MODI - sprawozdanie z pracy domowej

Jakub Sikora, 283418

10 marca 2018

Politechnika Warszawska
Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych

Spis treści

1 Wstęp

Tematem pracy domowej były charakterystyki statyczne nieliniowe modeli o 1 wejściu i jednym wyjściu (model SISO - Single Input Single Output) a także o 2 wejściach i 1 wyjściu (model MISO - Multiple Input Single Output). Dodatkowo, celem zadania było również zlinearyzowanie danych charakterystyk w dowolnych punktach pracy i porównanie wyników eksperymentu.

2 Charakterystyki nieliniowe

2.1 Modele nieliniowe

Model statyczny procesu o jednym wejściu u oraz jednym wyjściu y dany jest wzorem:

$$y(u) = cos^2(0,25u) - 0,01u^3 - 0,02 \tag{1}$$

Silną nieliniowość wnoszą tutaj funkcje $(cos(0.25u))^2$ oraz $0.01u^3$. Model ten będę badać w zakresie $-5 \leqslant u \leqslant 5$.

Model statyczny procesu o dwóch wejściach u_1 i u_2 oraz jednym wyjściu dany jest wzorem:

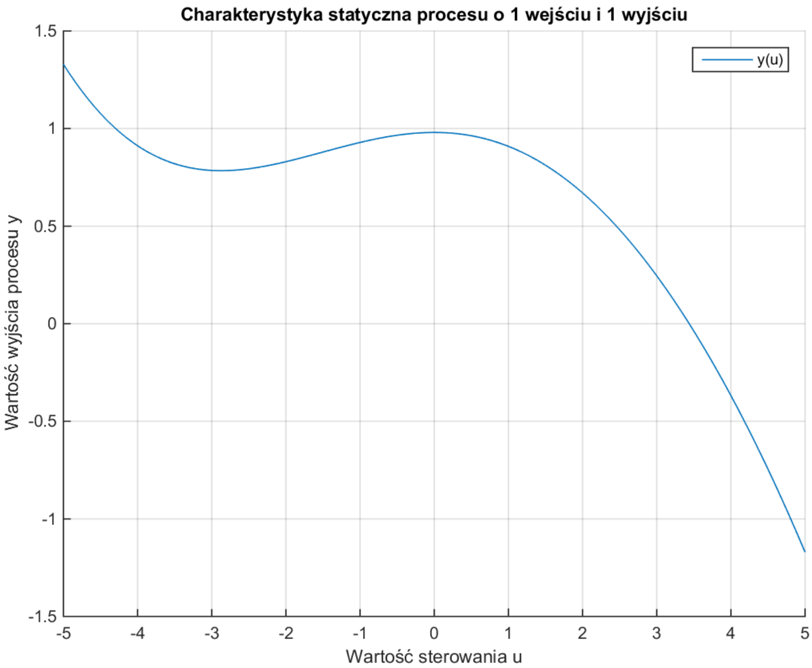
$$y(u_1, u_2) = -10u_1 + 5u_2^3 \tag{2}$$

Elementem wnoszącym nieliniowość jest wyrażenie $5u_2^3$. Ten model będę badać w zakresach $-1 \leqslant u_1 \leqslant 1$ oraz $-1 \leqslant u_2 \leqslant 1$.

2.2 Wykresy charakterystyk

Za pomocą środowiska `Matlab`, wykreśliłem charakterystyki obu modelu w odpowiednich zakresach. Kod generujący wykresy obu charakterystyk zawarty jest w skrypcie `nonlinear_figures.m`. Efekt pracy znajduje się na następnej stronie.

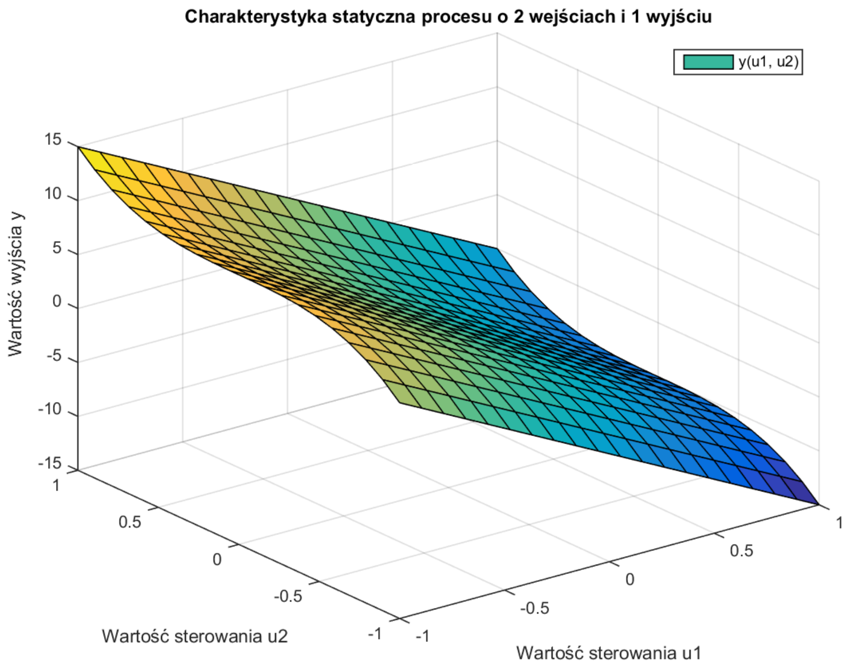
2.2.1 Model SISO



Rysunek 1: Charakterystyka modelu SISO

Niebieską linią zaznaczono charakterystykę modelu w zakresie $-5 \leqslant u \leqslant 5$. W danym przedziale funkcja ma dwa ekstrema w punktach $u = 0$ oraz $u \approx -2.8738$, które wpływają na nieliniowość funkcji. Dodatkowo, funkcja szybko maleje w przedziale $[2, 5]$ (moduł pochodnej jest większy niż w innych miejscach).

2.2.2 Model MISO



Rysunek 2: Charakterystyka modelu MISO

Na wykresie nakreślono charakterystykę modelu w zakresie $-1 \leqslant u_1, u_2 \leqslant 1$. Model przy zmianie sterowania u_1 zachowuje się liniowo. Wynika to z braku elementów nieliniowych w funkcji modelu zależnych od u_1. Przy zmianie u_2 odpowiedź ma już charakter nieliniowy związany z funkcją $5u_2^3$. W zadanych przedziałach funkcja osiąga największą wartość dla $(u_1, u_2) = (-1, 1)$ równą 15.

3 Linearyzacja charakterystyk

W celu umożliwienia dokładniejszej analizy procesu danego modelem nieliniowym, taki model poddaje się linearyzacji w punkcie pracy. Przybliżenie funkcji modelu, funkcją liniową pozwala na zastosowanie dobrze sprawdzonych metod analizy i projektowania. W przypadku słabo nieliniowych funkcji, metoda ta ma dużą dokładność. Niestety, metoda ta traci na dokładności gdy funkcja jest silnie nieliniowa. W takim przypadku najlepiej podzielić interesujący nas przedział pracy na kilka podprzedziałów i każdemu przypisać odpowiednią funkcję liniową. Na wykresie, charakterystyka liniowa jest po prostu styczną do wykresu charakterystyki nieliniowej.

3.1 Linearyzacja funkcji wielu zmiennych

W ogólności wzór na linearyzację w otoczeniu punktu pracy $\bar{u} = (\bar{u_1}, ..., \bar{u_n})$:

$$y(u_1, .., u_n) \approx y(\bar{u}) + \frac{\partial y(\bar{u})}{\partial u_1}(u_1 - \bar{u_1}) + ... + \frac{\partial y(\bar{u})}{\partial u_n}(u_n - \bar{u_n}) \tag{3}$$

W przypadku funkcji jednej zmiennej wzór sprowadza się do postaci:

$$y(u) \approx y(\bar{u}) + \frac{dy(\bar{u})}{du}(u - \bar{u}) \tag{4}$$

W przypadku modelu z dwoma wejściami i jednym wyjściem wzór przyjmuje formę:

$$y(u_1, u_2) \approx y(\bar{u_1}, \bar{u_2}) + \frac{\partial y(\bar{u_1}, \bar{u_2})}{\partial u_1}(u_1 - \bar{u_1}) + \frac{\partial y(\bar{u_1}, \bar{u_2})}{\partial u_2}(u_2 - \bar{u_2}) \tag{5}$$

3.2 Linearyzacja modelu SISO

W celu wyznaczenia modelu zlinearyzowanego należy policzyć pochodną funkcji $y(u)$.

$$\frac{dy(u)}{du} = ((cos(0,25u))^2 - 0,01u^3 - 0,02)'$$

Rozbijam pochodną sumy na sumę pochodnych:

$$\frac{dy(u)}{du} = (cos^2(0,25u))' - (0,01u^3)' - (0,02)'$$

Obliczam poszczególne pochodne ze wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$\frac{dy(u)}{du} = \frac{1}{2}cos(0,25u)(-sin(0,25u) - 0,03u^2$$

Wyrażenie z funkcjami trygonometrycznymi sprowadzam do uproszczonej postaci, korzystając ze wzoru na sinus podwojonego kąta:

$$\frac{dy(u)}{du} = -\frac{1}{4}sin(0,5u) - 0,03u^2$$

Ostateczna postać zlinearyzowanej funkcji modelu ma postać:

$$y_{lin}(u) \approx cos^2(0,25\bar{u}) - 0,01\bar{u}^3 - 0,02 + [-\frac{1}{4}sin(0,5\bar{u}) - 0,03\bar{u}^2](u - \bar{u}) \quad (6)$$

3.3 Linearyzacja modelu MISO

W celu wyznaczenia modelu zlinearyzowanego należy policzyć pochodne cząstkowe funkcji $y(u_1, u_2)$ czyli $\frac{\partial y(u_1,u_2)}{\partial u_1}$ i $\frac{\partial y(u_1,u_2)}{\partial u_2}$.

Obliczam pochodną cząstkową po ∂u_1:

$$\frac{\partial y(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}(-10u_1 + 5u_2^3)$$

$$\frac{\partial y(u_1, u_2)}{\partial u_1} = -10$$

Obliczam pochodną cząstkową po ∂u_2:

$$\frac{\partial y(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}(-10u_1 + 5u_2^3)$$

$$\frac{\partial y(u_1, u_2)}{\partial u_2} = 15u_2^2$$

Ostateczna postać zlinearyzowanej funkcji modelu:

$$y_{lin}(u) \approx -10\bar{u_1} + 5\bar{u_2}^3 - 10(u_1 - \bar{u_1}) + 15\bar{u_2}(u_2 - \bar{u_2}) \quad (7)$$

4 Charakterystyki zlinearyzowane a punkty pracy

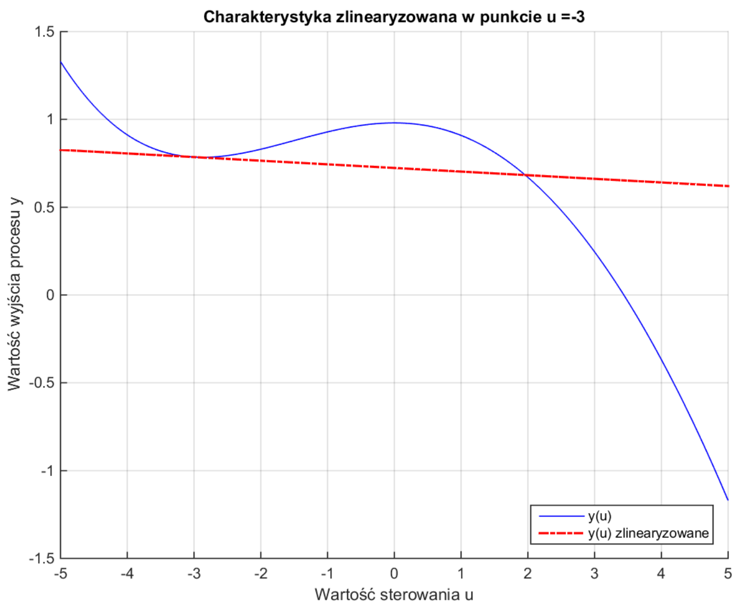
Charakterystki zlinearyzowane obliczyłem ponownie za pomocą środowiska `Matlab`. Skrypt odpowiedzialny za kreślenie charakterystyk modelu o jednym wejściu nazywa się `SISO_linear_figures.m`, natomiast skrypt zajmujący się kreśleniem charakterystyk modelu o dwóch wejściach ma nazwę `MISO_linear_figures.m`.

4.1 Linearyzacje modelu SISO

W zależności od doboru punktu pracy, charakterystyki zlinearyzowane różnią się nachyleniem. W ogólności punkt pracy wybierany jest tak aby obiekt opisywany modelem, pracował optymalnie. W przypadku tego zadania, dobrałem trzy punkty pracy tak, aby nachylenia prostych charakterystyk różniły się jak najbardziej.

$$\text{Dobrane punkty pracy: } \bar{u_1} = -3, \bar{u_2} = -1, \bar{u_3} = 3$$

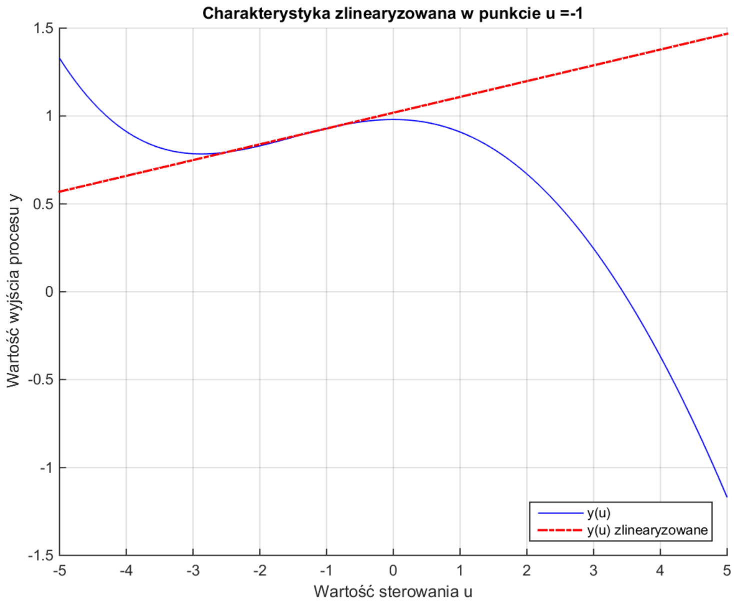
4.1.1 Punkt pracy $\bar{u} = -3$



Rysunek 3: Charakterystyka zlinearyzowana modelu SISO w punkcie pracy $\bar{u} = -3$

Przy doborze punktu pracy blisko ekstremum lokalnego, charakterystyka zlinearyzowana przypomina funkcję stałą. Taka linearyzacja bardzo słabo linearyzuje model na zadanym przedziale.

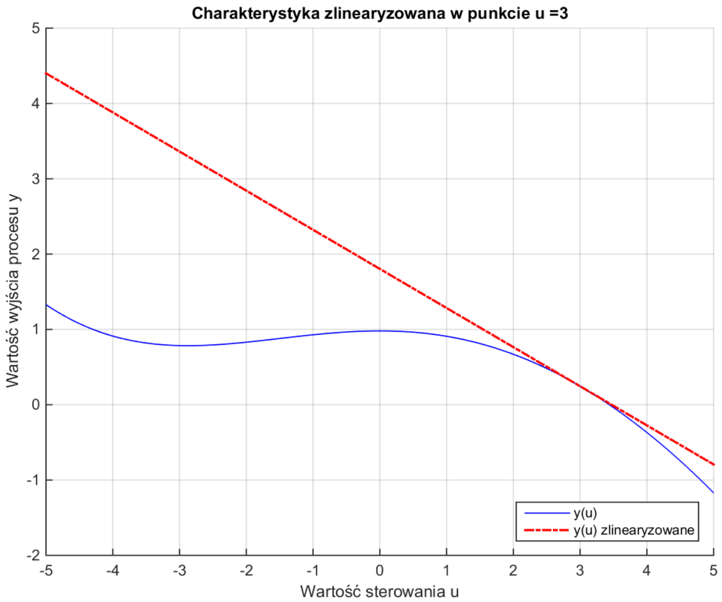
4.1.2 Punkt pracy $\bar{u} = -1$



Rysunek 4: Charakterystyka zlinearyzowana modelu SISO w punkcie pracy $\bar{u} = -1$

Dobór punktu pracy $\bar{u} = -1$ dobrze przybliża oryginalną funkcję w przedziale $[-3, 0]$, jednak w pozostałych fragmentach znacznie odbiega od oryginalnej funkcji. Warto zwrócić uwagę że funkcja liniowa jest na całym przedziale rosnąca, choć funkcja nieliniowa w ogólności jest malejąca, oprócz zakresu między ekstremami $[-2,8738; 0]$.

4.1.3 Punkt pracy $\bar{u} = 3$



Rysunek 5: Charakterystyka zlinearyzowana modelu SISO w punkcie pracy $\bar{u} = 3$

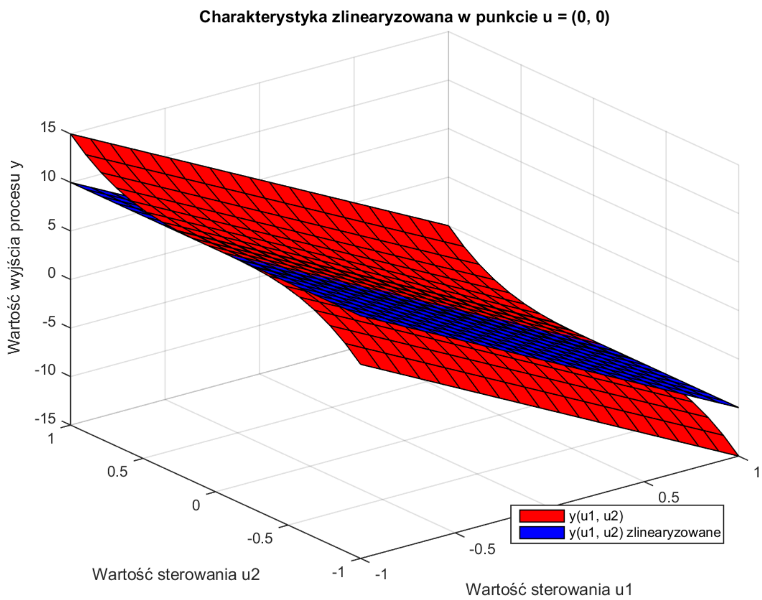
Ostatnim wybranym przeze mnie punktem pracy jest punkt $\bar{u} = 3$. Taka linearyzacja dobrze przybliża charakterystykę nieliniową w zakresie $[1, 5]$. Z powodu ujemnej wartości pochodnej w punkcie $\bar{u} = 3$, charakterystyka liniowa szybko maleje wraz ze wzrostem argumentu. Tempo malenia funkcji liniowej jest większe niż funkcji oryginalnej, czego wynikiem jest duża rozbieżność wartości charakterystyk w lewej części wykresu.

4.2 Linearyzacje modelu MISO

W przypadku dwuwymiarowym punkty pracy są w ogólności wektorami a charakterystyki zlinearyzowane z stycznych, stają się płaszczyznami. W przypadku tego zadania, dobrałem trzy punkty pracy tak, aby nachylenia tych płaszczyzn różniły się jak najbardziej oraz aby ukazać różnice między charakterystykami.

$$\text{Dobrane punkty pracy:}$$
$$(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (0, 0); (\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, -1); (\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (-1, -1).$$

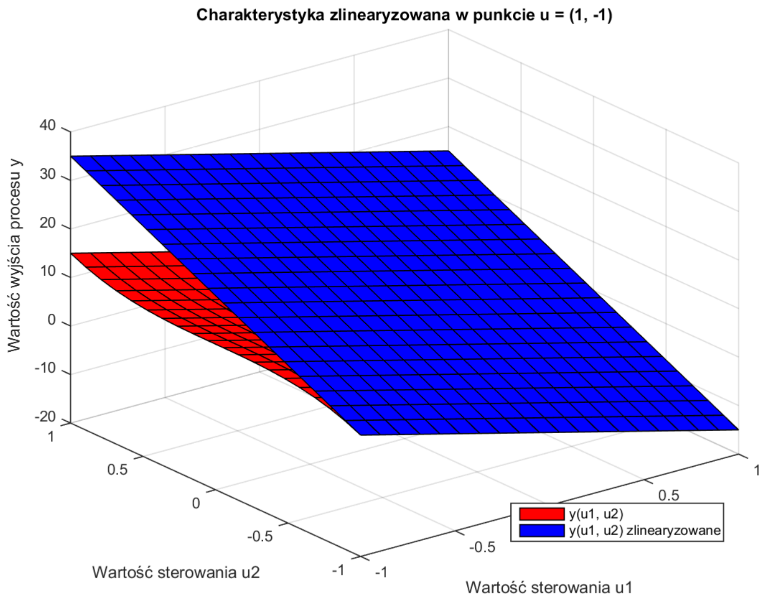
4.2.1 Punkt pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (0, 0)$



Rysunek 6: Charakterystyka zlinearyzowana modelu MISO w punkcie pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (0, 0)$.

W przypadku doboru punktu pracy w ekstremum funkcji nieliniowej, otrzymana płaszczyzna bardzo dobrze przybliża oryginalny nieliniowy model. Dodatkowo w osi u_1, charakterystyka zlinearyzowana w dużej mierze pokrywa się z modelem nieliniowym. Wynika to z liniowego charakteru funkcji zależnej od u_1.

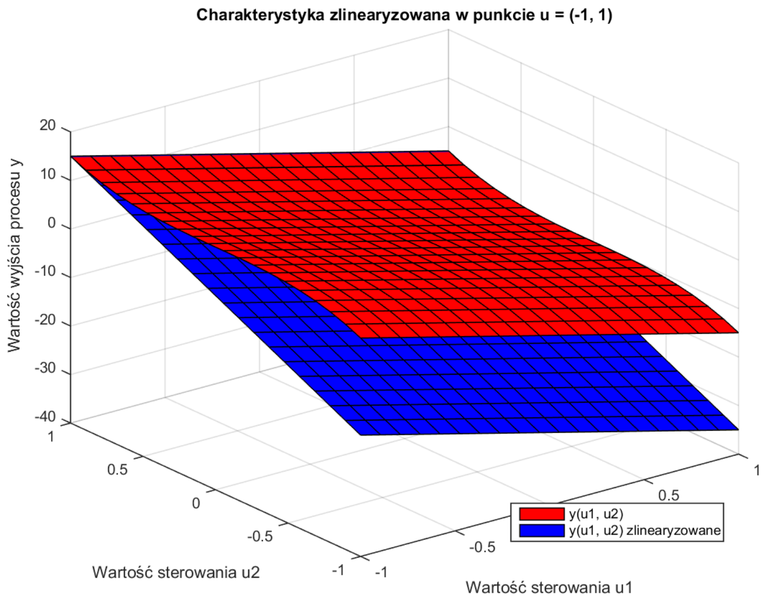
4.2.2 Punkt pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, -1)$



Rysunek 7: Charakterystyka zlinearyzowana modelu MISO w punkcie pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, -1)$.

W przypadku punktu pracy równego $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, -1)$, uzyskana charakterystka liniowa mocno odbiega od oryginalnej charakterystki nieliniowej. Mocno widoczna jest rozbieżność najwyższych wartości. Dla funkcji nieliniowej jest ona równa 15, a dla funkcji liniowej wynosi aż 35.

4.2.3 Punkt pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, 1)$



Rysunek 8: Charakterystyka zlinearyzowana modelu MISO w punkcie pracy $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, 1)$.

W przypadku punktu pracy znajdującego się po drugiej stronie osi OY wykresu $(\bar{u_1}, \bar{u_2}) = (1, 1)$, obserwowalna jest symetryczna sytuacja w stosunku do poprzedniego punktu pracy. Tym razem wartości największe są zgodne, jednak tym razem wartości minimalne znacznie odbiegają od siebie.

5 Wnioski

Linearyzacja funkcji nieliniowych jest bardzo przydatnym narzędziem w analizie modeli, jest również niezbędna przy projektowaniu układów regulacji automatycznej. Należy przy tym pamiętać że linearyzacja funkcji nieliniowej wiąże się z utratą dokładności, dlatego warto wziąć pod uwagę że linearyzacja jest operacją lokalną i że można podzielić docelowy przedział na kilka podprzedziałów i tam dokonać lokalnego przybliżenia funkcją liniową.

6 Dodatkowe informacje

Wszystkie obliczenia i wykresy zostały zrealizowane za pomocą pakietu `Matlab`. Do sprawozdania dołączam wszystkie pliki źródłowe, z dokładnymi opisami w postaci komentarzy. Aby zrealizować wszystkie obliczenia po raz kolejny należy uruchomić skrypt `execute.m` i postępować zgodnie z poleceniami wypisywanymi na konsoli. Skrypt wywoła odpowiednie funkcje obliczające charakterystyki nieliniowe i liniowe, wygeneruje wykresy dla podanych wcześniej punktów pracy i zapisze je do folderu `figures`.