



Fuzzy TOPSIS

Iwona Skalna

Katedra Informatyki Biznesowej i Inżynierii Zarządzania

TOPSIS

- **TOPSIS** (Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) – technika preferencji kolejności według podobieństw do rozwiązania idealnego to jedna z najlepszych metod uzyskania idealnego rozwiązania spośród podobnych opcji.
- TOPSIS opiera się na koncepcji, że wybrana alternatywa powinna mieć najkrótszą odległość geometryczną od dodatniego rozwiązania idealnego (PIS) i najdłuższą odległość geometryczną od ujemnego rozwiązania idealnego (NIS).
- Można tę metodę również wykorzystać do automatyzacji procesu i przezwyciężenia niejednoznaczności i niepewności w procesie selekcji.
- **Rozmyta metoda TOPSIS** umożliwia liniowe uporządkowanie obiektów opisywanych za pomocą zmiennych językowych, których wartości wyrażone są w postaci trójkątnych liczb rozmytych.

Fuzzy TOPSIS

- Format danych w pliku CSV
- Należy odczytać dane z pliku i wykonać obliczenia przedstawione na kolejnych slajdach.
- Plik z kodem należy przesłać na UPEL

DecisionMaker,Kandydat,KritB(Umiejętności komunikacyjne),KritB(Wiedza),KritC(Czasochłonność)

DecisionMaker1	Kandydat1	Average	Very High	High
DecisionMaker1	Kandydat2	High	Very High	Average
DecisionMaker1	Kandydat3	Very High	Average	Low
DecisionMaker1	Kandydat4	Low	Average	Very Low
DecisionMaker2	Kandydat1	High	Very High	High
DecisionMaker2	Kandydat2	High	High	Average
DecisionMaker2	Kandydat3	Very High	Average	Very Low
DecisionMaker2	Kandydat4	Low	Average	Very Low
DecisionMaker3	Kandydat1	Average	High	High
DecisionMaker3	Kandydat2	High	Average	Average
DecisionMaker3	Kandydat3	High	Average	Low
DecisionMaker3	Kandydat4	Very Low	Low	Very Low

Fuzzy TOPSIS

- Alternatywy (kandydaci) i atrybuty/kryteria

Alternatywy	Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
	Kandydat 1	Average	Very High	High
	Kandydat 2	High	Very High	Average
	Kandydat 3	Very High	Average	Low
	Kandydat 4	Low	Average	Low

Fuzzy TOPSIS

- Skala pięciostopniowa
- Fuzyfikacja skali

Very Low
Low
Average
High
Very High

Termin	Liczba rozmyta
Very Low	(1,1,3)
Low	(1,3,5)
Average	(3,5,7)
High	(5,7,9)
Very High	(7,9,9)

Fuzzy TOPSIS

Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	Average	Very High	High
Kandydat 2	High	Very High	Average
Kandydat 3	Very High	Average	Low
Kandydat 4	Low	Average	Very Low

Decydent 1

Decydent 2

Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	High	Very High	High
Kandydat 2	High	High	Average
Kandydat 3	Very High	Average	Very Low
Kandydat 4	Low	Average	Very Low

Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	Average	High	High
Kandydat 2	High	Average	Average
Kandydat 3	High	Average	Low
Kandydat 4	Very Low	Low	Very Low

Decydent 3

Fuzzy TOPSIS

Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	Average	Very High	High
Kandydat 2	High	Very High	Average
Kandydat 3	Very High	Average	Low
Kandydat 4	Low	Average	Very Low

Decydent 1

Termin	Liczba rozmyta	Wiedza	Zużycie czasu
Very Low	(1,1,3)	Very High	High
Low	(1,3,5)	High	Average
Average	(3,5,7)	Average	Very Low
High	(5,7,9)	Average	Very Low
Very High	(7,9,9)		

Decydent 2

Atrybut/Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	Average	High	High
Kandydat 2	High	Average	Average
Kandydat 3	High	Average	Low
Kandydat 4	Very Low	Low	Very Low

Decydent 3

Fuzzy TOPSIS

- Rozmyte macierze decyzyjne

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,5,7)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(5,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Termin	Liczba rozmyta
Very Low	(1,1,3)
Low	(1,3,5)
Average	(3,5,7)
High	(5,7,9)
Very High	(7,9,9)

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,5,7)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(5,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Czas na zadanie
Kandydat 1			
Kandydat 2			
Kandydat 3			
Kandydat 4			

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, \quad b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), \quad c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,5,7)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(5,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	\tilde{x}_{11}		
Kandydat 2			
Kandydat 3			
Kandydat 4			

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, \quad b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), \quad c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^1, b_{11}^1, c_{11}^1$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^3, b_{11}^3, c_{11}^3$	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^2, b_{11}^2, c_{11}^2$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzyji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)		
Kandydat 2			
Kandydat 3			
Kandydat 4			

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^1, b_{11}^1, c_{11}^1$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^3, b_{11}^3, c_{11}^3$	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^2, b_{11}^2, c_{11}^2$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzyji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	$b_{11} = \frac{(5 + 7 + 5)}{3} = 5.6667$		
Kandydat 2			
Kandydat 3			
Kandydat 4			

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^1, b_{11}^1, c_{11}^1$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^3, b_{11}^3, c_{11}^3$	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^2, b_{11}^2, c_{11}^2$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	$c_{11} = \max(7,9,7) = 9$ (3,5.6667,9)	\tilde{x}_{12}	\tilde{x}_{13}
Kandydat 2	\tilde{x}_{21}	\tilde{x}_{22}	\tilde{x}_{23}
Kandydat 3	\tilde{x}_{31}	\tilde{x}_{32}	\tilde{x}_{33}
Kandydat 4	\tilde{x}_{41}	\tilde{x}_{42}	\tilde{x}_{43}

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Łączona rozmyta macierz decyzyjna (K – liczba decydentów)

Decydent 1			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^1, b_{11}^1, c_{11}^1$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Decydent 3			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5,7)	(5,7,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^3, b_{11}^3, c_{11}^3$	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,7,9)	(3,5,7)	(1,3,5)
Kandydat 4	(1,1,3)	(1,3,5)	(1,1,3)

Decydent 2			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(5,7,9)	(7,9,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	$a_{11}^2, b_{11}^2, c_{11}^2$	(3,5,7)
Kandydat 3	(7,9,9)	(3,5,7)	(1,1,3)
Kandydat 4	(1,3,5)	(3,5,7)	(1,1,3)

Łączona macierz decyzji			
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5.6667,9)	(5,8.333,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,8.333,9)	(3,5,7)	(1,2.333,5)
Kandydat 4	(1,2.333,5)	(1,4.333,7)	(1,1,3)

$$\tilde{x}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$$

$$a_{ij} = \min_{k=1, \dots, K} a_{ij}^k, b_{ij} = \text{mean}(b_{ij}^k), c_{ij} = \max_{k=1, \dots, K} c_{ij}^k$$

Fuzzy TOPSIS

- Wagi kryteriów (w rozszerzonej wersji każdy decydent może podać swoją wagę, w takim przypadku łączona waga może być wyliczona za pomocą tego samego wzoru co wzór na elementy macierzy łączonej)

$$w_{j1} = \min_{k=1, \dots, K} w_{j1}^k, w_{j2} = \text{mean}(w_{j2}^k), w_{j3} = \max_{k=1, \dots, K} w_{j3}^k$$

Weights →	High	Very High	Average
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne	Wiedza	Zużycie czasu
Kandydat 1	(3,5.6667,9)	(5,8.333,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,8.333,9)	(3,5,7)	(1,2.333,5)
Kandydat 4	(1,2.333,5)	(1,4.333,7)	(1,1,3)

Termin	Liczba rozmyta
Very Low	(1,1,3)
Low	(1,3,5)
Average	(3,5,7)
High	(5,7,9)
Very High	(7,9,9)

Fuzzy TOPSIS

- Normalizacja rozmytej macierzy decyzyjnej zgodnie z typem kryteriów
- Kryteria „Beneficial”

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right), c_j^* = \max_i c_{ij}$$

- Kryteria „Cost”

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{a_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{c_{ij}} \right), a_j^- = \min_i a_{ij}$$

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(3,5.6667,9)	(5,8.333,9)	(5,7,9)
Kandydat 2	(5,7,9)	(3,7,9)	(3,5,7)
Kandydat 3	(5,8.333,9)	(3,5,7)	(1,2.333,5)
Kandydat 4	(1,2.333,5)	(1,4.333,7)	(1,1,3)

Termin	Liczba rozmyta
Very Low	(1,1,3)
Low	(1,3,5)
Average	(3,5,7)
High	(5,7,9)
Very High	(7,9,9)

Fuzzy TOPSIS

- Normalizacja rozmytej macierzy decyzyjnej zgodnie z typem kryteriów
- Kryteria „Beneficial”

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_{ij}}{c_j^*}, \frac{b_{ij}}{c_j^*}, \frac{c_{ij}}{c_j^*} \right), c_j^* = \max_i c_{ij}$$

- Kryteria „Cost”

$$\tilde{r}_{ij} = \left(\frac{a_j^-}{a_{ij}}, \frac{a_j^-}{b_{ij}}, \frac{a_j^-}{c_{ij}} \right), a_j^- = \min_i a_{ij}$$

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(0.333,0.630,1)	(0.556,0.926,1)	(0.111,0.143,0.2)
Kandydat 2	(0.556,0.778,1)	(0.333,0.778,1)	(0.143,0.2,0.333)
Kandydat 3	(0.556,0.926,1)	(0.333,0.556,0.778)	(0.2,0.429,1)
Kandydat 4	(0.111,0.259,0.556)	(0.111,0.481,0.778)	(0.333,1,1)

Termin	Liczba rozmyta
Very Low	(1,1,3)
Low	(1,3,5)
Average	(3,5,7)
High	(5,7,9)
Very High	(7,9,9)

Fuzzy TOPSIS

- Normalizacja rozmytej macierzy decyzyjnej zgodnie z typem kryteriów

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	$(3,5.6667,9)/9$	$(5,8.333,9)/9$	$1/(5,7,9)$
Kandydat 2	$(5,7,9)/9$	$(3,7,9)/9$	$1/(3,5,7)$
Kandydat 3	$(5,8.333,9)/9$	$(3,5,7)/9$	$1/(1,2.333,5)$
Kandydat 4	$(1,2.333,5)/9$	$(1,4.333,7)/9$	$1/(1,1,3)$

Fuzzy TOPSIS

- Znormalizowana rozmyta macierz decyzyjna

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(0.333,0.630,1)	(0.556,0.926,1)	(0.111,0.143,0.2)
Kandydat 2	(0.556,0.778,1)	(0.333,0.778,1)	(0.143,0.200,0.333)
Kandydat 3	(0.556,0.926,1)	(0.333,0.556,0.778)	(0.200,0.429,1)
Kandydat 4	(0.111,0.259,0.556)	(0.111,0.481,0.778)	(0.333,1.000,1)

Fuzzy TOPSIS

- Uwzględnienie wag kryteriów

$$\tilde{v}_{ij} = \tilde{r}_{ij} \otimes \tilde{w}_j$$

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(5*0.333,7*0.630,9*1)	(7*0.556,9*0.926,9*1)	(3*0.111,5*0.143,7*0.2)
Kandydat 2	(5*0.556,7*0.778,9*1)	(7*0.333,9*0.778,9*1)	(3*0.143,5*0.200,7*0.333)
Kandydat 3	(5*0.556,7*0.926,9*1)	(7*0.333,9*0.556,9*0.778)	(3*0.200,5*0.429,7*1)
Kandydat 4	(5*0.111,7*0.259,9*0.556)	(7*0.111,9*0.481,9*0.778)	(3*0.333,5*1,7*1)

Fuzzy TOPSIS

- Ważona rozmyta macierz decyzyjna

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)
Kandydat 2	(2.778,5.444,9)	(2.333,7,9)	(0.429,1.000,2.333)
Kandydat 3	(2.778,6.481,9)	(2.333,5,7)	(0.600,2.143,7)
Kandydat 4	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(1,5,7)

Fuzzy TOPSIS

- Pozytywne rozmyte rozwiązanie idealne (FPIS)

$$A^* = \tilde{v}_1^*, \tilde{v}_2^*, \dots, \tilde{v}_n^*, \text{ gdzie } \tilde{v}_j^* = \min_i v_{ij3}$$

sortowanie od ostatniej składowej liczby rozmytej

- Negatywne rozmyte rozwiązanie idealne (FNIS)

$$A^- = \tilde{v}_1^-, \tilde{v}_2^-, \dots, \tilde{v}_n^-, \text{ gdzie } \tilde{v}_j^- = \min_i v_{ij1}$$

sortowanie od pierwszej składowej liczby rozmytej

- Jeśli składowe są równe, porównujemy kolejną składową, przesuwają się odpowiednio w lewo (*) lub w prawo (-)

Fuzzy TOPSIS

- Rozmyta macierz decyzyjna, rozmyte rozwiązanie pozytywnie idealne (FPIS) i rozmyte rozwiązanie negatywnie idealne (FNIS)

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)
Kandydat 2	(2.778,5.444,9)	(2.333,7,9)	(0.429,1.000,2.333)
Kandydat 3	(2.778,6.481,9)	(2.333,5,7)	(0.600,2.143,7)
Kandydat 4	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(1,5,7)
A^*	(2.778,6.481,9)	(3.889,8.333,9)	(1,5,7)
A^-	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(0.333,0.714,1.4)

Fuzzy TOPSIS

- Odległości obserwacji od rozwiązań idealnych

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)
Kandydat 2	(2.778,5.444,9)	(2.333,7,9)	(0.429,1.000,2.333)
Kandydat 3	(2.778,6.481,9)	(2.333,5,7)	(0.600,2.143,7)
Kandydat 4	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(1,5,7)
A^*	(2.778,6.481,9)	(3.889,8.333,9)	(1,5,7)

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d((a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)) = \sqrt{\frac{1}{3} * ((a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2)}$$

Fuzzy TOPSIS

- Odległości obserwacji od FPIS

Weights	(5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)	
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)	
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)	
Kandydat 2	$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sqrt{\frac{1}{3} * ((a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2)}$			(2.9,1.000,2.333)
Kandydat 3				(1.600,2.143,7)
Kandydat 4				(1,5,7)
A*	(2.778,6.481,9)	(3.889,8.333,9)	(1,5,7)	

Kandydat 1	1.35847355	0	4.08949024	
Kandydat 2	0.50872261	1.18286811	2.56390742	
Kandydat 3	$\sqrt{\frac{1}{3} * ((1.667 - 2.778)^2 + (4.407 - 6.481)^2 + (9 - 9)^2)}$			5.6565956
Kandydat 4				0

Fuzzy TOPSIS

- Odległości obserwacji od FPIS

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)
Kandydat 2	(2.778,5.444,9)	(2.333,7,9)	(0.429,1.000,2.333)
Kandydat 3	(2.778,6.481,9)	(2.333,5,7)	(0.600,2.143,7)
Kandydat 4	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(1,5,7)
A^*	(2.778,6.481,9)	(3.889,8.333,9)	(1,5,7)

Kandydat 1	1.35847355	0	4.08949024
Kandydat 2	0.59873361	1.18286811	3.56390742
Kandydat 3	0	2.41735835	1.66565956
Kandydat 4	3.77341796	3.14531463	0

Fuzzy TOPSIS

- Odległości obserwacji od FNIS

Weights	→ (5,7,9)	(7,9,9)	(3,5,7)
Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	(1.667,4.407,9)	(3.889,8.333,9)	(0.333,0.714,1.4)
Kandydat 2	(2.778,5.444,9)	(2.333,7,9)	(0.429,1.000,2.333)
Kandydat 3	(2.778,6.481,9)	(2.333,5,7)	(0.600,2.143,7)
Kandydat 4	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(1,5,7)
A^-	(0.556,1.815,5)	(0.778,4.333,7)	(0.333,0.714,1.4)

Kandydat 1	2.82583936	3.14531463	0
Kandydat 2	3.37206578	2.12374388	0.56621964
Kandydat 3	3.77341796	0.97710415	3.34025585
Kandydat 4	0	0	4.08949024

Fuzzy TOPSIS

- Odległość alternatyw (tutaj kandydatów) od idealnych rozwiązań (n – liczba atrybutów)

Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	1.35847355	0	4.08949024
Kandydat 2	0.59873361	1.18286811	3.56390742
Kandydat 3	0	2.41735835	1.66565956
Kandydat 4	3.77341796	3.14531463	0

Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)
Kandydat 1	2.82583936	3.14531463	0
Kandydat 2	3.37206578	2.12374388	0.56621964
Kandydat 3	3.77341796	0.97710415	3.34025585
Kandydat 4	0	0	4.08949024

$$d_i^* = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^*)$$

$$d_i^- = \sum_{j=1}^n d(\tilde{v}_{ij}, \tilde{v}_j^-)$$

Fuzzy TOPSIS

- Odległość alternatyw (tutaj kandydatów) od idealnych rozwiązań

Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)	d_i^*
Kandydat 1	1.35847355	0	4.08949024	5.4479638
Kandydat 2	0.59873361	1.18286811	3.56390742	5.34550914
Kandydat 3	0	2.41735835	1.66565956	4.08301791
Kandydat 4	3.77341796	3.14531463	0	6.91873259

Atrybut/ Kryterium	Umiejętności komunikacyjne (Beneficial)	Wiedza (Beneficial)	Zużycie czasu (Cost)	d_i^-
Kandydat 1	2.82583936	3.14531463	0	5.97115399
Kandydat 2	3.37206578	2.12374388	0.56621964	6.0620293
Kandydat 3	3.77341796	0.97710415	3.34025585	8.09077796
Kandydat 4	0	0	4.08949024	4.08949024

Fuzzy TOPSIS

- Współczynnik „bliskości” (closeness) CC_i dla każdej alternatywy

$$CC_i = \frac{d_i^-}{d_i^- + d_i^*}$$

Atrybut/ Kryterium	d_i^*	d_i^-
Kandydat 1	5.4479638	5.97115399
Kandydat 2	5.34550914	6.0620293
Kandydat 3	4.08301791	8.09077796
Kandydat 4	6.91873259	4.08949024

Fuzzy TOPSIS

- Ranking kandydatów

Atrybut/ Kryterium	d_i^*	d_i^-	CC_i	Rank
Kandydat 1	5.4479638	5.97115399	$\frac{5.97115399}{5.97115399 + 5.4479638} = 0.5229$	3
Kandydat 2	5.34550914	6.0620293	$\frac{6.0620293}{6.0620293 + 5.34550914} = 0.5314$	2
Kandydat 3	4.08301791	8.09077796	$\frac{8.09077796}{8.09077796 + 4.08301791} = 0.6646$	1
Kandydat 4	6.91873259	4.08949024	$\frac{4.08949024}{4.08949024 + 6.91873259} = 0.37149$	4