Základy složitosti a vyčíslitelnosti

NTIN090

Petr Kučera

2021/22 (6. přednáška)

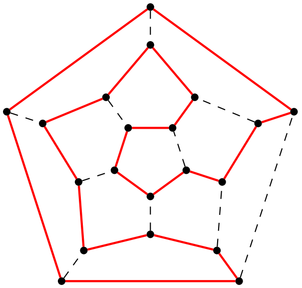
Problémy ověřitelné
v polynomiálním čase

Hamiltonovská kružnice

Hamiltonovská kružnice (HK)

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Otázka: Obsahuje G cyklus, který prochází všemi vrcholy?



- Lze navštívit každé město na mapě právě jednou a vrátit se domů?
- Jednoduše ověřitelné zda posloupnost vrcholů určuje hamiltonovskou kružnici
- Obtížné zjistit, zda daný graf obsahuje hamiltonovskou kružnici

Verifikátor čili ověřovatel

Verifikátorem pro jazyk A je algoritmus V, pro který platí, že

$$A = \{x \mid (\exists y)[V(x, y) \text{ přijme}]\}$$

Časovou složitost verifikátoru měříme pouze vzhledem k $|x|$

- Polynomiální verifikátor je takový, který pracuje v polynomiálním čase vzhledem k $|x|$
- Řetězec y zveme také certifikátem x
- Pokud $V(x, y)$ přijme, přečte jen prefix y polynomiální délky
- Stačí uvažovat polynomiální certifikáty y, které mají délku polynomiální v $|x|$

Verifikátor pro hamiltonovskou kružnici

Hamiltonovská kružnice (HK)

Instance: Neorientovaný graf $G = (V, E)$.

Otázka: Obsahuje G cyklus, který prochází všemi vrcholy?

Verifikátor V pro hamiltonovskou kružnici

Input: Graf $G = (V, E)$ a posloupnost vrcholů $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_\ell)$

if $\ell \neq |V|$ **then** odmítni
if $v_i = v_j$ pro nějakou dvojici indexů $i \neq j$ **then** odmítni
for $i = 1$ **to** $n - 1$ **do**
  if $\{v_i, v_{i+1}\} \notin E$ **then** odmítni
if $\{v_n, v_1\} \notin E$ **then** odmítni
přijmi

Třída NP

Definice

NP je třídou jazyků, které mají polynomiální verifikátory.

- Odpovídá třídě úloh, u nichž jsme schopni v polynomiálním čase ověřit, zda daný řetězec je řešením
- NP je třída jazyků, přijímaných nedeterministickými Turingovými stroji v polynomiálním čase
- Nedeterminismus zde odpovídá „hádání“ správného certifikátu y pro vstup x

P vs. NP

P jazyky, pro něž je možné rychle rozhodnout, zda do dané slovo patří do jazyka

NP jazyky, pro něž je možné rychle ověřit že dané slovo patří do jazyka

Triviálně $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$

Otázka, zda $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ je otevřená.

Nedeterministický Turingův stroj

Nedeterministický Turingův stroj (NTS) je pětice $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

- Q, Σ, q_0, F mají týž význam jako u „obyčejného“ deterministického Turingova stroje (DTS).
- Rozdíl oproti DTS je v přechodové funkci, nyní

$$\delta : Q \times \Sigma \mapsto \mathcal{P}(Q \times \Sigma \times \{L, N, R\}).$$

- Možné představy
  - NTS M v každém kroku „uhodne“ nebo „vybere“ správnou instrukci.
  - NTS M vykonává všechny možné instrukce současně a nachází se během výpočtu ve více konfiguracích současně.

> Nedeterministický Turingův stroj není reálný výpočetní model ve smyslu silnější Churchovy-Turingovy teze.

Jazyk přijímaný NTS

- Výpočet NTS M nad slovem x je posloupnost konfigurací $C_0, C_1, C_2, \ldots$, kde
  - C_0 je počáteční konfigurace se vstupem x a
  - z C_i do C_{i+1} lze přejít pomocí přechodové funkce δ
- Výpočet je přijímající, pokud je konečný a v poslední konfiguraci výpočtu se M nachází v přijímajícím stavu
- NTS M přijme slovo x pokud $M(x)$ připouští přijímající výpočet
- Jazyk slov přijímaných NTS M označíme pomocí $L(M)$

Časová a prostorová složitost NTS

Definice

Nechť M je nedeterministický Turingův stroj a nechť $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ je funkce.

- Řekneme, že M pracuje v čase $f(n)$, pokud každý výpočet M nad libovolným vstupem x délky $|x| = n$ skončí po provedení nejvýše $f(n)$ kroků.
- Řekneme, že M pracuje v prostoru $f(n)$, pokud každý výpočet M nad libovolným vstupem x délky $|x| = n$ skončí a využije nejvýše $f(n)$ buněk pracovní pásky.

Základní nedeterministické třídy složitosti

Definice

Nechť $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ je funkce, potom definujeme třídy:

$\mathrm{NTIME}(f(n))$ třída jazyků přijímaných nedeterministickými TS, které pracují v čase $O(f(n))$.

$\mathrm{NSPACE}(f(n))$ třída jazyků přijímaných nedeterministickými TS, které pracují v prostoru $O(f(n))$.

Pro každou funkci $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ platí

$$\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$$
$$\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$$

NP = nedeterministicky polynomiální

Věta (Alternativní definice třídy NP)

Třída NP je třída jazyků přijímaných nedeterministickými Turingovými stroji v polynomiálním čase, tj.

$$\mathrm{NP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k).$$

Důkaz.

Ve dvou krocích

1. $\mathrm{NP} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$
2. $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k) \subseteq \mathrm{NP}$

$\square$

Důkaz $\mathrm{NP} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$

- Předpokládejme, že $L \in NP$
- Existuje tedy polynomiální verifikátor $V(x, y)$, který splňuje
  - $L = \{x \mid (\exists y)[V(x, y)$ přijme$]\}$
  - $V(x, y)$ pracuje v čase $p(|x|)$ pro nějaký polynom $p(n)$
- Stačí uvažovat řetězce y délky $p(|x|)$
  - V nemá čas přečíst více znaků
- Platí tedy

$$L = \{x \mid (\exists y)[|y| \leq p(|x|) \wedge V(x, y) \text{ přijme}]\}$$

Důkaz $\mathrm{NP} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k)$ (dokončení)

- Polynomiální NTS M, který přijímá L pracuje následujícím způsobem

---

Výpočet M se vstupem x

---

1 Nedeterministicky vyber řetězec y délky $p(|x|)$
2 Pusť $V(x, y)$
3 **if** $V(x, y)$ přijme **then** přijmi **else** odmítni

$$
\begin{aligned}
x \in L &\iff (\exists y)[|y| \leq p(|x|) \wedge V(x, y) \text{ přijme}] \\
&\iff \text{nějaký výpočet } M(x) \text{ přijme} \\
&\iff x \in L(M)
\end{aligned}
$$

M přijímá L v čase $O(p(n))$.

Důkaz $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k) \subseteq \mathrm{NP}$

- Nechť L je přijímán nějakým NTS $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Předpokládejme, že M pracuje v polynomiálním čase $p(n)$
- Označme $r = \max_{q \in Q, a \in \Sigma} |\delta(q, a)|$
  - maximální počet větvení přechodu dle δ
  - $r \leq |Q| \cdot |\Sigma| \cdot 3$
  - r je konstanta, která závisí jen na M a nezávisí na vstupu
- Výpočet M se vstupem x lze popsat řetězcem

$$y \in \{1, \ldots, r\}^{p(|x|)}$$

- Pro $i = 1, \ldots, p(|x|)$, y_i označuje větev zvolenou v kroku i

Důkaz $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NTIME}(n^k) \subseteq \mathrm{NP}$ (dokončení)

Výpočet polynomiálního verifikátoru $V(x, y)$ pro jazyk L

```
Simuluj M(x) s větvením podle y
if větev výpočtu M(x) popsaná y přijme then
    přijmi
else
    odmítni
```

$$
\begin{aligned}
x \in L \iff & \text{ nějaký výpočet } M(x) \text{ přijme} \\
\iff & (\exists y)[|y| \leq p(|x|) \text{ a simulace } M(x) \\
& \qquad \text{ s větvením podle } y \text{ přijme}] \\
\iff & (\exists y)[|y| \leq p(|x|) \text{ a } V(x, y) \text{ přijme}]
\end{aligned}
$$

V je polynomiální verifikátor pro L, tedy $L \in \mathrm{NP}$.

Základní vztahy

Nedeterministický čas a deterministický prostor

Věta

Pro každou funkci $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ platí, že

$$\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$$

- Nechť L je přijímán NTM M v čase $g(n) = O(f(n))$
- Předpokládejme, že $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
- Označme $r = \max_{q \in Q, a \in \Sigma} |\delta(q, a)|$
  - maximální počet větvení přechodu dle δ
  - $r \leq |Q| \cdot |\Sigma| \cdot 3$ je konstanta, která závisí jen na M
- Výpočet M se vstupem x lze popsat řetězcem $y \in \{1, \ldots, r\}^{g(|x|)}$
- Pro $i = 1, \ldots, g(|x|)$, y_i označuje větev zvolenou v kroku i
- Popíšeme TM M', který rozhoduje L v prostoru $O(f(n))$

Důkaz (část 2)

První nápad

Výpočet M' se vstupem x

```
forall y ∈ {1, ..., r}^{g(|x|)} do
    Simuluj M(x) s větvením podle y
    if větev výpočtu M(x) popsaná y přijme then
        přijmi
reject
```

M' by musel znát hodnotu $g(|x|)$.

Co když $g(|x|)$ není vyčíslitelná v prostoru $O(g(|x|))$?

Důkaz (část 3)

Výpočet M' se vstupem x

$k \leftarrow 1$
repeat
    forall $y \in \{1, \ldots, r\}^k$ **do**
        Simuluj $M(x)$ s větvením podle y
        if větev výpočtu $M(x)$ popsaná y přijme **then** přijmi
    $k \leftarrow k + 1$
until všechny simulace $M(x)$ větvící podle y odmítly
odmítni

- M pracuje v čase $g(n) = O(f(n))$

$\Longrightarrow$ každý výpočet $M(x)$ skončí do $g(n)$ kroků

$\Longrightarrow$ $M'(x)$ skončí výpočet s $k \leq g(|x|)$

Důkaz (část 4)

Prostorové nároky

- Vždy platí $k \leq g(|x|)$
- Prostor $O(g(n)) = O(f(n))$ je potřeba pro uložení y
- Prostor $O(g(n)) = O(f(n))$ je potřeba k simulaci $M(x)$ podle y
- Dohromady M' pracuje v prostoru $O(f(n))$

Důkaz (část 5)

$$\boxed{L = L(M')}$$

- Pokud $M(x)$ má přijímající výpočet
  - Simulace $M(x)$ přijme s nějakým y, $|y| \leq g(|x|)$
  - $M'(x)$ přijme
- Pokud $M(x)$ nemá přijímající výpočet
  - Pro hodnotu $k = g(|x|)$, simulace $M(x)$ s každým y odmítne
  - $M'(x)$ odmítne

$\boxed{M' \text{ rozhoduje } L \text{ v prostoru } O(f(n))}$

NP and PSPACE

Věta

Pro každou funkci $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *platí, že*

$$\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$$

Důsledek

$\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$

Model TS s menším než lineárním prostorem

Pro prostor menší než lineární uvažujeme vícepáskový TS:

Vstupní páska je jen pro čtení

Pracovní pásky jsou pro čtení i zápis

Výstupní páska je jen pro zápis a hlava se hýbe jen vpravo

- Do prostoru se počítá jen obsah pracovních pásek.
- Součástí konfigurace je
  - stav,
  - poloha hlavy na vstupní pásce,
  - polohy hlav na pracovních páskách a
  - obsah pracovních pásek.
- Konfigurace neobsahuje vstupní slovo.

Další prostorové třídy

- Třída problémů řešitelných v logaritmickém prostoru

$$\mathrm{L} = \mathrm{SPACE}(\log_2 n)$$

- Třída jazyků přijímaných NTS v logaritmickém prostoru

$$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$$

- Třída jazyků přijímaných NTS v polynomiálním prostoru

$$\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(n^k)$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Důsledek

Je-li $f(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) \geq \log_2 n$ a je-li $g(n)$ funkce, pro kterou platí $f(n) = o(g(n))$, pak

$$\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{g(n)}).$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ *a každý jazyk* L *platí, že*

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Idea důkazu

- L je přijímán nějakým NTS M v prostoru $O(f(n))$
- Pro vstup x, definujeme graf konfigurací $G_{M,x}$
  - Vrcholy = možné konfigurace výpočtu $M(x)$
  - Hrany = možné přechody mezi konfiguracemi
- Popíšeme TS M', který rozhoduje L
  - M' se vstupem x hledá v $G_{M,x}$ cestu z počáteční konfigurace do nějaké přijímající konfigurace

Graf konfigurací

Definice

Nechť $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je NTS pracující v prostoru $f(n)$ a x vstupní řetězec. Graf konfigurací výpočtů M nad x je orientovaný graf $G_{M,x} = (V, E)$, kde

- Vrcholy V reprezentují možné konfigurace výpočtů $M(x)$
- $(C_1, C_2) \in E$ je-li možné z C_1 do C_2 přejít přechodem dle δ

- Označme C_0^x počáteční konfiguraci výpočtu $M(x)$

$M(x)$ přijme, právě když v $G_{M,x}$ obsahuje cestu z C_0^x do nějaké přijímající konfigurace C_F.

Velikost grafu konfigurací

Lemma

- *Uvažme funkci* $f(n) \geq \log_2 n$
- *Uvažme NTS* $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$*, který pracuje v prostoru* $f(n)$
- *Nechť* x *je vstup délky* $n = |x|$
- *Nechť* $G_{M,x} = (V, E)$ *je odpovídající graf konfigurací*

Pak $|V| \leq 2^{c_M f(n)}$ *pro nějakou konstantu* c_M

Budeme předpokládat, že M má jednu vstupní pásku jen pro čtení a jednu pracovní pásku.

Velikost $G_{M,x}$ (důkaz)

$$|V| \le \overbrace{|Q|}^{\text{stav}} \cdot \overbrace{(n+2)}^{\text{hlava na vstupní pásce}} \cdot \overbrace{f(n)}^{\text{hlava na pracovní pásce}} \cdot \overbrace{|\Sigma|^{f(n)}}^{\text{slovo na pracovní pásce}}$$

Konfigurace se skládá z následujících prvků

- stav
  - $|Q|$ různých stavů
- poloha hlavy na vstupní pásce
  - $n+2$ možných poloh
  - včetně prázdných políček kolem vstupu
- poloha hlavy na pracovní pásce
  - $f(n)$ možných poloh
- obsah pracovní pásky
  - slovo $w \in \Sigma^*$ na pásce má délku $|w| \le f(n)$
  - $|\Sigma|^{f(n)}$ různých slov

Počet konfigurací

$$
\begin{aligned}
|V| &\le |Q| \cdot (n+2) \cdot f(n) \cdot |\Sigma|^{f(n)} \\
&= 2^{\log_2 |Q|} \cdot 2^{\log_2 (n+2)} \cdot 2^{\log_2 f(n)} \cdot 2^{f(n) \log_2 |\Sigma|} \\
&= 2^{\log_2 |Q| + \log_2 (n+2) + \log_2 f(n) + f(n) \log_2 |\Sigma|} \\
&\le 2^{f(n)(\log_2 |Q| + 2 + 1 + \log_2 |\Sigma|)} && (f(n) \ge \log_2 n)
\end{aligned}
$$

Položíme-li $c_M = \log_2 |Q| + 2 + 1 + \log_2 |\Sigma|$, pak

$$|V| \le 2^{c_M f(n)}$$

$$|E| \le |V|^2 \le 2^{2 c_M f(n)}$$

Vztah prostoru a času

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ a každý jazyk L platí, že

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

Idea důkazu

- Předpokládejme, že L je přijímán nějakým M v prostoru $O(f(n))$
- Pro vstup x, definujeme graf konfigurací $G_{M,x}$
  - Vrcholy = možné konfigurace výpočtu $M(x)$
  - Hrany = možné přechody mezi konfiguracemi
- Popíšeme TS M', který rozhoduje L
  - M' se vstupem x hledá v $G_{M,x}$ cestu z počáteční konfigurace do nějaké přijímající konfigurace

Vztah prostoru a času (důkaz)

Výpočet M' se vstupem x

```
Sestav počáteční konfiguraci C_0^x výpočtu M(x)
Projdi graf G_{M,x} prohledáváním do hloubky (DFS) počínaje ve
  vrcholu C_0^x
if DFS narazí přijímající konfiguraci then
    přijmi
else
    odmítni
```

- DFS nepotřebuje mít před spuštěním zkonstruovaný graf $G_{M,x}$
  - zná počáteční vrchol C_0^x
  - seznam sousedů $\Gamma(C)$ aktuálního vrcholu C lze zkonstruovat v každém kroku pomocí přechodové funkce δ stroje M

> M' nemusí znát hodnotu $f(|x|)$.

Vztah prostoru a času (důkaz)

- DFS lze provést v polynomiálním čase na RAMu i TS
- Turingův stroj M' pracuje v polynomiálním čase vzhledem k velikosti grafu $G_{M,x}$
- Pracuje v čase

$$O(|V|^k) = O(2^{kc_M f(n)}) = O(2^{c_L f(n)})$$

pro nějaké konstanty $k \geq 1$ a $c_L \geq kc_M$

Vztah prostoru a čase (poznámky)

Věta (Vztah prostoru a času)

Pro každou funkci $f(n) \geq \log_2 n$ *a každý jazyk* L *platí, že*

$$L \in \mathrm{NSPACE}(f(n)) \implies (\exists c_L \in \mathbb{N}) \left[L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L f(n)}) \right].$$

- c_L závisí na jazyku L
- Různé jazyky mají různé konstanty

Z věty NEPLYNE

- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{f(n)})$
- $\mathrm{NSPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{cf(n)})$ pro nějakou konstantu c

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

$\mathrm{NL} = \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$

$\mathrm{P} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{TIME}(n^k)$

Důsledek

$\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$

- Předpokládejme, že $L \in \mathrm{NSPACE}(\log_2 n)$
- Podle věty o vztahu prostoru a času existuje konstanta $c_L \in \mathbb{N}$, pro kterou platí

$$L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L \log_2 n}) = \mathrm{TIME}(n^{c_L}) \subseteq \mathrm{P}$$

NPSPACE ⊆ EXPTIME

$$\mathrm{NPSPACE} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{NSPACE}(n^k)$$

$$\mathrm{EXPTIME} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{TIME}(2^{n^k})$$

Důsledek

$\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$

- Předpokládejme, že $L \in \mathrm{NPSPACE}$

$\implies$ $L \in \mathrm{NSPACE}(n^k)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$

- Podle věty o vztahu prostoru a času existuje konstanta $c_L \in \mathbb{N}$, pro kterou platí

$$L \in \mathrm{TIME}(2^{c_L n^k}) \subseteq \mathrm{TIME}(2^{n^{k+1}}) \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L}\subseteq\mathrm{NL}\subseteq\mathrm{P}\subseteq\mathrm{NP}\subseteq\mathrm{PSPACE}\subseteq\mathrm{NPSPACE}\subseteq\mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času

Vztahy mezi třídami

Věta

Platí následující řetězec inkluzí:

$$\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$$

- $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{NL}$, $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$, $\mathrm{PSPACE} \subseteq \mathrm{NPSPACE}$ plyne z
  - Pro každou funkci $f(n)$
    - $\mathrm{TIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(f(n))$
    - $\mathrm{SPACE}(f(n)) \subseteq \mathrm{NSPACE}(f(n))$
- $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$ plyne z
  - $\mathrm{NTIME}(f(n)) \subseteq \mathrm{SPACE}(f(n))$ pro každou funkci $f(n)$
- $\mathrm{NL} \subseteq \mathrm{P}$, $\mathrm{NPSPACE} \subseteq \mathrm{EXPTIME}$ plyne ze vztahu prostoru a času