Základy složitosti a vyčíslitelnosti

NTIN090

Petr Kučera

2021/22 (8. přednáška)

Čas

Časová složitost Turingova stroje

Připomenutí

Nechť $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je funkce, která je definovaná pro každý vstup

- Deterministický Turingův stroj M pracuje v čase $f(n)$, pokud výpočet M nad libovolným vstupem x délky $|x| = n$ skončí po provedení nejvýše $f(n)$ kroků.
- $\mathrm{TIME}(f(n))$ je třída jazyků přijímaných Turingovými stroji, které pracují v čase $O(f(n))$

Časová konstruovatelnost

Definice

Funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, kde $f(n) \in \Omega(n \log n)$, nazveme časově konstruovatelnou, je-li funkce, která zobrazuje 1^n na binární reprezentaci $f(n)$ vyčíslitelná v čase $O(f(n))$.

- Funkce obvykle používané pro měření časové složitosti jsou časově konstruovatelné, například
  - $\lceil n \log_2 n \rceil$
  - $\lceil n \sqrt{n} \rceil$
  - polynomy
  - 2^n

Efektivní počítání kroků

Předpokládejme, že $f(n)$ je časově konstruovatelná strojem M_f

1. Se vstupem x
2. Sestav řetězec $w = 1^n$
   - Každý znak x změň na 1
3. Vypočítej $k = f(n)$
   - Spusť $M_f(w)$
4. Inicializuj binární čítač hodnotou k
   - Používá $\lceil \log_2 k \rceil$ bitů
5. Sniž hodnotu čítače o jedna po každém kroku a skonči pokud dosáhne hodnota čítače nuly

Pracuje v čase $O\left(f(n) \cdot t(\lceil \log_2 k \rceil)\right)$, kde $t(\lceil \log_2 k \rceil)$ je čas potřebný k aktualizaci hodnoty čítače s $\lceil \log_2 k \rceil$ bity.

Věta o časové hierarchii

Věta (Věta o deterministické časové hierarchii)

Pro každou časově konstruovatelnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existuje jazyk A, který je rozhodnutelný v čase $O(f(n))$, nikoli však v čase $o(f(n)/\log f(n))$.

Idea důkazu

- Podobný postup jako v případě prostoru
- Je potřeba simulovat $M(x)$ s počítáním kroků
- Manipulace s čítačem kroků přidává faktor $\Theta(\log f(n))$

Předpokládáme, že všechny stroje mají jednu pásku.

Stroj D

Výpočet D se vstupem x

1 $n \leftarrow |x|$
2 Vypočti $f(n)$ pomocí časové konstruovatelnosti
3 Inicializuj binární čítač hodnotou $\lceil f(n)/\log_2 f(n) \rceil$
4 Sniž hodnotu čítače o 1 po každém kroku při provádění kroků 7-8
5 **if** čítač dosáhne nulové hodnoty **then** odmítni
6 **if** x není tvaru $\langle M \rangle \mathtt{10}^*$ **then** odmítni
7 Simuluj $M(x)$
8 **if** M přijal **then** odmítni **else** přijmi

Definujeme $A = L(D)$

Čas výpočtu D

- $f(n)$ lze vypočítat v čase $O(f(n))$ díky časové konstruovatelnosti
- $\lceil f(n)/\log_2 f(n) \rceil$ (binárně) lze vypočítat v čase $O(f(n))$
- Ověření, zda x má tvar $\langle M \rangle 10^*$ lze provést v čase $O(n) = O(f(n))$

Je třeba vyřešit dva implementační detaily

1. Jak provést simulaci $M(x)$ tak, aby jedna instrukce M byla provedena v c_M krocích simulace
   - kde c_M je konstanta závisející na M
2. Jak snížit hodnotu čítače o 1 po každém kroku D v čase $O(\log f(n))$

Simulace s konstantním zpožděním

- Předpokládejme $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Předpokládejme vstup x tvaru $\langle M \rangle \mathtt{10}^*$
- $\langle M \rangle$ kóduje přechodovou funkci δ
- $|\langle M \rangle|$ je konstantní, je-li M zafixovaný
- Při simulaci jednoho kroku $M(x)$
  - D hledá v $\langle M \rangle$ přechod pro aktuální displej
  - Nejprve musí hlava D najít začátek $\langle M \rangle$ na pásce
  - D potřebuje také rychlý přístup k aktuálnímu stavu M

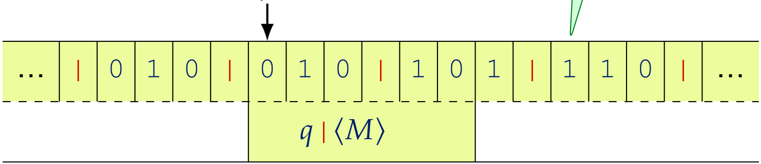
$\langle M \rangle$ a stav stroje M musí být v každém okamžiku poblíž hlavy D.

Páska D

Páska stroje D má dvě stopy

Hlava D nad blokem pod hlavou M

Stopa 1: páska M
každý znak zakódován
$b = \lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bity



Stopa 2:
aktuální stav q a
přechodová funkce $\langle M \rangle$

Stopa 2 je vždy zarovnaná s blokem pod hlavou M

Simulace s konstantním zpožděním

- Páska D má dvě stopy:

  Stopa 1 páska M, každý znak je zakódován $b = \lceil \log_2 |\Sigma| \rceil$ bity
  Stopa 2 aktuální stav q stroje M a přechodová funkce $\langle M \rangle$

  - Vždy zarovnaná s hlavou M
  - Po odsimulování jednoho kroku M může být potřeba obsah stopy 2 posunout
- Simulace jednoho kroku M pak zabere čas c_M pro nějakou konstantu c_M, která závisí na M
  - Nalezení instrukce v čase $O(|\langle M \rangle|^2)$
  - Posunutí stopy 2 v čase $O(|\langle M \rangle|^2)$
  - Konstantní čas pro fixní TS M

Pokud M pracuje v čase $g(n)$, jeho simulaci lze provést $O(g(n))$.

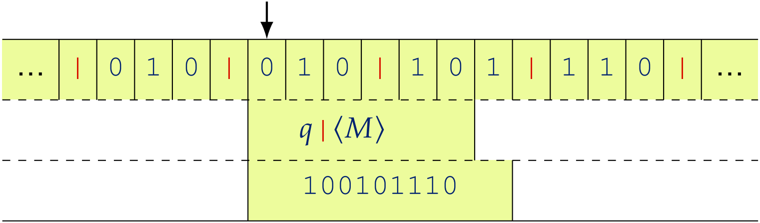
Aktualizace čítače kroků

- Čítač má $O(\log f(n))$ bitů
- Snížení hodnoty o 1 lze provést v lineárním čase vzhledem k počtu bitů
- Nejprve však musí hlava M přejít k čítači na pásce

Čítač musí být neustále poblíž hlavy D

- Přidáme novou stopu pro uložení čítače
- Po každém kroku simulace je stopa posunuta posunuta, aby čítač byl u hlavy D

Třetí stopa pásky stroje D



Stopa 3: Binární čítač
$O(\log_2 f(n))$ bitů

Zarovnaná s hlavou D

Posouvá se po každém kroku simulace

Zarovnání stop

Stopa 2 obsahuje dvojici $q \mid \langle M \rangle$

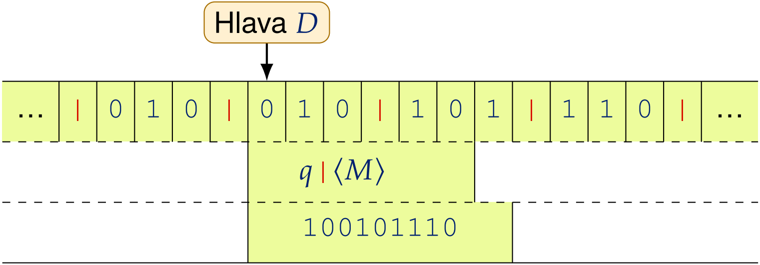
- Na začátku simulace kroku M musí být zarovnaná s blokem pod hlavou M
- Poté, co D dokončí simulaci kroku M, je stopa posunuta podle toho, kam se pohne hlava M

Stopa 3 obsahuje čítač

- Na začátku každého kroku D v rámci simulace musí být zarovnaná s hlavou D
- Jeden krok M je proveden pomocí c_M kroků simulace
- Po každém kroku simulace dojde k posunu čítače
- Čítač se tedy posune c_M-krát během simulace jednoho kroku M

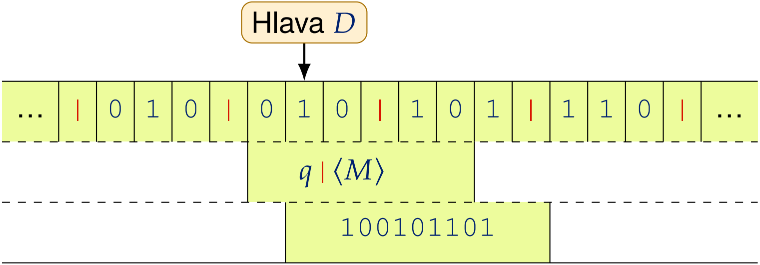
Zarovnání stop

Stopa 3 je zarovnaná s hlavou D při simulaci



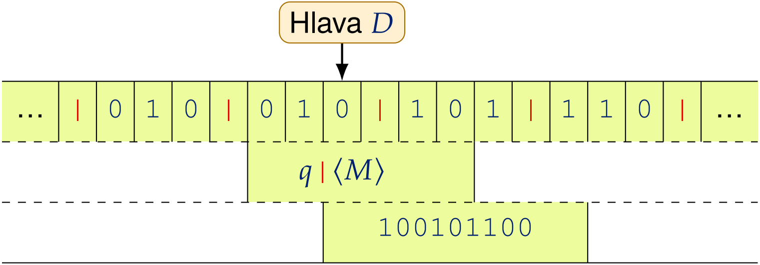
Zarovnání stop

Stopa 3 se posouvá s hlavou D po každém kroku simulace



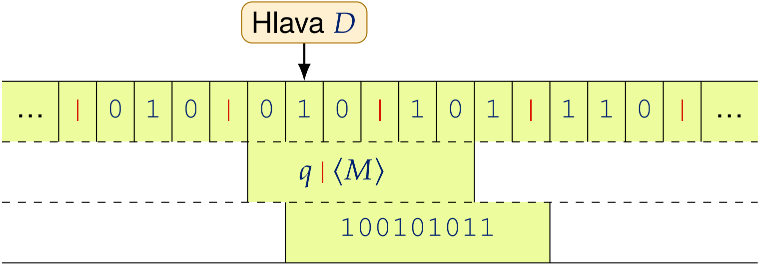
Zarovnání stop

Stopa 3 se posouvá s hlavou D po každém kroku simulace



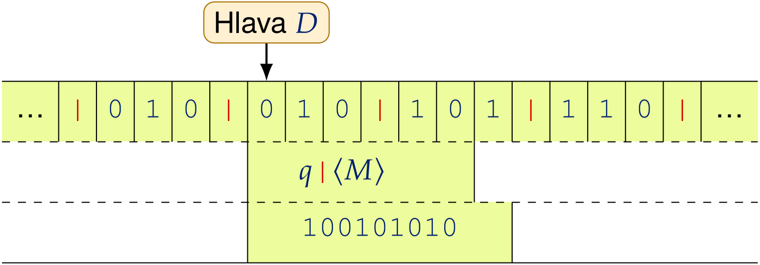
Zarovnání stop

Stopa 3 se posouvá s hlavou D po každém kroku simulace



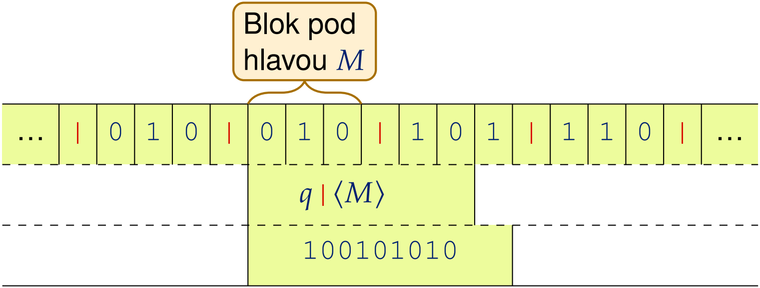
Zarovnání stop

Stopa 3 se posouvá s hlavou D po každém kroku simulace



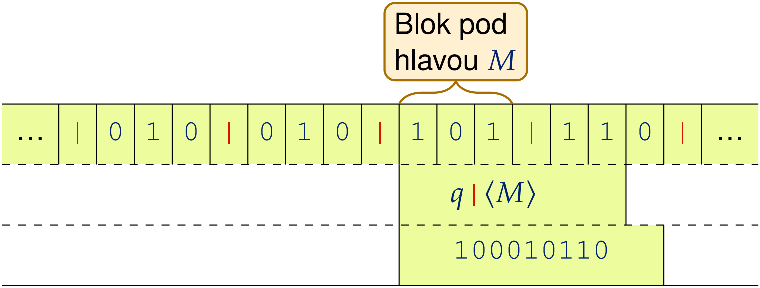
Zarovnání stop

Stopa 2 je zarovnaná s blokem pod hlavou M



Zarovnání stop

Pokud se hlava M pohne, stopa 2 je posunuta



Stopa 3 se posunula spolu s hlavou D

Časová složitost D

- Simulace M je ukončena nejpozději po provedení $\lceil f(n)/\log_2 f(n) \rceil$ kroků simulace
  - D tedy odsimuluje zhruba $\frac{f(n)}{c_M \log_2 f(n)}$ kroků M
- Hodnota čítače se sníží o 1 a případně je posunut po každém kroku simulace
  - $O(\log f(n))$ kroků stačí pro snížení hodnoty
  - $O(\log f(n))$ kroků stačí na posunutí
- Dohromady dostáváme čas

$$O\left(\frac{f(n)}{\log f(n)} \log f(n)\right) = O(f(n))$$

TS D pracuje v čase $O(f(n))$.

Časová složitost rozhodování A (horní odhad)

Jazyk $A = L(D)$ lze rozhodnout v čase $O(f(n))$.

Ukážeme, že A nelze rozhodnout v čase $o(f(n)/\log f(n))$.

Menší čas nestačí

- Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je TS, který pracuje v čase $g(n) = o(f(n)/\log f(n))$
- Ukážeme, že $A \neq L(M)$
- Dříve jsme ukázali, že

> Simulaci $M(x)$ lze provést pomocí $c_M g(n)$ kroků, kde c_M je konstanta, jež závisí na M.

Menší čas nestačí

- Z toho, že $g(n) = o(f(n)/\log f(n))$, plyne

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)[c_M g(n) \leq f(n)/\log f(n)]$$

- Předpokládejme vstup $x = \langle M \rangle 10^{n_0}$
- Tedy $|x| > n_0$
- D simuluje M po $f(n)/\log_2 f(n)$ kroků
  - Simulace M se vstupem $x = \langle M \rangle \mathtt{1}\mathtt{0}^{n_0}$ skončí a
  - $D(x)$ přijme, právě když $M(x)$ odmítne

$$\boxed{L(D) \neq L(M)}$$

Časová hierarchie

Věta (Věta o deterministické časové hierarchii)

Pro každou časově konstruovatelnou funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existuje jazyk A, který je rozhodnutelný v čase $O(f(n))$, nikoli však v čase $o(f(n)/\log f(n))$.

Důsledek

Jsou-li $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkce, pro které platí, že $f_1(n) \in o(f_2(n)/\log f_2(n))$ a f_2 je časově konstruovatelná, potom

$$\mathrm{TIME}(f_1(n)) \subsetneq \mathrm{TIME}(f_2(n))$$

Polynomy a související funkce

Důsledek

Pro každá dvě reálná čísla $1 \leq \epsilon_1 < \epsilon_2$*,*

$$\mathrm{TIME}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \mathrm{TIME}(n^{\epsilon_2})$$

- Je-li ϵ_2 racionální číslo, pak
  - n^{ϵ_2} je časově konstruovatelná
    - Lze jednoduše ukázat pro přirozená čísla
    - Lze ukázat i pro racionální čísla
  - Ostrá inkluze plyne z časové hierarchie
- Je-li ϵ_2 iracionální číslo
  - Racionální čísla jsou hustá v reálných číslech
  - Existuje racionální číslo ϵ splňující $\epsilon_1 < \epsilon < \epsilon_2$
  - Z časové hierarchie a časové konstruovatelnosti n^{ϵ}

$$\mathrm{TIME}(n^{\epsilon_1}) \subsetneq \mathrm{TIME}(n^{\epsilon}) \subseteq \mathrm{TIME}(n^{\epsilon_2})$$

Polynomiální vs. exponenciální čas

Důsledek

$\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXPTIME}$

- Pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí $\mathrm{TIME}(n^k) \subseteq \mathrm{TIME}(2^n)$
- Podle časové hierarchie tedy

$$\mathrm{P} \subseteq \mathrm{TIME}(2^n) \subsetneq \mathrm{TIME}(2^{n^2}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

Vztahy mezi třídami

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} = \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- Jedna z inkluzí $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ musí být ostrá
- Jedna z inkluzí $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ musí být ostrá

Nevíme, která z inkluzí je ostrá

Další věty o hierarchii

- Věta o deterministické časové hierarchii lze ukázat i pro k-páskové stroje
  - Faktor $\log f(n)$ je způsoben redukcí počtu pásek z k na 2
- Věty o hierarchiích platí též pro RAM nebo pro nedeterministické třídy složitosti
  - Ve větách o časové hierarchii není třeba faktor $\log f(n)$

Splnitelnost a Coo-kova-Levinova věta

Výroková formule

- Spočetná množina výrokových proměnných $\{x_0, x_1, \dots\}$
- Logické spojky $\{\neg, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Definice (Výroková formule)

- Proměnná je formule
- Jsou-li φ a ψ formule, pak $\neg\varphi$, $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$ a $\varphi \leftrightarrow \psi$ jsou též formule
- Nic jiného nejsou formule

Ohodnocení a splnitelnost

- Ohodnocení $\mathbf{a}$ přiřazuje výrokovým proměnným hodnoty true/false ($1/0$, $\top/\bot$)
- Ohodnocení $\mathbf{a}$ splňuje formuli φ pokud se $\varphi(\mathbf{a})$ vyhodnotí na true
- Říkáme též, že jde o model formule φ
- Formule je splnitelná, pokud má model
- V opačném případě je formule nesplnitelná

Příklad

Formule

$$(x \lor y) \land (\neg x \lor z) \land (\neg y \lor \neg z)$$

je splněná ohodnocením $\{x \mapsto 1, y \mapsto 0, z \mapsto 1\}$

Konjunktivní normální forma

Literál je proměnná x nebo její negace $\neg x$

Klauzule je disjunkce literálů

- Například $x \vee \neg y \vee \neg z$
- Prázdná klauzule je sporná (false, $\bot$)

KNF formule je v **konjunktivní normální formě** pokud jde o konjunkci klauzulí

Příklad

Následující formule je v KNF

$$\varphi = \neg x \wedge (y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee z)$$

Nesplnitelná KNF

Následující formule v KNF je nesplnitelná

$$\varphi = \neg x \wedge (y \vee \neg z) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee z)$$

Nesplnitelnost lze ukázat rezolucí

$$\begin{tikzcd}
 & y \vee \neg z \arrow[dr] & & x \vee \neg y \arrow[dl] \arrow[dr] & & x \vee y \vee z \arrow[dl] & \\
\neg x \arrow[drr] & & x \vee \neg z \arrow[d] & & x \vee z \arrow[d] & & \neg x \vee z \arrow[dll] \\
 & & \neg z \arrow[dr] & & z \arrow[dl] & & \\
 & & & \bot & & &
\end{tikzcd}$$

Splnitelnost

Splnitelnost (SAT)	
Instance:	Formule φ v KNF.
Otázka:	Je φ splnitelná?

SAT patří do NP

- V polynomiálním čase lze ověřit, zda dané ohodnocení splňuje danou formuli

Patří SAT do P?

Cookova-Levinova věta

Věta (Cookova-Levinova)

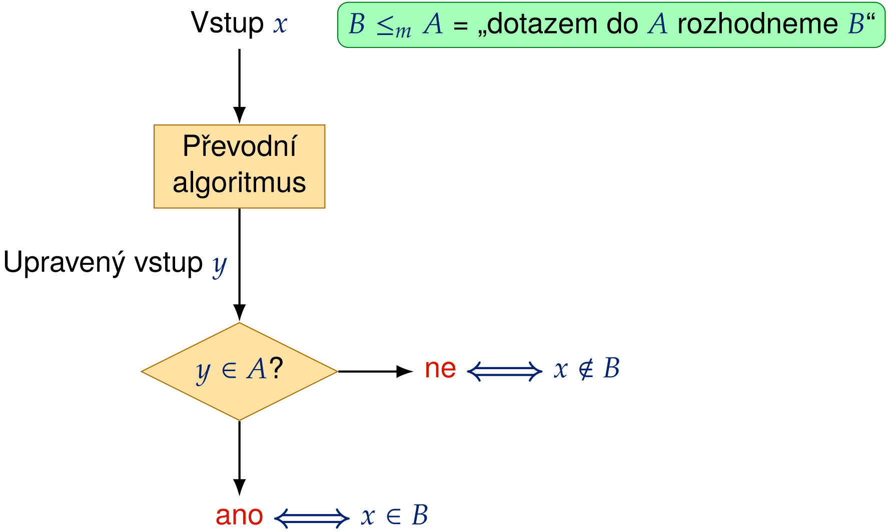
SAT patří do P právě když $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$.

Idea důkazu:

1. Zavedeme pojem polynomiální převoditelnosti
   - m-převoditelnost, kde převodní algoritmus pracuje v polynomiálním čase
2. Zavedeme pojem NP-úplného problému
   - Nejtěžší problémy v NP vzhledem k polynomiální převoditelnosti
   - Je-li nějaký NP-úplný problém v P, pak $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$
3. Ukážeme, že SAT je NP-úplný problém

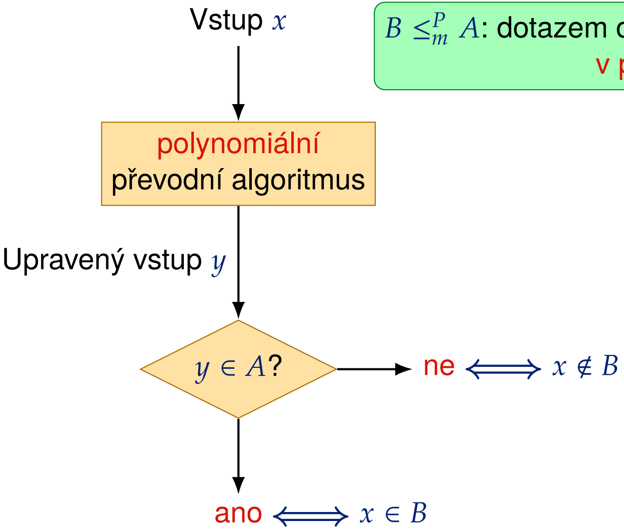
Polynomiální převoditelnost

m-převoditelnost (princip)



Polynomiální převoditelnost (princip)

$B \leq_m^P A$: dotazem do A rozhodneme B v polynomiálním čase

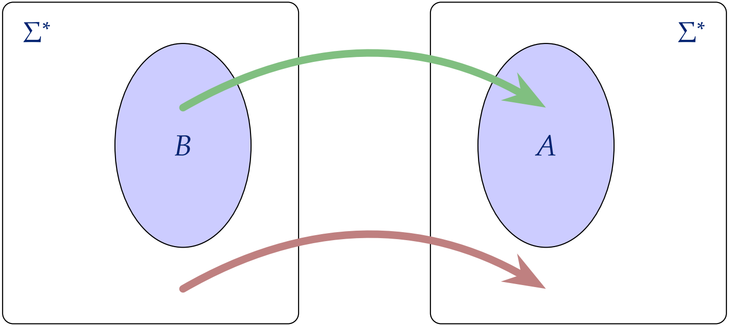


Polynomiální převoditelnost (definice)

Definice

Jazyk B je polynomiálně převoditelný na jazyk A, pokud existuje funkce $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ vyčíslitelná v polynomiálním čase, pro kterou platí

$$(\forall w \in \Sigma^*) \, [w \in B \Longleftrightarrow f(w) \in A]$$



Polynomiální převoditelnost (vlastnosti)

Definice

Jazyk B je polynomiálně převoditelný na jazyk A, pokud existuje funkce $f : \Sigma^* \mapsto \Sigma^*$ vyčíslitelná v polynomiálním čase, pro kterou platí

$$(\forall w \in \Sigma^*)\,[w \in B \Longleftrightarrow f(w) \in A]$$

- Označíme pomocí $B \leq_m^P A$
- $\leq_m^P$ je reflexivní a tranzitivní (kvaziuspořádání)
- Je-li $B \leq_m^P A$ a $A \in \mathrm{P}$, pak $B \in \mathrm{P}$.
- Je-li $B \leq_m^P A$ a $A \in \mathrm{NP}$, pak $B \in \mathrm{NP}$.

Neznáme-li žádný polynomiální algoritmus pro B, pak neumíme zkonstruovat ani polynomiální algoritmus pro A.

Polynomiální převoditelnost (reflexivita)

Lemma (Reflexivita polynomiální převoditelnosti)

Pro každý jazyk A platí, že $A \leq_m^P A$.

Důkaz.

- Funkce identity $\mathrm{id}(x) = x$ je vyčíslitelná v polynomiálním čase
- Pro každý řetězec $x \in \Sigma^*$ platí

$$x \in A \Leftrightarrow \mathrm{id}(x) \in A$$

$\square$

Polynomiální převoditelnost (tranzitivita)

Lemma (Tranzitivita polynomiální převoditelnosti)

Pro každé tři jazyky A, B a C: $A \leq_m^P B \wedge B \leq_m^P C \implies A \leq_m^P C$

- $A \leq_m^P B$ funkcí g
- $B \leq_m^P C$ funkcí h
- Definujme funkci $f(x) = h(g(x))$
  - f je vyčíslitelná v polynomiálním čase
- Pro každý řetězec $x \in \Sigma^*$ platí

$$x \in A \underbrace{\iff}_{A \leq_m^P B} g(x) \in B \underbrace{\iff}_{B \leq_m^P C} h(g(x)) \in C \quad \underbrace{\iff}_{f(x)=h(g(x))} \quad f(x) \in C$$

- $A \leq_m^P C$ funkcí f

Polynomiální převoditelnost srovnává dle obtížnosti

Lemma

Pokud $A \in \mathrm{P}$ a $B \leq_m^P A$, pak $B \in \mathrm{P}$.

- Uvažme TS M_A, který rozhoduje A v polynomiálním čase
- Popíšeme TS M_B, který rozhoduje B v polynomiálním čase

Výpočet M_B se vstupem x

$y \leftarrow f(x)$ `//` f `ukazuje, že` $B \leq_m^P A$
Pusť $M_A(y)$
if M_A přijal **then**
    přijmi
else
    odmítni

Polynomiální převoditelnost srovnává dle obtížnosti

Lemma

Pokud $A \in \mathrm{NP}$ *a* $B \leq_m^P A$*, pak* $B \in \mathrm{NP}$*.*

- Analogický důkaz případu třídy P
  - Je potřeba uvážit nedeterministický TS M_A
  - Konstrukce vede na nedeterministický TS M_B

3-KNF formule φ je v 3-KNF, pokud je v KNF a každá klauzule obsahuje právě 3 literály

3-SAT

Instance: Formule φ v 3-KNF.

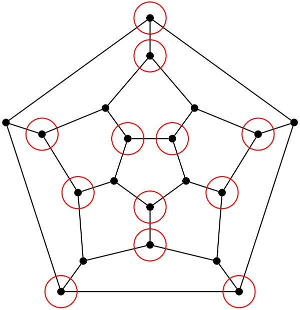
Otázka: Je φ splnitelná?

Vrcholové pokrytí

Vrcholové pokrytí

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$ a celé číslo $k \geq 0$.

Otázka: Existuje množina vrcholů $S \subseteq V$ velikosti nejvýš k, která obsahuje alespoň jeden vrchol z každé hrany $\{u, v\} \in E$ (tedy $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$)?



Desetistěn má vrcholové pokrytí velikosti $k = 12$

3-SAT a Vrcholové pokrytí

Věta

3-SAT je polynomiálně převoditelný na Vrcholové pokrytí.

3-KNF φ → převedeme → Graf G, celé číslo k

φ je splnitelná $\iff$ G má vrcholové pokrytí velikosti k

Převod 3-SAT na Vrcholové pokrytí

- Nechť φ je 3-KNF, která má
  - n proměnných $x_1, \ldots, x_n$
  - m klauzulí $C_1, \ldots, C_m$
  - Každá klauzule má právě 3 literály
- Popíšeme, jak sestrojit graf $G = (V, E)$ a číslo k

Příklad

Uvažme například 3-KNF

$$\begin{aligned}\varphi = {} & \overbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3)}^{C_1} \wedge \overbrace{(x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4)}^{C_2} \\ & \wedge \underbrace{(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)}_{C_3} \wedge \underbrace{(\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4)}_{C_4}\end{aligned}$$

Konstrukce grafu (krok 1)

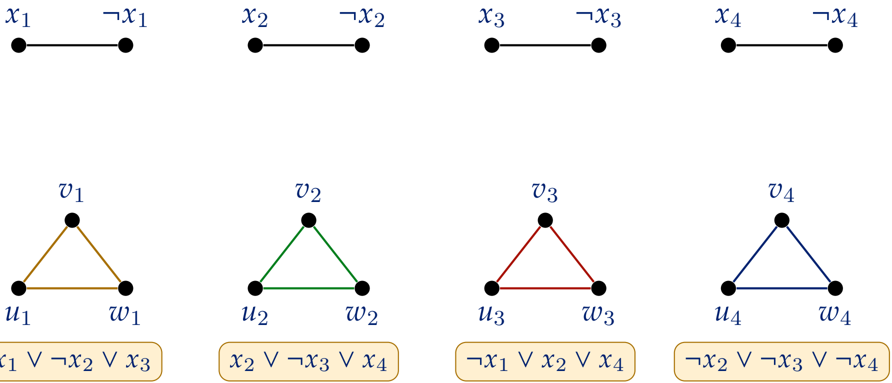
Pro každdou proměnnou x_i, $i = 1, \dots, n$

- přidáme dva vrcholy pro literály x_i, $\neg x_i$ a hranu $\{x_i, \neg x_i\}$

Konstrukce grafu (krok 2)

Pro každou klauzuli C_j, $j = 1, \dots, m$

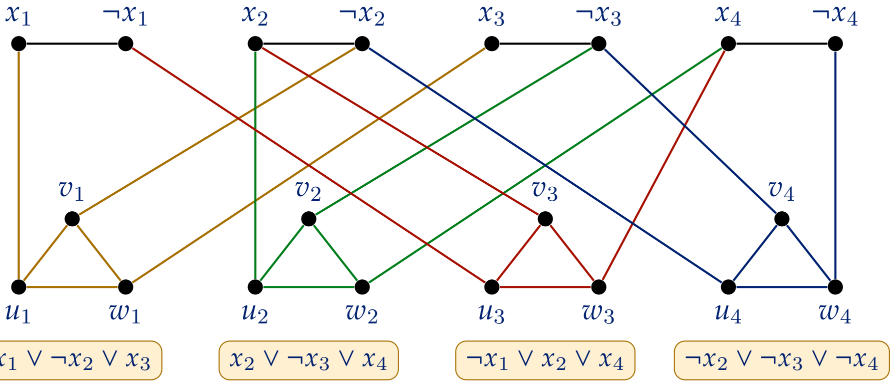
- Přidáme trojúhelník na nově přidané trojici vrcholů u_j, v_j, w_j



Konstrukce grafu (krok 3)

Pro každou klauzuli $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ s literály l_1, l_2, l_3

- Přidáme hrany $\{u_j, l_1\}$, $\{v_j, l_2\}$, $\{w_j, l_3\}$



Hodnota k

$$\boxed{k = 2m + n}$$

- 1 vrchol je třeba k pokrytí každé hrany $\{x_i, \neg x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$
- 2 vrcholy jsou třeba k pokrytí každého trojúhelníku $\{u_j, v_j, w_j\}$, $j = 1, \ldots, m$
- Vrcholové pokrytí musí obsahovat alespoň $2m + n$ vrcholů

Graf G má vrcholové pokrytí velikosti $k = 2m + n$ právě když formule φ je splnitelná.

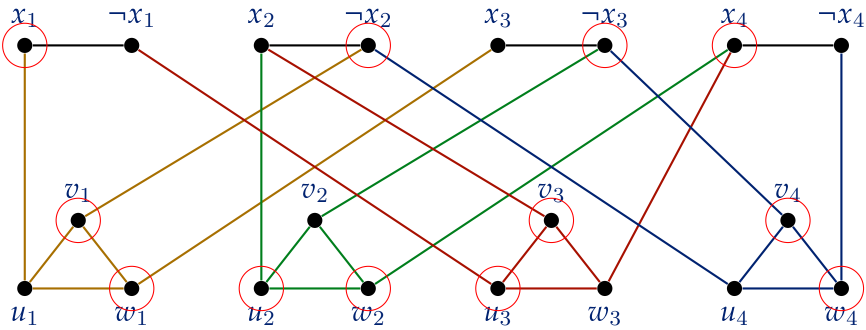
Důkaz „ $\Longrightarrow$ “

- Nechť $S \subseteq V$ je vrcholové pokrytí velikosti $k = 2m + n$
- Každá hrana $\{x_i, \neg x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ je pokryta právě jedním vrcholem
- Definujeme ohodnocení $\mathbf{a}$ tak, že pro každý index $i = 1, \ldots, n$

$$\mathbf{a}(x_i) = \begin{cases} 1 & x_i \in S \\ 0 & \neg x_i \in S \end{cases}$$

Model daný vrcholovým pokrytím

Model daný pokrytím: $\{x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1\}$



$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ | $x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4$ | $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4$ | $\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4$

Každá klauzule obsahuje splněný literál

$\mathbf{a}$ splňuje φ

- Uvažme klauzuli C_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$
- Předpokládejme, že $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$
- S obsahuje dva vrcholy trojúhelníku $\{u_j, v_j, w_j\}$
- Jeden vrchol trojúhelníku $\{u_j, v_j, w_j\}$ není v S
- Nechť $u_j \notin S$
  - Případy se zbylými dvěma vrcholy jsou symetrické
- Uvažme hranu $\{u_j, l_1\}$
- Protože $u_j \notin S$, l_1 musí být v S

$\Longrightarrow$ $\mathbf{a}(l_1) = 1$

$\Longrightarrow$ C_j je splněna ohodnocením $\mathbf{a}$

Ohodnocení $\mathbf{a}$ splňuje každou klauzuli $C_j \in \varphi$, jde o model.

Důkaz „ $\Longleftarrow$ “

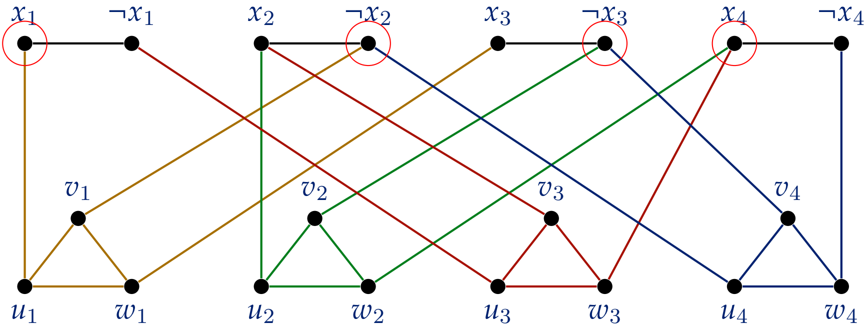
K danému splňující ohodnocení $\mathbf{a}$ definujeme množinu vrcholů S takto

- Pro každé $i = 1, \ldots, n$
  - Přidáme do S vrchol x_i pokud $\mathbf{a}(x_i) = 1$
  - Přidáme do S vrchol $\neg x_i$ pokud $\mathbf{a}(x_i) = 0$
- Pro každý trojúhelník $\{u_j, v_j, w_j\}$, $j = 1, \ldots, m$
  - Uvažme klauzuli $C_j = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$
  - Jeden z literálů je splněný ohodnocením $\mathbf{a}$
  - Předpokládejme, že literál l_1 je splněný
    - Případy s ostatními literály jsou symetrické
  - Hrana $\{l_1, u_j\}$ je již pokrytá vrcholem $l_1 \in S$
  - Zbylé vrcholy v_j, w_j přidáme do S

S je vrcholové pokrytí G velikosti $k = 2m + n$.

Vrcholové pokrytí dané modelem

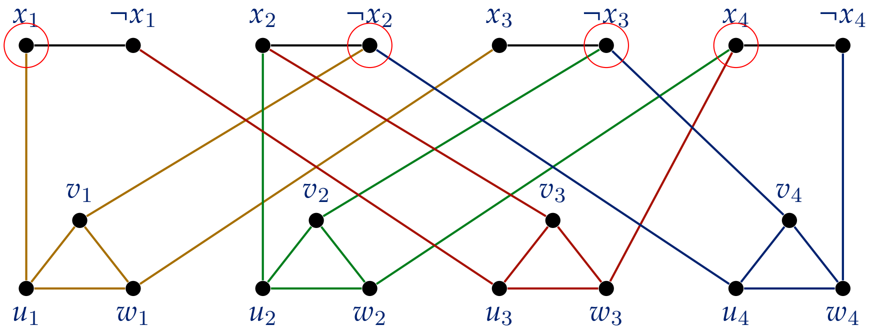
Předpokládejme model: $\{x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1\}$



$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ | $x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4$ | $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4$ | $\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4$

Vrcholové pokrytí dané modelem

Předpokládejme model: $\{x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1\}$

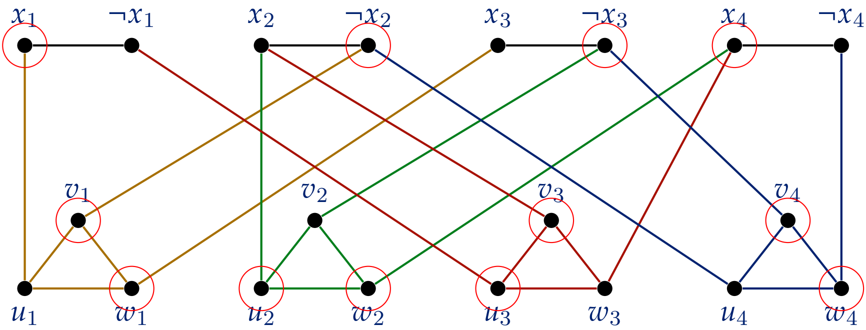


$x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$ | $x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4$ | $\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4$ | $\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4$

V každé klauzuli vybereme splněný literál

Vrcholové pokrytí dané modelem

Předpokládejme model: $\{x_1 \mapsto 1, x_2 \mapsto 0, x_3 \mapsto 0, x_4 \mapsto 1\}$



$x_1 \lor \neg x_2 \lor x_3$ | $x_2 \lor \neg x_3 \lor x_4$ | $\neg x_1 \lor x_2 \lor x_4$ | $\neg x_2 \lor \neg x_3 \lor \neg x_4$

Trojúhelníky pokryjeme zbylými vrcholy