Metody nieparametryczne w statystyce

Tomasz Wójtowicz

Wydział Zarządzania
AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica w Krakowie

Plan przedmiotu

1. Wnioskowanie statystyczne: estymacja punktowa i przedziałowa.
2. Testowanie hipotez statystycznych.
3. Metody rangowe. Testy nieparametryczne.
4. Porównanie rozkładu cech w dwóch populacjach.
5. Rangowe testy niezależności.
6. Metody Monte Carlo. Szacowanie parametrów rozkładu, błędy standardowe i przedziały ufności.
7. Testy permutacyjne.
8. Metoda bootstrap.
9. Ocena jakości prognoz. Porównania krzyżowe.

Literatura

Davison A.C., Hinkley D.V., Bootstrap Methods and their Application, Cambridge University Presss, 1997

Domanski Cz., Pruska K., Nieklasyczne metody statystyczne, PWE, 2000

Jóźwiak J., Podgórski J. „Statystyka od podstaw", PWE, Warszawa, 2001

Koronacki J., Mielniczuk J. „Statystyka". WNT, Warszawa, 2001.

Estymacja - przypomnienie

Zakładamy, że badana cecha X ma pewien rozkład o parametrach $\theta_1, \dots, \theta_k$. Dysponujemy tylko próbką danych $x_1, \dots, x_n$ wartości tej cechy. Wartości te są realizacjami próby losowej prostej $X_1, \dots, X_n$, tzn.:

- X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi,
- X_i mają taki sam rozkład jak cecha X (tzn. z parametrami $\theta_1, \dots, \theta_k$).

Estymator T_n parametru θ – statystyka obliczona na podstawie próby $X_1, \dots, X_n$, która służy do oszacowania nieznanego parametru θ.

$\hat{T}_n = T_n(x_1, \dots, x_n)$ - wartość estymatora obliczona na podstawie $x_1, \dots, x_n$.

Estymacja - przypomnienie

Estymator T_n parametru θjest **nieobciążony** jeżeli $E(T_n) = \theta$, czyli jego wartość oczekiwana jest równa parametrowi, który szacuje.

Obciążenie estymatora: $b_n = E(T_n) - \theta$

Estymator $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$ jest **asymptotycznie nieobciążony** jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} b_n = 0,$$

czyli jego obciążenie maleje do 0 wraz za wzrostem liczebności próby.

Estymacja - przypomnienie

Przykłady:

- średnia arytmetyczna

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej EX

- wariancja z próby

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

jest nieobciążonym estymatorem wariancji $D^2(X)$

Testy statystyczne

Hipoteza statystyczna – pewne przypuszczenie dotyczące rozkładu badanej cechy X w populacji generalnej, np.

- o wartości oczekiwanej,
- o asymetrii rozkładu,
- że rozkład jest normalny.

Hipotezy:

- parametryczne (dotyczą konkretnych parametrów rozkładu),
- nieparametryczne.

Testy statystyczne

Hipotezy w teście statystycznym:

H_0 - hipoteza główna,

H_1 - hipoteza alternatywna (jakaś forma zaprzeczenia H_0)

Przeprowadzając test statystyczny zakładamy prawdziwość hipotezy H_0.

Test statystyczny - czy są podstawy do zakwestionowania prawdziwości hipotezy głównej (wtedy ją odrzucamy i uznajemy za prawdziwą hipotezę alternatywną). Jeżeli nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy głównej, to uznajemy ja za prawdziwą.

Testy statystyczne

- Do weryfikacji prawdziwości hipotezy głównej H_0 służy odpowiednio dobrana statystyka.
- Statystyka testowa jest konstruowana przy założeniu prawdziwości hipotezy głównej
- Na podstawie postaci hipotezy alternatywnej tworzymy odpowiedni obszar krytyczny W.
- Gdy obliczona wartość statystyki testowej należy do obszaru krytycznego W to odrzucamy hipotezę główną. W przeciwnym wypadku nie ma podstaw do jej odrzucenia.
- Obszar krytyczny jest wyznaczany przy założeniu prawdziwości hipotezy głównej.

Możliwe sytuacje:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">Hipoteza H_0</td></tr>
<tr><td>prawdziwa</td><td>fałszywa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Decyzja</td><td>odrzucić H_0</td><td>błąd
(I rodzaju)</td><td>OK</td></tr>
<tr><td>nie odrzucić H_0</td><td>OK</td><td>błąd
(II rodzaju)</td></tr>
</table>

Błąd I rodzaju – odrzucenie hipotezy głównej, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Błąd II rodzaju – nieodrzucenie hipotezy głównej, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

Testy statystyczne

Błąd I rodzaju – odrzucenie hipotezy głównej, gdy w rzeczywistości jest ona prawdziwa.

Błąd II rodzaju – nieodrzucenie hipotezy głównej, gdy w rzeczywistości jest ona fałszywa.

Nie można jednocześnie zminimalizować prawdopodobieństwa popełnienia obu tych błędów.

Poziom istotności (α) – prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju.

Moc testu $(1-\beta)$:

- prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy fałszywej,
- prawdopodobieństwo niepopełnienia błędu II rodzaju,

Testy statystyczne

Moc testu zależy od:

- konstrukcji samego testu (niektóre testy mają większą moc od innych testów służących do badania tego samego zagadnienia),
- liczebności próby (zwiększanie liczebności próby zwiększa moc testu)
- postaci fałszywej hipotezy głównej (im bardziej hipoteza główna odbiega od prawdy tym większe jest prawdopodobieństwo jej odrzucenia – większa jest moc testu).

Duża moc testu nie zawsze jest korzystna. Zbyt mocny test powoduje odrzucenie hipotezy głównej nawet przy niewielkich odstępstwach od niej.

Test powinien mieć moc wystarczającą do wykrycia odstępstw od hipotezy głównej, które są istotne z praktycznego punktu widzenia.