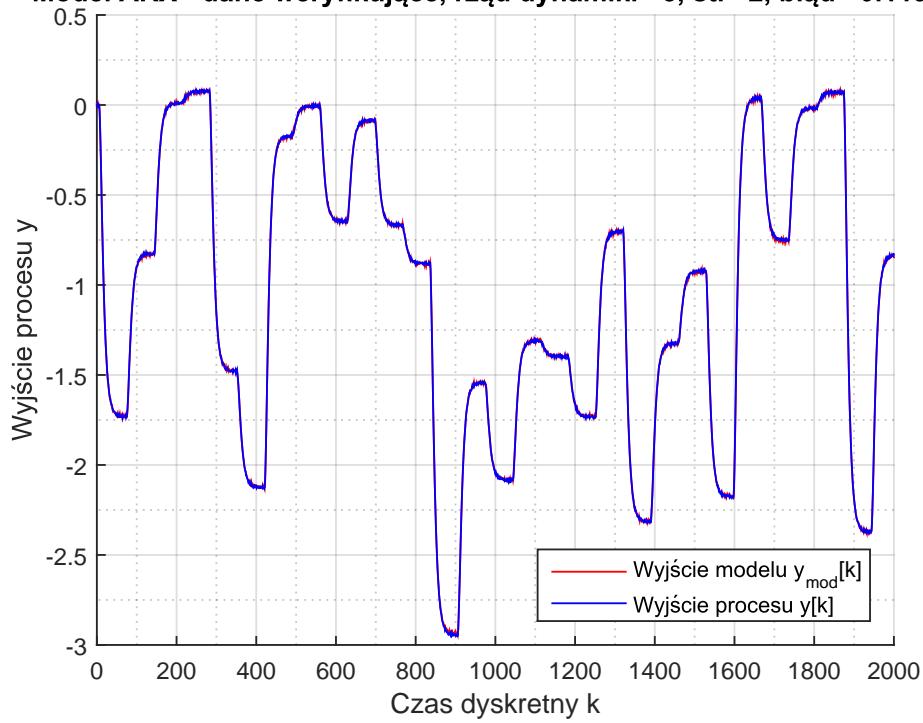


Rysunek 1.61. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



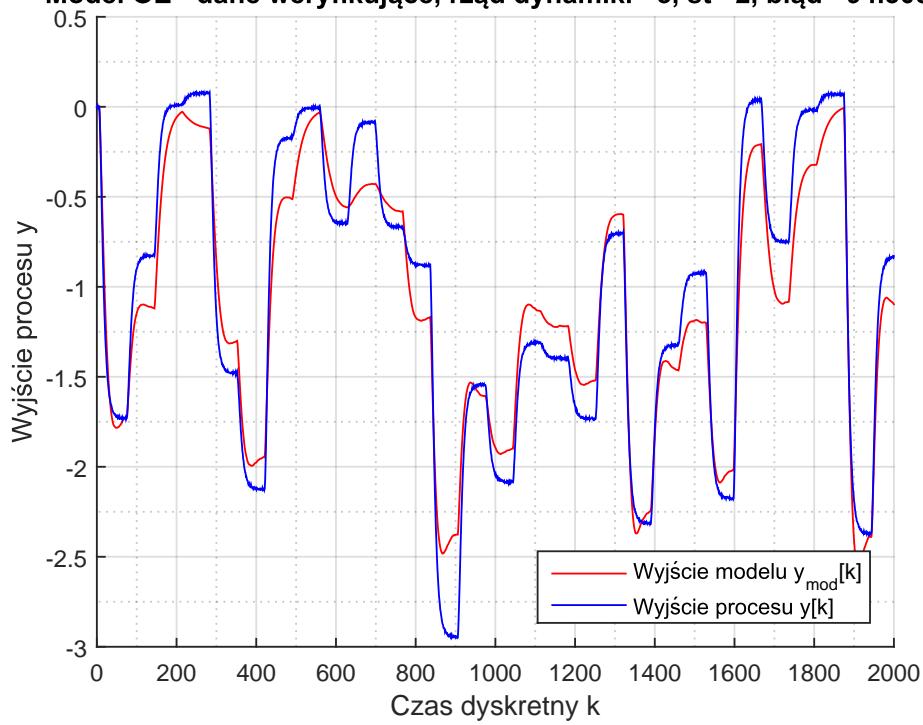
Rysunek 1.62. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =5, st. =2, błąd =0.11979**



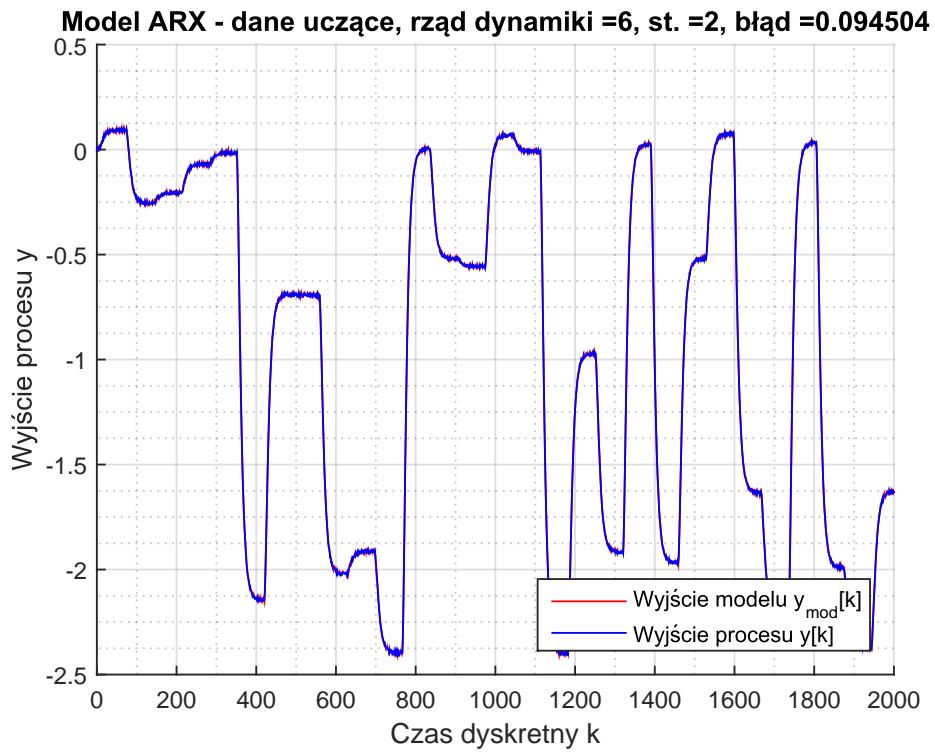
Rysunek 1.63. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rzząd dynamiki =5, st =2, błąd =94.3056**

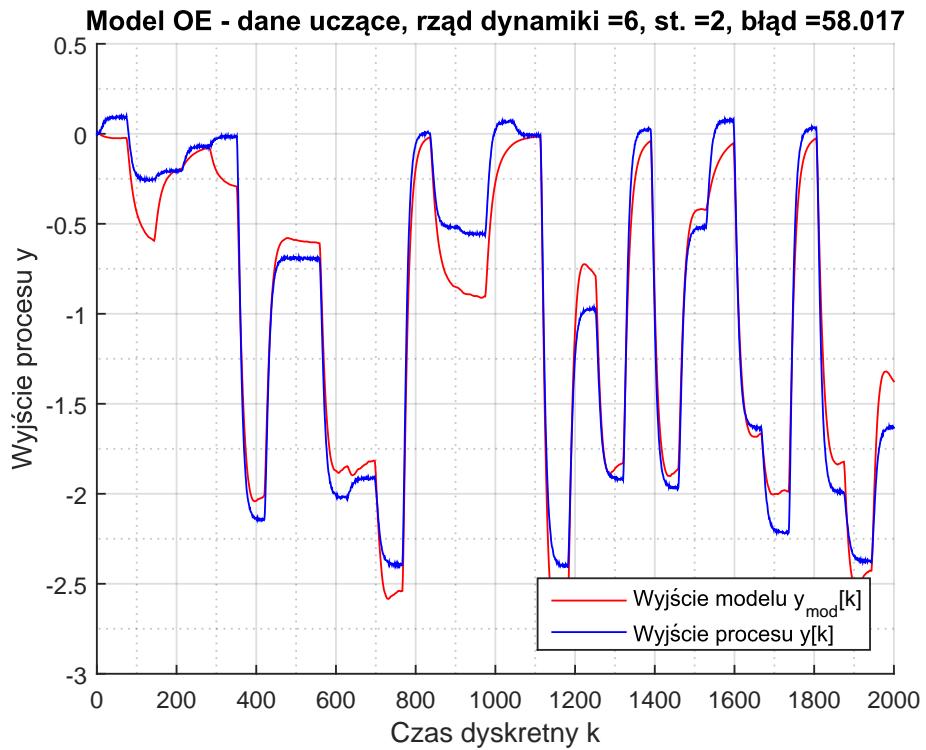


Rysunek 1.64. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika szóstego rzędu

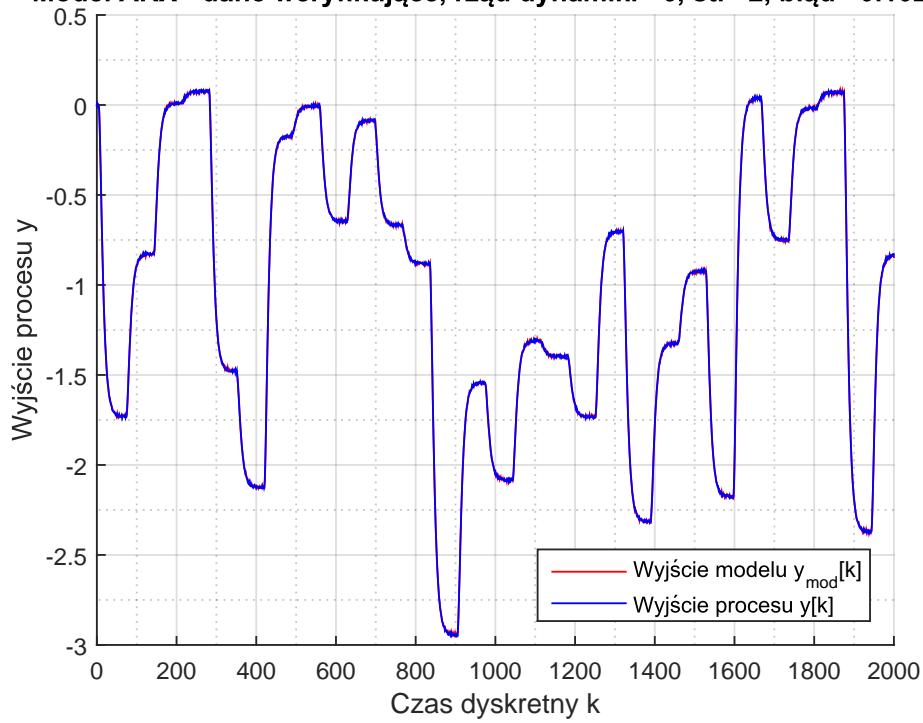


Rysunek 1.65. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



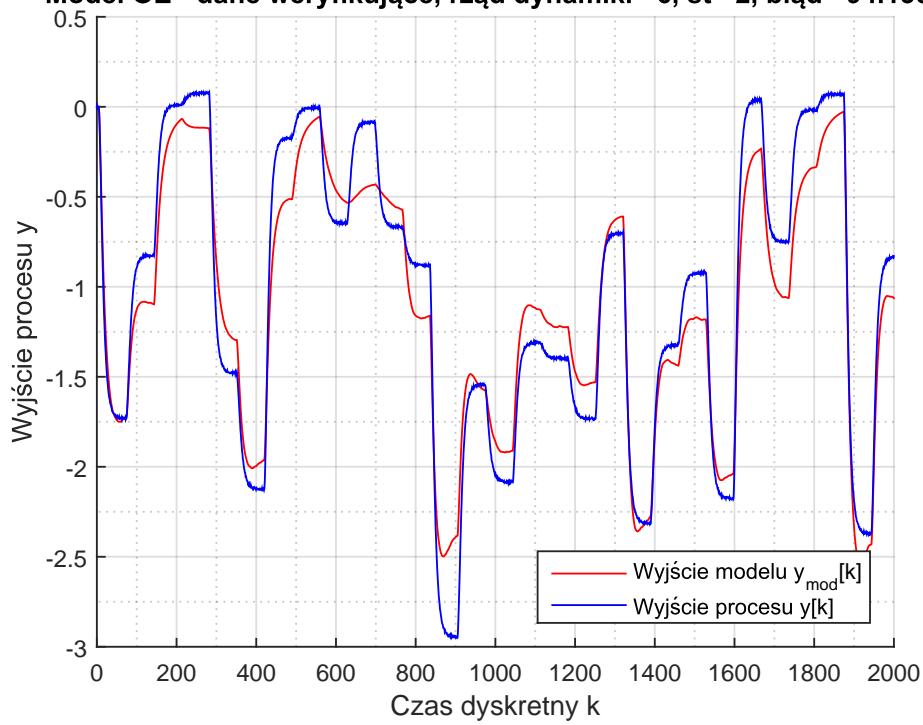
Rysunek 1.66. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =6, st. =2, błąd =0.10243**



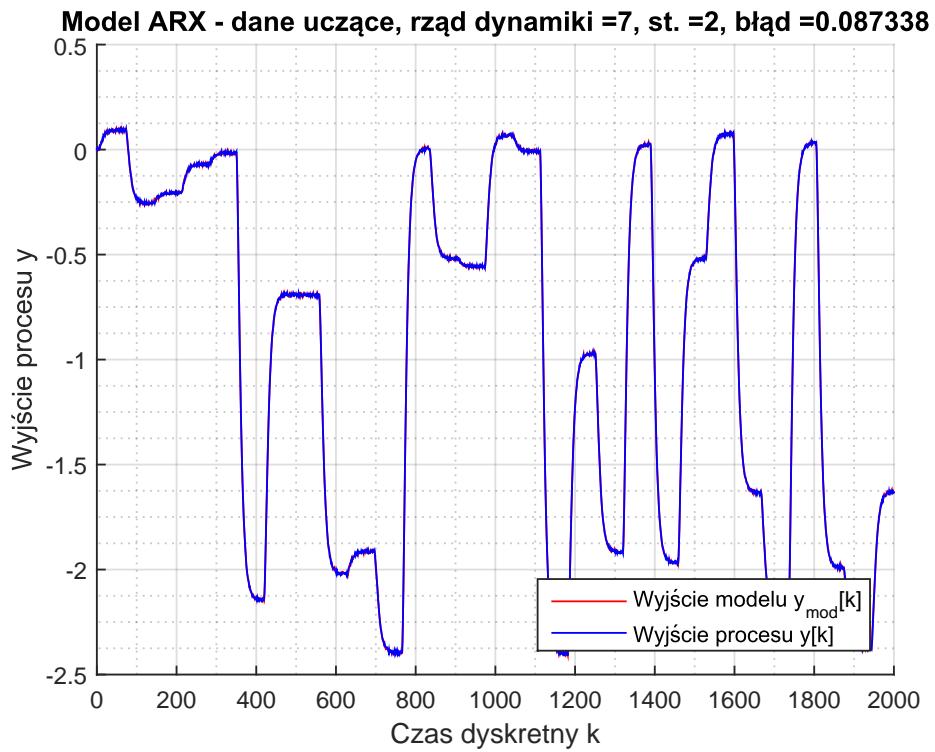
Rysunek 1.67. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =6, st =2, błąd =94.1306**

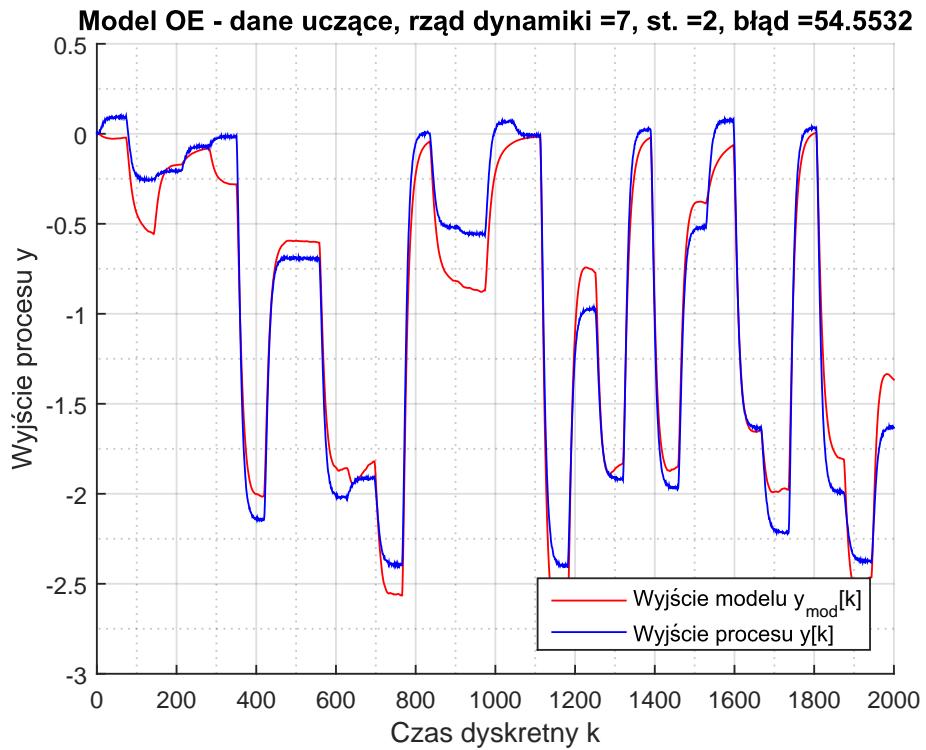


Rysunek 1.68. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika siódmego rzędu

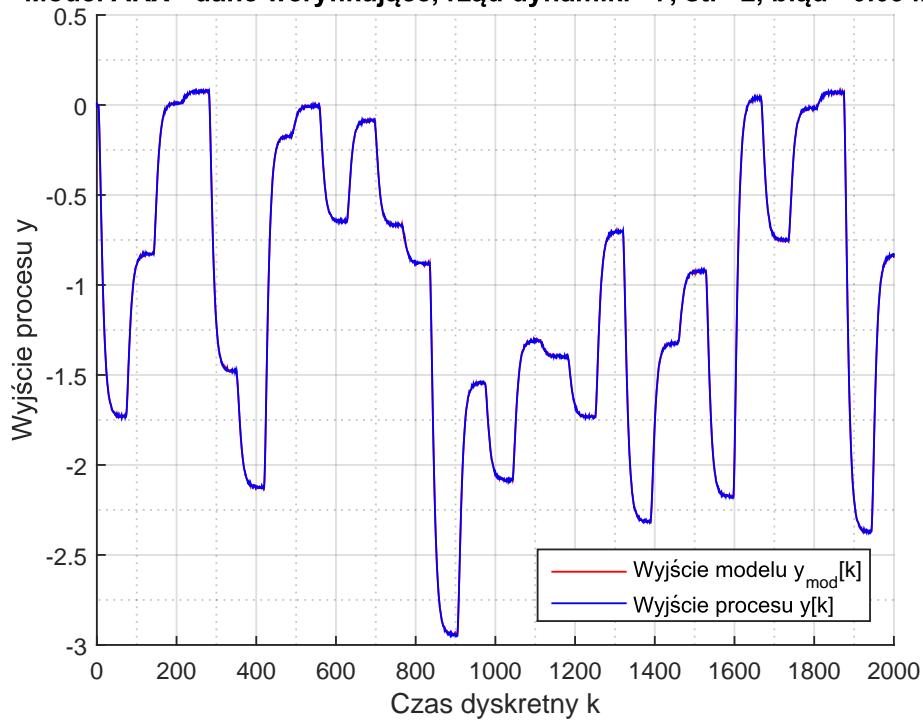


Rysunek 1.69. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



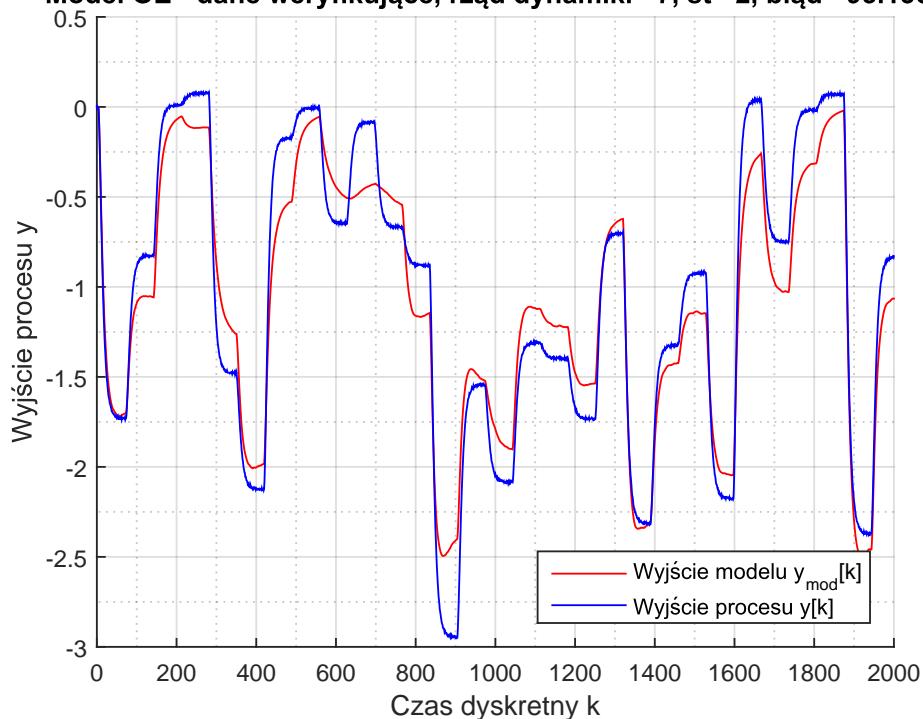
Rysunek 1.70. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =7, st. =2, błąd =0.094259**



Rysunek 1.71. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =7, st =2, błąd =95.1369**



Rysunek 1.72. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

Dodanie członów nieliniowych do równania modelu znaczaco poprawia jego jakość. Błędy znacznie zmalały, choć nadal są dalekie od pożądanych.

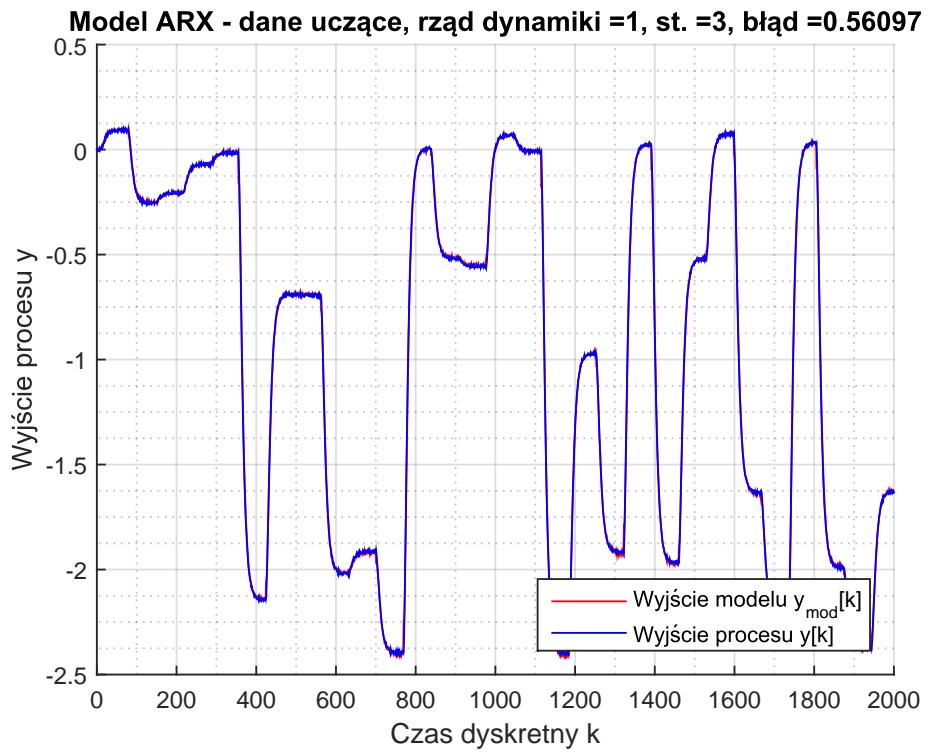
### 1.2.5. Modele stopnia trzeciego

W kolejnym eksperymencie sprawdziłem czy modele stopnia trzeciego okażą się lepsze od modeli kwadratowych.

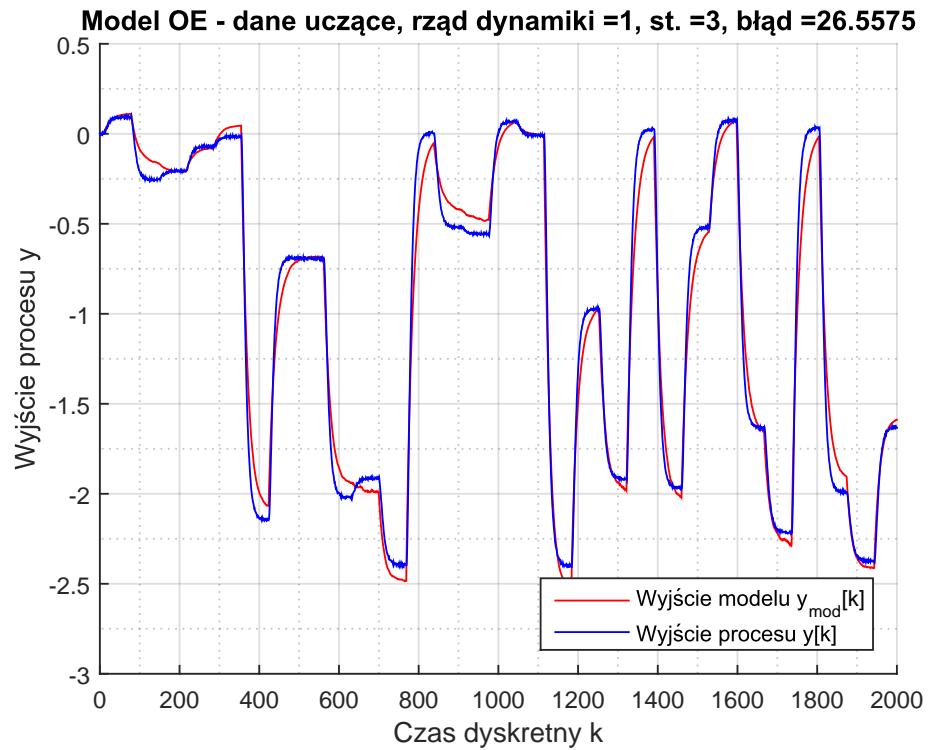
Tabela 1.4. Błędy modeli wielomianowych stopnia trzeciego

Rząd modelu	Stopień wielomianu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
1	3	0,560965	26,5574	0,476535	16,9293
2	3	0,124306	7,40536	0,145040	7,10195
3	3	0,088825	6,09822	0,096317	5,61037
4	3	0,082060	5,95233	0,088810	6,02414
5	3	0,079970	5,94520	0,088762	6,44954
6	3	0,073956	5,83669	0,087062	6,83701
7	3	0,068307	5,87967	0,083175	7,54866

## Dynamika pierwszego rzędu

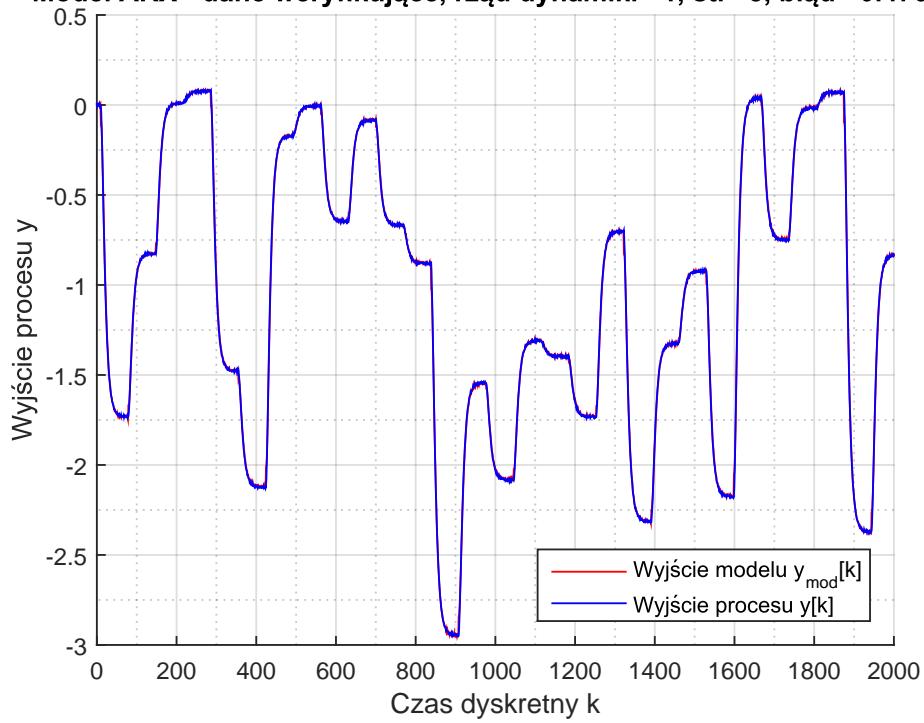


Rysunek 1.73. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



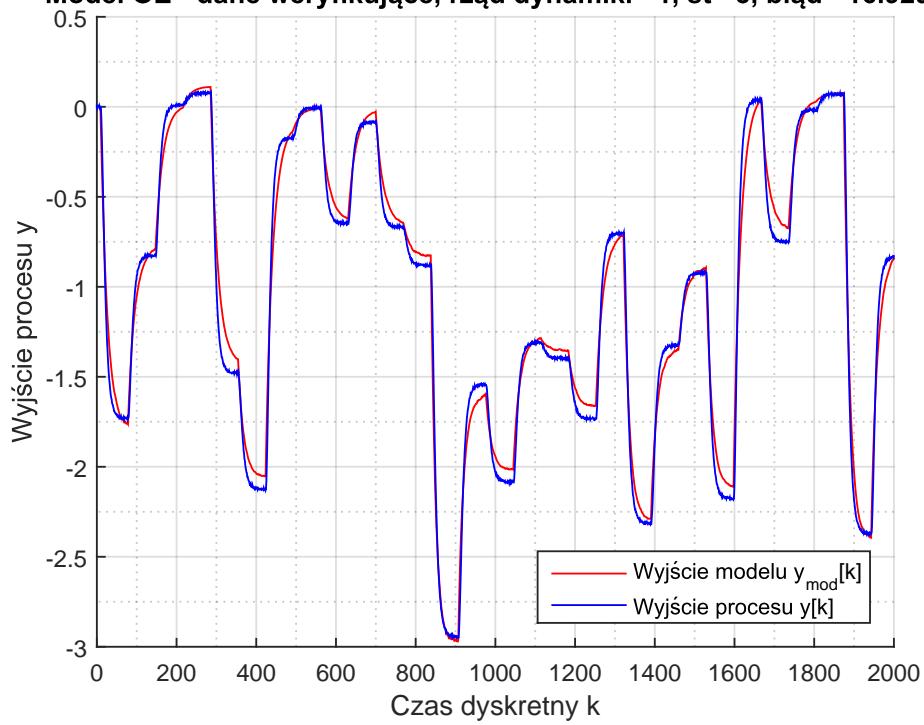
Rysunek 1.74. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =1, st. =3, błąd =0.47654**



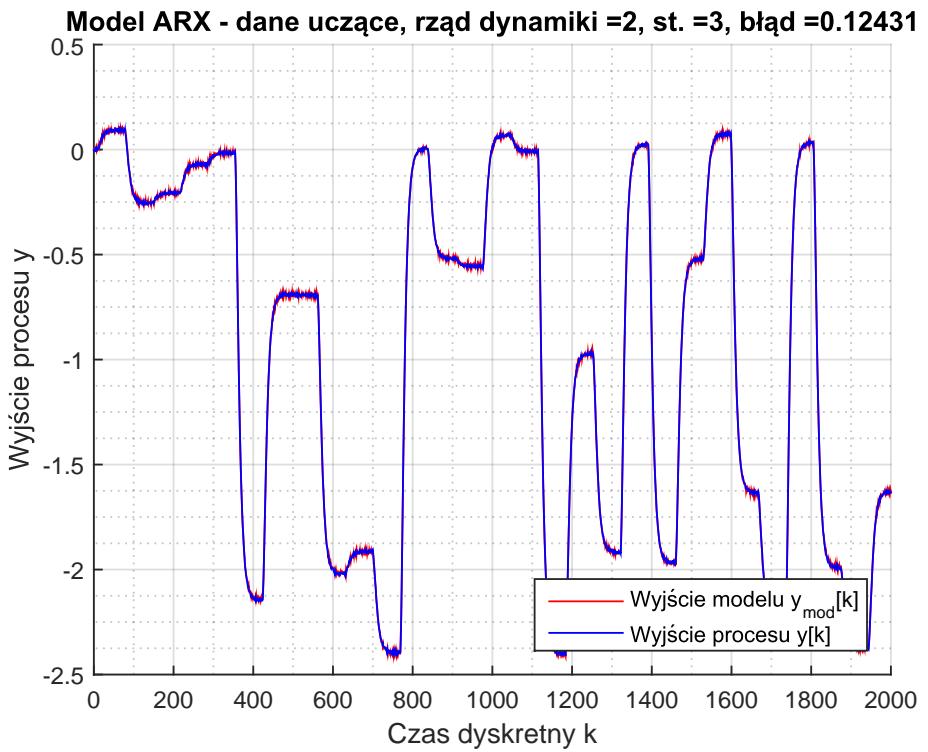
Rysunek 1.75. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =1, st =3, błąd =16.9294**

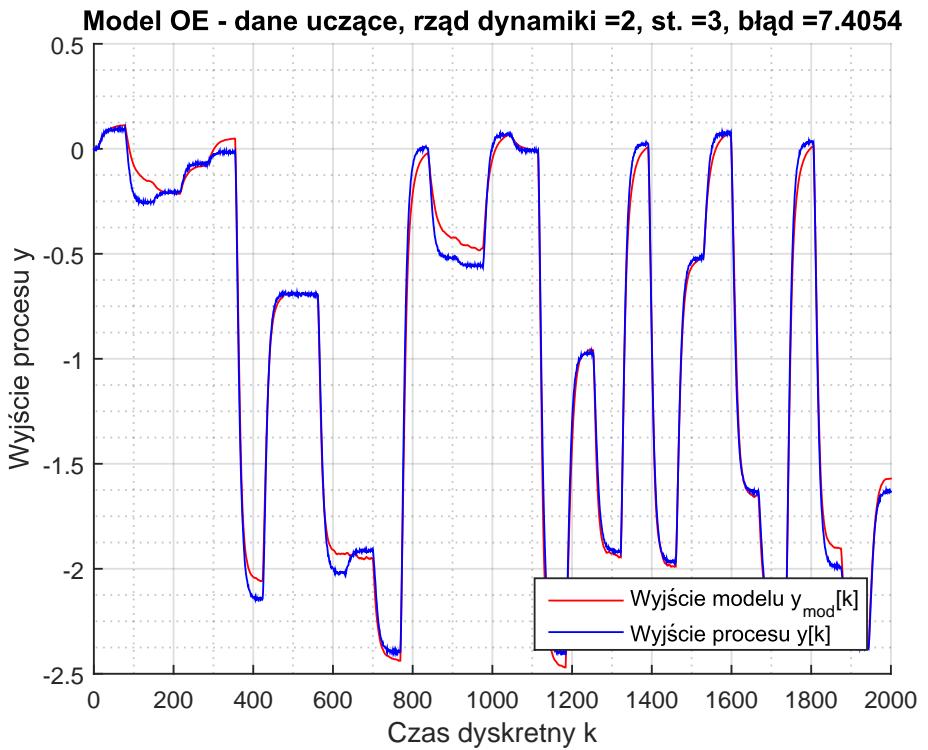


Rysunek 1.76. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika drugiego rzędu

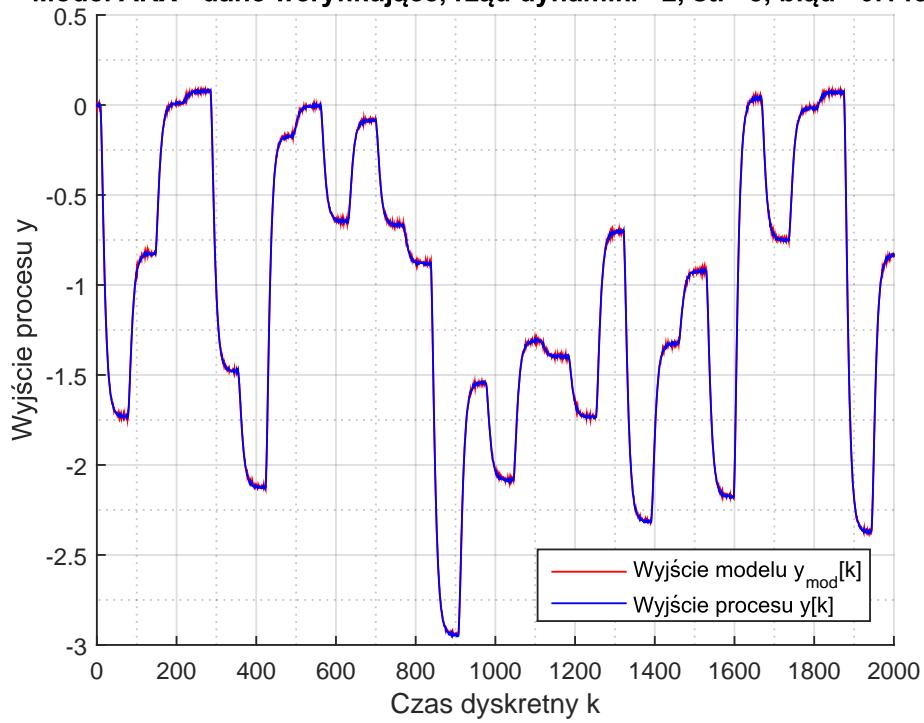


Rysunek 1.77. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



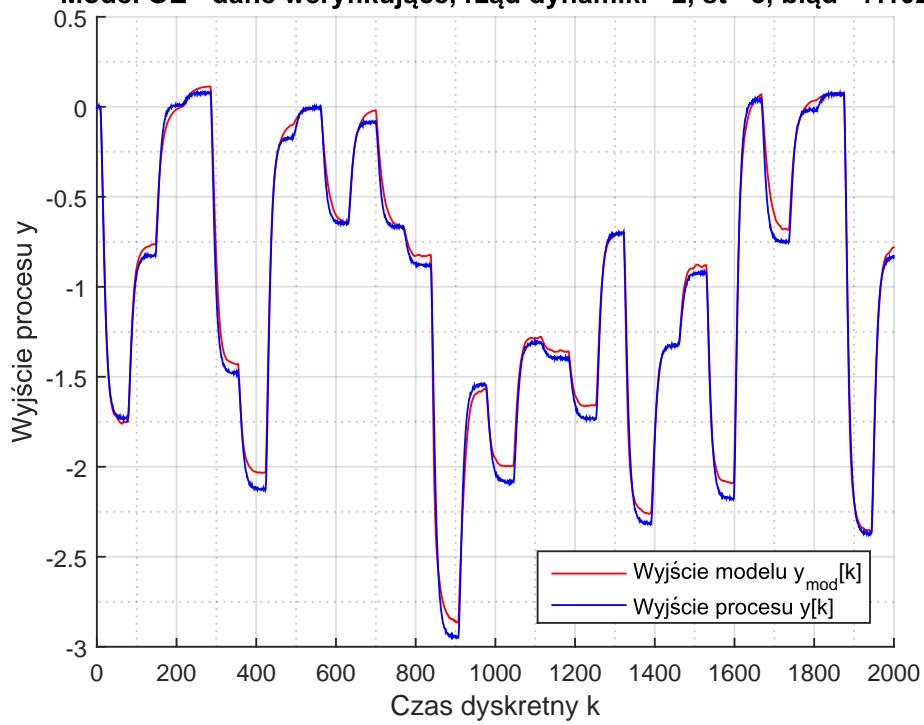
Rysunek 1.78. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =2, st. =3, błąd =0.14504**



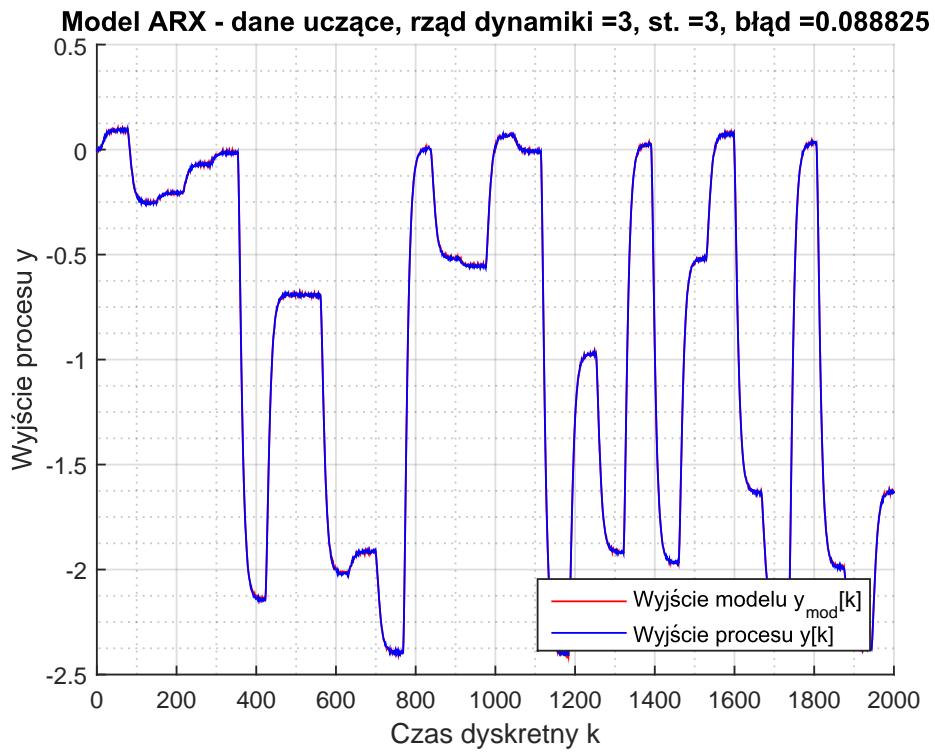
Rysunek 1.79. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rzząd dynamiki =2, st =3, błąd =7.102**

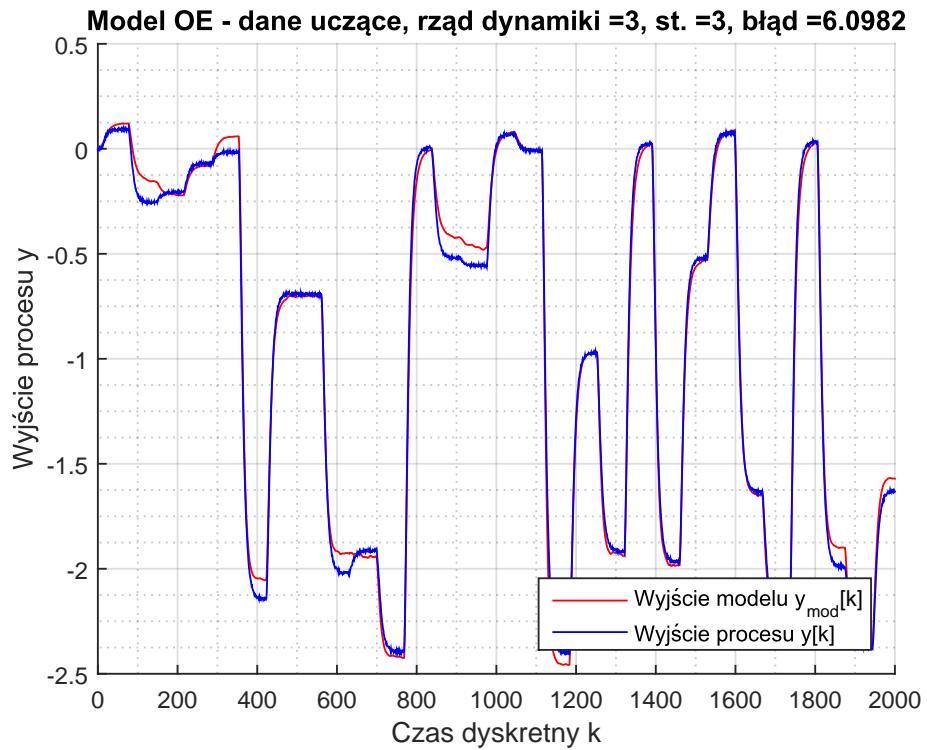


Rysunek 1.80. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika trzeciego rzędu

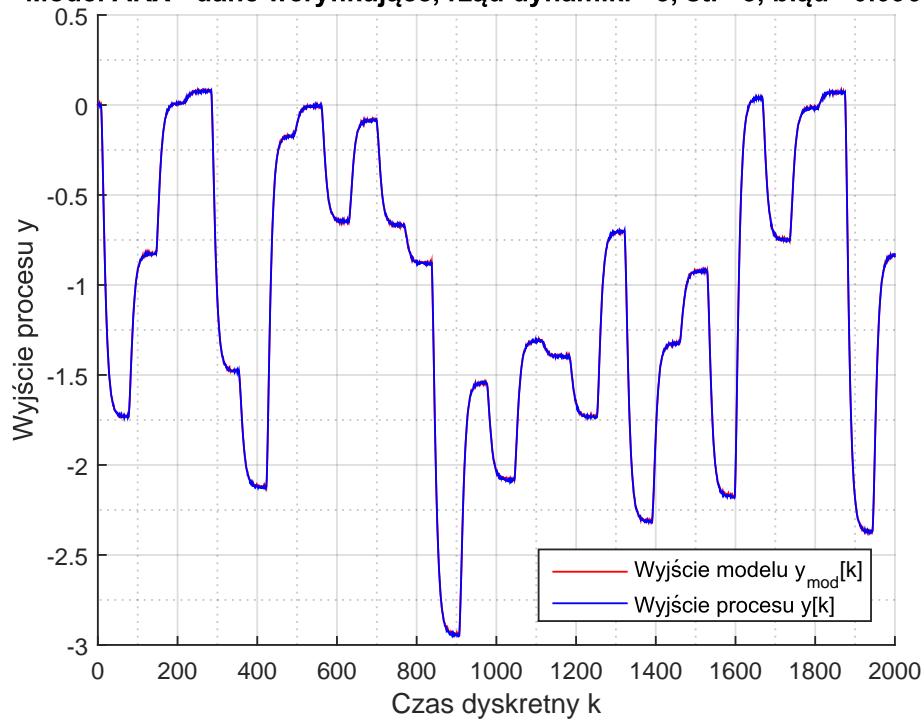


Rysunek 1.81. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



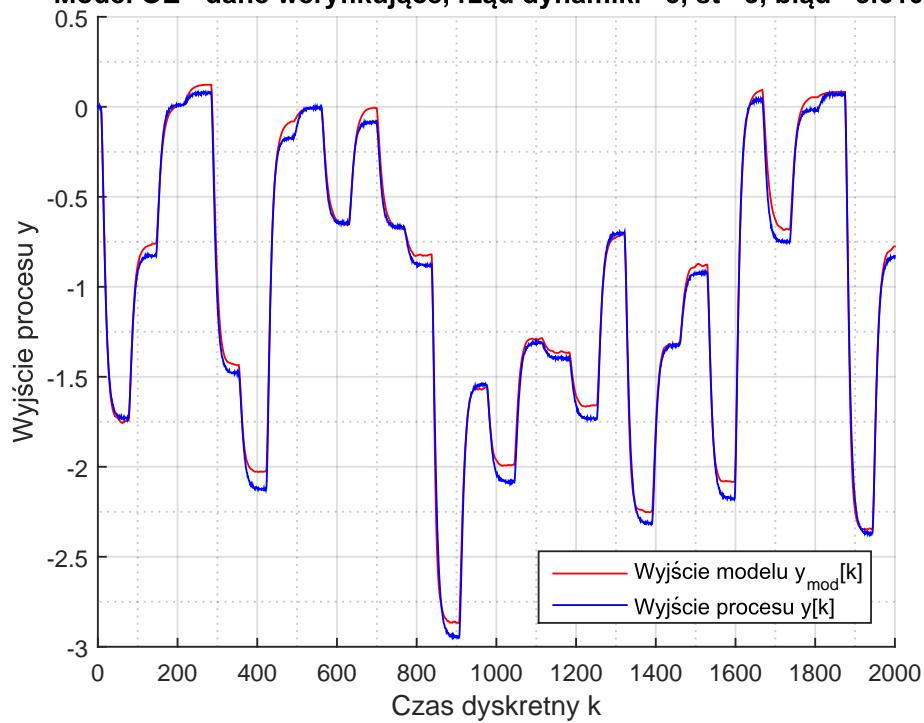
Rysunek 1.82. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =3, st. =3, błąd =0.096317**



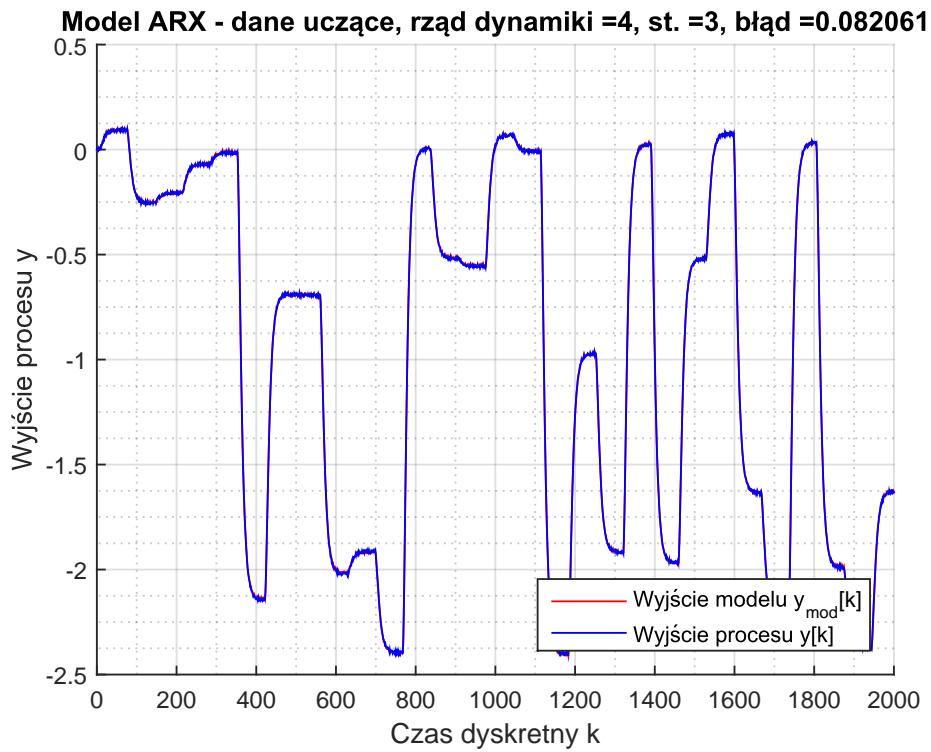
Rysunek 1.83. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =3, st =3, błąd =5.6104**

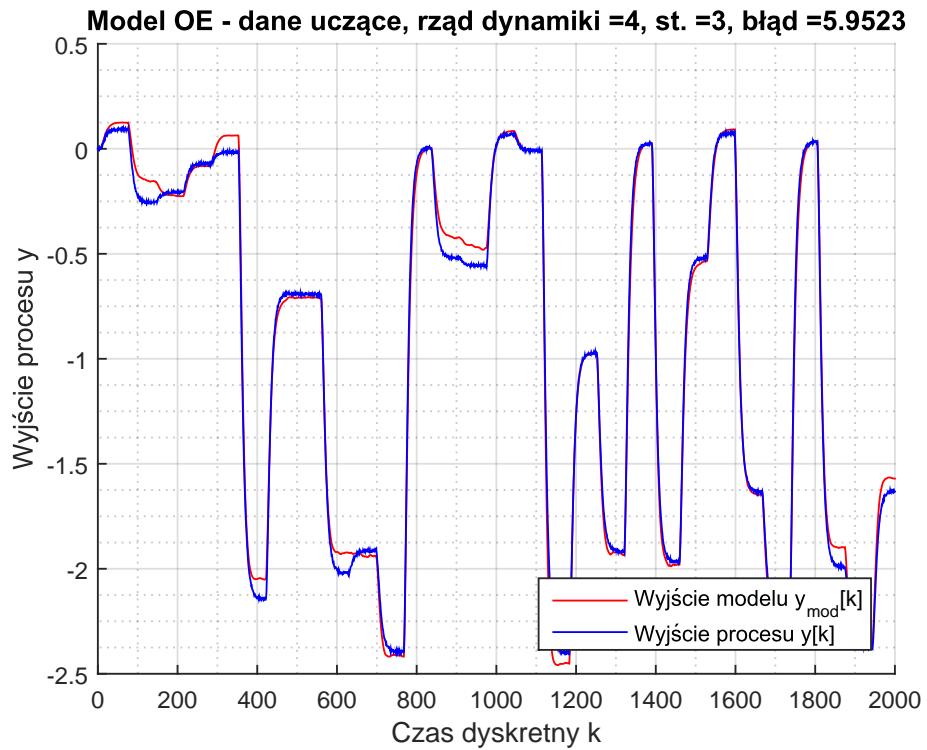


Rysunek 1.84. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika czwartego rzędu

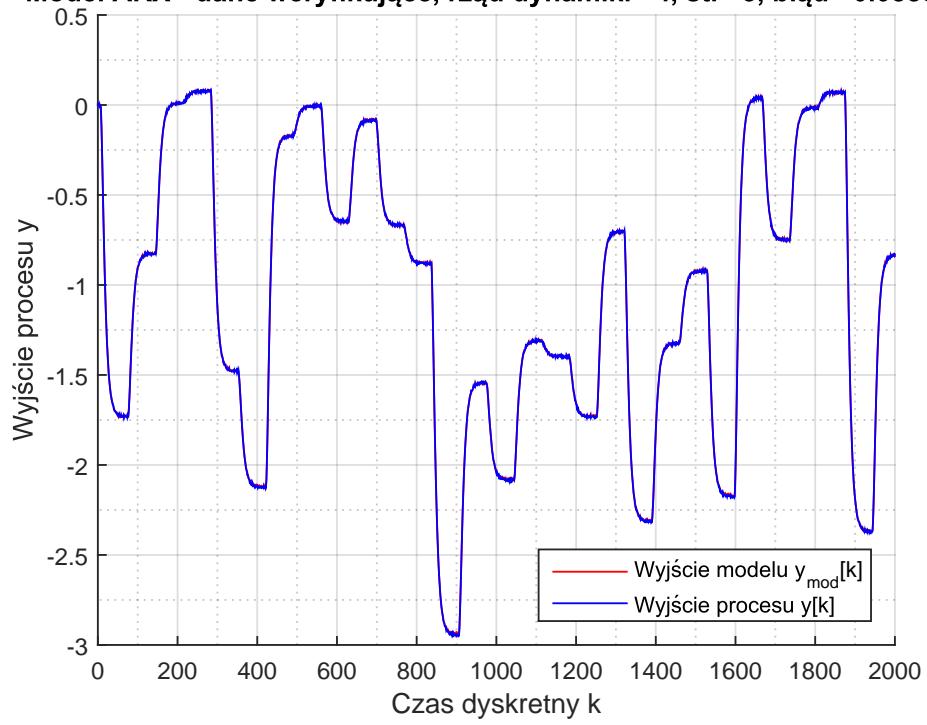


Rysunek 1.85. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



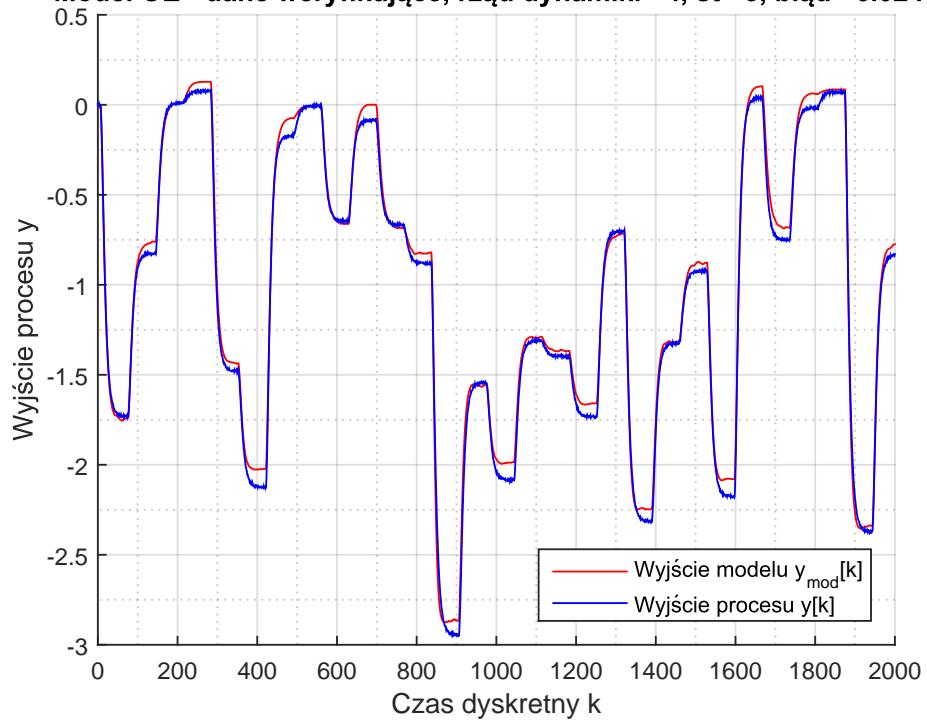
Rysunek 1.86. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =4, st. =3, błąd =0.088811**



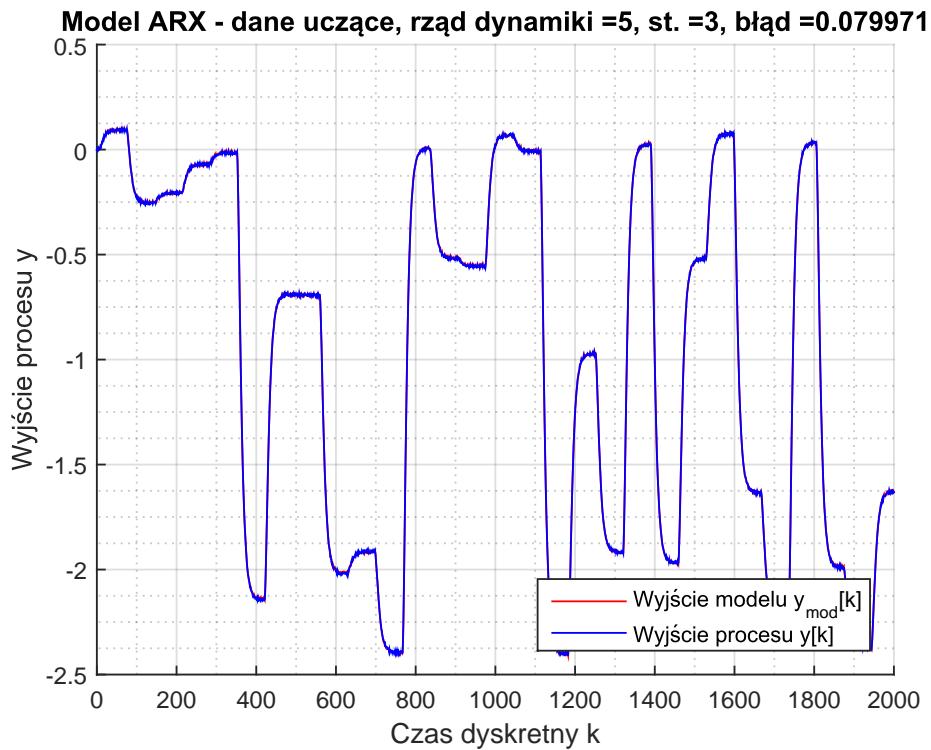
Rysunek 1.87. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =4, st =3, błąd =6.0241**

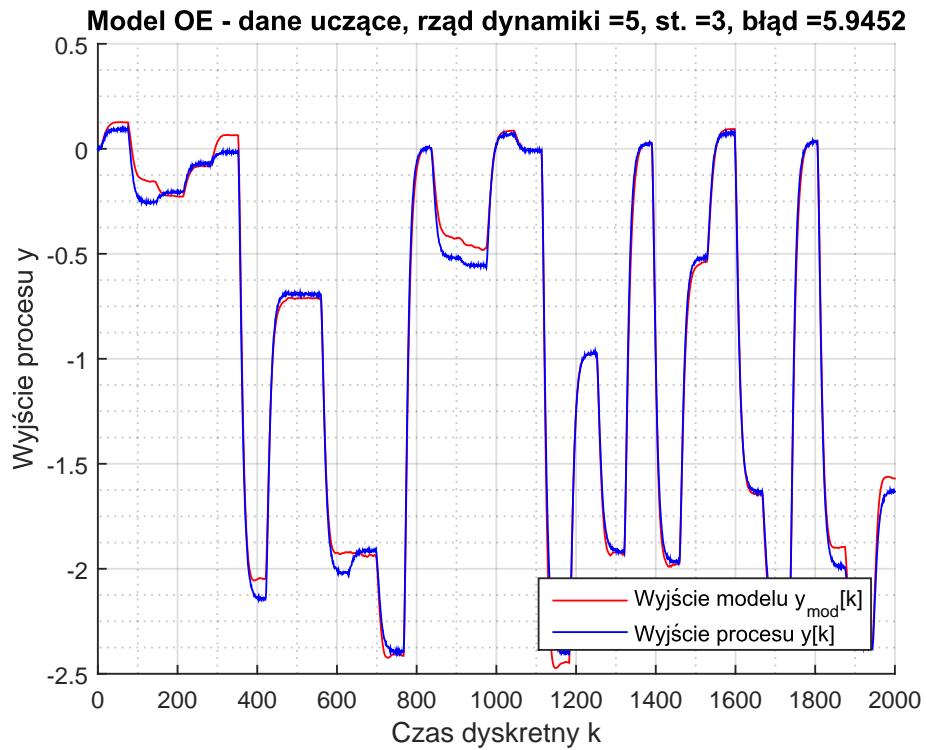


Rysunek 1.88. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika piątego rzędu

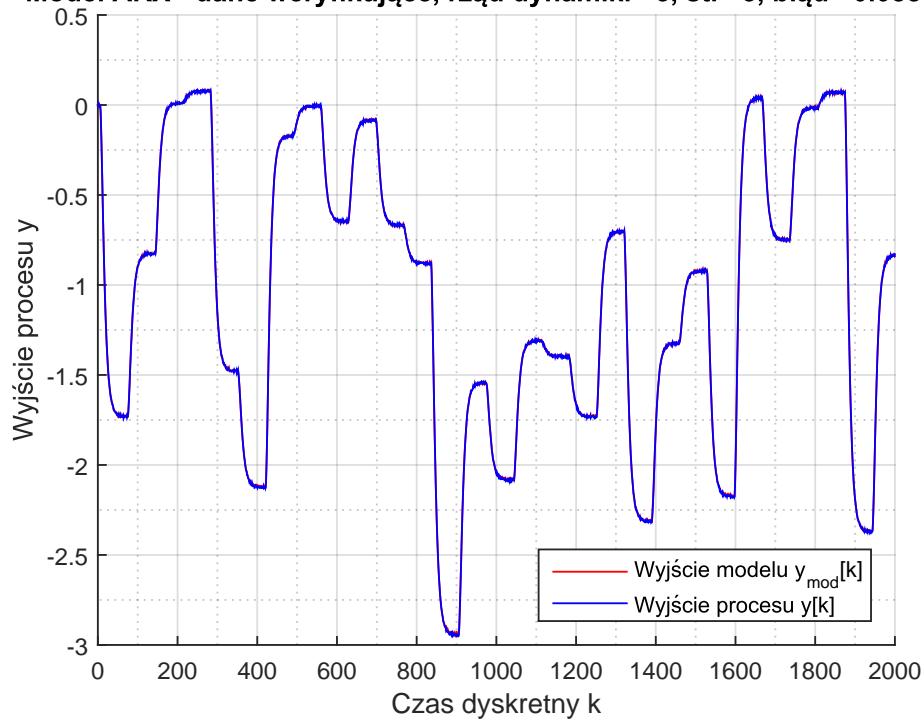


Rysunek 1.89. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



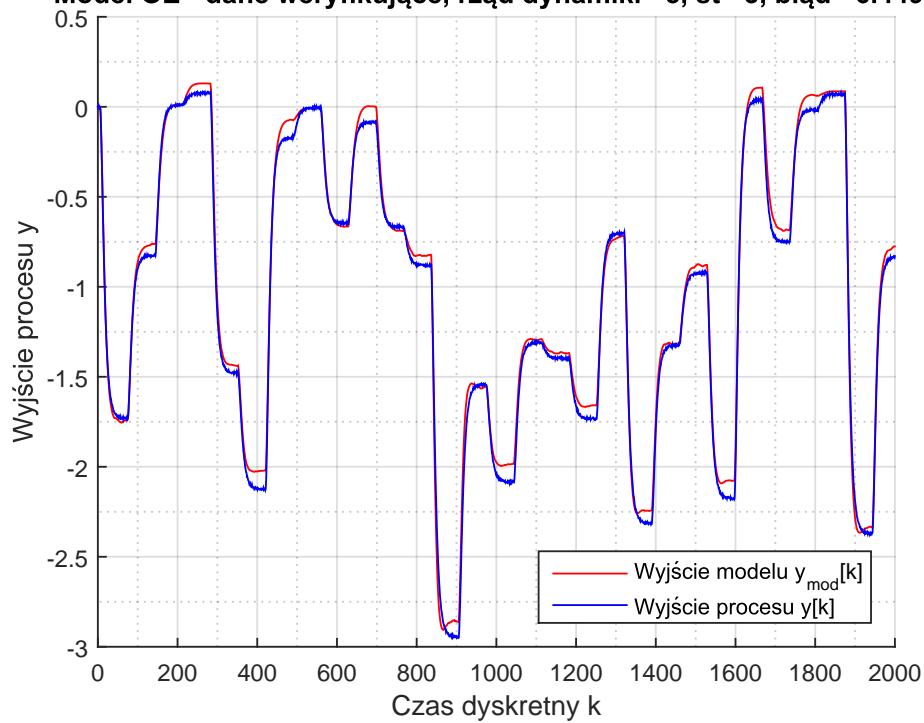
Rysunek 1.90. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =5, st. =3, błąd =0.088762**



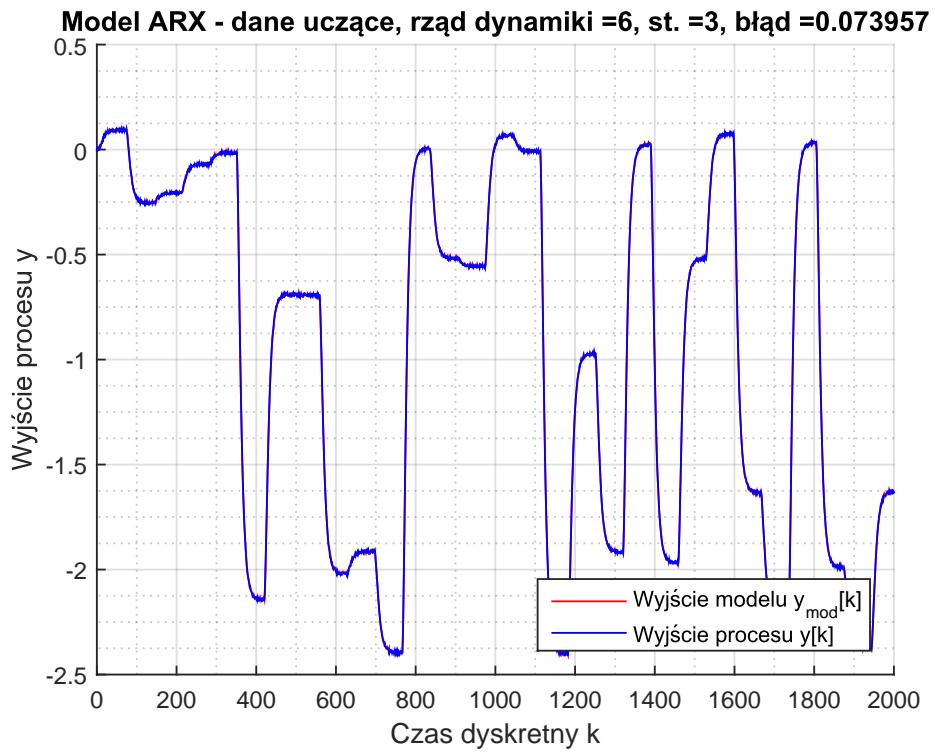
Rysunek 1.91. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =5, st =3, błąd =6.4495**

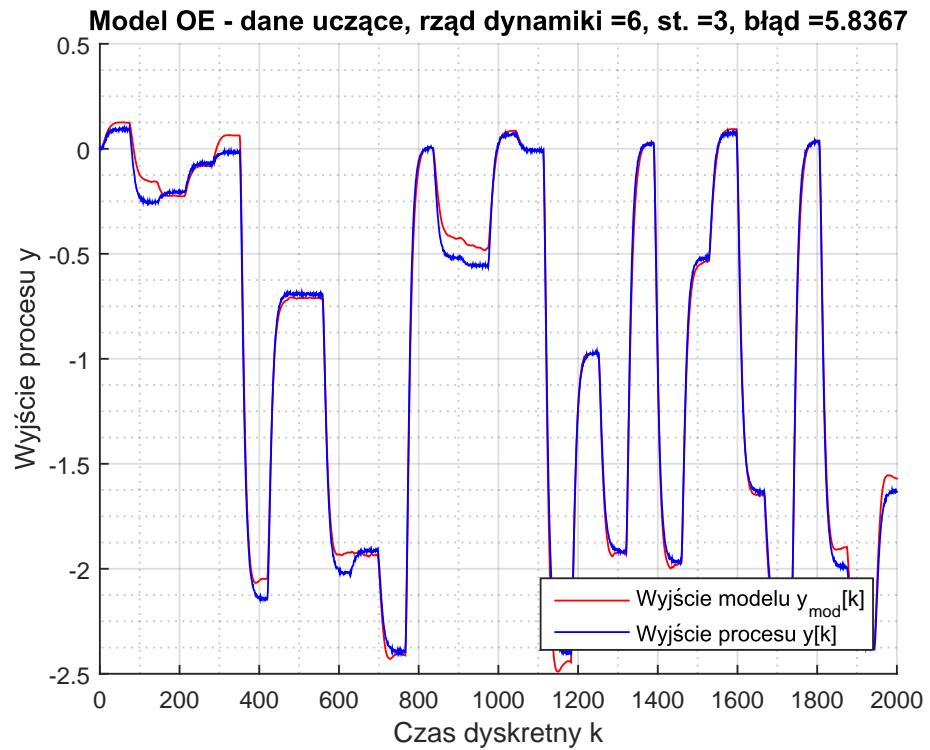


Rysunek 1.92. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika szóstego rzędu

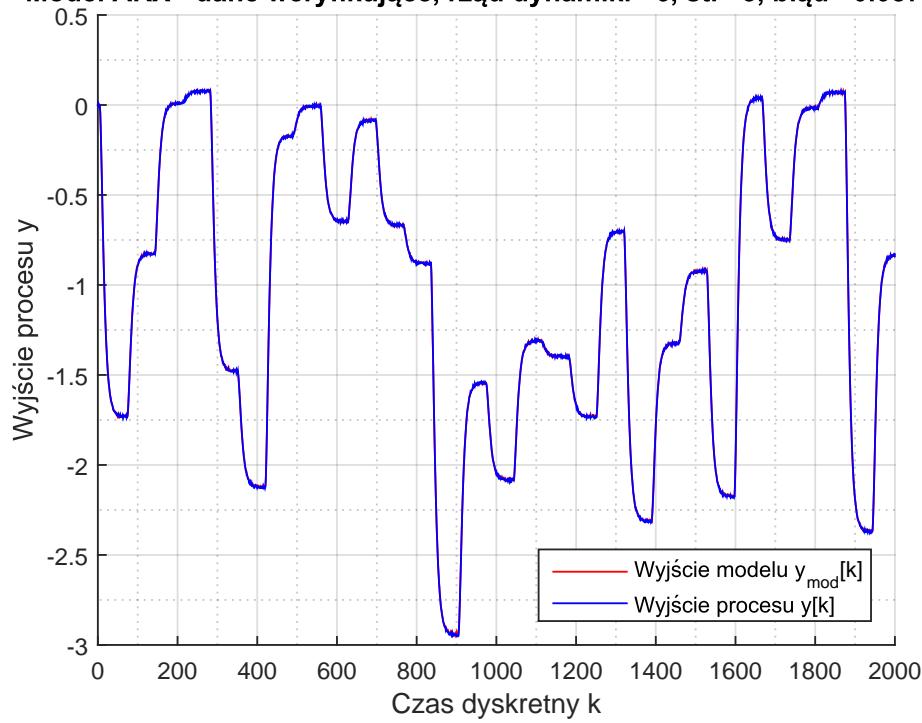


Rysunek 1.93. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



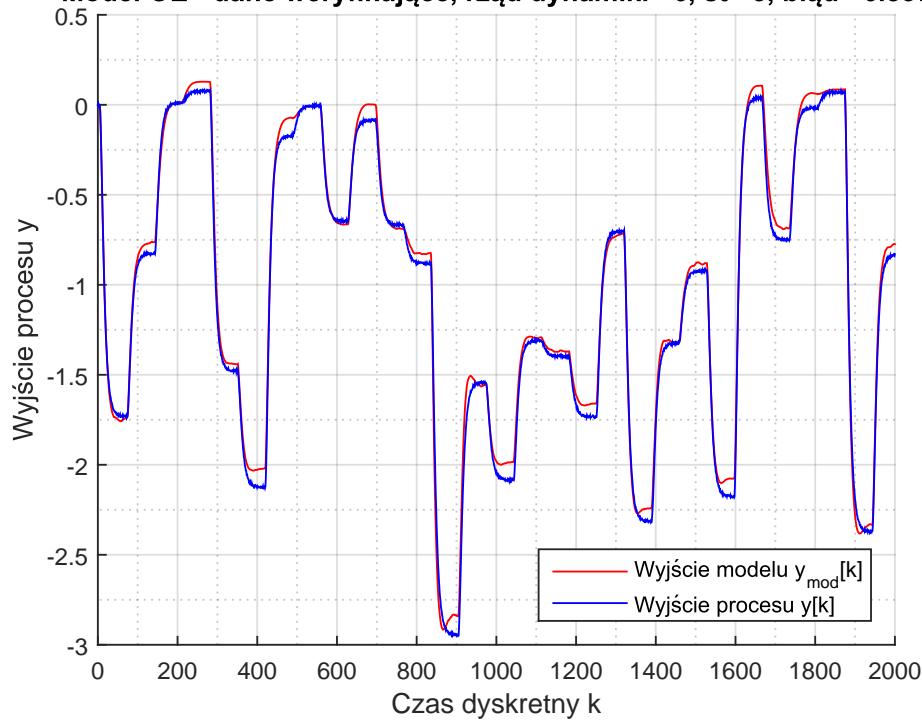
Rysunek 1.94. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =6, st. =3, błąd =0.087063**



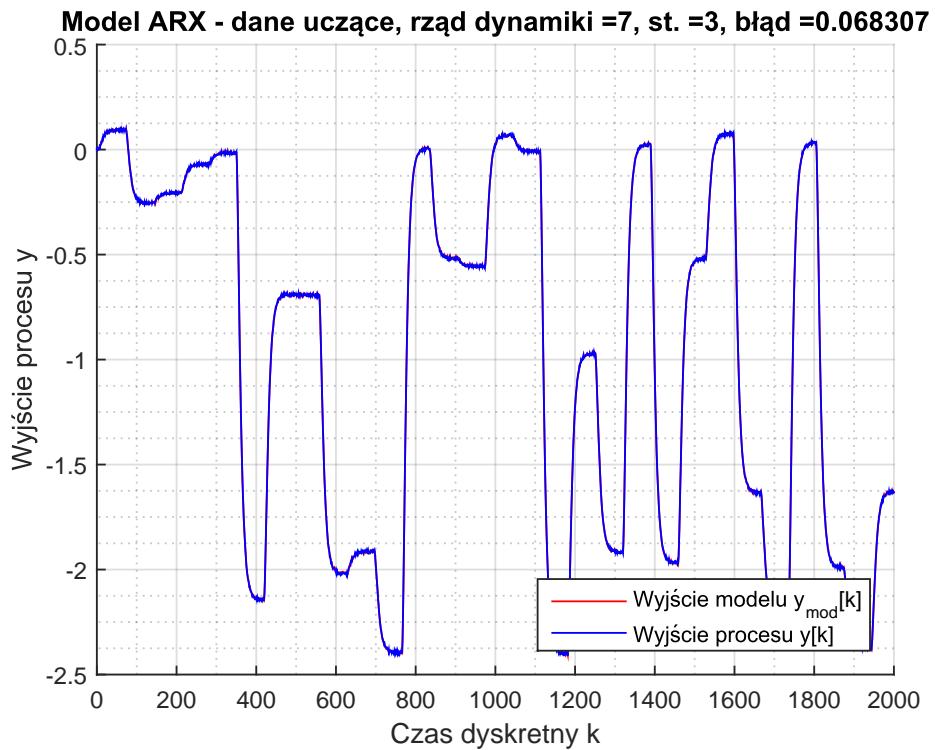
Rysunek 1.95. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =6, st =3, błąd =6.837**

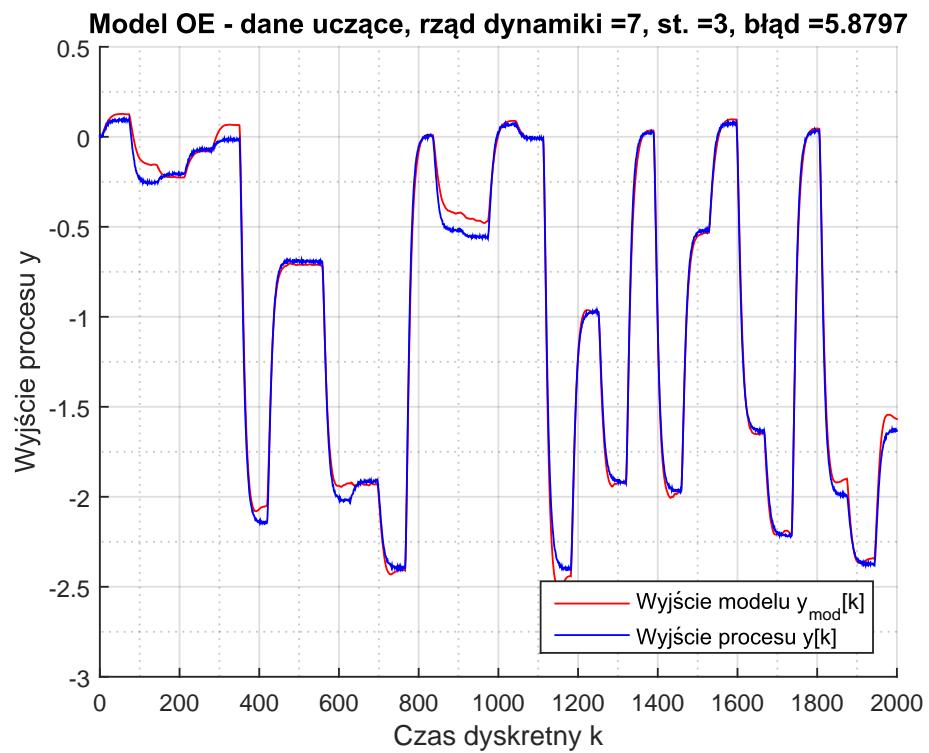


Rysunek 1.96. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

## Dynamika siódmego rzędu

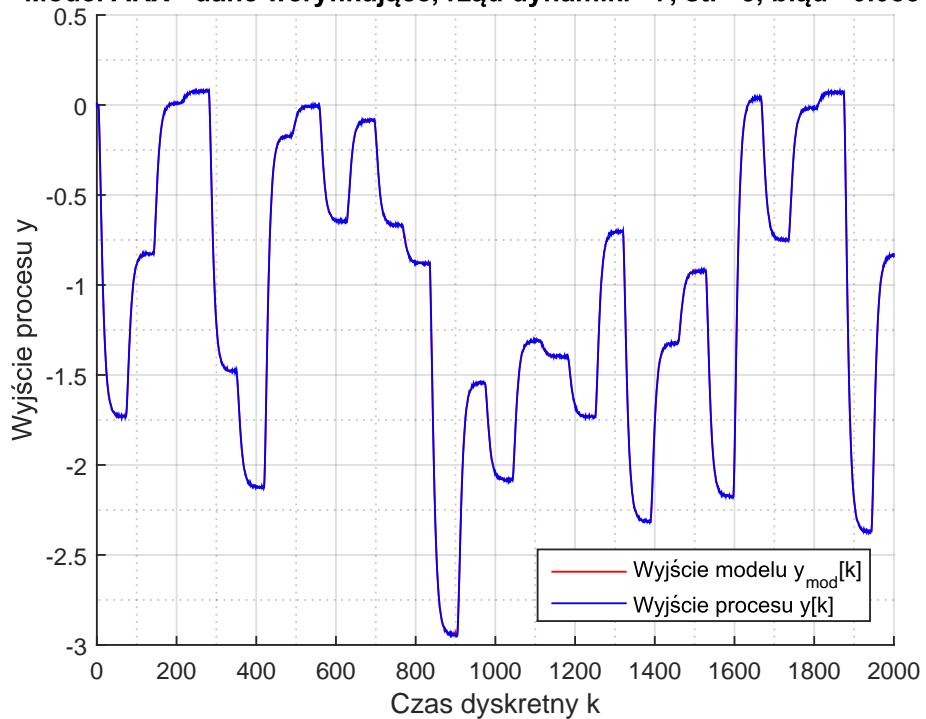


Rysunek 1.97. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



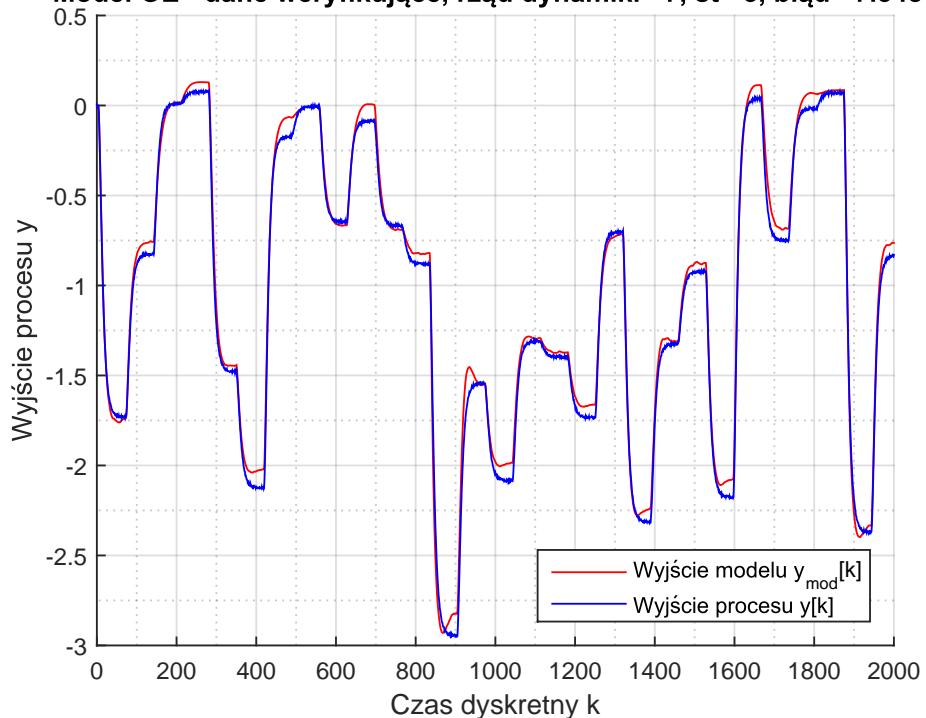
Rysunek 1.98. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, rząd dynamiki =7, st. =3, błąd =0.083176**



Rysunek 1.99. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, rząd dynamiki =7, st =3, błąd =7.5487**



Rysunek 1.100. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

Modele trzeciego rzędu dobrze radzą sobie z nieliniowym procesem. Błędy modelu ARX są minimalne a błędy modelu z rekurencją osiągają akceptowalny poziom.

### 1.2.6. Modele wyższych stopni

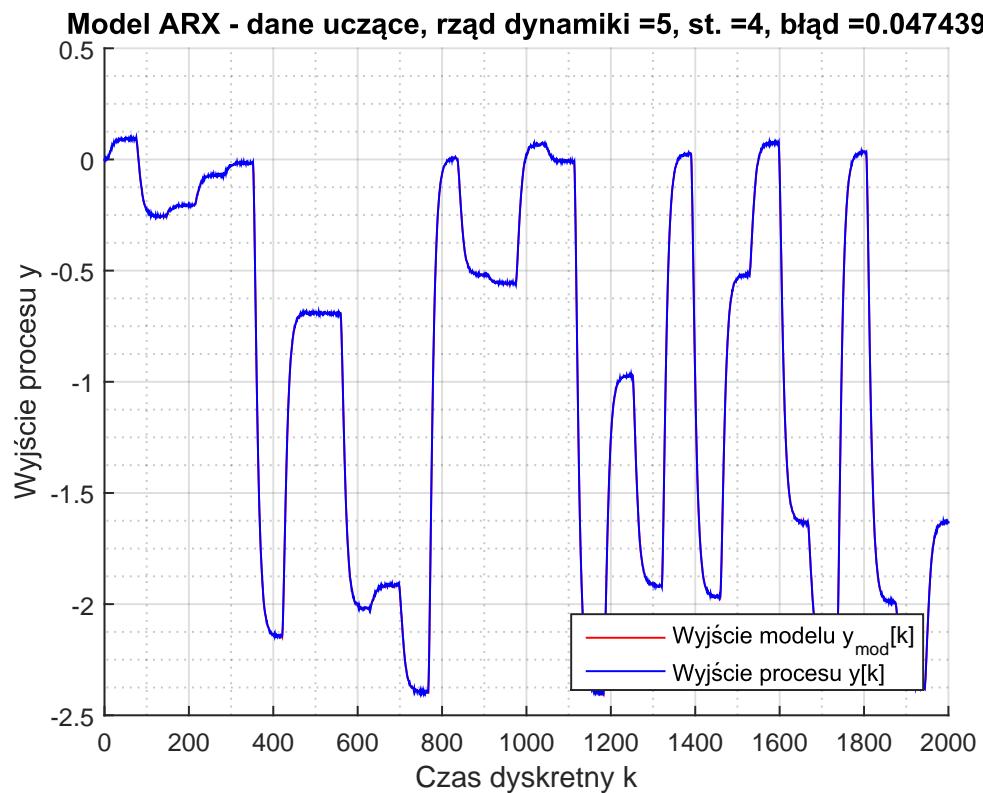
W ramach projektu przebadałem modele wielomianowe do siódmego stopnia. Błędy tych modeli znajdują się w tabeli poniżej.

Tabela 1.5. Błędy modeli wielomianowych wyższych rzędów

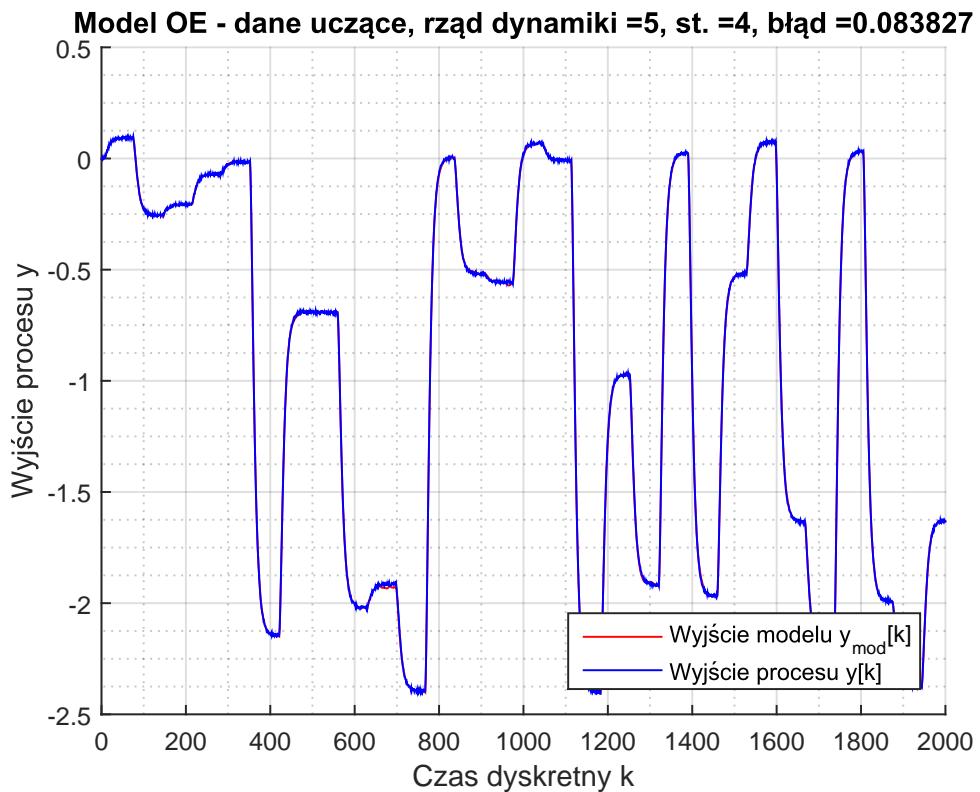
Rząd modelu	Stopień wielomianu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
1	1	2,046683	3333,5138	1,740251	3917,316
2	1	0,235764	3351,9007	0,238069	3597,633
3	1	0,212108	3327,5209	0,203074	3573,873
4	1	0,208349	3327,2780	0,198302	3521,722
5	1	0,196541	3338,1071	0,188608	3489,212
6	1	0,192738	3350,2155	0,183241	3500,315
7	1	0,192429	3351,4844	0,184338	3528,152
1	2	0,739256	95,272298	0,856981	143,8209
2	2	0,168894	63,646040	0,201945	105,8382
3	2	0,137727	61,419863	0,162430	98,17335
4	2	0,126977	61,709695	0,142167	95,45892
5	2	0,126977	60,580812	0,119786	94,30556
6	2	0,094504	58,016983	0,102434	94,13060
7	2	0,087338	54,553169	0,094258	95,13685
1	3	0,560965	26,557458	0,476535	16,92936
2	3	0,124306	7,4053656	0,145040	7,101954
3	3	0,088825	6,0982216	0,096317	5,610379
4	3	0,082060	5,9523344	0,088810	6,024141
5	3	0,079970	5,9452094	0,088762	6,449547
6	3	0,073956	5,8366981	0,087062	6,837013
7	3	0,068307	5,8796758	0,083175	7,548662
1	4	0,516152	16,181090	0,463793	17,77567
2	4	0,113170	1,5950891	0,132918	3,520479
3	4	0,070983	0,3884387	0,079609	0,897126
4	4	0,054870	0,1347170	0,063510	0,265471
5	4	0,047439	0,0838274	0,053038	0,121022
6	4	0,044340	0,0722532	0,049171	0,128396
7	4	0,041803	0,0663301	0,047578	0,107348
1	5	0,515765	16,509501	0,504384	NaN
2	5	0,110316	1,5825358	0,220897	8,294780
3	5	0,069790	0,4183520	0,137790	3,929592
4	5	0,054334	0,1472888	0,085280	1,315189
5	5	0,047204	0,0875447	0,061951	0,442053
6	5	0,044105	0,0728900	0,052668	0,164464
7	5	0,041573	0,0653133	0,049482	0,137977
1	6	0,512380	16,585847	0,802075	30,13800
2	6	0,109809	1,5548298	0,275403	10,24671
3	6	0,069306	0,4301349	0,149532	4,201639
4	6	0,054169	0,1511888	0,103317	1,791728
5	6	0,047103	0,0886086	0,075372	0,813954
6	6	0,043868	0,0743893	0,064577	0,458758
7	6	0,041327	0,0652988	0,056781	NaN
1	7	0,511842	16,900691	0,802075	48,72527
2	7	0,107107	1,3500132	0,275403	12,81880
3	7	0,068103	0,4251991	0,149532	20,67174
4	7	0,053561	0,1527106	0,103317	2,522799
5	7	0,046666	0,0884724	0,075372	5,458263
6	7	0,043484	0,0730233	0,064577	2,037511
7	7	0,040960	0,0643696	0,056781	2,961261

### Finalny model wielomianowy

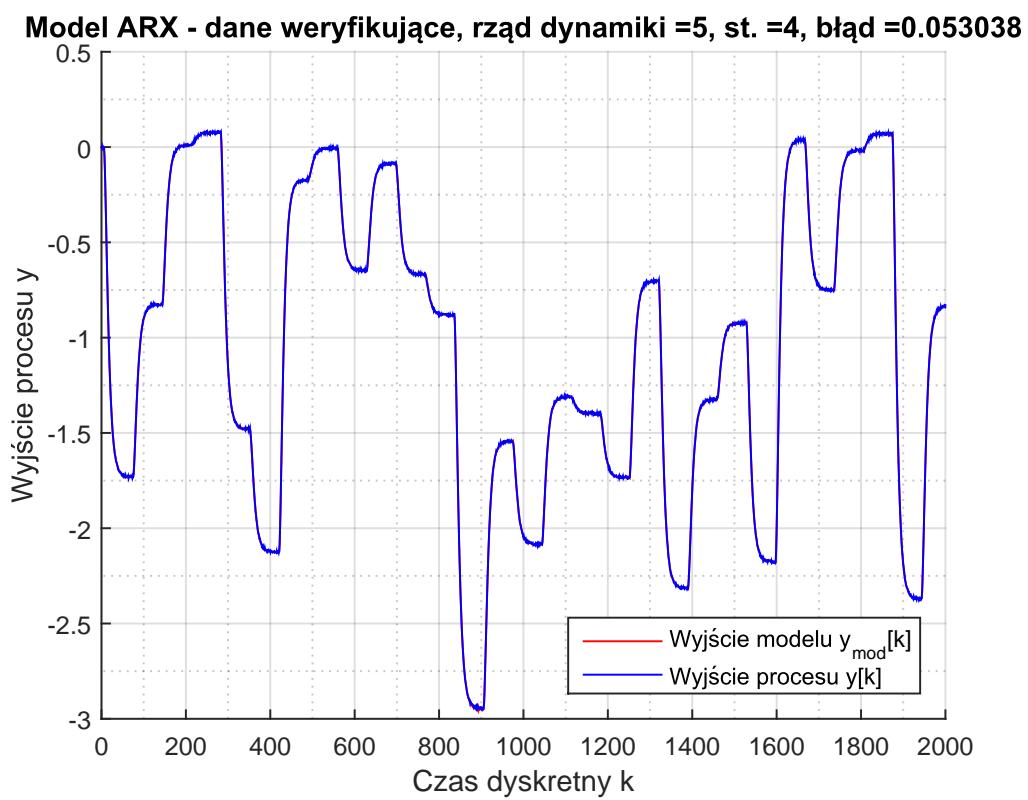
Najmniejszy błąd na zbiorze weryfikacyjnym uzyskałem dla modelu o rzędzie 7 i stopniu wielomianu 4. Liczba współczynników tego modelu wynosi 56. W mojej opinii jest to duża liczba i dlatego lepiej jako finalny wybrać model o rzędzie piątym i tym samym stopniu wielomianu. Różnica w błędzie między modelami jest niewielka ale za to liczba współczynników modelu spadła do 40.



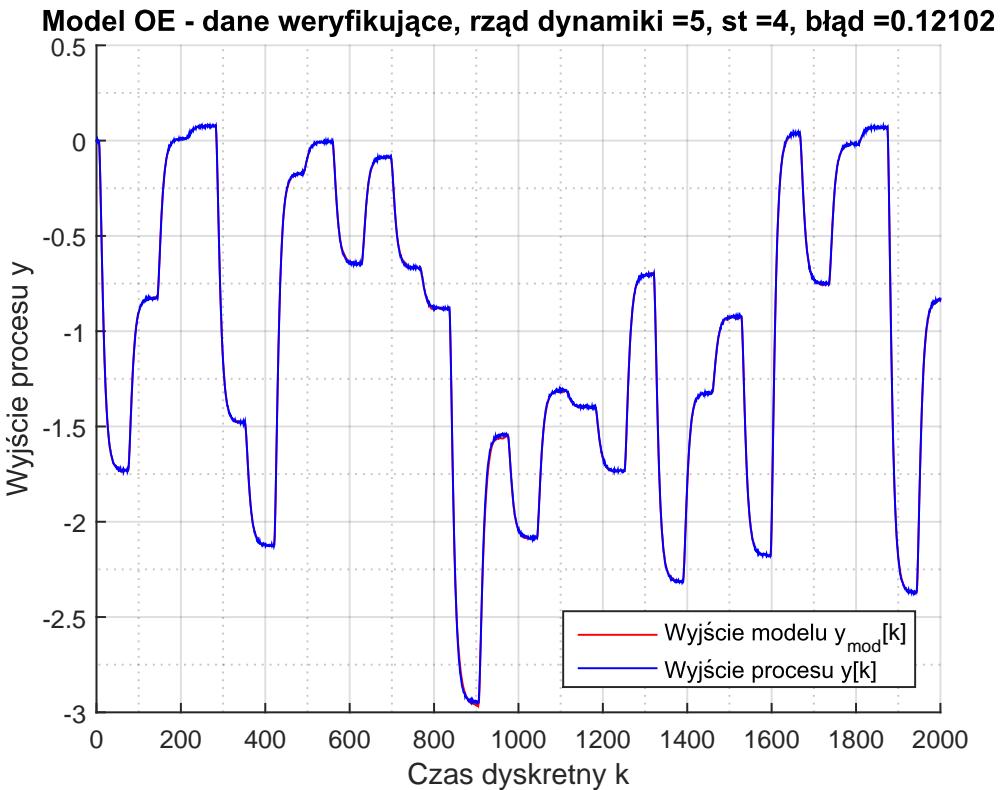
Rysunek 1.101. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących



Rysunek 1.102. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących



Rysunek 1.103. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących



Rysunek 1.104. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

### 1.2.7. Modele o mieszanej strukturze

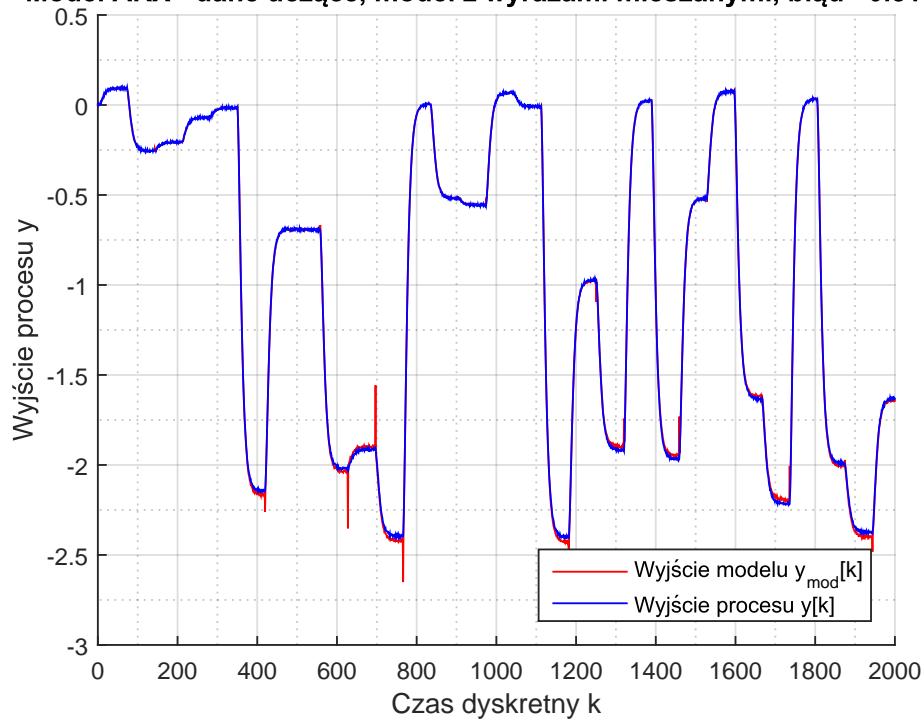
Przed zatwierdzeniem modelu z poprzedniego zadania, warto zbadać modele o mieszanej strukturze. Takie modele zawierają wyrazy typu  $y[k-1]u[k-1]$ . Z racji na mnogość takich modeli zdecydowałem się na badanie modelów typu wielomian  $+ a_i y[k-1]u[k-1] + a_{i+1}y[k-2]u[k-2]$ . Uzyskane wyniki zamieściłem w tabeli.

Tabela 1.6. Błędy modeli z wyrazami mieszzanymi

Rząd modelu	$E_{ucz}^{ARX}$	$E_{ucz}^{OE}$	$E_{wer}^{ARX}$	$E_{wer}^{OE}$
2	0,159679	34,3050	0,200811	84,6176
3	2308,899	NaN	96535,51	NaN
4	47,59800	NaN	22,55147	NaN
5	0,643262	51,8554	0,387773	30,4420
6	13,01574	NaN	6,939188	NaN
7	0,810860	14,4081	0,835070	9,96780

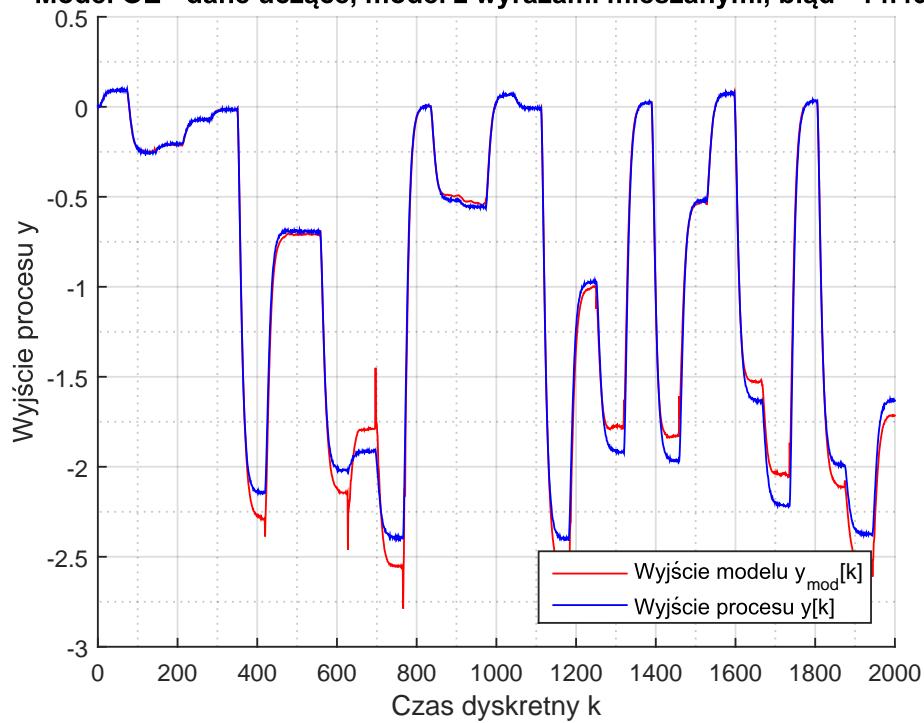
Jak widać na powyższym zestawieniu, zabieg ten nie poprawił jakości uzyskanego wcześniej rozwiązania. Co więcej, w połowie przypadków błąd interesującego nas modelu jest rozbieżny. Poniżej na wykresach zamieściłem odpowiedzi najlepszego modelu z mieszanymi wyrazami.

**Model ARX - dane uczące, model z wyrazami mieszonymi, błąd =0.81086**



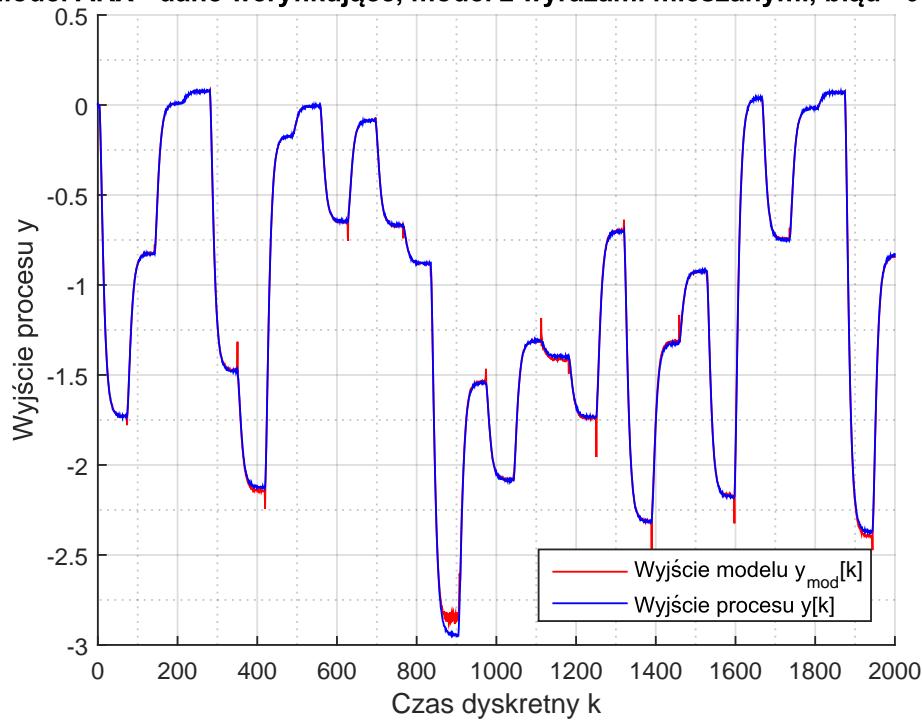
Rysunek 1.105. Model ARX (bez rekurencji) dla danych uczących

**Model OE - dane uczące, model z wyrazami mieszonymi, błąd =14.4082**



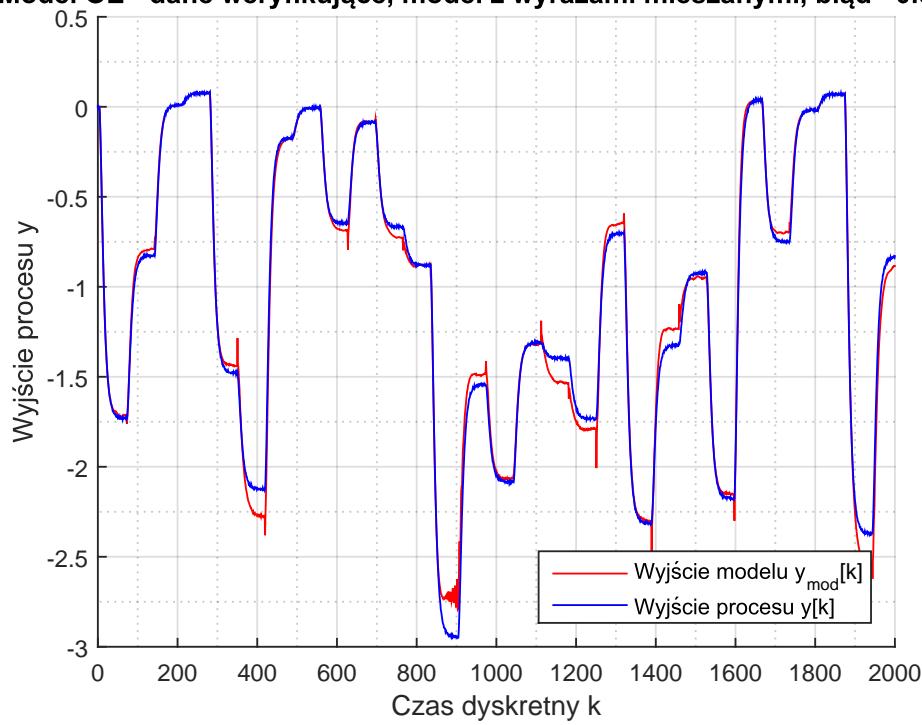
Rysunek 1.106. Model OE (z rekurencją) dla danych uczących

**Model ARX - dane weryfikujące, model z wyrazami mieszonymi, błąd =0.8350**



Rysunek 1.107. Model ARX (bez rekurencji) dla danych weryfikujących

**Model OE - dane weryfikujące, model z wyrazami mieszonymi, błąd =0.81086**



Rysunek 1.108. Model OE (z rekurencją) dla danych weryfikujących

### 1.2.8. Podsumowanie

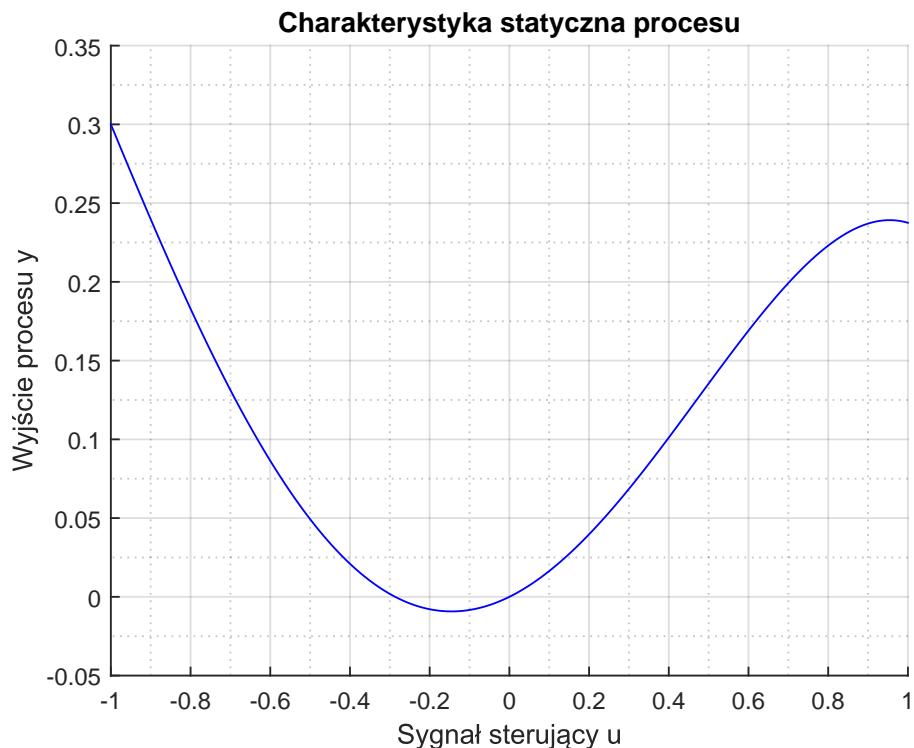
Ostatecznie, biorąc pod uwagę błędy modeli uzyskane na zbiorze danych weryfikujących i liczbę współczynników modelu, pozostaję przy wcześniej opisany modelu o rzędzie piątym i czwartym stopniu wielomianu. Jest on opisany równaniem:

$$y[k] = \begin{bmatrix} -0,00437 \\ 0,009436 \\ 0,009991 \\ -0,01366 \\ -0,02324 \\ -0,10975 \\ 0,024783 \\ 0,047855 \\ -0,03800 \\ -0,12847 \\ 0,045590 \\ 0,047818 \\ -0,03358 \\ -0,08300 \\ 0,042046 \\ 0,019747 \\ -0,01455 \\ -0,05451 \\ 0,019771 \\ 0,020342 \\ 0,500728 \\ 0,074039 \\ 0,061178 \\ 0,013292 \\ 0,343576 \\ -0,22313 \\ -0,17283 \\ -0,03652 \\ 0,305840 \\ 0,204970 \\ 0,151445 \\ 0,032141 \\ -0,01918 \\ -0,08662 \\ -0,04533 \\ -0,00832 \\ -0,22209 \\ 0,029860 \\ 0,005184 \\ -0,00063 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[k-1] \\ u[k-2] \\ u[k-3] \\ u[k-4] \\ u[k-5] \\ (u[k-1])^2 \\ (u[k-2])^2 \\ (u[k-3])^2 \\ (u[k-4])^2 \\ (u[k-5])^2 \\ (u[k-1])^3 \\ (u[k-2])^3 \\ (u[k-3])^3 \\ (u[k-4])^3 \\ (u[k-5])^3 \\ (u[k-1])^4 \\ (u[k-2])^4 \\ (u[k-3])^4 \\ (u[k-4])^4 \\ (u[k-5])^4 \\ y[k-1] \\ y[k-2] \\ y[k-3] \\ y[k-4] \\ y[k-5] \\ (y[k-1])^2 \\ (y[k-2])^2 \\ (y[k-3])^2 \\ (y[k-4])^2 \\ (y[k-5])^2 \\ (y[k-1])^3 \\ (y[k-2])^3 \\ (y[k-3])^3 \\ (y[k-4])^3 \\ (y[k-5])^3 \\ (y[k-1])^4 \\ (y[k-2])^4 \\ (y[k-3])^4 \\ (y[k-4])^4 \\ (y[k-5])^4 \end{bmatrix}^T$$

## 2. Zadanie dodatkowe

### 2.1. Charakterystyka statyczna

Ostatnim zadaniem w ramach projektu było wyznaczenie statycznej charakterystyki wyznaczonego modelu. Wyznaczenie tej charakterystyki jest zagadnieniem nietrywialnym. Aby wyznaczyć taką charakterystykę należy założyć że wejście i wyjście procesu są stałe. Następnie należy rozwiązać szereg równań nieliniowych dla interesującego zakresu sygnału sterującego. Do rozwiązania tego problemu użyłem polecenia matlaba `fsolve`. Uzyskana charakterystyka znajduje się na rysunku poniżej.



Rysunek 2.1. Charakterystyka statyczna modelu regresyjnego

Korzystając ze wcześniej napisanych skryptów do obliczania statycznych modeli regresyjnych udało mi się otrzymać następujący wzór tej charakterystyki w zakresie sterowań od  $[-1, 1]$ :

$$y(u) = -1,358 \cdot 10^{-6}u^4 + 0,1252u^3 + 0,40309u^2 - 0,15647u - 0,134302$$