VYSOKOŠKOLSKÉ SKRIPTÁ

Matematicko-fyzikálna fakulta Univerzity Komenského

Zbyněk Kubáček, Ján Valášek

CVIČENIA Z MATEMATICKEJ ANALÝZY I

1989

PREDSLOV

„Človek, ktorý nedokáže hovoriť tak,
aby mu ostatní rozumeli, je idiot.
Chápeš ma?
„Nie, otec."

Predslov je pre zúfalých autorov často poslednou príležitosťou napraviť, čo sa ešte dá. Chápeme sa preto možnosti vysvetliť zachmúrenému čitateľovi, ako sme to vlastne mysleli.

Skriptá Cvičenia z matematickej analýzy I sú určené pre študentov prvého ročníka odboru Matematika a tých študentov prvého ročníka odboru Učiteľstvo všeobecnovzdelávacích predmetov, ktorých aprobačným predmetom je matematika; obsahujú cvičenia k látke preberanej v prvom semestri.

Dvojitou čiarou sú v týchto skriptách označené definície a tie tvrdenia, na ktoré sa čitateľ môže - bez toho, že by ich dokazoval - odvolávať pri riešení za nimi nasledujúcich úloh. Teda: a/ pri riešení príkladu sa nemožno odvolávať na tvrdenia uvedené až za ním; b/ riešenie musí obsahovať dôkazy všetkých ostatných použitých tvrdení.

Jednoduchou čiarou sú označené riešenia príkladov uvedené priamo v texte.

V každej kapitole možno rozlíšiť dve časti; druhá z nich (doplňujúca) má vždy názov Ďalšie príklady. Do prvej (hlavnej) časti každej kapitoly sme zaradili úlohy, ktoré pokladáme za základné, odsek Ďalšie príklady obsahuje aj trocha náročnejšie cvičenia. (Skoro v každej študijnej skupine sa totiž nájdu študenti, ktorí príklady preberané na cvičeniach už ovládajú alebo si to aspoň myslia. Nech si teda ticho prepočítavajú úlohy z odseku Ďalšie príklady a nedeprimujú svojím znudeným výrazom cvičiaceho. Tým samozrejme nechceme povedať, že by tieto úlohy boli neprístupné pre ostatných študentov.)

V poslednej časti skrípt sú uvedené výsledky všetkých výpočtových príkladov a návody k mnohým dôkazovým. Najmä druhá z týchto skutočností by mohla pôsobiť demoralizujúco, preto sa pri nej zastavme. Cieľom zbierky úloh nie je podľa nášho názoru študenta odradiť, ale niečo ho naučiť. Či sa niečo naučí neborák, štyri hodiny bezvýsledne riešiaci nejaké cvičenie, je otázne.

Samozrejme, že najnevhodnejším možným postupom je prečítať si zadanie a hneď si vzadu nalistovať návod; človek sa tak iste veľa nenaučí. Morálne právo uchýliť sa k návodu dáva až predchádzajúca neúspešná snaha o nájdenie riešenia. (Celý tento odstavec sa napokon rovnako vzťahuje na riešené príklady.) Vzadu uvedené návody nie sú samozrejme jediné možné, iné postupy môžu byť rovnako správne (nehovoriac už o chybách a nedopatreniach, ktoré sa vo výsledkoch a návodoch zákonite vyskytnú).

Na úlohu, ktorá je súčasťou príkladu pozostávajúceho z viacerých zadaní, sa odvolávame vždy (aj v rámci toho istého príkladu) dvojčíslom: napr. na druhú úlohu v príklade 4 sa odvolávame ako na pr. 4.2. Pokiaľ sme u niektorého príkladu nepovažovali za vhodné zaradiť do poslednej časti skrípt návod na jeho riešenie, má jeho číslo index $_o$. Pokiaľ je niektorý príklad formulovaný ako tvrdenie, očakávame, že ho čitateľ dokáže, preto nie všetky dôkazové príklady sa začínajú „Dokážte, že ...".

Napokon ešte jedna poznámka: goniometrické, exponenciálne a logaritmické funkcie sú zväčša na cvičeniach potrebné skôr, než sa ich podarí na prednáške, resp. v učebnici korektne zaviesť. Pri zostavovaní príkladov sme preto od začiatku považovali tieto funkcie a ich vlastnosti (grafy, goniometrické vzorce a pod.) za známe.

Ďakujeme na tomto mieste všetkým, ktorí prispeli k výslednej podobe rukopisu týchto skrípt. Sú to predovšetkým recenzenti doc. RNDr. Jozef Vencko, CSc. a RNDr. Igor Bock, CSc., ďalej RNDr. Zuzana Ondrejková, RNDr. Ivan Kupka, Ing. Jiří Kubáček, CSc., RNDr. Iveta Kundracíková a RNDr. Viera Čerňanová. Za mimoriadnu ochotu, s ktorou nám vyšiel v ústrety, sme zaviazaní vedúcemu Vydavateľského oddelenia RUK Ing. Antonínovi Skovajsíkovi.

ÚVOD (VÝROKY, DÔKAZY)

„Prosím také, aby čtenář nepovažoval tyto vědomě neúplné poznámky za nějaký (sebe elementárnější) úvod do matematické logiky. Šlo mně jenom o to, abychom si ujasnili způsob vyjadřování, kterého ostatně nadaný matematik užívá intuitivně s neomylnou správností."

(Vojtěch Jarník: Diferenciální počet (II))

Výroky. V matematike sa stretávame s tvrdeniami, o ktorých má zmysel povedať, že sú pravdivé alebo nepravdivé. Také tvrdenia sa nazývajú výroky.

Zložené výroky a ich negovanie. Z výrokov A, B môžeme pomocou operácií negácie (označenie $\neg$), konjunkcie ($\wedge$), disjunkcie ($\vee$), implikácie ($\Rightarrow$) a ekvivalencie ($\Leftrightarrow$) vytvoriť nové, tzv. zložené výroky:

$\neg A$	negácia výroku A
$A \wedge B$	„A a súčasne B", „A a B"; namiesto $A \wedge B$ sa často píše A,B
$A \vee B$	„A alebo B", „alebo A alebo B"
$A \Rightarrow B$	„ak A, tak B", „nech A, potom B", „A je postačujúca podmienka pre B", „B je nutná podmienka pre A"
$A \Leftrightarrow B$	„A vtedy a len vtedy, keď B", „A práve vtedy, keď B", „A je nutná a postačujúca podmienka pre B".

Pravdivosť týchto zložených výrokov závisí len na pravdivosti výrokov A, B, a to nasledovne (1 označuje, že daný výrok je pravdivý; 0, že je nepravdivý):

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Pre negáciu zložených výrokov platia tieto pravidlá:

výrok	negácia
$\neg A$	A
$A \wedge B$	$\neg A \vee \neg B$
$A \vee B$	$\neg A \wedge \neg B$
$A \Rightarrow B$	$A \wedge \neg B$
$A \Leftrightarrow B$	$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

Často budeme využívať, že pre ľubovoľné výroky A, B je

1. implikácia $A \Rightarrow B$ rovnocenná so svojou obmenou (kontrapozíciou) $\neg B \Rightarrow \neg A$;
2. ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ rovnocenná s výrokom $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Každá definícia v matematike má podobu ekvivalencie. Je však zvykom nevyjadrovať v definícii symbol „$\Leftrightarrow$" slovami „vtedy a len vtedy", ale slovom „ak". Teda napr. definíciu v slovnej podobe „funkcia sa nazýva rastúca, ak platí ..." treba chápať ako ekvivalenciu „funkcia je rastúca $\Leftrightarrow$ ...".

<u>Výrokové formy. Všeobecné a existenčné výroky a ich negovanie.</u> Výroková forma je výraz, ktorý síce nie je výrokom, ale obsahuje premenné, ktorých vhodným nahradením vznikne výrok (napr. výroková forma $x^2 + y \geq 0 \wedge y < 0$ obsahuje dve také premenné). Tvorenie zložených výrokových foriem je analogické tvoreniu zložených výrokov.

Nech $\varphi(x)$ je výroková forma, v ktorej možno dosadzovať za jedinú premennú x, a A je ľubovoľná neprázdna množina obsahujúca len také prvky, ktorých dosadením do $\varphi(x)$ vznikne výrok.

Výrok „pre všetky $x \in A$ platí $\varphi(x)$" - symbolicky ho zapisujeme

$$\forall x \in A: \ \varphi(x)$$

sa nazýva všeobecný; symbol $\forall$ zastupujúci slová „pre všetky" je tzv. všeobecný (alebo veľký) kvantifikátor. (Častá slovná podoba všeobecného výroku $\forall x \in A: \varphi(x)$ je „nech $x \in A$, potom (platí) $\varphi(x)$" alebo „ak $x \in A$, tak (platí) $\varphi(x)$".)

Výrok „existuje $x \in A$ také, že platí $\varphi(x)$" - symbolicky

$$\exists x \in A: \ \varphi(x)$$

sa nazýva existenčný výrok; symbol $\exists$ vyjadrujúci slovo „existuje" („pre niektoré") je tzv. existenčný (malý) kvantifikátor.

Pre negáciu všeobecných a existenčných výrokov platia tieto pravidlá:

výrok	negácia	
$\forall x \in A: \ \varphi(x)$	$\exists x \in A: \neg \varphi(x)$	
$\exists x \in A: \ \varphi(x)$	$\forall x \in A: \neg \varphi(x)$	(*)

Ak uplatníme všeobecný (alebo existenčný) kvantifikátor na premennú x_1 vo výrokovej forme $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - v ktorej možno dosadzovať za n premenných $x_1, \dots, x_n$ $(n \geq 2)$ - dostaneme výrokovú formu $\forall x_1 \in A: \ \varphi(x_1, \dots, x_n)$ $(\exists x_1 \in A: \ \varphi(x_1, \dots, x_n))$, v ktorej možno dosadzovať už len za $n - 1$ premenných $x_2, \ldots, x_n$ (za premennú viazanú kvantifikátorom už dosadzovať nemožno; predpokladáme samozrejme, že $A \neq \emptyset$ a že pre každé $a \in A$ je výraz $\varphi(a, x_2, \ldots, x_n)$ opäť výrokovou formou). Na premennú x_2 opäť môžeme uplatniť kvantifikátor atď. Ak v poradí posledný použitý - tj. pri zápise prvý - kvantifikátor je veľký (malý), dostaneme takýmto postupom všeobecný (existenčný) výrok.

Pravidlo pre negovanie takto získaných výrokov (možno ho odvodiť z pravidiel (*)) dokumentujme nasledujúcim príkladom: negáciou výroku

$$\forall x \in R \quad \forall y \in R \quad \exists \alpha > 0 \quad \exists \beta \in \langle 0, 2\pi): x = \alpha . \sin\beta \wedge y = \alpha . \cos\beta \qquad {}^{*)}$$

je výrok

$$\exists x \in R \quad \exists y \in R \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \langle 0, 2\pi): x \neq \alpha . \sin\beta \vee y \neq \alpha . \cos\beta$$

(tj. každý veľký kvantifikátor sme zamenili malým a naopak, výrokovú formu $x = \alpha . \sin\beta \wedge$ $\wedge\, y = \alpha . \cos\beta$ sme nahradili jej negáciou). Treba si uvedomiť, že nie všetky výroky obsahujúce kvantifikátory majú podobu, na ktorú sa vzťahuje uvedené pravidlo. Nemá ju napr. výrok $(\exists x > 0: \sin x = \operatorname{tg} x) \Rightarrow (\exists x < 0: \sin x = \operatorname{tg} x)$, ktorého negáciu $(\exists x > 0: \sin x = \operatorname{tg} x) \wedge$ $\wedge\, (\forall x < 0: \sin x \neq \operatorname{tg} x)$ tvoríme ako negáciu implikácie.

Pri zápisoch aj slovných vyjadreniach všeobecných výrokov sa často vynecháva veľký kvantifikátor; typickým príkladom sú matematické vzorce. Napr. namiesto

$$\forall x, y \in R: (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

zvyčajne píšeme

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 , \quad x, y \in R$$

alebo (ak je z kontextu jasné, že uvažujeme len $x, y \in R$) iba

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2.$$

Preto často možno poznať len z celkovej súvislosti, či určitý výraz je všeobecný výrok alebo výroková forma.

Všeobecne o dôkazoch. Pod dôkazom rozumieme odvodenie daného výroku z iných pravdivých výrokov. Každý dôkaz možno rozložiť na reťazec jednoduchých krokov, nazývaných spravidla úsudky.

Uveďme najprv dva spôsoby dôkazu implikácie. Priamym dôkazom implikácie $A \Rightarrow B$ nazývame postup, ktorým reťazcom úsudkov odvodíme výrok B z výroku A (teda schématicky: platnosť implikácie $A \Rightarrow B$ vyvodíme z platnosti implikácií $A \Rightarrow B_1$, $B_1 \Rightarrow B_2, \ldots, B_n \Rightarrow B$). Dôkaz, pri ktorom týmto spôsobom dokazujeme namiesto implikácie $A \Rightarrow B$ jej obmenu (kontrapozíciu) $\neg B \Rightarrow \neg A$, sa nazýva nepriamy dôkaz implikácie $A \Rightarrow B$. (Ďalší možný spôsob dôkazu implikácie - dôkaz sporom - uvedieme v súvislosti s nasledujúcimi úvahami.)

Len z platnosti implikácie $A \Rightarrow B$ nevyplýva vo všeobecnosti platnosť výroku A ani platnosť výroku B. Ak však spolu s implikáciou $A \Rightarrow B$ platí aj výrok A, musí už výrok B byť pravdivý. Táto úvaha sa nazýva modus ponens alebo princíp odlúčenia. Na nej založený dôkaz pravdivosti výroku B (tj. odvodenie jeho platnosti z pravdivosti vhodne zvoleného výroku A a platnosti implikácie $A \Rightarrow B$) sa nazýva priamy dôkaz výroku B.

---

*) takýto zápis, obsahujúci niekoľko rovnakých kvantifikátorov bezprostredne za sebou, spravidla skracujeme nasledovne

$$\forall x, y \in R \quad \exists \alpha > 0, \beta \in \langle 0, 2\pi): x = \alpha . \sin\beta \wedge y = \alpha . \cos\beta$$

Ak je implikácia $A \Rightarrow B$ pravdivá a výrok B nepravdivý, musí byť nepravdivý aj výrok A. Táto úvaha sa nazýva modus tolens a je základom nepriameho dôkazu: ak sa z negácie daného výroku C (tj. z výroku $\neg C$) podarí odvodiť nepravdivý výrok, musí byť výrok $\neg C$ nepravdivý. Tým je dokázané, že výrok C je pravdivý. (V prípade, že výrok C je implikácia $E \Rightarrow F$, nazýva sa tento postup - tj. odvodenie nepravdivého výroku z výroku $E \wedge \neg F$ - dôkaz sporom.) *)

Dôkaz ekvivalencie $A \Leftrightarrow B$ spravidla prevádzame na dôkaz dvoch implikácií $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Podrobnejšie o dôkazoch všeobecných výrokov. Ako príklad priameho dôkazu všeobecného výroku nám poslúži dôkaz tvrdenia „ak celé číslo n nie je deliteľné 3, tak $n^2 - 1$ je deliteľné 3" (symbolicky $\forall n \in \mathbb{Z}$: $(3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1))$), ktorý prebieha nasledovne: ak n nie je deliteľné 3, tak $n - 1$ alebo $n + 1$ je deliteľné 3, teda $n^2 - 1$ je deliteľné 3. (Symbolicky možno tento dôkaz zapísať takto:

$$3 \nmid n \Rightarrow (3 \mid (n - 1) \vee 3 \mid (n + 1)) \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1).)$$

Keby sme v uvedených úvahách namiesto n písali napr. číslo 5, dostali by sme dôkaz implikácie $3 \nmid 5 \Rightarrow 3 \mid (5^2 - 1)$. To je pre tento typ dôkazu charakteristické: priamy dôkaz výroku $\forall x \in A$: $\varphi(x)$ je vlastne schémou, z ktorej možno dostať dôkaz každého jednotlivého výroku $\varphi(a)$, ak v nej za x dosadíme prvok $a \in A$.

Zvláštnym typom priameho dôkazu všeobecného výroku je dôkaz matematickou indukciou. Výroky v tvare $\forall n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n)$ sa spravidla nedokazujú bezprostredne, namiesto toho stačí dokázať výroky

(A) platí $\varphi(1)$

(B) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$

(výrok $\varphi(n)$ v implikácii $\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n + 1)$ sa nazýva indukčný predpoklad).

Z (A) a (B) možno totiž reťazcom úsudkov odvodiť ľubovoľný jednotlivý výrok $\varphi(n)$ takto:

platí $\varphi(1)$
platí $\varphi(1) \Rightarrow \varphi(2)$
teda platí $\varphi(2)$;
platí $\varphi(2) \Rightarrow \varphi(3)$
teda platí $\varphi(3)$;
... platí $\varphi(n - 1)$
platí $\varphi(n - 1) \Rightarrow \varphi(n)$
teda platí $\varphi(n)$.

Takýmto spôsobom možno dokazovať aj tvrdenia platné pre všetky prirodzené čísla väčšie než dané číslo p, pre všetky celé čísla, pre všetky párne čísla a pod.

Pri nepriamom dôkaze všeobecného výroku odvodzujeme z jeho negácie nepravdivé tvrdenie.

Dôkazy existenčných výrokov. Výrok $\exists x \in A$: $\varphi(x)$ môžeme dokázať tak, že priamo určíme

*) používanie názvov jednotlivých druhov dôkazov nie je v literatúre jednotné; postup založený na modus tolens sa často označuje ako dôkaz sporom a termín nepriamy dôkaz sa niekedy používa len v prípade nepriameho dôkazu implikácie, ktorý sme uviedli predtým

(skonštruujeme) prvok $a \in A$, pre ktorý je výrok $\varphi(a)$ pravdivý. Taký dôkaz sa nazýva konštruktívny. Často však odvodzujeme existenčný výrok z iných existenčných viet bez toho, že by sme skutočne určili prvok s požadovanou vlastnosťou.

Existenčné výroky možno dokazovať aj nepriamo, teda odvodením nepravdivého tvrdenia z ich negácie.

1. Určte negácie nasledujúcich výrokov:
   1. $\forall x \in \mathbb{R}: \ x^2 \geq x$;
   2. $\exists x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{N}: \ y \neq x$;
   3. $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \forall y \in \mathbb{R}: \ x > y \Rightarrow x^2 > y^2$;
   4. $\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ \exists z \in \mathbb{N}: \ x < z \wedge y < z$;
   5. Nech a, b sú nenulové reálne čísla, potom z nerovnosti $\ln |a| > \ln |b|$ vyplýva nerovnosť $a > b$;
   6. Nech a, b sú kladné reálne čísla, nech $|\ln a| < |\ln b|$; potom $a < b$;
   7. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platí
      $$\forall x \in A \quad \forall y \in B \quad \exists c > 0: \ |x - y| > c.$$
      Potom $A \cap B = \emptyset$.
   8. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech C je neprázdna množina nezáporných čísel, nech platí
      $$\forall x \in A \quad \exists y \in B \quad \forall z \in C: \ x + z < y.$$
      Potom platí
      $$\forall x \in A \quad \forall y \in B: \ x < y$$;
   9. Nech $A \subset \mathbb{N}$ je neprázdna množina, nech platí
      $$\forall n \in A: \ (2 \nmid n \vee 3 \nmid n).$$
      Potom platí
      $$(\forall n \in A: \ 2 \nmid n) \vee (\forall n \in A: \ 3 \nmid n).$$

2. Namiesto bodiek doplňte slová „je nutné", „stačí", „je nutné a stačí" tak, aby vznikol pravdivý výrok:
   1. aby súčet dvoch celých čísel bol deliteľný 2, ..., aby každý sčítanec bol deliteľný 2 ;
   2. aby celé číslo bolo deliteľné 100, ..., aby bolo deliteľné 10 ;
   3. aby celé číslo bolo deliteľné 100, ..., aby bolo deliteľné 1000 ;
   4. aby platila nerovnosť $1/x < 1$, ..., aby bolo $x > 1$;
   5. aby platilo $1/x < 1$, ..., aby bolo $x > 1$ alebo $x < 0$.

1. MNOŽINY, REÁLNE ČÍSLA, FUNKCIE

V ďalšom budeme používať tieto označenia:

$\mathbb{N}$ množina všetkých prirodzených čísel ($= \{1, 2, 3, \dots\}$)

$\mathbb{Z}$ množina všetkých celých čísel ($= \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$)

$\mathbb{Q}$ množina všetkých racionálnych čísel ($= \{p/q;\ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\}$)

$\mathbb{R}$ množina všetkých reálnych čísel

$\mathbb{R}^+$ množina všetkých kladných reálnych čísel ($= (0, \infty)$)

$\mathbb{R}_0^+$ množina všetkých nezáporných reálnych čísel ($= \langle 0, \infty)$).

Ak pre niektorý prvok a neprázdnej množiny $A \subset \mathbb{R}$ platí

$$\forall x \in A:\ x \leq a \quad (\forall x \in A:\ x \geq a)$$

nazývame tento prvok <u>maximum (minimum) množiny A</u> a označujeme ho $\max A$ $(\min A)$.

1.1. Reálne čísla

3. Nech a je racionálne, b iracionálne číslo. Potom $a + b$ je iracionálne číslo. Dokážte!

4. Nech $a, b \in \mathbb{Q}$ a $\sqrt{ab}$ je iracionálne číslo. Potom $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je iracionálne číslo. Dokážte!

5. Dokážte iracionálnosť čísel
   1. $\sqrt{5}$; 2. $\sqrt{15}$; 3. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; 4. $\sqrt{3} + \sqrt{5}$; 5. $(4\sqrt{3} - 3)/6$;
   6_o. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

6. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

   1_o. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+:\ \frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln b \leq \ln \frac{a+b}{2}$;

   2_o. nech $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$, $c > 0$, $a < b$; potom $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$;

   3_o. $(a + b) \geq 0 \Rightarrow a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$;

   4. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$;

   5_o. $\forall\ a, b \in \mathbb{R}^+:\ \frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$;

   6. $\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.

7. Nech $b_1 > 0, \dots, b_n > 0$. Dokážte, že zlomok $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)/(b_1 + \dots + b_n)$ nie je menší ako najmenší a nie je väčší ako najväčší zo zlomkov $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_n/b_n$.

8. Dokážte nasledujúce tvrdenia:
1_o. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3} n(2n-1)(2n+1)$;
2_o. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$;
3. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$: $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$;
4. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$;

9. Absolútna hodnota $|x|$ reálneho čísla x je definovaná nasledovne:
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{ak } x < 0. \end{cases}$$
Dokážte, že
1_o. $|x| = \max\{x, -x\}$;
2. $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ $(n \in \mathbb{N})$;
3. $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$.

10_o. Dokážte:
1. ak $x > -1$ a $n \in \mathbb{N}$, tak $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$;
2. nech $n \in \mathbb{N}$, nech $x_1, \dots, x_n$ sú reálne čísla rovnakého znamienka všetky väčšie než -1; potom $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

11. Dokážte tieto tvrdenia:
1_o. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$: $n + 1 < 2^n$;
2_o. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$;
3_o. $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$;
4. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n > 1$: $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;
5. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$: $2!\ 4!\ 6! \dots (2n)! > \left[(n+1)!\right]^n$;
6. $\forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 3$: $n^{n+1} > (n+1)^n$.

(Návod: Pokiaľ sa tvrdenia v tvare $\forall\ n \in \mathbb{N}$: $a_n < b_n$ (kde $a_m > 0$) dokazujú matematickou indukciou, vykoná sa jej druhý krok (tj. odvodenie nerovnosti $a_{n+1} < b_{n+1}$ z nerovnosti $a_n < b_n$) často tak, že sa dokáže nerovnosť $a_{n+1}/a_n \leqslant b_{n+1}/b_n$. Z nerovností $0 < a_n < b_n$, $0 < a_{n+1}/a_n < b_{n+1}/b_n$ totiž už vyplýva $a_{n+1} < b_{n+1}$ (na základe implikácie: ak $0 < A < B$ a $0 < R \leqslant S$, tak $0 < AR < BS$).)

12. 1. Dokážte, že platí: ak $x_1 > 1$, $x_2 < 1$, tak $x_1 + x_2 > x_1 x_2 + 1$.
2. Na základe toho dokážte: nech $x_1, \dots, x_n$ sú kladné čísla také, že $x_1 x_2 \dots x_n = 1$; potom $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geqslant n$.

3. Dokážte nerovnosti

a) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} \geqq n$, kde $x_1, \ldots, x_n$ sú kladné čísla ;

b) $\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, kde $x_1, \ldots, x_n$ sú kladné čísla.

13. Dokážte nerovnosti

1. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2$;

2. $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2.\ \ldots\ .n} < 3$.

1.2. Ohraničené množiny reálnych čísel, supremum a infimum

Neprázdna množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva zhora (zdola) ohraničená, ak platí

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A: x \leqq K \qquad (\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A: x \geqq K).$$

Číslo K s uvedenou vlastnosťou sa nazýva horné (dolné) ohraničenie množiny A. $\emptyset$ považujeme za ohraničenú zhora aj zdola.

Množina, ktorá je zhora aj zdola ohraničená, sa nazýva ohraničená. Množina, ktorá nie je ohraničená, sa nazýva neohraničená.

14. Zistite, či sú dané množiny zhora, resp. zdola ohraničené:

1. $A = \left\{ \sqrt{a + \sqrt{b}}\ ;\ a, b \in \mathbb{N},\ a < b \right\}$;

2. $B = \left\{ \frac{1}{x + 1/x}\ ;\ x \in (0, \infty) \right\}$;

3. $C = \left\{ \sin(n!)\ ;\ n \in \mathbb{N} \right\}$;

4. $D = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\ ;\ x \in \mathbb{Q} \cap (2,3) \right\}$;

5. $E = \left\{ x \in \mathbb{R}\ ;\ \exists\, a, b, c \in \mathbb{Q}: a \neq 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0 \right\}$
(teda E je množina koreňov všetkých polynómov druhého stupňa s racionálnymi koeficientami).

15. Ak $A \subset \mathbb{R}$ je neohraničená množina, tak platí

$$\forall a \in A \quad \forall \beta > 0 \quad \exists b \in A: |a - b| > \beta .$$

Dokážte!

16. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, pričom B je neohraničená. Ak existuje $\beta > 0$ také, že platí

$$\forall x \in B \quad \exists y \in A: |x - y| < \beta , \qquad (*)$$

tak A je neohraničená množina. Dokážte!

Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ sa nazýva <u>supremum množiny</u> $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ak

(i) $\forall x \in A:\ x \leq \alpha$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A:\ x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

(Podľa (i) je α horné ohraničenie množiny A; (ii) je negácia výroku „pre niektoré $\varepsilon > 0$ je číslo $\alpha - \varepsilon$ horným ohraničením množiny A", hovorí teda, že neexistuje horné ohraničenie množiny A, ktoré by bolo menšie než α. Teda α je najmenšie horné ohraničenie množiny A.) Supremum množiny A označujeme sup A.

Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ sa nazýva <u>infimum množiny</u> $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, ak

(i) $\forall x \in A:\ x \geq \beta$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in A:\ x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.

(To znamená, že β je najväčšie z dolných ohraničení množiny A.) Infimum množiny A označujeme inf A.

Ak usporiadané pole $\mathbb{R}$ reálnych čísel konštruujeme z poľa $\mathbb{Q}$ racionálnych čísel pomocou Dedekindových rezov, môžeme dokázať nasledujúce dve ekvivalentné tvrdenia:

<u>Veta 1</u>. Každá neprázdna zhora ohraničená množina reálnych čísel má supremum.

<u>Veta 2</u>. Každá neprázdna zdola ohraničená množina reálnych čísel má infimum.

Ak usporiadané pole $\mathbb{R}$ zavádzame axiomaticky, považujeme prvé z uvedených tvrdení za axiómu, z nej možno odvodiť vetu o existencii infima.

17. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce rovnosti:

1. $1 = \inf \left\{ \dfrac{x^2+2}{x^2+1}\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$;

2. $1 = \sup \left\{ \dfrac{2x^2}{2x^2+1}\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$;

3. $-2 = \inf \left\{ 2x^2 + 8x + 1\ ;\ x \in \mathbb{R} \right\}$,

4. $12 = \sup \left\{ 1 + 6x - x^2;\ x \in \mathbb{R} \right\}$.

Riešenie: 1. Musíme zistiť, či číslo 1 vyhovuje podmienkam (i) a (ii) z definície infima:

1. pretože $\dfrac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$ a číslo $\dfrac{1}{1+x^2}$ je kladné pre každé $x \in \mathbb{R}$, platí $\dfrac{x^2+2}{x^2+1} > 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$; teda číslo 1 vyhovuje podmienke (i);

2. podmienka (ii) má v tomto prípade tvar

$$\forall \varepsilon > 0\quad \exists a \in \mathbb{R}:\ \frac{a^2+2}{a^2+1} < 1 + \varepsilon ,$$

čo je ekvivalentné s podmienkou

$$\forall \varepsilon > 0\quad \exists a \in \mathbb{R}:\ a^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 .$$

Odtiaľ už vidíme, že pre každé dané $\varepsilon > 0$ také číslo $a \in \mathbb{R}$ skutočne existuje (pre $\varepsilon > 1$ vyhovuje uvedenej nerovnosti dokonca každé reálne číslo a, pre $\varepsilon \in (0, 1\rangle$ stačí za a zvoliť ľubovoľné číslo, pre ktoré platí $|a| > \sqrt{1/\varepsilon - 1}$); teda pre číslo 1 je splnená aj podmienka (ii).

Pretože číslo 1 vyhovuje obidvom podmienkam z definície infima, platí $1 = \inf \left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1} ; x \in \mathbb{R} \right\}$.

18. Nájdite supremum a infimum nasledujúcich množín (nezabudnite, že svoje tvrdenia musíte dokázať podobne ako v pr. 17):

    1. $A = \{ x \in (2,3)$; zápis čísla x v desiatkovej sústave má konečný počet cifier za desatinnou čiarkou $\}$;
    2. $B = \{ x \in \langle 0,2)$; zápis čísla x v desiatkovej sústave obsahuje len cifry 0, 1 $\}$;
    3. $C = \{ \cos \pi(n!) ; n \in \mathbb{N} \}$.

19. Nech $A \subset B \subset \mathbb{R}$, pričom A je neprázdna a B zhora ohraničená množina. Potom A je zhora ohraničená množina a platí $\sup A \leq \sup B$. Dokážte! Sformulujte analogické tvrdenie pre infíma!

20. Nech A je neprázdna ohraničená množina; definujme množinu $-A$ nasledovne: $-A := \{ -z ; z \in A \}$. Potom
$$\sup(-A) = -\inf A,$$
$$\inf(-A) = -\sup A.$$
Dokážte!

Riešenie: Dokážeme prvú z uvedených rovností. Označme $\beta := \inf A$ (pre číslo β teda platí: (1) $\forall z \in A: z \geq \beta$; (2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_\varepsilon \in A: z_\varepsilon < \beta + \varepsilon$); máme ukázať, že číslo $-\beta$ je supremom množiny $-A$, tj. že vyhovuje podmienkam (i) a (ii) z definície suprema.

1. Podmienka (i) má v tomto prípade podobu
$$\forall x \in -A: x \leq -\beta ,$$
čo je ekvivalentné s podmienkou
$$\forall z \in A: -z \leq -\beta ,$$
tj.
$$\forall z \in A: z \geq \beta ;$$
posledné tvrdenie je pravdivé, pretože β vyhovuje podmienke (1).

2. Podmienka (ii) má tvar
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in -A: x_\varepsilon > -\beta - \varepsilon ,$$
to je ekvivalentné s výrokom
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_\varepsilon \in A: -z_\varepsilon > -\beta - \varepsilon ,$$
tj.
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists z_\varepsilon \in A: z_\varepsilon < \beta + \varepsilon ,$$
to je ale podmienka (2), ktorá je podľa predpokladov splnená.

21. Nech A, B sú neprázdne ohraničené množiny, definujme množinu $A + B$ nasledovne: $A + B := \{ a + b ; a \in A, b \in B \}$. Potom platí
$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$
Dokážte! Sformulujte a dokážte analogické tvrdenie pre infíma!

1.3. F u n k c i e

1.3.1. Definícia funkcie. Zložené funkcie. Elementárne funkcie

Nech $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdna množina. Ak je každému číslu $x \in A$ priradené práve jedno číslo $y \in \mathbb{R}$, ktoré označíme $f(x)$, hovoríme, že f je funkcia (funkcia definovaná na množine A). Číslo $f(x)$ sa nazýva funkčná hodnota (v bode x), množina A definičný obor funkcie f (túto množinu budeme označovať $D(f)$). Na označenie funkcií budeme používať písmená latinskej a gréckej abecedy. Ak chceme zdôrazniť, že definičným oborom funkcie f je množina A, použijeme zápis $f: A \to \mathbb{R}$ (prípadne $f: A \to B$, ak pre každé $x \in A$ platí $f(x) \in B$) alebo $f(x)$, $x \in A$. Okrem označení „funkcia f", „funkcia $f: A \to \mathbb{R}$" sa možno stretnúť aj so spojeniami „funkcia $y = f(x)$" alebo „funkcia $f(x)$" (istá nepresnosť posledných dvoch spojení spočíva v tom, že symbolom $f(x)$ sa zvykne označovať funkčná hodnota v danom bode x; mnohí autori preto rozlišujú označenie $f(x)$ pre funkčnú hodnotu a $f(.)$ pre funkciu).

Hovoríme, že funkcie f a g sa rovnajú, ak $D(f) = D(g)$ a pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x) = g(x)$ (teda funkcia je jednoznačne určená predpisom priradenia a definičným oborom).

Funkciu a, ktorej definičným oborom je množina $\mathbb{N}$, nazývame postupnosť a označujeme ju spravidla $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; funkčná hodnota v bode n sa nazýva n-tý člen postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa a_n.

Ak $f: A \to \mathbb{R}$ je funkcia a $B \subset A$ neprázdna množina, tak množina $f(B) := \{f(x) \,;\, x \in B\}$ sa nazýva obraz množiny B (pri zobrazení f). Špeciálne množina $f(A)$ sa nazýva obor hodnôt funkcie f.

Nech sú dané funkcie f, g.

1. Ak je množina $D_1 := D(f) \cap D(g)$ neprázdna, nazývajú sa funkcie p, q, r definované na množine D_1 predpismi

$$p(x) = f(x) + g(x),$$
$$q(x) = f(x) - g(x),$$
$$r(x) = f(x).g(x)$$

súčet, rozdiel a súčin funkcií f, g a označujú sa $f + g$, $f - g$, $f.g$.

2. Ak je množina $D_2 := D(f) \cap \{x \in D(g) \,;\, g(x) \neq 0\}$ neprázdna, nazýva sa funkcia $s: D_2 \to \mathbb{R}$ definovaná predpisom

$$s(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

podiel funkcií f, g a označuje sa $\frac{f}{g}$.

3. Ak je množina $D_3 := \{x \in D(f) \,;\, f(x) \in D(g)\}$ neprázdna, nazýva sa funkcia $t: D_3 \to \mathbb{R}$ daná predpisom

$$t(x) = g(f(x))$$

zložená funkcia z funkcií f a g (superpozícia funkcií f a g) a označuje sa $g \circ f$. Funkcia f sa nazýva vnútorná zložka, funkcia g vonkajšia zložka funkcie $g \circ f$.

Základnými elementárnymi funkciami nazývame nasledujúce funkcie:

názov	predpis	definičný obor
konštantné	$f(x) \equiv a$ *) $a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
mocninové	$f(x) = x^a$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	1. ak $a > 0$: α/ ak $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, p je párne alebo p aj q sú nepárne: $\mathbb{R}$ β/ vo všetkých ostatných prípadoch: $\langle 0, \infty)$; 2. ak $a < 0$: α/ ak $a = -\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, p je párne alebo p aj q sú nepárne: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ β/ vo všetkých ostatných prípadoch: $(0, \infty)$
exponenciálne	$f(x) = a^x$ $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}$
logaritmické	$f(x) = \log_a x$ **) $a > 0$, $a \neq 1$	$\mathbb{R}^+$
goniometrické	$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; k \in \mathbb{Z} \}$
	$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\mathbb{R} \setminus \{ k\pi \ , k \in \mathbb{Z} \}$
cyklometrické***)	$f(x) = \arcsin x$	$\langle -1, 1 \rangle$
	$f(x) = \arccos x$	$\langle -1, 1 \rangle$
	$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$
	$f(x) = \operatorname{arcctg} x$	$\mathbb{R}$

Funkcie, ktoré vzniknú zo základných elementárnych funkcií len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, sa nazývajú elementárne funkcie.

Všimnime si, že definičný obor funkcie, ktorá je súčtom, rozdielom, súčinom, podielom alebo superpozíciou daných funkcií f a g, je jednoznačne určený množinami $D(f)$ a $D(g)$. Teda ak funkcia h vznikne z funkcií $f_1, \ldots, f_n$ len použitím operácií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozície funkcií, je množina $D(h)$ jednoznačne určená množinami $D(f_1), \ldots, D(f_n)$. Preto ak napíšeme predpis takejto funkcie h bez toho, aby sme výslovne určili jej definičný obor, považujeme funkciu h za definovanú práve na tej množine, ktorá je určená množinami $D(f_1), \ldots, D(f_n)$ na základe definícií súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a superpozí-

*) symbol $\equiv$ čítame „identicky rovné"

**) špeciálne v prípade $a = 10$ budeme používať označenie $\log x$, v prípade $a = e$ označenie $\ln x$

***) pozri odsek 1.3.4

cie funkcií. (Teda trocha nepresne povedané: za definičný obor takejto funkcie h považujeme množinu všetkých tých $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré má predpis funkcie h „zmysel".)

22. Zložením ktorých základných elementárnych funkcií vzniknú funkcie dané predpismi

1. $\sin^3 x$;
2. $\sin(x^3)$;
3. $5^{\operatorname{tg}^2 x}$;
4. $\log_3 \sin^2 \sqrt{b^x}$;
5. $\sqrt{\cos(2^{\sin x})}$?

23. Nájdite D(f), ak funkcia f je daná predpisom

1. $f(x) = \sqrt{3x - x^3}$;
2. $f(x) = \log(x^2 - 4)$;
3. $f(x) = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$;
4. $f(x) = \ln(\cos(\ln x))$;
5. $f(x) = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$;
6. $f(x) = \sqrt{\cos x^2}$;
7. $f(x) = \sin\left(\ln \frac{1}{3x+1}\right)$;
8. $f(x) = \ln(3\sin^2 x - 4)$;
9. $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \ln \frac{x+1}{x-2}$;
10. $f(x) = \sqrt{\log \frac{5x - x^2}{4}}$;
11. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \log_{\frac{1}{4}} x$;
12. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x}$;
13. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\log\cos x}}$;
14. $f(x) = \sqrt{\log_3 \frac{2x-3}{x-1}}$;
15. $f(x) = \ln(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$;
16. $f(x) = \sqrt{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}}$;
17. $f(x) = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 - 35x - 6x^2}}$.

24. Napíšte predpis a určte definičný obor funkcií $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$ a $g \circ g$, ak

1. $f(x) = x^2$, $\quad g(x) = 2^x$;
2. $f(x) = \operatorname{sgn} x^{+)} := \begin{cases} 0, & \text{ak } x = 0 \\ 1, & \text{ak } x > 0 \\ -1, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x}$;
3. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \leq 0 \\ x, & \text{ak } x > 0 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < 0 \\ -x^2, & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$;
4. $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ak } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 3x, & \text{ak } x \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{ak } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 4x - 2, & \text{ak } x \notin \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$;
5. $f(x) = \chi(x)^{++)} := \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, $\quad g(x) = \frac{1}{x^2}$;

+) táto funkcia sa nazýva signum

++) táto funkcia sa nazýva Dirichletova funkcia

6. $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } |x| \leq 1 \\ 1, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$, $\quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{ak } |x| \leq 2 \\ -1, & \text{ak } |x| > 2 \end{cases}$.

25. Nech je daná funkcia f; označme $f_1 := f$, $f_2 := f \circ f_1$, $f_{n+1} := f \circ f_n$. Nájdite predpis pre f_n, ak

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;
2. $f(x) = a + bx$;
3. $f(x) = \dfrac{x}{ax + b}$ $(b \neq 1)$.

Ak $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ sú funkcie, $A \subset B$ a pre všetky $x \in A$ platí $f(x) = g(x)$, hovoríme, že funkcia f je <u>zúženie funkcie g na množinu A</u> (f je <u>funkcia g zúžená na množinu A</u>) a označujeme $f = g/A$.

26. Zistite, či sa rovnajú funkcie f a g. Ak nie, nájdite najväčšiu množinu $A \subset \mathbb{R}$, pre ktorú platí $f/A = g/A$.

1. $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$, $\quad g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$;
2. $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, $\quad g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2)$;
3. $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $\quad g(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$;
4. $f(x) = \ln\left|\dfrac{\sqrt{x^2+1} - x}{\sqrt{x^2+1} + x}\right|$, $\quad g(x) = -2 \ln |x + \sqrt{x^2+1}|$;
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$, $\quad g(x) = \begin{cases} -6, & \text{ak } x < -2 \\ 2x - 2, & \text{ak } x \in \langle -2, 4 \rangle . \\ 6, & \text{ak } x > 4 \end{cases}$

1.3.2. <u>Graf funkcie</u>

Nech je v rovine daná pravouhlá súradnicová sústava, pričom jednotky dĺžky na súradnicových osiach Ox a Oy sú rovnaké. Množina $\{(x, f(x))\ ;\ x \in A\}$ bodov roviny, kde $f: A \to \mathbb{R}$ je daná funkcia, sa nazýva <u>graf funkcie f</u> ($(x, f(x))$ je zápis bodu roviny pomocou jeho súradníc v danej súradnicovej sústave).

V nasledujúcej tabuľke sú opísané elementárne transformácie grafov funkcií:

funkcia $y = g(x)$	transformácia grafu funkcie $y = f(x)$
$y = f(x) + c$	posunutie o c v smere osi Oy
$y = f(x - c)$	posunutie o c v smere osi Ox
$y = f(-x)$	symetria podľa osi Oy
$y = -f(x)$	symetria podľa osi Ox
$y = a.f(x)$	vynásobenie každej y-ovej súradnice číslom a
$y = f(ax)$	vydelenie každej x-ovej súradnice číslom a $(a \neq 0)$

27. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

1_o. $y = \ln (1 + x)$; 2_o. $y = 1 + e^{-x}$;

3_o. $y = \sin \frac{x}{2}$; 4_o. $y = 3 + 2 \cos 3x$;

5_o. $y = x^2 + 4x + 2$; 6_o. $y = \frac{x^2}{2} + x + 1$;

7. $y = \frac{1 + x}{1 - x}$; 8_o. $y = \frac{2 + 3x}{1 - 4x}$;

9_o. $y = -\sqrt{-x-2}$; 10. $y = \sin 2(x + 3)$;

11. $y = \sin (2x + 3)$; 12. $y = \frac{1}{3} 2^{1-3x} + 2$;

13_o. $y = \operatorname{tg} (2x - \frac{\pi}{2})$; 14_o. $y = 3 - 0{,}5 \sqrt[3]{3x - 2}$;

15_o. $y = \log_3 (0{,}5x + 2)$.

Riešenie: 10. Najprv zostrojíme graf funkcie $f(x) = \sin x$, vydelením každej x-ovej súradnice číslom 2 (teda jeho „dvojnásobným zhustením") z neho dostaneme graf funkcie $f(2x) = g(x) = \sin 2x$. Naša funkcia $\sin 2(x + 3)$ má tvar $g(x + 3)$, jej graf teda získame, ak graf funkcie g posunieme pozdĺž osi Ox o 3 jednotky dĺžky doľava.

(Pri zostrojovaní takýchto grafov sa často chybne zamieňa poradie transformácií. Zistime, graf ktorej funkcie by sme dostali pri ich opačnom poradí: posunutím grafu funkcie $f(x) = \sin x$ o 3 jednotky dĺžky vľavo získame graf funkcie $g_1(x) = f(x + 3) = \sin (x + 3)$; ak teraz v tomto grafe vydelíme každú x-ovú súradnicu číslom 2, dostaneme graf funkcie $g_2(x) = g_1(2x) = \sin (2x + 3)$.)

28_o. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

1. $y = \ln |x|$; 2. $y = \sin |x|$;

3. $y = |\sin x|$; 4. $y = |x^2 - 2x - 1|$;

5. $y = 2 \cos |x - 2| + 4$; 6. $y = x.|x + 2|$;

7. $y = x + \sqrt{x^2}$; 8. $y = |\log_{\frac{1}{2}} (|x| - 2)|$;

9. $y = 2|x - 2| - |x + 1| + x$; 10. $y = \begin{cases} \sin x & , \text{ ak } x \in \langle -\pi , 0\rangle \\ 2 & , \text{ ak } x \in (0, 1\rangle \\ 1/(x - 1) & , \text{ ak } x \in (1, 4\rangle \end{cases}$.

29. Nech graf funkcie $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický s grafom funkcie f

1. podľa priamky $x = x_0$;
2. podľa priamky $y = y_0$;
3. podľa bodu (x_0, y_0) .

Vyjadrite funkčné hodnoty funkcie g pomocou funkčných hodnôt funkcie f!

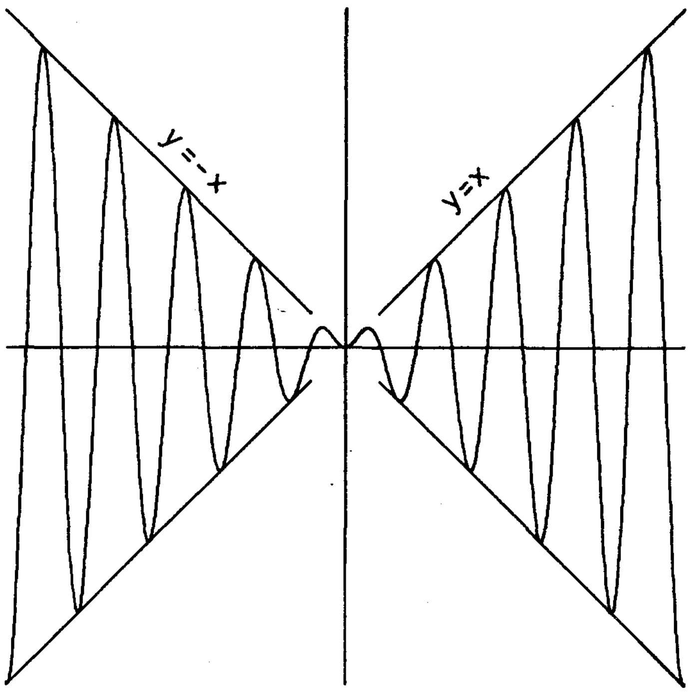
30. Načrtnite približne grafy funkcií:

1_o. $y = \sin x^2$; 2_o. $y = \sin \frac{1}{x}$;

3. $y = x \sin x$; 4_o. $y = e^x \cos x$;

5_0. $y = \frac{\sin x}{x}$; 6_0. $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$.

Riešenie: 3. Pre $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, je $y = 0$, pre $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ležia príslušné body grafu funkcie $y = x \sin x$ na priamke $y = x$, pre $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, na priamke $y = -x$. Pretože pre $x \geqslant 0$ je $-x \leqslant x \sin x \leqslant x$, pre $x < 0$ je $x \leqslant x \sin x \leqslant -x$, leží graf funkcie $y = x \sin x$ „medzi" priamkami $y = x$ a $y = -x$. Na základe toho už vieme približne načrtnúť tento obrázok:



Obr. 1

31. Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií tak, že predpis $y = a \cos x + b \sin x$ upravíte na tvar $y = A \sin (x - x_0)$:

1. $y = \sqrt{3} \cos x + \sin x$; 2. $y = \cos x - \sin x$;

3. $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Riešenie: 1. $y = \sqrt{3} \cos x + 1 . \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x\right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (táto úprava je analogická úprave algebraického tvaru komplexného čísla $a + bi$ na goniometrický tvar $\sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi + i \sin \varphi)$).

32. Ukážte, že grafy funkcií $f(x) = x^3 - 3a^2x$ a $g(x) = x^3 - 3ax^2$ možno získať jeden z druhého posunutím.

33_0. Do jedného obrázku nakreslite grafy funkcií f a g, ak

1. $f(x) = \sin x$, $g(x) = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$;

2. $f(x) = \cos x$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}}$.

34_0. Zostrojte graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ak
1. $f(x + 1) = 2 f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = x(1-x)$ pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$;
2. $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 0$ pre $x \in \langle 0, \pi \rangle$.

1.3.3. Niektoré vlastnosti funkcií (ohraničené, monotónne, periodické, prosté funkcie)

Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, $B \subset A$. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva ohraničená na množine B, ak je ohraničená množina $f(B)$. Funkcia ohraničená na svojom definičnom obore sa nazýva ohraničená. Analogicky sa zavádza pojem funkcie ohraničenej zhora, resp. zdola a funkcie ohraničenej zhora, resp. zdola na množine B.

Ak je množina $f(B)$ zhora, resp. zdola ohraničená, tak jej supremum, resp. infimum sa nazýva supremum, resp. infimum funkcie f na množine B a označuje sa $\sup\limits_{x \in B} f(x)$, resp. $\inf\limits_{x \in B} f(x)$. Ak existuje maximum, resp. minimum množiny $f(B)$, nazýva sa toto číslo maximum, resp. minimum funkcie f na množine B (často sa používa názov globálne maximum, resp. globálne minimum funkcie f na množine B) a označuje sa $\max\limits_{x \in B} f(x)$, resp. $\min\limits_{x \in B} f(x)$.

35. Zistite, či funkcia f je na množine M ohraničená zhora, resp. zdola:
1. $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $M = (0, 1)$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{4 + x^2}$, $M = \langle 2, \infty)$;
3. $f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 1}$, $M = (1, 2\rangle$.

36. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výrok „hodnota $f(x_0)$ nie je maximom funkcie f na množine B ($x_0 \in B \subset D(f)$)".

37_0. Nech je daná funkcia $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Potom funkcia g určená predpisom $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ je ohraničená práve vtedy, keď $\inf\limits_{x \in R} f(x) > 0$. Dokážte!

38. Nech funkcie f a g, definované na $\mathbb{R}$, sú zhora ohraničené. Potom
$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) .$$
Dokážte!

39_0. Uveďte príklad neohraničených funkcií f, g definovaných na $\mathbb{R}$, ktorých superpozícia je ohraničená funkcia!

Nech A, $B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, $B \subset A$. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca na množine B, resp. neklesajúca na množine B, ak platí

$$\forall\, x, y \in B: x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ ,$$

resp.

$$\forall\, x, y \in B: x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva klesajúca na množine B, resp. nerastúca na množine B, ak platí:

$$\forall\, x, y \in B: x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\ ,$$

resp.

$$\forall\, x, y \in B: x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Ak má funkcia f niektorú z uvedených štyroch vlastností, nazýva sa monotónna na množine B; funkcia, ktorá je rastúca na množine B alebo klesajúca na množine B, sa nazýva rýdzomonotónna na množine B.

Funkcia rastúca (klesajúca, nerastúca, neklesajúca, monotónna, rýdzomonotónna) na svojom definičnom obore sa nazýva rastúca (klesajúca, nerastúca, neklesajúca, monotónna, rýdzomonotónna).

40. Vyšetrite rast a klesanie funkcií:
1. $f(x) = \sin x + \cos x$; 2. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

41. Dokážte: Ak postupnosť $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ($b_n > 0$ pre $n \in \mathbb{N}$) je monotónna, tak aj postupnosť $\left\{\frac{a_1 + \dots + a_n}{b_1 + \dots + b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónna.

42. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výroky
1. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie je klesajúca na množine M ($\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$) ;
2. Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ nie je monotónna na množine M ($\emptyset \neq M \subset A \subset \mathbb{R}$).

43. Ukážte, že nasledujúce funkcie nie sú monotónne:
1. $f(x) = x^2 - 3x + 4$; 2_o. $f(x) = \mathrm{sgn}^2 x$;
3_o $f(x) = \mathrm{tg}\, x$.

Riešenie: 1. Pre $x = 0$ a $y = 1$ platí $x < y \wedge f(x) > f(y)$; pre $x = 2$ a $y = 3$ platí $x < y \wedge f(x) < f(y)$. Preto funkcia f nemôže byť nerastúca (a teda nemôže byť ani klesajúca), tomu totiž odporuje voľba $x = 2$, $y = 3$; súčasne f nemôže byť neklesajúca (a teda nemôže byť ani rastúca), tomu odporuje voľba $x = 0$, $y = 1$. (Samozrejme, že pri výbere vhodných x, y sme si pomáhali grafom funkcie f.)

44_o. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je rastúca na $\langle 0, 1)$, rastúca na $\langle 1, 2)$, ale nie je rastúca na $\langle 0, 2)$!

45. Nech funkcie f, g sú klesajúce a záporné na množine M. Rozhodnite o monotónnosti nasledujúcich funkcií na množine M a svoje tvrdenia dokážte:
1. $f(x).g(x)$; 2. $f^3(x)$;

3. $4\,f(x) + 8\,g(x)$; 4. $g^6(x)$.

46. 1. Dokážte, že superpozícia rýdzomonotónnych funkcií je rýdzomonotónna funkcia!
2. Vyšetrite rast a klesanie funkcií
a/ $f(x) = \log (x^2 - 6x + 10)$; b/ $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 8x + 20)$.

47_0. Uveďte príklady funkcií $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takých, že
1. f je rastúca, g klesajúca, $f + g$ rastúca ;
2. f je rastúca na $(0, 1)$, g klesajúca na $(0, 1)$, $f.g$ nie je rastúca na $(0, 1)$.

Funkcia f sa nazýva <u>periodická</u>, ak existuje číslo $T > 0$ tak, že platí
1. $\forall a \in D(f)$: $D(f) \cap \langle a + T, a + 2T\rangle = \{ x + T ;\ x \in D(f) \cap \langle a, a + T\rangle \}$;
2. $\forall a \in D(f)$: $f(a + T) = f(a)$.

Každé číslo T s uvedenými vlastnosťami sa nazýva <u>perióda funkcie f</u>; ak existuje najmenšie také $T > 0$, nazýva sa <u>najmenšia perióda funkcie f</u> (možno sa stretnúť aj s terminológiou, v ktorej sa pojem perióda používa výlučne v zmysle tu zavedeného pojmu najmenšej periódy).

48. Dokážte, že
1_0. každé kladné racionálne číslo je periódou Dirichletovej funkcie ;
2. žiadne kladné iracionálne číslo nie je jej periódou.

49. Ak najmenšou periódou funkcie f je číslo T, tak najmenšou periódou funkcie $g(x) := f(ax + b)$ $(a > 0)$ je číslo T/a. Dokážte!

50_0. Zostrojte graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s periódou 1, ak pre $x \in \langle 0, 1)$ platí $f(x) = x^2$.

51. Dokážte: Ak existuje $T > 0$ také, že platí niektorá z nasledujúcich podmienok, tak funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodická:

1. $f(x + T) = - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$; 2. $f(x + T) = 1/f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

3. $f(x + T) = \dfrac{f(x) + a}{bf(x) - 1}$, $x \in \mathbb{R}$; 4. $f(x + T) = \dfrac{1}{1 - f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

52. Ak graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický podľa osí $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, tak f je periodická funkcia. Dokážte!

Funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ sa nazýva <u>prostá (injektívna, jednojednoznačná)</u>, ak platí

$$\forall x, y \in A:\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y) .$$

Ak je funkcia $f: A \to \mathbb{R}$ prostá, tak funkcia s definičným oborom $f(A)$, ktorá každému číslu $x \in f(A)$ priradí to číslo $y \in A$, pre ktoré $f(y) = x$, sa nazýva <u>inverzná funkcia k funkcii f</u> a označuje sa f^{-1}.

53. Zistite, či je daná funkcia prostá; ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte jej definičný obor:

1. $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}$;
2. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$
3. $f(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$, $x \leq -1$;
4. $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$;
5. $f(x) = 3^{x/(x-1)}$;
6. $f(x) = 2^{x^2 - 2x}$, $x \leq 1$;
7. $f(x) = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1$;
8. $f(x) = 1 + \sqrt{3 + e^{2x}}$;
9. $f(x) = \log_x 10$;
10. $f(x) = 2^{1 + \ln\sqrt{x - 2}}$;
11. $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x > 0$;
12. $f(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x})$, $x < 0$;
13. $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$;
14. $f(x) = \log_2 (x + \sqrt{x^2 + 1})$;
15. $f(x) = \begin{cases} x \text{ , ak } x < 0 \\ 2x\text{, ak } x \geq 0 \end{cases}$;
16. $f(x) = \begin{cases} x \text{ , ak } x \in Q \\ 1 - x\text{, ak } x \notin Q \end{cases}$;
17. $f(x) = \begin{cases} x - 1\text{, ak } x < 1 \\ x^2 \text{ , ak } x \in \langle 1, 4\rangle \\ 2^x \text{ , ak } x > 4 \end{cases}$.

Riešenie: 3. Pre každé $x \in \mathbb{R}$ nájdime všetky tie $y \in D(f)$, pre ktoré $f(y) = x$, tj. všetky tie $y \leq -1$, pre ktoré $2y/(1 - y^2) = x$. Ak je x dané, musia byť hľadané čísla y riešeniami rovnice

$$xy^2 + 2y - x = 0 ;$$

tejto pre $x = 0$ vyhovuje len $y = 0$, pre $x \neq 0$ jej vyhovujú čísla $y_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$ a $y_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}$. Pretože hľadáme len riešenia ležiace v intervale $(-\infty, -1\rangle$, musíme zistiť, kedy $y_1 \leq -1$ a kedy $y_2 \leq -1$. Prvá z týchto nerovností nie je splnená pre žiadne $x \neq 0$, druhá platí pre každé $x > 0$.

Zistili sme teda: pre žiadne $x \leq 0$ neexistuje $y \leq -1$ také, že $f(y) = x$; pre každé $x > 0$ existuje práve jedno číslo $y \leq -1$, pre ktoré $f(y) = x$, toto číslo je určené vzťahom $y = -(1 + \sqrt{1 + x^2})/x$. To znamená: 1. funkcia f je prostá; 2. $f((-\infty, -1\rangle) = (0, \infty)$; 3. inverzná funkcia f^{-1} je definovaná na množine $f((-\infty, -1\rangle)$ predpisom $f^{-1}(x) = -(1 + \sqrt{1 + x^2})/x$.

54. Dokážte, že graf funkcie $y = \ln(1 - e^x)$ je symetrický podľa priamky $y = x$.

55. 1_o. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je prostá, a nie je monotónna na $\mathbb{R}$!

2. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je prostá, a nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$!

56. Rozhodnite o pravdivosti tohto tvrdenia: „Ak aspoň jedna z funkcií f, g definovaných na $\mathbb{R}$ nie je prostá, tak funkcia $f \circ g$ nie je prostá."!

1.3.4. Cyklometrické a hyperbolické funkcie

Inverzné funkcie k funkciám $\sin/\langle -\pi/2, \pi/2\rangle$, $\cos/\langle 0,\pi\rangle$, $\mathrm{tg}/(-\pi/2, \pi/2)$, $\mathrm{ctg}/(0,\pi)$ sa nazývajú arkussínus, arkuskosínus, arkustangens a arkuskotangens a označujú sa arcsin, arccos, arctg, arcctg. Tieto funkcie majú spoločný názov cyklometrické.

57. Vypočítajte:

1. $\arcsin(\sin \frac{7}{3}\pi)$;
2. $\sin(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}})$;
3. $\arccos(\sin \frac{\pi}{6})$;
4. $\arcsin(\cos \frac{13}{3}\pi)$;
5. $\mathrm{tg}(\arccos \frac{1}{2})$.

58. 1. Pomocou funkcie arcsin vyjadrite inverznú funkciu k zúženiu funkcie sin na interval a/ $\langle 3\pi/2, 5\pi/2\rangle$; b/ $\langle \pi/2, 3\pi/2\rangle$.

2. Zostrojte grafy funkcií $\sin(\arcsin x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arccos x)$, $\arccos(\cos x)$!

59. Nájdite inverznú funkciu k funkcii

1. $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$;
2. $f(x) = \sin^3 x,\ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$;
3. $f(x) = \sin^2(\frac{x}{2}),\ x \in \langle 2\pi, 3\pi\rangle$;
4. $f(x) = \mathrm{tg}\, x,\ x \in \langle -\pi, 0)\setminus\{-\frac{\pi}{2}\}$;
5. $f(x) = \mathrm{arctg}\, \frac{1}{x}$;
6. $f(x) = 4 \arcsin \sqrt{1 - x^3}$;
7. $f(x) = 3 + 4 \arccos(2x - 1)$;
8. $f(x) = 2^{3+\mathrm{arctg}\, x}$;
9. $f(x) = \sin(3x - 1),\ |6x - 2| < \pi$.

60. Dokážte rovnosť funkcií $\sin(\arccos x)$ a $\sqrt{1 - x^2}$! Analogickým spôsobom vyjadrite funkcie dané predpismi

1. $\cos(\arcsin x)$;
2. $\sin(2 \arcsin x)$;
3. $\cos^2(\mathrm{arctg}\, x)$;
4. $\sin^2(\mathrm{arcctg}\, x)$;
5. $\sin(\mathrm{arcctg}\, x)$;
6. $\mathrm{tg}(3\, \mathrm{arctg}\, x)$.

Riešenie: Pretože $\arccos x \in \langle 0,\pi\rangle$ pre každé $x \in \langle -1, 1\rangle$ a rovnosť $\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u}$ platí pre každé $u \in \langle 0,\pi\rangle$, je $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}$.

61. Zistite, pre ktoré $x \in \mathbb{R}$ platí rovnosť

1. $\arccos \sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$;
2. $\arccos \sqrt{1 - x^2} = -\arcsin x$;

3. $\arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = 2 \operatorname{arctg} x$; 4. $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$;

5. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x}$.

Riešenie: 1. Pre $x \in \langle -1, 0)$ nemôže uvedená rovnosť platiť, pretože vtedy $\arccos\sqrt{1 - x^2} \geq 0 > \arcsin x$. Ak $x \in \langle 0, 1\rangle$, ležia hodnoty $\arccos\sqrt{1 - x^2}$ aj $\arcsin x$ v intervale $\langle 0, \pi/2\rangle$. Využijeme, že na tomto intervale je funkcia cos prostá, tj. že pre $\alpha, \beta \in \langle 0, \pi/2\rangle$ platí

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \cos\alpha = \cos\beta .$$

V našom prípade $\cos(\arccos\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - x^2} = \cos(\arcsin x)$ (pozri pr. 60), teda pre $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí $\arccos\sqrt{1 - x^2} = \arcsin x$.

62. Dokážte rovnosti

1. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$; 2. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x$.

Funkcie definované predpismi $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (<u>sínus hyperbolický</u>), $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (<u>kosínus hyperbolický</u>), $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ (<u>tangens hyperbolický</u>) a $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ (<u>kotangens hyperbolický</u>) sa nazývajú <u>hyperbolické funkcie</u>.

63_0. Dokážte vzorce

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$; 2. $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$;

3. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$; 4. $1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

64. Pre hyperbolické funkcie platia vzorce podobné goniometrickým. Odvoďte nasledujúce:

1. $\operatorname{sh}(x + y)$; 2. $\operatorname{ch}(x + y)$;

3. $\operatorname{sh} \frac{x}{2}$; 4. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y$;

5. $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y$.

1.4. Ďalšie príklady

65. Rozhodnite o platnosti vety: „Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platí

$$\forall x \in A \quad \forall \beta > 0 \quad \exists y \in B: |x - y| > \beta .$$

Potom B nie je ohraničená." Svoje tvrdenie dokážte!

66. Rozhodnite o platnosti vety: „Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platí

$$\forall \beta > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B: |x - y| > \beta .$$

Potom B nie je ohraničená." Svoje tvrdenie dokážte!

67_0. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú ohraničené množiny, nech $A \cap B \neq \emptyset$. Potom $A \cap B$ je ohraničená množina a $\inf (A \cap B) \geq \max \{ \inf A, \inf B \}$. Dokážte; na konkrétnom príklade ukážte, že v uvedenom vzťahu nemusí platiť rovnosť!

68. Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú neprázdne množiny, nech platia nasledujúce výroky:

$$\forall x \in A \quad \forall y \in B: x < y \tag{*}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A \quad \exists y \in B: y - x < \varepsilon. \tag{**}$$

Potom platí $\sup A = \inf B$. Dokážte! (Nezabudnite, že najprv treba ukázať existenciu čísel $\sup A$, $\inf B$!)

69. Nech $k \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ je neprázdna ohraničená množina, nech $kA := \{ kx ; x \in A \}$. Dokážte, že kA je ohraničená množina, vyjadrite $\sup (kA)$, $\inf (kA)$ pomocou $\sup A$, $\inf A$!

70_0. Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je daná neprázdna množina $A_n \subset \mathbb{R}$, nech $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ $(:= \{ x \in \mathbb{R} ; \exists n \in \mathbb{N}: x \in A_n \})$ je ohraničená množina. Dokážte, že $\sup B = \sup \{ \sup A_n ; n \in \mathbb{N} \}$!

71. Rozhodnite, či platí toto tvrdenie: „Ak funkcia f je ohraničená na intervale I, tak

$$\sup_{x \in I} f(x) - \inf_{x \in I} f(x) = \sup \{ |f(x) - f(y)| ; x, y \in I \} \text{"}.$$

72. Nech f, g sú funkcie ohraničené na $\mathbb{R}$. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1_0. $\sup_{x \in R} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in R} |f(x)| + \sup_{x \in R} |g(x)|$;

2. $\left| \sup_{x \in R} |f(x)| - \sup_{x \in R} |g(x)| \right| \leq \sup_{x \in R} |f(x) - g(x)|$.

73. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktorú platí: na každom intervale $I \subset \mathbb{R}$ je f zhora (zhora aj zdola) neohraničená.

74_0. Uveďte príklad funkcie, ktorá je prostá a ohraničená na $\mathbb{R}$ a nie je monotónna na žiadnom intervale $I \subset \mathbb{R}$.

75_0. Ukážte, že funkcie $x + \cos x$, $\sin \sqrt{x}$ nie sú periodické !

76. Ak je funkcia $\sin x + \cos ax$ periodická, tak $a \in \mathbb{Q}$. Dokážte!

77. Existuje funkcia, ktorej periódou je každé kladné iracionálne číslo a žiadne kladné racionálne?

78_0. Nech funkcia f je definovaná na R a $f(R)$ nie je jednoprvková množina. Potom existuje $a > 0$, ktoré nie je periódou funkcie f.

79. Nech graf funkcie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je symetrický vzhľadom na bod (a, y_0) a na priamku $x = b$ $(a \neq b)$. Potom f je periodická funkcia.

80. Funkcia f je definovaná na intervale $(0, 1)$. Nájdite definičné obory funkcií
1. $f(x^2)$; 2. $f(\sin x)$; 3. $f(\ln x)$.

81. Nájdite predpis pre funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ak

1. $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$; 2. $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1 + x^2}$; 4. $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$.

82. Existuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $f(x^2) \equiv 1 + x$?

83. 1. Zostrojte funkcie $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby boli obidve nekonštantné na každom intervale $I \subset \mathbb{R}$ a funkcia $f \circ g$ bola konštantná na $\mathbb{R}$. Možno tieto funkcie zostrojiť tak, aby pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platilo $f(x) \neq g(x)$?

2. Možno naviac požadovať, aby g bola prostá funkcia?

84. Nájdite maximum a minimum funkcií:

1. $f(x) = 2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x - \sin^2 x + 5$; 2. $f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8}$;

3. $f(x) = a\cos x + b\sin x \quad (a^2 + b^2 > 0)$; 4. $f(x) = \sin x \cos x + \cos^2 x$.

85. Vyšetrite rast a klesanie funkcie $f(x) = 2\log_2(1 + x^2) - \log_2^2(1 + x^2)$.

86_o. Nech $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú rastúce funkcie také, že pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) .$$

Potom pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(f(x)) \leq g(g(x)) \leq h(h(x)).$$

87. Dokážte nasledujúce rovnosti:

1. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi$, kde ε nadobúda jednu z hodnôt $-1, 0, 1$ $(xy \neq 1)$;

2_o $\arcsin x + \arcsin y = (-1)^{\varepsilon}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$,

kde $\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{, ak } xy \leq 0 \vee x^2 + y^2 \leq 1 \\ \operatorname{sgn} x, & \text{ak } xy > 0 \wedge x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$;

3_o $\arccos x + \arccos y = (-1)^{\varepsilon}\arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon \quad (|x| \leq 1, |y| \leq 1)$,

kde $\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{ak } x + y \geq 0 \\ 1, & \text{ak } x + y < 0 \end{cases}$.

88. Nájdite inverznú funkciu k funkcii $f(x) = 1 + 2\sin\frac{x-1}{x+1}$, $x \in \left\langle \frac{2-5\pi}{2+5\pi}, \frac{2-3\pi}{2+3\pi} \right\rangle$.

89. Rozhodnite o platnosti tohto tvrdenia: „Nech f je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, nech pre každý otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ platí $f(I) \subset I$. Potom $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$."

DODATOK 1

MOHUTNOSŤ MNOŽÍN

Neprázdna množina A sa nazýva konečná, ak pre niektoré prirodzené číslo n existuje bijekcia $\varphi : \{1, \dots, n\} \to A$ (tj. φ je prosté zobrazenie [*] a $\varphi(\{1, \dots, n\}) = A$). Prázdnu množinu pokladáme za konečnú. Množina, ktorá nie je konečná, sa nazýva nekonečná.

Množina A sa nazýva nekonečne spočítateľná, ak existuje bijekcia $\varphi : \mathbb{N} \to A$ (tj. ak prvky množiny A možno zoradiť do prostej postupnosti). Konečné a nekonečne spočítateľné množiny sa označujú spoločným názvom spočítateľné. Množina, ktorá nie je spočítateľná, sa nazýva nespočítateľná.

Veta 3. Každý nedegenerovaný interval je nespočítateľná množina (degenerovanými intervalmi sa nazývajú jednoprvkové množiny).

Poznámka: Namiesto dvojice pojmov nekonečne spočítateľná - spočítateľná sa často v tom istom význame používa dvojica spočítateľná - najviac spočítateľná.

90. Dokážte, že $\mathbb{Z}$ je nekonečne spočítateľná množina.

91. Ak $A \subset B$, A je nekonečná a B je nekonečne spočítateľná množina, tak A je nekonečne spočítateľná množina.

92. Ak A, B sú nekonečne spočítateľné množiny, tak $A \cup B$ je nekonečne spočítateľná množina.

93. Ak $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sú nekonečne spočítateľné množiny, tak $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $(:= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)$ je nekonečne spočítateľná množina.

94. $\mathbb{Q}$ je nekonečne spočítateľná množina.

95. Nech $E \subset \mathbb{R}$ je nespočítateľná množina. Potom existuje $c > 0$ také, že množina $E \cap \langle -c, c \rangle$ je nespočítateľná.

---

[*] Ak každému prvku a neprázdnej množiny A priradíme práve jeden prvok neprázdnej množiny B, ktorý označíme $\varphi(a)$ (množiny A, B nemusia byť číselné), tak hovoríme, že φ je zobrazenie množiny A do množiny B. Špeciálne, ak $A = \mathbb{N}$, hovoríme, že φ je postupnosť prvkov z B. Zrejme pojmy funkcie a postupnosti uvedené v odseku 1.3 sú špeciálnymi prípadmi tu uvedených pojmov zobrazenie a postupnosť.

96. Nech $E \subset \mathbb{R}_0^+$ je nekonečná množina, nech S je množina všetkých súčtov konečného počtu navzájom rôznych prvkov z E. Ak S je zhora ohraničená, tak množina E_1 všetkých nenulových čísel patriacich do E je spočítateľná.

97. Nech $E \subset \mathbb{R}$ je spočítateľná množina. Existuje $a \in \mathbb{R}$ tak, že $(E + a) \cap E = \emptyset$? ($E + a := \{ x + a \,;\, x \in E \}$)

98_0. Ak vzdialenosť medzi ľubovoľnými dvoma prvkami neprázdnej množiny $E \subset \mathbb{R}$ je väčšia než 1, tak E je spočítateľná množina.

99. Nech $\mathcal{C}$ je systém otvorených intervalov taký, že ľubovoľné dva intervaly patriace do systému $\mathcal{C}$ sú disjunktné. Potom $\mathcal{C}$ je spočítateľná množina.

2. LIMITA FUNKCIE

2.1. Okolia a hromadné body

Nech $a \in \mathbb{R}$; každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, kde $\varepsilon > 0$, sa nazýva okolie bodu a. Číslo ε sa nazýva polomer okolia $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; ak chceme zdôrazniť, že dané okolie bodu a má polomer ε, hovoríme o ε-okolí bodu a. Okolím bodu ∞ sa nazýva každý interval (K, ∞), kde $K \in \mathbb{R}$; okolím bodu $-\infty$ každý interval $(-\infty, K)$, kde $K \in \mathbb{R}$. Okolie bodu $b \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^*$ sa nazýva rozšírená množina reálnych čísel a pozostáva zo všetkých reálnych čísel a symbolov $+\infty$, $-\infty$ *)) budeme označovať $O(b)$, symbol $O_\varepsilon(b)$ budeme používať pre ε-okolie bodu $b \in \mathbb{R}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva hromadný bod množiny $M \subset \mathbb{R}$, ak každé jeho okolie $O(a)$ obsahuje aspoň jeden prvok množiny M rôzny od a, tj. ak platí

$$\forall\, O(a): (O(a) \setminus \{a\}) \cap M \neq \emptyset$$

(tento výrok možno zapísať aj v tvare $\forall\, O(a)\ \exists\, x \in M: x \neq a \wedge x \in O(a)$; je ekvivalentný s výrokom: každé okolie bodu a obsahuje nekonečne veľa prvkov množiny M).

Množinu všetkých hromadných bodov množiny M budeme označovať M'.

100. Dokážte, že bod a je hromadný bod množiny A, ak

1. $a = 0, \qquad A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \sin \frac{1}{x} = 0\}$;

2_0. $a = -\infty, \qquad A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ \cos x = -\frac{1}{2}\}$;

3. $a = \frac{1}{9}, \qquad A = \{\frac{m}{10^n}\,;\ m, n \in \mathbb{N}\}$ (teda A je množina všetkých kladných čísel, ktorých zápis v desiatkovej sústave má konečný počet nenulových cifier za desatinnou čiarkou).

101. Nájdite všetky hromadné body množín

1. $A = \langle 0, 1)$; 2. $B = \{(-1)^n n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$;

3. $C = (-2, \infty)$; 4. $D = \{\frac{m}{n}\,;\ m < n,\ m, n \in \mathbb{N}\}$;

---

*) namiesto symbolu $+\infty$ sa často používa symbol ∞, niektorí autori však zavádzajú ~~symbol~~ ∞ s iným významom, k tomu pozri poznámku na konci odseku 2.5

5. $E = \{ \frac{m}{n} ;\ m<n,\ m,\ n \in \mathbb{Z} \}$; 6. $F = \langle 1, 2) \setminus \mathbb{Q}$.

102. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte výroky:
1. Bod ∞ nie je hromadný bod množiny M ;
2. Množina M nemá hromadné body.

103. Uveďte príklad neprázdnej množiny $A \subset \mathbb{R}$ takej, že
1. $A' = \emptyset$; 2. $A' = \{ 1, +\infty \}$;
3. $A' = \{ -\infty, +\infty \}$; 4. A' je nespočítateľná množina ;
5. A' je nekonečne spočítateľná množina .

104. Nech $A \subset \mathbb{R}$ je zhora ohraničená neprázdna množina, nech $\sup A \notin A$. Potom $\sup A$ je hromadný bod množiny A. Dokážte!

2.2. Definícia limity

Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Bod $b \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva <u>limita funkcie f v bode a</u>, ak platí

$$\forall O(b) \quad \exists O(a) \quad \forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap D(f):\ f(x) \in O(b) .$$

(Ak $b \in \mathbb{R}$, hovoríme o <u>vlastnej</u> (alebo <u>konečnej</u>) <u>limite</u>; ak $b = \infty$ alebo $b = -\infty$, o <u>nevlastnej limite</u>; ak $a = \infty$ alebo $a = -\infty$, používame názov <u>limita v nevlastnom bode</u>.) Zapisujeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alebo $f(x) \to b$ pre $x \to a$.

Všimnime si teraz jednotlivé špeciálne prípady, ktoré zahŕňa uvedená definícia; začneme postupnosťami:

1. Nech $b \in \mathbb{R}$; hovoríme, že <u>postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k (číslu) b</u>, ak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$, tj. ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |a_n - b| < \varepsilon \ ^{*)} .$$

2. Hovoríme, že <u>postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $+\infty$</u> , ak $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, tj. ak platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ a_n > K .$$

---

*) Výroky

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |a_n - b| < \varepsilon$$

a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |a_n - b| < \varepsilon$$

sú ekvivalentné. Pretože v definícii konečnej limity postupnosti je zvykom žiadať $n_0 \in \mathbb{N}$ (a nie $n_0 \in \mathbb{R}$), budeme ju v takej podobe používať aj my (hoci - ako uvidíme v pr. 105 - sa tým niekedy komplikuje vyjadrenie závislosti čísla n_0 na čísle ε). Analogická poznámka sa vzťahuje aj na definície nevlastných limít postupností.

3. Hovoríme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ diverguje k $-\infty$, ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, tj. ak platí

$$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ a_n < K .$$

Postupnosti, ktoré majú vlastnú limitu, sa nazývajú konvergentné; ak postupnosť nemá limitu alebo má nevlastnú limitu, nazýva sa divergentná.

105. Na základe definície dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} = \dfrac{3}{5}$ (pre ktoré $n \in \mathbb{N}$ platí: a/ $\left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} - \dfrac{3}{5}\right| < 0,5$; b/ $< 0,005$; c/ $< 0,00005$?) ;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n+1}{2n^2+2} = \dfrac{1}{2}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+8} = +\infty$ (počínajúc ktorým prirodzeným číslom platí nerovnosť $\dfrac{n^2}{n+8} > 10^3$?) ;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{n} - n\right) = -\infty$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(|q| < 1)$.

Riešenie: 2. Musíme dokázať pravdivosť výroku

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ \left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \qquad (*)$$

Nech je teda dané číslo $\varepsilon > 0$; zistime, ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ vyhovujú nerovnici

$$\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon .$$

Postupnými úpravami dostaneme ekvivalentné vzťahy v $\mathbb{N}$:

$$\left|\frac{3n}{2n^2+2}\right| < \varepsilon ,$$

$$2\varepsilon n^2 - 3n + 2\varepsilon > 0 .$$

(Nájdeme najprv všetky reálne riešenia poslednej nerovnice, z nich potom vyberieme tie, ktoré ležia v $\mathbb{N}$. Diskriminant D je rovný $9 - 16\varepsilon^2$, preto pre reálne riešenia platí:

1. ak $\varepsilon > \frac{3}{4}$, tj. ak $D < 0$, je riešením každé reálne číslo ;

2. ak $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$, je $D \geq 0$, preto riešeniami sú všetky prvky množiny $\left(-\infty, \dfrac{3-\sqrt{9-16\varepsilon^2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt{9-16\varepsilon^2}}{2}, \infty\right)$.)

Preto:

1. ak $\varepsilon > \frac{3}{4}$, je riešením nerovnice $\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ každé číslo $n \in \mathbb{N}$;

2. ak $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$, sú riešeniami nerovnice $\left|\frac{n^2+3n+1}{2n^2+2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ všetky tie $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $n > (3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2})/2\varepsilon$.

Teraz už vidíme, že výrok (*) je pravdivý: stačí položiť $n_0 = 1$ pre $\varepsilon > \frac{3}{4}$ a $n_0 = [(3+\sqrt{9-16\varepsilon^2})/2\varepsilon]$ pre $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$ ($[\cdot]$ označuje celú časť; keby sme v (1) namiesto podmienky $n_0 \in \mathbb{N}$ mali podmienku $n_0 \in \mathbb{R}$, stačilo by pre $\varepsilon \in (0, \frac{3}{4}\rangle$ položiť $n_0 = (3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2})/2\varepsilon$).

Poznámka. Ak je nerovnosť $|a_n - b| < \varepsilon$ splnená pre všetky $n > n_0$ a platí $n_1 > n_0$, tak nerovnosti $|a_n - b| < \varepsilon$ iste vyhovujú všetky čísla $n > n_1$. Z tohto samozrejmého tvrdenia vyplýva, že v závere riešenia príkladu 105.2 by stačilo položiť $n_0 \geq 1$ pre $\varepsilon > \frac{3}{4}$ a $n_0 \geq [(3 + \sqrt{9 - 16\varepsilon^2}/2\varepsilon]$ pre $\varepsilon \in (0, 3/4\rangle$.

106. Rozhodnite, či existujú limity nasledujúcich postupností (nezabúdajte, že svoje tvrdenia musíte dokázať):

1. $a_n = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je párne} \\ 1 + \frac{1}{n^2}, & \text{ak } n \in \mathbb{N} \text{ je nepárne} \end{cases}$;

2. $a_n = (\cos \frac{n\pi}{2})/n$.

107_0. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná vzťahom $a_n = n\,(1 - (-1)^n)$. Dokážte, že

1. číslo 0 nie je limitou tejto postupnosti ;
2. bod $+\infty$ nie je limitou tejto postupnosti ;
3. žiadne $b \in \mathbb{R}^*$ nie je limitou tejto postupnosti.

108. Pri formulácii definície vlastnej limity postupnosti študent:

1. namiesto „pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$" povedal „pre ľubovoľné ε". Existujú postupnosti, ktoré majú limitu pri takejto definícii?

2. definíciu napísal takto

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}: |a_n - b| < \varepsilon .$$

Ktoré postupnosti by mali limitu pri takejto definícii?

3. namiesto „pre každé $\varepsilon > 0$" povedal „aspoň pre jedno $\varepsilon > 0$". Ukážte, že pri takejto definícii je číslo 7 limitou postupnosti 2, 2, ...

4. namiesto „existuje $n_0 \in \mathbb{N}$" povedal „pre všetky $n_0 \in \mathbb{N}$". Ktoré postupnosti majú limitu pri takejto definícii?

5_0. definíciu napísal takto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ a_n - b < \varepsilon \ .$$

Ukážte, že pri takejto definícii je číslo 5 limitou postupnosti 1, 1, 1, ...

109. Je číslo $b \in \mathbb{R}$ limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak existuje také prirodzené číslo N^*, že pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ a všetky $n \in \mathbb{N}$, $n > N^*$ platí $|a_n - b| < \varepsilon$?

110. Nájdite všetky postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré vyhovujú podmienke

1. $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$;
3. $\exists \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0:\ |x_n| < \varepsilon$.

Ak $x \in \mathbb{R}^*$, nastáva práve jedna z troch možností: $x \in \mathbb{R}$, $x = +\infty$, $x = -\infty$. Ak v definícii limity funkcie rozlíšime pre body $a, b \in \mathbb{R}^*$ tieto možnosti, dostaneme nasledujúcich deväť špeciálnych prípadov (v nich už a, b označujú len reálne čísla):

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; 2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; 3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;

4. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = b$; 5. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = +\infty$; 6. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = -\infty$;

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b$; 8. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$; 9. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

111. Prepíšte definíciu limity funkcie pre prípady 1 - 9. (Všimnite si, že limity postupností sú samy špeciálnym prípadom limít 4 - 6.)

Riešenie: 1. V tomto prípade sú okolia O(a) a O(b) jednoznačne určené svojimi polomermi δ, ε; definíciu limity možno potom prepísať do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f),\ x \neq a,\ |x - a| < \delta \ :\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

alebo - čo je to isté - do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f),\ x \neq a:\ |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon \ .$$

(Samozrejme predpokladáme, že a je hromadný bod množiny D(f).)

<u>Veta 1.(Cauchyho-Bolzanovo kritérium konvergencie)</u>. Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Funkcia f má v bode a konečnú limitu práve vtedy, keď platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists O(a) \quad \forall x, y \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap D(f):\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ . \qquad (*)$$

112. Na základe definície limity dokážte tieto tvrdenia:

1. $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;

3. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$; 4. $\lim\limits_{x \to 8} \sqrt[3]{x} = 2$;

5. $\lim\limits_{x \to -2} x^2 = 4$.

Riešenie: 1. Treba dokázať pravdivosť tvrdenia

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \geq 0,\ x \neq 3,\ |x - 3| < \delta :\ |\sqrt{x} - \sqrt{3}| < \varepsilon \ . \qquad (*)$$

Predpokladajme, že $|x - 3| < \delta$ a skúsme na základe toho zhora odhadnúť výraz $|\sqrt{x} - \sqrt{3}|$. Pretože $|\sqrt{x} - \sqrt{3}| = \frac{|x-3|}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$ a $\sqrt{x} + \sqrt{3} \geq \sqrt{3}$, platí $|\sqrt{x} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |x - 3| < \frac{\delta}{\sqrt{3}}$. Teraz už vidíme, že $(*)$ platí: ak je dané $\varepsilon > 0$ a chceme, aby platilo $|\sqrt{x} - \sqrt{3}| < \varepsilon$, stačí položiť $\delta = \varepsilon\sqrt{3}$ (alebo $\delta \leq \varepsilon\sqrt{3}$).

113. Nech bod 0 je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Pomocou symbolov $\forall$, $\exists$ zapíšte tieto tvrdenia:
1. Číslo 4 nie je limitou funkcie f v bode 0 ;
2. Funkcia f nemá v bode 0 limitu.

114. Ak existuje $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ $(a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R})$, tak existuje aj $\lim\limits_{x \to a} |f(x)|$ a platí $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$. Dokážte; platí aj opačná implikácia?

115. 1. Dokážte implikáciu „$\Rightarrow$" v Cauchyho-Bolzanovom kritériu konvergencie (tj. dokážte, že $(*)$ z vety 1 je nutná podmienka existencie vlastnej limity funkcie f v bode a).

2. Dokážte, že Dirichletova funkcia ani funkcia $\sin \frac{1}{x}$ nemajú limitu v bode 0. (Neexistenciu konečných limít možno dokázať na základe pr. 115.1; neexistenciu nevlastných limít treba dokázať samostatne.)

2.3. V e t y o l i m i t á c h I

<u>Veta 2</u> (o limite skalárneho násobku, súčtu, rozdielu, súčinu a podielu). Nech sú dané funkcie f, g, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap D(g)$. Ak existujú konečné $\lim\limits_{x \to a} f(x) := A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) := B$, tak existujú aj $\lim\limits_{x \to a} cf(x)$ ($c \in \mathbb{R}$ je konštanta), $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x))$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x))$, $\lim\limits_{x \to a} (f(x).g(x))$ a platí

$$\lim_{x \to a} cf(x) = cA \qquad (= c.\lim_{x \to a} f(x))$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = A + B \qquad (= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x))$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) = A - B \qquad (= \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x))$$

$$\lim_{x\to a} (f(x).g(x)) = A.B \quad (= \lim_{x\to a} f(x) \, . \, \lim_{x\to a} g(x) \,)$$

Ak naviac $B \neq 0$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad \left(= \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \right).$$

Veta 3 (o limite zloženej funkcie). Nech sú dané funkcie f, g nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f \circ g)$. Ak $\lim_{x\to a} g(x) = A$ $(A \in \mathbb{R}^*)$, pričom je splnená podmienka

$$\exists O(a) \quad \forall x \in O(a): \; x \neq a \Rightarrow g(x) \neq A \,, \qquad (*)$$

a $\lim_{x\to A} f(x) = B$ $(B \in \mathbb{R}^*)$, tak $\lim_{x\to a} f(g(x)) = B$.

Poznámka. Ak A je hromadným bodom $D(f)$, ale $A \notin D(f)$, tak uvedená veta platí aj vtedy, keď nie je splnená podmienka $(*)$.

Niektoré limity možno nájsť len na základe definície, v ostatných prípadoch je však oveľa efektívnejšie použiť vety o limitách. Pritom je potrebné osvojiť si zdôvodňovanie jednotlivých krokov výpočtu, inak sa nenaučíme odlišovať správne postupy od nesprávnych. Na ilustráciu podrobne popíšme nasledujúci výpočet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} \overset{(1)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2} \overset{(2)}{=} \frac{\lim_{x\to\infty} (2 + 3/x + 5/x^2)}{\lim_{x\to\infty} (3 - 7/x^2)} \overset{(3)}{=}$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} 3/x + \lim_{x\to\infty} 5/x^2}{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty} 7/x^2} \overset{(4)}{=} \frac{2 + 0 + 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}.$$

(1) na intervale $(0, \infty)$ iste platí $\frac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} = \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2}$ (zlomok vľavo stačí rozšíriť výrazom $1/x^2$), preto: ak existuje limita na pravej strane rovnosti (1), tak existuje aj limita na jej ľavej strane a tieto limity sa rovnajú *); ďalej sa teda snažíme zistiť, či existuje $\lim_{x\to\infty} \frac{2 + 3/x + 5/x^2}{3 - 7/x^2}$;

(2) tu sme použili vetu o limite podielu (zatiaľ ovšem len „na čestné slovo"), presnejšie povedané: ak ukážeme, že limita v čitateli aj v menovateli existujú a sú konečné, pri-

---

*) Táto elementárna, ale veľmi častá úvaha sa vo všeobecnosti formuluje takto: Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $D(f)$; nech existuje $O(a)$ tak, že $D(f) \cap (O(a) \setminus \{a\}) = D(g) \cap (O(a) \setminus \{a\})$ a pre všetky $x \in D(f) \cap (O(a) \setminus \{a\})$ platí $f(x) = g(x)$. Ak existuje $\lim_{x\to a} g(x) := b$ $(\in \mathbb{R}^*)$, tak platí $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

čom limita v menovateli je nenulová, tak podľa vety o limite podielu bude platiť rovnosť (2) ;

(3) v čitateli sme použili vetu o limite súčtu (tú možno indukciou rozšíriť na ľubovoľný konečný počet sčítancov), v menovateli vetu o limite rozdielu (obidve zatiaľ tiež len „na čestné slovo") ;

(4) teraz už ľahko overíme, že rovnosti (2) a (3) skutočne platia: pretože $\lim\limits_{x\to\infty} 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} 3/x$, $\lim\limits_{x\to\infty} 5/x^2$, $\lim\limits_{x\to\infty} 3$ a $\lim\limits_{x\to\infty} 7/x^2$ existujú a sú konečné (to ľahko dokážeme priamo z definície), bolo použitie viet o limite súčtu a rozdielu v (3) oprávnené (a preto $\lim\limits_{x\to\infty} (2 + 3/x + 5/x^2) = 2$, $\lim\limits_{x\to\infty} (3 - 7/x^2) = 3$); rovnako oprávnené bolo použitie vety o limite podielu v (2) (limita v čitateli aj v menovateli - ako sme sa práve presvedčili - skutočne existujú, sú konečné a limita v menovateli je naviac nenulová).

Z platnosti rovností (1), (2), (3) vyplýva $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 5}{3x^2 - 7} = \dfrac{2}{3}$.

Takéto zdôvodňovanie (vykonané ovšem len v duchu alebo ústne) by malo byť súčasťou výpočtu každej limity; po získaní istej praxe budú zápisy aj argumentácia podstatne stručnejšie.

<u>Veta 4</u>. Ak f je elementárna funkcia a bod $a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

(Toto tvrdenie veľmi úzko súvisí s pojmom spojitosti (pozri kap. 3).)

Nájdite nasledujúce limity:

116. 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x + 1}$; 2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^3 + 5x^2 - 2}{2x^4 - 7}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-1)(x-2)\dots(x-5)}{(5x-1)^5}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^3}{3x^2 - 4} - \dfrac{x^2}{3x + 2} \right)$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \left[(x + \dfrac{a}{n}) + (x + \dfrac{2a}{n}) + \dots + (x + \dfrac{n-1}{n} a)\right]$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

117. 1. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 6x^2 + 10x - 3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^3-5x^2-4x+12}{5x^2-4x-12}$; 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m-1}{x^n-1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$; 8. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2}{2x-x^2} + \dfrac{1}{x^2-3x+2} \right)$;

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}$; 10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

Riešenie: 1. Funkcie $P(x) = x^2-5x+6$ a $Q(x) = x^3-6x^2+10x-3$ sú elementárne, preto $\lim\limits_{x\to 3} P(x) = P(3) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} Q(x) = Q(3) = 0$. Pretože $\lim\limits_{x\to 3} Q(x) = 0$, nemôžeme použiť vetu o limite podielu. (Alebo inak povedané: funkcia $R = P/Q$ je elementárna, ale $Q(3) = 0$, preto $3 \notin D(R)$ a limitu funkcie R v bode 3 teda nemožno nájsť „dosadením".) Z rovností $P(3) = 0$, $Q(3) = 0$ vyplýva, že číslo 3 je koreňom polynómov P aj Q, preto $P(x)$ aj $Q(x)$ musia byť deliteľné koreňovým činiteľom $(x-3)$. Po vyňatí člena $(x-3)$ dostaneme $P(x) = (x-3)(x-2)$, $Q(x) = (x-3)(x^2-3x+1)$. Pre $x \in D(R)$ teda platí $\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+10x-3} = \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2-3x+1)} = \dfrac{x-2}{x^2-3x+1}$, pritom $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2-3x+1} = 1$ (elementárna funkcia $R_1(x) = \dfrac{x-2}{x^2-3x+1}$ je definovaná aj v bode 3, preto $\lim\limits_{x\to 3} R_1(x)$ už možno nájsť „dosadením").

Teda $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-6x^2+10x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x^2-3x+1)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2-3x+1} = 1.$

118. Zostrojte funkcie f, g definované na $\mathbb{R}$ tak, aby neexistovali $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ani $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ a existovala konečná

1. $\lim\limits_{x\to 1} (f(x) + g(x))$; 2. $\lim\limits_{x\to 1} (f(x).g(x))$.

119. Možno nájsť postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ a neexistuje $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n}$?

120. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt{x^2-3}-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$; 4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; 6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

Riešenie: 1. Elementárna funkcia $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{\sqrt{x^2-3}-1}$ nie je definovaná v bode -2, preto $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ nemožno nájsť „dosadením". Pre výpočet limity bude výhodnejší iný zápis predpisu funkcie f; dostaneme ho použitím vzorcov $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$ (obidva sú špeciálnym prípadom rovnosti $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1})$). Podľa prvého z nich $x^2 - 4 = (\sqrt{x^2 - 3} - 1)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)$, podľa druhého $x + 2 = (\sqrt[3]{x - 6} + 2)(\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4)$.

Pre všetky $x \in D(f)$ preto platí $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4}$

(zlomok sme rozšírili výrazom $(\sqrt{x^2 - 3} + 1)(\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4)$). Teraz môžeme použiť vetu o limite súčinu: $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4} = \dfrac{1}{6}$ (ide o elementárnu funkciu definovanú v bode -2, preto stačí dosadiť), $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x - 2} = -\dfrac{1}{4}$. Teda

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt[3]{x - 6} + 2}{\sqrt{x^2 - 3} - 1} = \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4} \quad \left(= \lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 1}{\sqrt[3]{(x - 6)^2} - 2\sqrt[3]{x - 6} + 4} \right) = \left(\lim_{x \to -2} \frac{1}{x - 2}\right) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{24}.$$

121. **Nájdite limity:**

1. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x^2 + 4}}{x - 2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 20}}{\sqrt[4]{x + 9} - 2}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$.

Riešenie: 1. Uvedieme dva rôzne návody: a/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x^2+4)^2}}{x - 2}$

b/ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2 + 2 - \sqrt[3]{x^2 + 4}}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} + \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 4}}{x - 2}$

(číslo 2, ktoré sme pripočítali a odpočítali, je spoločnou funkčnou hodnotou funkcií $\sqrt{x + 2}$ a $\sqrt[3]{x^2 + 4}$ v bode 2); ďalší postup je potom rovnaký ako v pr. 120.

122. **Nájdite limity:**

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1 + x} - 1}{x}$ $(n \in \mathbb{N})$;

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ $(m, n \in \mathbb{N})$; 4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{1 - \sqrt{x}} - \dfrac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right)$.

Riešenie: 2. Aby sme sa v limitovanom výraze zbavili odmocniny, položme $\sqrt[n]{1+x} = t$ (odtiaľ $(x = t^n - 1)$. Použiť túto substitúciu neznamená nič iné, ako napísať funkciu $y = \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ v tvare superpozície funkcií $y = \frac{t-1}{t^n - 1}$ a $t = \sqrt[n]{1+x}$. Výpočet limity sa potom zakladá na vete o limite zloženej funkcie: limita vnútornej zložky (predstavujúcej substitúciu) je $(\lim_{x\to 0} \sqrt[n]{1+x} =)\ 1$; podmienka (*) z vety 3 je splnená, pretože $\sqrt[n]{1+x}$ je prostá funkcia. Hľadaná limita sa preto rovná limite vonkajšej zložky v bode 1; teda

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^n - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \ldots + 1)} = \frac{1}{n} .$$

123. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+6} + |x|}{\sqrt[6]{x^4+2} - |x|}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1} \right)$;

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x \right)$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2} \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$.

124_0. Dokážte túto modifikáciu vety o limite zloženej funkcie: Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f \circ g)$, nech $A \in \mathbb{R} \cap D(f)$ je hromadný bod $D(f)$. Ak $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, $\lim\limits_{x\to A} f(x) = f(A)$, tak $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = f(A)$.

(Výhodou tejto modifikácie je, že pri jej použití netreba overovať podmienku (*) vystupujúcu vo vete 3.)

125. Existujú funkcie f, g definované na $\mathbb{R}$ také, že $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existuje a $\lim\limits_{x\to 1} f(g(x))$ neexistuje?

<u>Veta 5.</u> $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Nájdite limity:

126. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin (x+1)}{x+1}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ $(m, n \neq 0)$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin (x^3+2x)}{x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} x.\mathrm{ctg}\, 3x$; 6. $\lim\limits_{n\to \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n}$ $(x \neq 0)$.

127. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{\sin^3 x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\sin 2x \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}$ $(p \neq 0$

128. 1. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$; 2. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}\, a}{x-a}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos (a+2x) - 2\cos (a+x) + \cos a}{x^2}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin (a+x) \sin (a+2x) - \sin^2 a}{x}$

129. 1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, 2x\, \mathrm{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$; 2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \mathrm{ctg}^3 x}{2 - \mathrm{ctg}\, x - \mathrm{ctg}^3 x}$; 4. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin (x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\, \mathrm{tg} \frac{\pi x}{2}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$.

Riešenie: 4. Takéto limity sa pohodlnejšie počítajú v bode 0, použijeme preto substitúciu $x - \frac{\pi}{3} = t$ (táto funkcia je prostá, podmienka $(*)$ z vety o limite zloženej funkcie je teda splnená) a dostaneme

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sin (x - \pi/3)}{1 - 2\cos x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\cos (t + \pi/3)} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t \right)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{\sqrt{3}\sin t + 1 - \cos t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t}{t}}{\sqrt{3}\,\frac{\sin t}{t} + \frac{1-\cos t}{t^2}.t} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(pritom sme využili rovnosť $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$; pozri pr. 127.1).

130. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;   2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;   4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

2.4. Vety o limitách II (porovnávacie vety, vety o nevlastných limitách, jednostranné limity)

Veta 6. Nech sú dané funkcie f, g, h, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(g)$ a nech pre niektoré jeho prstencové okolie *) $O^*(a)$ platí $O^*(a)\cap D(f) = O^*(a)\cap D(g) = O^*(a)\cap D(h) =: D$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ $(\in\mathbb{R})$ a pre všetky $x\in D$ je $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ a rovná sa b.

Veta 7. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$. Ak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v niektorom prstencovom okolí bodu a (tj. na niektorej z množín $(O(a)\setminus\{a\})\cap D(g)$), tak $\lim\limits_{x\to a} f(x).g(x) = 0$.

131. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$;   2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{2x^2-\cos x}$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;   4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2+\ln(e+x\sin\frac{1}{x})}{\cos x+\sin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos 2\pi x}{2+(e^{\sqrt{x-1}}-1)\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{x-1}}$.

132. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$;   2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$;

---

*) Prstencovým okolím bodu a sa nazýva množina $O(a)\setminus\{a\}$, kde $O(a)$ je okolie bodu a. (Teda každé okolie bodov $+\infty$, $-\infty$ je súčasne aj ich prstencovým okolím.)

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{5^n} = 0$.

Riešenie: 1. Pre $n \geq 3$ platí $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot ($

Teda pre $n \geq 3$ platí $0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n$, pritom $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n = 0$ (pozri pr.

105.5). Preto (podľa vety 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

133. 1. Nech $0 < q < 1$ a nech postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel spĺňa podmie ku $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Rozhodnite o platnosti tvrdenia „Ak postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čí sel spĺňa podmienku $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$."!

3. Nájdite limity:

a/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n\, n!}{(3n)^n}$;

b/ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1001 \cdot 1002 \cdot \ldots \cdot (1000}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$

134. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{7}{n})^n$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+3}{n^2} \right)^n$.

135. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Riešenie: 1. Tvrdenie *) zrejme platí pre $a = 1$. Predpokladajme teraz, že $a > 1$, a označme $\omega(n) := \sqrt[n]{a} - 1$. Potom iste $\omega(n) \geq 0$ a umocnením obidvoch strán rovnosti $\sqrt[n]{a} = 1 + \omega($ na n-tú dostaneme

$$a = 1 + n\omega(n) + \binom{n}{2} \omega^2(n) + \ldots + \omega^n(n) \geq 1 + n\,\omega(n) .$$

Odtiaľ

$$\omega(n) \leq \frac{a-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Teda

$$0 \leq \omega(n) \leq \frac{a-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

pritom $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a-1}{n} = 0$, preto (podľa vety 6) $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(n) = 0$. Z rovnosti $\sqrt[n]{a} = 1 + \omega(n)$ potom (podľa vety o limite súčtu) vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \omega(n))$ $= 1$.

---

*) Uvedenú rovnosť možno veľmi ľahko dokázať pomocou vety 3 a vety 4 ($\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$, $\lim\limits_{u\to 0} a^u = 1$). Tu uvedený postup nevyužívajúci vetu 4 sa používa práve pri dôkaze skutočnosti, že tvrdenie vety 4 platí pre exponenciálne funkcie.

Zostal ešte prípad $0<a<1$; tu už bude dôkaz jednoduchý: ak $0<a<1$, tak $b:=\frac{1}{a}>1$. Podľa predchádzajúceho teda $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{b}=1$. Z rovnosti $\sqrt[n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ potom (podľa vety o limite podielu) vyplýva $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{b}}=1$.

136. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\,3^n+1}{n!+1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{5n+1}{n+5}}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n-2^n}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}-\frac{1}{2^n}}$.

<u>Veta 8</u>. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)$ a nech pre niektoré jeho rýdze okolie $O^*(a)$ platí $O^*(a)\cap D(f)=O^*(a)\cap D(g)=:D$. Ak $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ $(-\infty)$ a pre všetky $x\in D$ platí $f(x)\geq g(x)$ $(f(x)\leq g(x))$, tak existuje aj $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ a rovná sa ∞ $(-\infty)$.

<u>Veta 9</u>. Nech sú dané funkcie f, g, nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f)\cap D(g)$, nech existujú $\lim\limits_{x\to a}f(x)=:A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=:B$. Potom

1. ak $A=+\infty$, $B\in\mathbb{R}$ alebo $B=+\infty$, tak $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$;
2. ak $A=+\infty$, $B>0$ alebo $B=+\infty$, tak $\lim\limits_{x\to a}(f(x).g(x))=+\infty$.

<u>Veta 10</u>. Nech $a\in\mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Ak $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ $(-\infty)$, tak $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

Poznámka. Predchádzajúce tvrdenia (spolu s ďalšími, analogickými) si ľahko zapamätáme pomocou nasledujúcich rovností (ktoré ovšem považujeme len za mnemotechnickú pomôcku):

$$A\pm\infty=\pm\infty \qquad A\cdot(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty, & \text{ak } A>0\\ \mp\infty, & \text{ak } A<0\end{cases}$$

$$\pm\infty\pm\infty=\pm\infty$$

$$\frac{1}{\pm\infty}=0 \qquad \infty\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$$

(A označuje reálne číslo.)

Všimnime si, že žiadna z uvedených viet sa nevzťahuje na limity funkcií typu $+\infty-\infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{0}{0}$. Také funkcie budeme nazývať neurčitými výrazmi *); práve im je venovaná väčšina príkladov na výpočet limít.

*) neskôr tento pojem ešte zovšeobecníme (pozri *) v úvode odstavca 2.5 a poznámku na konci toho istého odstavca)

Veta 11. Nech je daná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D := \{ x \in D(f) ; f(x) \neq 0 \}$, nech $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. Ak existuje také prstencové okolie $O^*(a)$ bodu a, že pre všetky $x \in D \cap O^*(a)$ platí $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$, tak existuje $\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$ a rovná sa $+\infty$ (-

Nájdite limity:

137. 1. $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right)$; 2. $\lim_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$;

3. $\lim_{x \to \infty} x^2 \arcsin \left(\frac{x^2+1}{3x^2-2} \right)$; 4. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$;

5. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3 + \sqrt{x^3+1}}}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{x^2+1}}}$; 6. $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{10} \right)^n$;

7. $\lim_{x \to \infty} (2x + x \sin x)$.

138. 1. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin^2 x}$; 2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3}$;

3. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x^2}$; 4. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x^3+1} - 1}$;

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{tg}^2 x}{(2x - \pi)^4}$; 6. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2} - 1}$.

139. Uveďte príklady funkcií f, g definovaných v niektorom prstencovom okolí bodu 1 takých, že $\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1} g(x) = -\infty$ a $\lim_{x \to 1} (f(x) + g(x))$
1_o. je konečná; 2_o. je nevlastná; 3. neexistuje.

140. Uveďte príklady postupností nenulových čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ takých, že $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$ a $\lim_{n \to \infty} a_n b_n$
1_o. $= 0$; 2_o. $= +\infty$; 3_o. je konečná a nenulová; 4. neexistuje.

141. Nech R je racionálna funkcia, tj. funkcia daná predpisom $R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m}$ $(a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$. Čomu sa rovná $\lim_{x \to \infty} R(x)$?

Nech je daná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny $D^+ := D(f) \cap (a, \infty)$ (množiny $D^- := D(f) \cap (-\infty, a)$); označme $\bar{f}$ zúženie funkcie na množinu D^+ (na množinu D^-). Ak existuje limita funkcie $\bar{f}$ v bode a, nazývame ju <u>limitou funkcie f v bode a sprava (zľava)</u> a označujeme $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x)\right)$. Pre limity sprava a zľava sa používa súhrnný názov <u>jednostranné limity</u>.

<u>Veta 12</u>. Nech je daná funkcia f, nech a je hromadný bod množín $D(f) \cap (-\infty, a)$ a $D(f) \cap (a, \infty)$. Potom $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje práve vtedy, keď v bode a existujú obidve jednostranné limity a platí $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)$; pritom $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ sa rovná spoločnej hodnote týchto jednostranných limít.

142. Pomocou kvantifikátorov a nerovností zapíšte tvrdenia:

1. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$; 2. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$.

($a, b \in \mathbb{R}$).

143. Nájdite jednostranné limity funkcie f v bode a, ak

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$, $a = 1$; 2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$, $a = 0$;

3. $f(x) = \dfrac{5}{(x - 2)^3}$, $a = 2$; 4. $f(x) = \dfrac{1}{2 - 2^{1/x}}$, $a = 0$.

144. Vyšetrite existenciu nasledujúcich limít:

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} x \operatorname{tg} x$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{sgn} x$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2}$.

145_0. Uveďte príklad funkcie $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ takej, že

1. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) > \lim\limits_{x \to 0+} f(x)$;
2. $\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$ neexistuje, $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ je nevlastná.

146. 1_0. Nech $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$ ($\in \mathbb{R}^*$). Potom existuje aj $\lim\limits_{x \to 0} f(\frac{1}{x})$ a rovná sa b. Dokážte!

2. Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je nepárna funkcia. Akú hodnotu musí mať $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$, aby existovala $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$? (Funkcia φ sa nazýva párna (nepárna), ak vyhovuje nasledujúcim podmienkam: 1. $\forall x \in D(\varphi)$: $-x \in D(\varphi)$; 2. $\forall x \in D(\varphi)$: $\varphi(x) = \varphi(-x)$ ($\forall x \in D(\varphi)$: $\varphi(-x) = -\varphi(x)$).)

2.5. Limity mocninovo-exponenciálnych funkcií

Veta 13. $\lim_{x\to+\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$.

147. Nech je daná funkcia g a kladná funkcia f, nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap D(g)$. Ak $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}$, tak existuje aj $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ a rovná sa A^B. Dokážte!

Riešenie: Aby sme mohli použiť vety o limitách, napíšme funkciu f^g v tvare $e^{g \ln f}$. Pretože $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^+$ a $\lim_{u\to A} \ln u = \ln A$ (ln je elementárna funkcia a $A \in D(\ln)$), je podľa vety o limite zloženej funkcie z pr. 124 $\lim_{x\to a} \ln f(x) = \ln A$. Podľa vety o limite súčinu $\lim_{x\to a} (g(x) . \ln f(x)) = B . \ln A$. Napokon opäť podľa vety z pr. 124 je $\lim_{x\to a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{B . \ln A} = A^B$. Teda $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$.

Analogicky sa dá postupovať v prípade funkcií typu $a^{\pm\infty}$ $(a>0,\ a \neq 1)$, $(+\infty)^a$ $(a \neq 0)$, $(+\infty)^{\pm\infty}$. Nemožno však odvodiť všeobecné pravidlá na výpočet limít typu $1^{\pm\infty}$, 0^0, $(+\infty)^0$; vtedy totiž exponent $g . \ln f$ je neurčitým výrazom typu $0.(+\infty)$ alebo $0.(-\infty)$.

V ďalšom budeme symbol $1^{\pm\infty}$ chápať trocha všeobecnejšie: znak $\pm\infty$ bude okrem funkcií s limitou $+\infty$ alebo $-\infty$ označovať aj tie exponenty, ktoré síce nemajú limitu, ale ich jednostranné limity sú nevlastné [*]. Dôležitým príkladom limity tohto typu je $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$. Ukážeme teraz, ako sa rovnosť $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ využíva pri výpočte ďalších limít typu $1^{\pm\infty}$.

148. Nájdite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$!

Riešenie: Ide skutočne o funkciu typu $1^{\pm\infty}$, pretože $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$. Zapíšme funkciu $(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ v tvare

---

[*] rovnako možno zovšeobecniť aj pojem neurčitého výrazu typu $0.(\pm\infty)$ a $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; ďalšie zovšeobecnenie pozri v poznámke na konci tohto odseku

$\left[(1 + (\sin x - 1)^{\frac{1}{\sin x - 1}} \right]^{(\sin x - 1).\mathrm{tg}\, x}$, tj. zasa ako mocninovo-exponenciálnu funkciu $f_1(x)^{g_1(x)}$, kde $g_1(x) = (\sin x - 1).\mathrm{tg}\, x$ a f_1 označuje funkciu v hranatej zátvorke. Vypočítajme teraz limity funkcií f_1, g_1:

a/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f_1(x) = e$ podľa vety o limite zloženej funkcie (vnútornou zložkou je funkcia $\sin x - 1$, vonkajšou funkcia $(1 + u)^{1/u}$; využili sme pritom poznámku uvedenú za vetou o limite zloženej funkcie;

b/ $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g_1(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x - 1) \frac{\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(- \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}\right) = 0.$

Podľa pr. 147 je preto $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f_1(x)^{g_1(x)} = e^0 = 1.$

Poznámka. I keď uvedený postup môže na prvý pohľad pôsobiť deprimujúcim dojmom, nie je až také ťažké zapamätať si ho: funkciu f^g typu $1^{\pm\infty}$ prepisujeme na tvar $f_1^{\,g_1}$ tak, aby limita funkcie f_1 bola rovná e; preto položíme $f_1 = (1 + (f - 1))^{\frac{1}{f-1}}$. Teraz stačí „dorobiť" g_1 tak, aby platilo $(f^{1/(f-1)})^{g_1} = f^g$ (teda položíme $g_1 = (f - 1) \cdot g$).

149. Sformulujte a dokážte pravidlá pre výpočet limít typu

1\. $a^{+\infty}$, kde $a \in (0, 1)$; 2. $a^{-\infty}$, kde $a \in (0, 1)$;
3\. $a^{+\infty}$, kde $a \in (1,\infty) \cup \{+\infty\}$; 4. $a^{-\infty}$, kde $a \in (1, \infty) \cup \{+\infty\}$.

Nájdite nasledujúce limity:

150\. 1. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1 + x}{2 + x}\right)^{\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}}$; 2. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x^2 - 4}\right)^{1/x}$;

3\. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2x^2 + 7}{x^2 + 3}\right)^{\frac{3x^3 - 11}{4x^2 - 12}}$; 4. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1 + \cos \pi x}{\mathrm{tg}^2 \pi x}\right)^{x^2}$;

5\. $\lim\limits_{n \to \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n + 1}$; 6. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)^{-1/x^2}$;

7\. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$; 8. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)^{1/x}$.

151\. 1. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2}\right)^{x^2}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0+} \sqrt[x]{1 - 2x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{1/(\sqrt[3]{x}-1)}$; 4. $\lim\limits_{x\to 1} (1+\sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$;

5. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{1/(x-a)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$;

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$; 8. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}$.

152. 1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln x-\ln a}{x-a}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 5x)}$;

5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

Riešenie: 4. Využijeme, že $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$ (pr. 152.1); potom $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 5x)} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\sin 5x \cdot \frac{\ln(1+\sin 5x)}{\sin 5x}} \quad \left(= \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 5x)}{\sin 5x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3x}{\sin 5x} = \frac{3}{5} \quad ^{*)}.$$

153. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2^x-x^2}{x-2}$; 4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+5x)}{e^{x \sin 4x}-1}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin \alpha x-\sin \beta x}$ $(\alpha \neq \beta)$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1)$ $(x>0)$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}}-1\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

Riešenie: 4. Využijeme, že $\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u} = 1$ (pr. 153.1); potom $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x-x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} x^a \cdot \frac{x^{x-a}-1}{x-a}$

$$\left(= \lim_{x\to a} x^a \cdot \lim_{x\to a} \frac{x^{x-a}-1}{x-a} \right) \overset{**)}{=} a^a \cdot \lim_{x\to a} \left(\frac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x} \cdot \ln x \right) =$$

---

*) všeobecným pohľadom na takýto spôsob výpočtu je pr. 193

**) funkcia x^a je elementárna, preto $x^a \to a^a$, ak $x\to a$

$$= a^a . \lim_{x\to a} \frac{e^{(x-a)\ln x} - 1}{(x-a)\ln x} . \lim_{x\to a} \ln x) = a^a . 1 . \ln a = a^a \ln a .$$

54. Nájdite limity:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln (x^2+e^x)}{\ln (x^4+e^{3x})}$; 2. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x^2+e^x)}{\ln (x^4+e^{3x})}$;

3. $\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln (x^2+e^x)}{\ln (x^4+e^{3x})}$.

Riešenie: 2. Využijeme, že $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{e^{3x}} = 0$ (pozri pr. 192); potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x^2+e^x)}{\ln (x^4+e^{3x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln (e^x(1+\frac{x^2}{e^x}))}{\ln (e^{3x}(1+\frac{x^4}{e^{3x}}))} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x + \ln (1+\frac{x^2}{e^x})}{\ln e^{3x} + \ln (1+\frac{x^4}{e^{3x}})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln (1+\frac{x^2}{e^x})}{3x + \ln (1+\frac{x^4}{e^{3x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{\ln (1+x^2/e^x)}{x}}{3 + \frac{\ln (1+x^4/e^{3x})}{x}} = \frac{1}{3} \qquad (\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (1+x^2/e^x)}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} . \lim_{x\to\infty} \ln (1+\frac{x^2}{e^x}) = 0 . 0 = 0;$$ rovnako sa vypočíta aj limita druhého sčítanca

menovateli).

Poznámka (o symbole ∞). Niekedy sa okrem symbolov $+\infty$ a $-\infty$ zavádza aj symbol ∞ ; okolím sa nazýva každá množina tvaru $(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$, $a \in R$. (Zápis $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ znamená $\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty$, tvrdenie $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ $(A \in R^*)$ je ekvivalentné s tvrde- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = A$.) Nami používaný pojem neurčitých výrazov typu $0 . (\pm\infty)$, možno potom zovšeobecniť na neurčité výrazy typu $0 . \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$. Opätovne upozorňujeme, v týchto skriptách nepoužívame symbol ∞ v takomto význame; nami používaný symbol ∞ má taký význam ako symbol $+\infty$.

2.6. Limity monotónnych postupností

Veta 14. Každá zhora ohraničená neklesajúca postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná a pla- $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup \{a_n ; n \in N\}$.

Ak $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora neohraničená neklesajúca postupnosť, tak $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Analogické tvrdenie pre nerastúcu postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostaneme, ak predchádzajúcu vetu aplikujeme na postupnosť $\{-a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

155. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné:

1. $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \dots (1 - \frac{1}{2^n})$;

2. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$;

3. $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$;

4. $a_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+2} + \frac{1}{5^n+n}$;

5. $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n+9}{2n-1}$.

156. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné a nájdite ich limity:

1. $a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},\ \dots$;

2. $a_1 = \frac{1}{2},\quad a_n = \frac{1}{2} + \frac{a_{n-1}^2}{2}$;

3. $a_1 > 0,\quad a_n = \frac{a_{n-1}}{2 + a_{n-1}}$;

4. $a_1 = 1,\quad a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$;

5. $a_n = \underbrace{\sin \sin \dots \sin}_{n\text{-krát}} x \qquad (x \in \mathbb{R})$.

Riešenie: 1. Najprv matematickou indukciou dokážeme, že postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ktorú možno zadať rekurentným vzťahom $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$) je rastúca a zhora ohraničená.

1. Zrejme $a_1 < a_2$; z predpokladu $a_n < a_{n+1}$ vyplýva $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$ (využili sme, že $\sqrt{x}$ je rastúca funkcia). Teda $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca postupnosť.

2. Dokážeme, že $a_n < 2$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Toto tvrdenie zrejme platí pre $n = 1$. Z predpokladu $a_n < 2$ vyplýva $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

Pretože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zhora ohraničená rastúca postupnosť, existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$; potom $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$. Z rovnosti $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ potom vyplýva

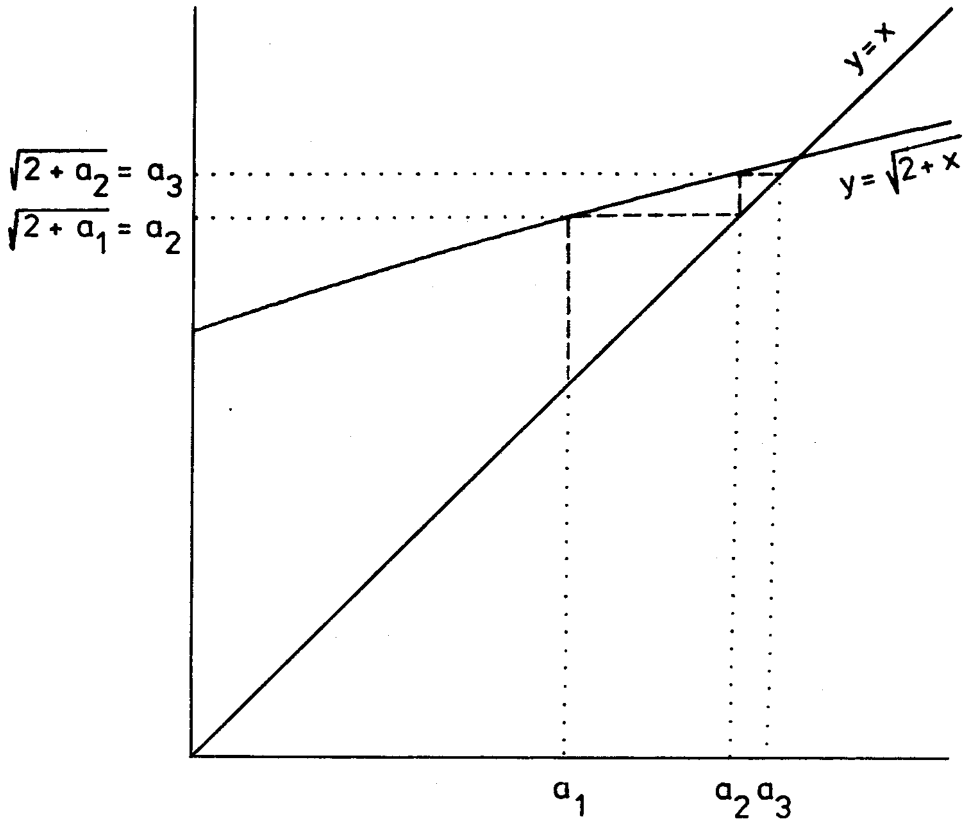
$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + a_n} \tag{*}$$

Teda hľadaná limita musí byť riešením rovnice

$$a = \sqrt{2 + a} \ ,$$

preto a = 2 (využili sme pritom evidentnú skutočnosť, že $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = a$).

Konvergenciu postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ názorne ukazuje nasledujúci obrázok:



Obr. 2

Poznámka: Rovnosť $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$ vyplýva z rovnosti (*), mohlo by sa teda zdať, že stačilo len v rekurentnom vzťahu $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ prejsť k limite, a príklad by bol vyriešený, t.j. všetky úvahy o monotónnosti a ohraničenosti boli vlastne zbytočné. To je ovšem omyl; skôr, ako napíšeme (*), sa totiž musíme presvedčiť, že limity, ktoré tam vystupujú, skutočne existujú.

7. Dokážte, že postupnosť $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesajúca a zdola ohraničená. Na základe toho dokážte nerovnosť $(1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

2.7. Heineho definícia limity

Veta 15. Nech $a \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod definičného oboru D(f) funkcie f a $b \in \mathbb{R}^*$. Potom sú nasledujúce výroky ekvivalentné:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

2. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $D(f) \setminus \{a\}$, ktorej limitou je a, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

Limitu funkcie možno definovať aj bez použitia pojmu okolia; v takom prípade sa zave die len pojem vlastnej a nevlastnej limity postupnosti a na definíciu limity funkcie f v b de a sa použije vlastnosť 2 z uvedenej vety. Definícia limity funkcie v takejto podobe sa nazýva <u>Heineho definíciou limity</u>. Veta 15 teda hovorí, že definícia limity pomocou okol a Heineho definícia limity sú ekvivalentné.

158. Dokážte, že neexistujú nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$; 2$_o$. $\lim\limits_{x\to a} \chi(x)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$;

3$_o$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos \frac{\pi}{x}$;

4$_o$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$, ak f je nekonštantná periodická funkcia.

Riešenie: 1. Pre postupnosti $a_n = n\pi$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin a_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin b_n = 1$. Pre žiadne $b \in \mathbb{R}^*$ teda nemôže byť splnená vlastnosť 2 z vety 15, preto neexistuje $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

159. Nech f je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$. Rozhodnite, či tvrdenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ je ekvivalentné s niektorým z nasledujúcich výrokov:

1. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionálnych čísel takú, že $a_n \neq a$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$;

2. pre každú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pričom množina $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$ je podmnožinou $\mathbb{Q} \setminus \{a\}$ alebo podmnožinou $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cup \{a\})$, platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$.

2.8. Hromadné hodnoty, limes inferior a limes superior postupnosti

Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva <u>podpostupnosťou (vybranou postupnosťou z) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$</u>, ak existuje rastúce zobrazenie $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že $b_n = a_{k(n)}$.

Bod $a \in \mathbb{R}^*$ sa nazýva hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak je limitou niektorej jej podpostupnosti (to je ekvivalentné s podmienkou: pre každé okolie $O(a)$ bodu a je množina $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \in O(a)\}$ nekonečná).

Veta 16. Každá postupnosť má aspoň jednu hromadnú hodnotu.

Nech $H \subset \mathbb{R}^*$ je množina všetkých hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Supremum (infimum) množiny H v množine $\mathbb{R}^*$ sa nazýva limes superior (limes inferior) postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a označuje sa $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$) alebo $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$). (Supremum (infimum) množiny H v $\mathbb{R}^*$ sa definuje ako najmenšie (najväčšie) z jej horných (dolných) ohraničení, pritom ako horné a dolné ohraničenia prichádzajú do úvahy aj body $+\infty$, $-\infty$ *).)

Veta 17. Limes superior a limes inferior postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú jej hromadnými hodnotami.

Veta 18. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, nech $b \in \mathbb{R}$. Rovnosť $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = b$ ($\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = b$) platí práve vtedy, keď

1. b je hromadná hodnota postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$;
2. pre každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \geq b + \varepsilon\}$ ($\{n \in \mathbb{N}\ ;\ a_n \leq b - \varepsilon\}$) konečná.

Veta 19. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu práve vtedy, keď $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$; limitou je pritom spoločná hodnota $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

160. Nájdite limes superior a limes inferior nasledujúcich postupností:

1. $a_n = (-1)^{n-1}(2 + \frac{3}{n})$;
2. $a_n = 1 + 2.(-1)^{n+1} + 3.(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$;
3. $a_n = \cos\frac{n\pi}{3}$;
4. $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n (-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$;
5. $a_n = n^{(-1)^n}$;
6. $a_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n.(-1)^n}}$;
7. $1, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots, \frac{9}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{2}{10^2}, \dots, \frac{99}{10^2}, \dots, \frac{1}{10^n}, \dots, \frac{10^n-1}{10^n}, \dots$;
8. $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots, \frac{5}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots, \frac{2^n+1}{2^n}, \dots$.

161. Zostrojte postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, aby množina jej hromadných hodnôt bola:

---

*) Teda napr. supremom zhora neohraničenej množiny $H \subset \mathbb{R}$ je v množine $\mathbb{R}^*$ bod $+\infty$; $\sup\{-\infty\} = -\infty$ a pod. Pre zhora (zdola) ohraničenú množinu $H \subset \mathbb{R}$ je jej supremum (infimum) v $\mathbb{R}^*$ zhodné s jej supremom (infimom).

1_0. $\{1\}$; 2_0. $\{0, 1\}$; 3_0. daná konečná množina $\{a_1, \ldots, a_n\}$;
4. $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

162_0. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť taká, že $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q}$ (taká postupnosť existuje, pretože $\mathbb{Q}$ je spočítateľná množina). Potom množina hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $\mathbb{R}^*$. Dokážte!

163. Nech ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má práve dve hromadné hodnoty; označme $a := \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $b := \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$. Dokážte: pre každé $\varepsilon \in (0, \frac{b-a}{2})$ je množina $N_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} ; a_n \in \langle a + \varepsilon , b - \varepsilon\rangle\}$ konečná.

164. Nech pre ohraničenú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí

$$\forall \varepsilon > 0: \varlimsup_{n\to\infty} a_n < \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varepsilon .$$

Potom je postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentná. Dokážte!

165. 1. Nech a je hromadný bod množiny A hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom a je hromadnou hodnotou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Existuje postupnosť, ktorej množina hromadných hodnôt je $A = \{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\}$?

166. 1. Nech sú dané ohraničené postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom

a/ ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, tak

$$\varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n ;$$

b/ $$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n .$$

2. Uveďte príklady postupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktoré budú jednotlivé nerovnosti v pr. 166.1b/ ostré.

Riešenie: Dokážeme druhú nerovnosť z pr. 166.1b/. (Skôr ako začneme vlastný dôkaz, musíme si uvedomiť, že $\varliminf\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n$ sú reálne čísla, pretože postupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené.) Využijeme nasledujúce nerovnosti:

Ak $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je postupnosť vybraná z postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, tak

$$\varliminf_{n\to\infty} c_n \overset{(1)}{\leqslant} \varliminf_{k\to\infty} c_{n(k)} \overset{(2)}{\leqslant} \varlimsup_{k\to\infty} c_{n(k)} \overset{(3)}{\leqslant} \varlimsup_{n\to\infty} c_n \qquad (*)$$

(nerovnosť (2) je zrejmá, nerovnosti (1) a (3) vyplývajú z faktu, že každá hromadná hodnota postupnosti $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je aj hromadnou hodnotou postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj. že množina hromadných hodnôt postupnosti $\{c_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ je podmnožinou množiny hromadných hodnôt postupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Nech $a := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$, potom existuje postupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ vybraná z postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taká, že $\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$. Podľa pr. 166.1a/ je $\underline{\lim}_{k\to\infty} (a_{n(k)} + b_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} a_{n(k)} + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)}$ ($= \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)}$). Na dokončenie dôkazu teraz už stačí len niekoľkokrát použiť nerovnosti z (*):

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (a_n + b_n) \overset{(I)}{\leq} \underline{\lim}_{k\to\infty} (a_{n(k)} + b_{n(k)}) = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)} \overset{(II)}{\leq}$$

$$\overset{(II)}{\leq} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{k\to\infty} b_{n(k)} \overset{(III)}{\leq} \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$$

(ak zapíšeme nerovnosť (1) z (*) pre postupnosti $c_n = a_n + b_n$, $c_{n(k)} = a_{n(k)} + b_{n(k)}$, dostaneme (I); nerovnosť (II) dostaneme, ak k obidvom stranám nerovnosti (2) z (*) zapísanej pre postupnosť $\{b_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ pripočítame číslo $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$; podobne vyplýva (III) z nerovnosti (3) v (*)).

2.9. Ďalšie príklady

167_0. Uveďte príklad neprázdnej množiny $A \subset R$ takej, že $A' \neq \emptyset$ a platí

1. $A' \subsetneq A$; 2. $A' = A$; 3. $A \subsetneq A'$; 4. $A' \cap A = \emptyset$; 5. $A \not\subset A' \wedge A' \not\subset A \wedge A' \cap A \neq \emptyset$.

168. Ak $a \in R^*$ je hromadný bod množiny A', tak a je aj hromadný bod množiny A (teda $(A')' \subset A'$). Dokážte!

169. Existuje množina A taká, že $A' = (0, 1)$?

170. Nech $a \in R^*$ je hromadný bod množiny $A \cup B$. Potom a je hromadný bod množiny A alebo a je hromadný bod množiny B (teda $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$). Dokážte!

171. Nech je daná postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, definujme postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ predpisom

$$b_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) .$$

Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $(a \in R^*)$, tak existuje aj $\lim_{n\to\infty} b_n$ a platí $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Dokážte; ďalej ukážte, že obrátená implikácia vo všeobecnosti neplatí.

172. Nájdite limity:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n})$; 2. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}})$.

173. 1. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť taká, že $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$. Potom existuje $\lim_{n\to\infty} a_n$ a rovná sa $+\infty$.

2. Postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva prerovnaním postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak existuje tak[á] bijekcia $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, že $b_n = a_{p(n)}$ $(n\in\mathbb{N})$. Ak $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ $(b\in\mathbb{R}^*)$, tak každé prerovna[-] nie postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tiež limitu rovnú b. Dokážte!

174. Zostane tvrdenie z pr. 173.1 v platnosti, ak v ňom
1. vynecháme predpoklad „$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je prostá postupnosť" ? ;
2. predpoklad „$\{a_n ; n\in\mathbb{N}\} = \mathbb{N}$" nahradíme predpokladom „$\{a_n ; n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{N}$" ?

175. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je taká postupnosť, že existuje $\lim_{n\to\infty} |a_n| =: b$ a neexistuje $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Dokážte, že
1. $b \neq 0$;
2. množiny $N^+ := \{n\in\mathbb{N} ; a_n > 0\}$ a $N^- := \{n\in\mathbb{N} ; a_n < 0\}$ sú nekonečné ;
3. množina $\mathbb{N}\setminus(N^+\cup N^-)$ je konečná.

176_0. Na základe definície limity dokážte:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5$;   2. $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

177. Uveďte príklad funkcie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ktorá má limitu len v bode 0.

178. Dokážte, že postupnosť $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá limitu.

179. Nájdite limity:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$ $(m, n\in\mathbb{N})$;   2. $\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$;

3. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}\right)$;   4. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$ $(m, n\in\mathbb{N})$;

5. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(x+\frac{2a}{n}\right)^2 + \dots + \left(x+\frac{n-1}{n}a\right)^2\right]$;

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\dots(x^n+1)}{\left[(nx)^n+1\right]^{\frac{n+1}{2}}}$;   7. $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$;

8. $\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{1+4+\dots+(3n-2)}$;   9. $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\dots+(-1)^{n-1}n}{n}$;

10. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{2^n+3^n}{6^n}\right)$.

180. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Potom existuje maximum alebo minimum množiny $\{a_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Dokážte!

181. Dokážte, že neexistuje racionálna funkcia R s celočíselnými koeficientami taká, aby platilo

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \exists k \in \mathbb{Z}: R(k) = r .$$

182. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ $(m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x}$ $(m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} - \sqrt{\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}\right)$;

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+1}}\right)$;

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)$;

6. $\lim\limits_{n\to \infty} \dfrac{\sqrt{3n-1} - \sqrt[3]{125\,n^3 + n}}{\sqrt[5]{n} - n}$;

7. $\lim\limits_{x\to \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)$;

8. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$;

9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(x - \sqrt{x^2-1})^n + (x + \sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

183_0. Nech $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sú periodické funkcie a $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Potom $f = g$. Dokážte!

184. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin(\frac{\pi}{6} + x)\sin(\frac{\pi}{6} + 2x) - 1}{\sin x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x^2 - 2x)}{\sin 3\pi x}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x} + 2}{x^2}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x\sqrt{\cos 2x}\,\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$;

7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x + \frac{\pi}{6})}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$;

9. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\arccos x}{(2x-1)^2}$;

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{\sin\frac{\pi x}{2}}+\sqrt[3]{\sin\frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x}}$;

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x^3+3x}-\sqrt{3x^2+1}}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

14. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dfrac{(2x-\pi)\sin\frac{x}{2x-\pi}}{\cos 4x}}$;

15. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sin\ln(x+1)-\sin\ln x)$.

185. 1_o. Nech $q\in(0,1)$, nech pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nezáporných čísel platí $\sqrt[n]{a_n}\leq q$ $(n\in\mathbb{N})$. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte!

2. Nájdite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$.

186. Dokážte, že

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$ $(k\in\mathbb{R},\ a>1)$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

187. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2-5n+3}{n^5+1}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}$ $(a,\ b>0)$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+n\,2^n}$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+11^n)^{\frac{1}{n+2}}$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n\,n!}{n^n}$;

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n\,n!}{n^n}$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{4^n}$;

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+3^n}{n+3^{n+1}}$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n/2}+(n+1)!}{n\,(3^n+n!)}$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{1-\sqrt[n]{n}}$.

188. Nech $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; ukážeme dva spôsoby výpočtu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$:

a/ odhadneme x_n zhora a zdola:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}} = 1 \ ;$$

teda

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq x_n \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1$, je podľa vety 6 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

b/ Podľa vety o limite súčtu je

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 0+0+\ldots+0 = 0.$$

Zrejme aspoň jeden z uvedených postupov je nesprávny. Ktorý to je a v čom spočíva chyba?

189. Sformulujte a dokážte pravidlo pre výpočet limít typu $0^{+\infty}$ a $0^{-\infty}$!

190. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right)$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2^x}{1 + 2^{x+1}} \right)^{-x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$;
5. $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)^{1/x^2}$;
6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}+} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + x\right) \right)^{\operatorname{tg} 2x}$;
7. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1 + \sin x \cos \alpha x}{1 + \sin x \cos \beta x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$;
8. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} (\cos x)^{\frac{1}{(3x-\pi)^3}}$;
9. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1, a_2 > 0)$;
10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\sin(x-1)}{x-1} \right)^{\frac{\sin(x-1)}{x-1-\sin(x-1)}}$;
11. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

191. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x) \log_x 2$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(1 + 2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x+1}{x-1}$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x - a} \quad (a > 0, \alpha \in \mathbb{R})$;
5. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x^x - a^a}{x - a} \quad (a > 0)$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a, b > 0)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$ $(x>0)$;

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2}$ $(a, b>0)$;

9. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a, b>0)$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x e^x) - \cos(x e^{-x})}{x^3}$;

11. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2 \pi x^\alpha}{\sin^2 \pi x^\beta}$ $(\beta \neq 0)$;

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2 \pi 2^x}{\ln(\cos \pi 2^x)}$.

192. 1. Dokážte, že

a/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$ $(a>1, \alpha>0)$;

b/ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$ $(a>1, \alpha>0)$.

2. Nájdite:

a/ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$;

b/ $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$;

c/ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}$.

Poznámka. Tvrdenie z pr. 192.1 si možno zapamätať v nasledujúcej symbolickej podobe

$$\log_a x \ll x^\alpha \ll a^x \quad \text{(pre x dostatočne veľké, } \alpha>0, a>1)$$

kde $f \ll g$ (pre dostatočne veľké x) znamená $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Pre postupnosti platí (pozri aj pr. 186):

$$\log_a n \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \quad \text{(pre n dostatočne veľké, } \alpha>0, a>1)$$

193$_0$. Nech $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}$ a $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{\beta_1(x)}$ sú konečné a nenulové. Potom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ existuje práve vtedy, keď existuje $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$. Dokážte!

194. Nech f je definovaná na $\mathbb{R}$ a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Zostrojte funkciu $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pre ktorú existuje nenulová $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ a neexistuje $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

195. Dokážte, že nasledujúce postupnosti sú konvergentné:

1. $a_n = \dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$, kde $(2n)!! = 2 \,.\, 4 \,.\, \ldots \,.\, 2n$, $(2n+1)!! = 1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n+1)$

2. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$;

3. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2}\right) . \left(1 + \dfrac{1}{4}\right) . \ldots . \left(1 + \dfrac{1}{2^n}\right)$.

196. Nech $b_1 = 1$, $b_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{n}}}$. Potom $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Dokážte!

197. Nájdite $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, ak

1. $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$; 2. $a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

198. Nech f je funkcia definovaná na $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$. Rozhodnite, či tvrdenie $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ je ekvivalentné s niektorým z nasledujúcich výrokov:

1. pre každú monotónnu postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, pričom $a_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = b$;

2. z každej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorej limitou je a, pričom $a_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$, možno vybrať postupnosť $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ takú, že $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_{n(k)}) = b$.

199_o. Nech a je hromadný bod definičného oboru $D(f)$ funkcie f. Dokážte, že nasledujúce dve podmienky sú ekvivalentné:

a/ neexistuje $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

b/ existujú postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $D(f) \setminus \{a\}$ také, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)$ a $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$ existujú a nerovnajú sa.

200. Nech je daná ohraničená postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Dokážte, že

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \inf \{ \sup\limits_{k \geq n} a_k \,;\, n \in \mathbb{N} \}$; 2. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \sup \{ \inf\limits_{k \geq n} a_k \,;\, n \in \mathbb{N} \}$.

201. Existuje postupnosť taká, že množina jej hromadných hodnôt je 1. $\langle 0, 1 \rangle$; 2. $(0, 1)$?

202. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená postupnosť a $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Dokážte, že množina H hromadných hodnôt postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je množina $\{ x \in \mathbb{R} \,;\, \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq x \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \}$.

203_o. Nech v postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergujú podpostupnosti $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{a_{3k}\}_{k=1}^{\infty}$. Dokážte, že potom konverguje aj postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$!

204. Aké postupnosti vyhovujú podmienke

1. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N},\ n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$;

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists n \in \mathbb{N},\ n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$?

205. 1. Nech pre postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$. Potom $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná postupnosť. Dokážte!

2. Pre ktoré postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel platí vzťah $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 1$?

206. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ohraničené postupnosti nezáporných čísel. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1. ak existuje konečná $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, tak $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$;

2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . b_n \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n . b_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \cdot \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, b_n$

207. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel, nech $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dokážte, že existuje nekonečne veľa indexov n takých, že platí

$$\forall k \in \mathbb{N}:\ k < n \Longrightarrow a_k > a_n$$

(tj. a_n je menšie než všetky predchádzajúce členy postupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$).

DODATOK 2

OTVORENÉ, UZAVRETÉ A KOMPAKTNÉ MNOŽINY

Bod $a \in \mathbb{R}$ sa nazýva <u>vnútorný bod množiny A</u> $\subset \mathbb{R}$, ak existuje také jeho okolie $O(a)$, že platí $O(a) \subset A$.

Neprázdna množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva <u>otvorená</u>, ak každý jej prvok je jej vnútorným bodom. Ďalej sa dohodneme, že prázdnu množinu budeme pokladať za otvorenú.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva <u>uzavretá</u>, ak je množina $\mathbb{R} \setminus A$ otvorená.

<u>Veta 20</u>. Pre ľubovoľnú množinu $A \subset \mathbb{R}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a/ A je uzavretá množina ;

b/ ak $a \in \mathbb{R}$ je hromadný bod množiny A, tak $a \in A$;

c/ ak všetky členy konvergentnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú prvkami množiny A, tak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

Poznámka. Často sa pojem uzavretej množiny definuje pomocou vlastnosti b/ alebo c/. Otvorená množina sa niekedy definuje pomocou uzavretej, a to tak, že sa najprv pomocou niektorej z vlastností b/, c/ zavedie pojem uzavretej množiny a za otvorené sa potom vyhlásia tie množiny A, ktorých doplnky $\mathbb{R} \setminus A$ sú uzavreté.

208. Rozhodnite o uzavretosti a otvorenosti nasledujúcich množín:

1. $(0, 1) \cup \langle 2, 3 \rangle$;
2. $(0, 1) \setminus \{ \frac{1}{2^n} ;\ n \in \mathbb{N} \}$;
3. $\langle 0, 1 \rangle \setminus \{ \frac{1}{n} ;\ n \in \mathbb{N} \}$;
4. $\mathbb{N}$;
5. $\mathbb{Q}$;
6. $\chi(\mathbb{R})$;
7. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle \frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n} \rangle \quad (= \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \cup \langle \frac{1}{5}, \frac{1}{4} \rangle \cup \ \dots)$;
8. $f(\mathbb{R})$, kde f je Riemannova funkcia (definíciu Riemannovej funkcie pozri v pr. 230) ;
9. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$.

209. Dokážte nasledujúce tvrdenia:

1_o. ak A, B sú otvorené množiny, tak aj množiny $A \cup B$, $A \cap B$ sú otvorené ;

2. ak A, B sú uzavreté množiny, tak aj množiny $A \cup B$, $A \cap B$ sú uzavreté ;

3. ak A je otvorená a B uzavretá množina, tak $A \setminus B$ je otvorená a $B \setminus A$ uzavretá množina ;

4. ak $\{A_\alpha ; \alpha \in I\}$ je systém otvorených množín (I je neprázdna indexová množina), tak $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ ($:= \{ x \in \mathbb{R} ; \exists \alpha \in I : x \in A_\alpha \}$) je otvorená množina (teda slovne: zjednotenie ľubovoľného systému otvorených množín je otvorená množina) .

210. Ak $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ je otvorená množina a $B \subset \mathbb{R}$ je ľubovoľná neprázdna množina, tak $A + B$ je otvorená množina (definíciu množiny $A + B$ pozri v pr. 21).

211. Ukážte, že 1. interval (a, b) možno písať ako zjednotenie uzavretých nedegenerovaných intervalov (degenerovanými intervalmi sa nazývajú jednoprvkové množiny), ale 2. interval $\langle a, b \rangle$ nemožno písať v tvare zjednotenia otvorených intervalov.

212. Nech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ je otvorená množina a $B \subset \mathbb{R}$ ľubovoľná neprázdna množina. Potom množina $C := \{ |x - y| ; x \in A, y \in B \}$ je buď otvorená alebo je zjednotením otvorenej množiny s jednoprvkovou množinou $\{0\}$.

213. Ak množina $A \subset \mathbb{R}$ je súčasne otvorená aj uzavretá, tak $A = \emptyset$ alebo $A = \mathbb{R}$. Dokážte!

Systém $\{A_t ; t \in I\}$ množín reálnych čísel (neprázdna množina I - nie nutne číselná - sa nazýva indexová) sa nazýva <u>pokrytie množiny $A \subset \mathbb{R}$</u>, ak $A \subset \bigcup_{t \in I} A_t$ ($:= \{ x \in \mathbb{R} ; \exists t \in I : x \in A_t \}$). Ak je naviac každá z množín A_t, $t \in I$, otvorená, nazýva sa tento systém <u>otvorené pokrytie množiny A</u>; termín <u>konečné pokrytie</u> používame, ak je množina I konečná.

Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva <u>kompaktná množina (kompakt)</u>, ak z každého jej otvoreného pokrytia $\{A_t ; t \in I\}$ možno vybrať konečné podpokrytie (tj. existuje konečná neprázdna množina $I' \subset I$ tak, že $A \subset \bigcup_{t \in I'} A_t$).

<u>Veta 21</u>. Pre ľubovoľnú množinu $A \subset \mathbb{R}$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

a/ A je kompaktná množina ;

b/ A je uzavretá a ohraničená množina ;

c/ ak všetky členy postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú prvkami množiny A, tak z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ možno vybrať konvergentnú podpostupnosť, ktorej limita je prvkom množiny A.

Poznámka. Často sa kompaktná množina definuje pomocou vlastnosti c/.

214. Dokážte, že

1. uzavretá podmnožina kompaktu je kompakt ;
2. zjednotenie konečného počtu kompaktov je kompakt ;
3. prienik konečného počtu kompaktov je kompakt.

215. Je daná spočítateľná kompaktná množina $E = \{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$, ktorá je pokrytá systémom intervalov $\{(-\varepsilon, \varepsilon), (1-\varepsilon, 1+\varepsilon), (\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}), \ldots, (\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}), \ldots\}$, kde ε je dané kladné číslo, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Nájdite konečné pokrytie vybrané z tohto otvoreného pokrytia!

216. Je daná spočítateľná množina $E = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\}$ pokrytá systémom otvorených intervalov $\{(1-\varepsilon, 1+\varepsilon), (\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}), \ldots, (\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}), \ldots\}$, kde ε je dané kladné číslo, $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Možno z tohto pokrytia vybrať konečné podpokrytie?

217. Množina $(0, 1\rangle$ nie je kompaktná. Nájdite také jej otvorené pokrytie, z ktorého nemožno vybrať konečné podpokrytie!

218. 1. Nech $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sú neprázdne kompaktné množiny, nech $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$. Dokážte, že množina $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ $(:= \{x \in \mathbb{R};\ \forall n \in \mathbb{N}: x \in A_n\})$ je neprázdna!

2. Nech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kompaktov taká, že prienik ľubovoľného konečného počtu jej členov je neprázdny. Potom $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$. Dokážte!

219. Rozhodnite, či tvrdenie „$A \subset \mathbb{R}$ je kompaktná množina" je ekvivalentné s niektorou z podmienok:
„Z každého pokrytia
1. otvorenými intervalmi ;
2. uzavretými množinami ;
3. uzavretými nedegenerovanými intervalmi ;
4. intervalmi typu $\langle a, b)$
možno vybrať konečné podpokrytie."

220. Ak sú $A, B \subset \mathbb{R}$ neprázdne kompaktné množiny, tak aj množiny $A + B$, $A \cdot B$ sú kompaktné. Dokážte! $(A \cdot B := \{a.b;\ a \in A, b \in B\})$

3. SPOJITOSŤ FUNKCIE

3.1. Definícia spojitosti v bode a na množine. Klasifikácia bodov nespojitosti

Hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode $a \in D(f)$, ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D(f): |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Poznámka. Všimnime si, že bod a nemusí byť hromadným bodom množiny $D(f)$. Môžu teda nastať dva prípady:

1. ak $a \in D(f)$ je hromadným bodom množiny $D(f)$, tak podmienka (*) je ekvivalentná s podmienkou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;

2. ak $a \in D(f)$ nie je hromadným bodom množiny $D(f)$ (tj. existuje $\eta > 0$ tak, že $D(f) \cap (a - \eta, a + \eta) = \{a\}$; taký bod sa nazýva izolovaným bodom množiny $D(f)$), je podmienka (*) splnená (stačí položiť $\delta = \eta$ pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$). Teda funkcia f je spojitá v každom izolovanom bode množiny $D(f)$.

Veta 1. Ak funkcie f, g sú spojité v bode a ($\in D(f) \cap D(g)$), tak aj funkcie $c.f$ (c je reálna konštanta), $f + g$, $f - g$, $f.g$ sú spojité v bode a. Ak naviac $g(a) \neq 0$, tak aj funkcia $\frac{f}{g}$ je spojitá v bode a.

Veta 2. Ak funkcia f je spojitá v bode a, funkcia g je spojitá v bode $f(a)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v bode a.

Hovoríme, že funkcia f je spojitá, ak je spojitá v každom bode svojho definičného oboru. Hovoríme, že funkcia f je spojitá na množine A ($\emptyset \neq A \subset D(f)$), ak je spojitá funkcia f/A.

Veta 3. Každá základná elementárna funkcia je spojitá.

(Z viet 1, 2 a 3 vyplýva veta 4 z kapitoly 2.)

221. Pomocou kvantifikátorov zapíšte tvrdenie „funkcia f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$"!

222. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií v daných bodoch:

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} &, \text{ ak } x \neq 0 \\ 1 &, \text{ ak } x = 0 \end{cases}$ v bode 0 ;

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} &, \text{ ak } x \neq 0 \\ 1 &, \text{ ak } x = 0 \end{cases}$ v bode 0 ;

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2} &, \text{ ak } x \neq -1 \\ 0 &, \text{ ak } x = -1 \end{cases}$ v bode -1 ;

4. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ v bode 0 ;

5. $f(x) = x \operatorname{sgn} x$ v bode 0 .

223. Nasledujúce funkcie nie sú definované v bode a. Určte hodnotu f(a) tak, aby takto dodefinovaná funkcia f bola spojitá v bode a:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$, $a = 0$; 2. $f(x) = (1+x)^{1/2x}$, $a = 0$;

3. $f(x) = e^{-1/x^2}$, $a = 0$; 4. $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/(x-1)}}$, $x < 1$, $a = 1$;

5. $f(x) = (x+3) \sin \frac{1}{x+3}$, $a = -3$.

224. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{x^3 + 5x^2 + 6x}$; 2. $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^x}{x} &, \text{ ak } x < 0 \\ 2x - 1 &, \text{ ak } x \geq 0 \end{cases}$;

3. $f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2))$; 4. $f(x) = x\,[x]$;

5. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1 + x^n}$, $x \geq 0$; 6. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$;

7. $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x}$.

Riešenie: 2. Dokázať spojitosť funkcie f na množine $R \setminus \{0\}$ je jednoduché: pre každé číslo $a < 0$ možno nájsť také jeho okolie $O(a)$, na ktorom sa funkcia f zhoduje s elementárnou funkciou $\frac{1 - e^x}{x}$, tá je spojitá v bode a; preto $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{1 - e^x}{x} = \frac{1 - e^a}{a} = f(a)$, čo znamená, že funkcia f je spojitá v bode a. Analogicky sa postupuje v prípade $a > 0$ *). Prípad $a = 0$ treba vyšetriť samostatne: vtedy $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{1 - e^x}{x} = -1$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (2x - 1) = -1$, preto $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 = f(0)$. Funkcia f je teda spojitá aj v bode 0, preto f je spojitá funkcia.

*) Uvedenú myšlienku možno ľahko zovšeobecniť: ak sú dané funkcia f a spojitá funkcia g a existuje neprázdna otvorená množina $G \subset D(f) \cap D(g)$ taká, že $f/G = g/G$, tak f je spojitá v každom bode množiny G.

225_0. Nech funkcie f, g sú definované na $\mathbb{R}$ a funkcia $f + g$ je spojitá v bode a. Potom nastane práve jedna z nasledujúcich možností:
a/ funkcia f aj funkcia g sú spojité v bode a;
b/ ani funkcia f ani funkcia g nie je spojitá v bode a.
Dokážte; obidve uvedené možnosti dokumentujte na príkladoch!

226_0. Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom funkcia $f.\chi$ je spojitá práve v bodoch množiny $\{x\in\mathbb{R} \; ; \; f(x) = 0\}$. Dokážte!

227. Možno tvrdiť, že funkcia $g\circ f$ nie je spojitá v bode x_0, ak f je spojitá v bode x_0 a g nie je spojitá v bode $f(x_0)\in D(g)$?

228. Nech funkcie f, g sú spojité v bode a ($\in D(f)\cap D(g)$). Potom aj funkcie $|f|$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ sú spojité v bode a. Dokážte!

229. Vyšetrite spojitosť Dirichletovej funkcie $\chi(x)$!

230. Dokážte, že Riemannova funkcia f, definovaná predpisom $f(x) = 0$, ak $x\in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ a $f(x) = 1/n$, ak $x = m/n$, kde $n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$ sú nesúdeliteľné čísla, je spojitá v každom iracionálnom čísle a nespojitá v každom racionálnom čísle.

231_0. Nech funkcia f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\sup\{f(x) \; ; \; x\in\langle a, b\rangle\} = \sup\{f(x) \; ; \; x\in\langle a, b\rangle\cap\mathbb{Q}\} .$$

Dokážte!

Číslo $a\in\mathbb{R}$, ktoré je hromadným bodom definičného oboru $D(f)$ funkcie f, sa nazýva <u>bodom nespojitosti funkcie f</u>, ak je splnená niektorá z nasledujúcich podmienok:
a/ $a\notin D(f)$;
b/ neexistuje $\lim_{x\to a} f(x)$;
c/ $a\in D(f)$ a existuje $\lim_{x\to a} f(x)$, ale neplatí $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Ak $a\in\mathbb{R}$ je bod nespojitosti funkcie f a existuje konečná $\lim_{x\to a} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom odstrániteľnej nespojitosti</u>. Ak neexistuje vlastná $\lim_{x\to a} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom neodstrániteľnej nespojitosti</u>.

Nech $a\in\mathbb{R}$ je bod nespojitosti funkcie f, pričom a je hromadným bodom množín $D(f)\cap(-\infty, a)$ aj $D(f)\cap(a, +\infty)$. Ak v bode a existujú vlastné jednostranné limity a $\lim_{x\to a-} f(x) \neq \lim_{x\to a+} f(x)$, nazýva sa a <u>bodom nespojitosti 1. druhu</u> (rozdiel $\lim_{x\to a+} f(x) - \lim_{x\to a-} f(x)$ sa potom nazýva <u>skokom funkcie f v bode a</u>). Ak aspoň jedna z jednostranných limít v bode a neexistuje alebo je nevlastná, nazýva sa a <u>bodom nespojitosti 2. druhu</u>.

Poznámka. Klasifikácia bodov nespojitosti nie je v matematickej literatúre jednotná; napr. niekedy sa hromadné body množiny $D(f)$, ktoré nie sú prvkami $D(f)$, nepovažujú za body nespojitosti funkcie f; v definícii bodu nespojitosti 1. druhu sa niekedy nepožaduje splnenie podmienky $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a-} f(x)$ atď.

232. Vyšetrite charakter bodov nespojitosti nasledujúcich funkcií:

1. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x)^2}$;
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$;
3. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;
4. $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$;
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$;
6. $f(x) = \cos^2 \dfrac{1}{x}$;
7. $f(x) = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$;
8. $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$;
9. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ak } |x| \leqslant 1 \\ 1, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$;
10. $f(x) = x \left[\dfrac{1}{x}\right]$;
11. $f(x) = g(g(g(x)))$, kde $g(x) = \dfrac{1}{1 - x}$;
12. $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$;
13. $f(x) = g\,(\varphi(x))$, kde $g(x) = \begin{cases} x & , \text{ak } 0 < x \leqslant 1 \\ 2 - x, & \text{ak } 1 < x < 2 \end{cases}$,

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & , \text{ak } x \in \mathbb{Q} \\ 2 - x, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} .$$

233_0. 1. Dokážte, že monotónna funkcia definovaná na $\mathbb{R}$ môže mať len body nespojitosti 1. druhu.

2. Dokážte, že množina bodov nespojitosti neklesajúcej funkcie f definovanej na intervale I je spočítateľná.
(Návod: Stačí dokázať, že množina S všetkých bodov nespojitosti funkcie f ležiacich vnútri intervalu I - každý z nich je bodom nespojitosti 1. druhu - je spočítateľná. Ak každému bodu $a \in S$ priradíme interval $(\lim\limits_{x \to a-} f(x), \lim\limits_{x \to a+} f(x))$, dostaneme systém po dvoch disjunktných intervalov; tento systém je spočítateľný - pozri pr. 99.)

3.2. Vlastnosti spojitých funkcií I

Funkcia f definovaná na intervale I sa nazýva <u>darbouxovská na I</u>, ak pre každé $a, b \in I$, $a < b$, platí: na intervale $\langle a, b\rangle$ nadobúda funkcia f všetky hodnoty medzi $f(a)$ a $f(b)$; tj. ak platí

$$\forall a, b \in I, a < b: f(\langle a, b\rangle) \supset \{y \in \mathbb{R} ; \min \{f(a), f(b)\} \leq y \leq \max \{f(a), f(b)\}\} .$$

<u>Veta 4</u>. Ak je funkcia f spojitá na intervale I, tak je darbouxovská na I.

234. Dokážte, že existuje
   1. $x \in (0, 1)$, pre ktoré platí $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 = 0$;
   2. $x \in \mathbb{R}$, pre ktoré platí $x = \cos x$;
   3. aspoň jedno riešenie rovnice $P(x) = 0$, kde P je polynóm nepárneho stupňa.

Riešenie: 1. Funkcia daná predpisom $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x - 1$ je spojitá, a teda aj darbouxovská na $\mathbb{R}$, nadobúda preto na intervale $\langle 0, 1\rangle$ všetky hodnoty medzi $f(0) = -1$ a $f(1) = 2$. Pretože $-1 < 0 < 2$, musí existovať $x \in (0, 1)$, v ktorom $f(x) = 0$.

235. Nech funkcia f je spojitá na intervale (a, b), nech $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(c) = \frac{1}{n} (f(x_1) + \dots + f(x_n)) .$$

Dokážte!

236. Nech $f: \langle 0, 1\rangle \to \langle 0, 1\rangle$ je spojitá funkcia. Potom pre niektoré $c \in \langle 0, 1\rangle$ platí $f(c) = c$. Dokážte!

237_0. Ak pre spojitú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $f(\mathbb{Q}) = \{0\}$, tak aj $f(\mathbb{R}) = \{0\}$. Dokážte!

238. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má túto vlastnosť: pre každý interval $I \subset \mathbb{R}$ je $I \setminus f(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Potom je f konštantná na $\mathbb{R}$ alebo nespojitá v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Dokážte!

239_0. Ak je funkcia f prostá a spojitá na intervale I, tak je tam rýdzomonotónna. Dokážte!

<u>Veta 5</u>. Ak je funkcia f spojitá na kompaktnej množine A (alebo špeciálne na uzavretom ohraničenom intervale), tak je na A ohraničená a existujú $\max\limits_{x \in A} f(x)$ a $\min\limits_{x \in A} f(x)$.

240. Nech spojitá funkcia f nadobúda na intervale $\langle a, b\rangle$ len kladné hodnoty. Potom existuje $\mu > 0$ tak, že $f(x) \geq \mu$ platí pre každé $x \in \langle a, b \rangle$. Dokážte!

241. Ak funkcia $f:(a, b)\to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$ je spojitá a existujú konečné $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to b} f(x)$, tak f je ohraničená. Dokážte!

242. Ak P je polynóm párneho stupňa, tak existuje $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$ alebo $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$. Dokážte! Aký je koeficient pri člene s najvyššou mocninou, ak existuje $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} P(x)$?

243$_0$. Ak f je spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$ a $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = f(0)$, tak existuje $\max\limits_{x\geq 0} f(x)$ aj $\min\limits_{x\geq 0} f(x)$. Dokážte!

244$_0$. Vetu 5 možno dokázať na základe nasledujúcich faktov:

1. ak funkcia f je spojitá na kompaktnej množine A, tak f(A) je kompaktná množina;
2. každá kompaktná množina je ohraničená a obsahuje svoje supremum a infimum.

Dokážte tieto tvrdenia!

245. Nech $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ má len body nespojitosti 1. druhu. Potom f je ohraničená na každom ohraničenom intervale. Dokážte!

246. Existuje spojitá a ohraničená funkcia $f:(0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ taká, že neexistuje $\max\limits_{x\in(0,1\rangle} f(x)$ ani $\min\limits_{x\in(0,1\rangle} f(x)$?

3.3. Rovnomerná spojitosť. Vlastnosti spojitých funkcií II

Funkcia f sa nazýva <u>rovnomerne spojitá na množine</u> $A \subset D(f)$ $(A \neq \emptyset)$, ak platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A: \ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Funkcia f rovnomerne spojitá na svojom definičnom obore sa nazýva <u>rovnomerne spojitá</u>.

247. Pomocou kvantifikátorov zapíšte tvrdenie „Funkcia f je spojitá na intervale (a, b), ale nie je tam rovnomerne spojitá."!

248. Rozhodnite, či je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A. Svoje tvrdenie dokážte na základe definície!

1. $f(x) = 5x - 3$, $\quad A = \mathbb{R}$;
2. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $\quad A = \langle -2, 5\rangle$;
3. $f(x) = \cos\frac{1}{x}$, $\quad A = (0, 1)$;
4. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\quad A = (\frac{1}{10}, 1)$;
5. $f(x) = \sin x^2$, $\quad A = \langle 0, \infty)$;

6. $f(x) = \sqrt{x}$, $A = \langle 0, \infty)$;

7. $f(x) = x + \sin x$, $A = \mathbb{R}$.

Riešenie: 2. Predpokladajme, že $x, y \in \langle -2, 5\rangle$, $|x - y| < \delta$, a pokúsme sa na základe toho zhora odhadnúť výraz $|f(x) - f(y)|$. Postupne dostaneme $|f(x) - f(y)| = |x^2 - 2x - 1 - (y^2 - 2y - 1)| = |(x^2 - y^2) + 2(y - x)| \leqslant |x^2 - y^2| + 2|x - y| = |x - y||x + y| + 2|x - y| = |x - y|(|x + y| + 2) \leqslant |x - y|(|x| + |y| + 2)$. Pretože $x, y \in \langle -2, 5\rangle$, je $|x| \leqslant 5$, $|y| \leqslant 5$, odtiaľ $|x - y|(|x| + |y| + 2) \leqslant 12|x - y| < 12\delta$.

Zistili sme teda: ak $x, y \in \langle -2, 5\rangle$, $|x - y| < \delta$, tak $|f(x) - f(y)| < 12\delta$. To znamená, že funkcia f je rovnomerne spojitá na intervale $\langle -2, 5\rangle$, pre dané $\varepsilon > 0$ stačí totiž položiť $\delta = \varepsilon/12$.

5. Ak si predstavíme graf funkcie $f(x) = \sin x^2$, $x \geqslant 0$, zistíme, že v smere k $+\infty$ funkcia f na intervaloch stále menšej dĺžky nadobúda všetky hodnoty medzi 1 a -1, tj. že jej graf sa smerom k $+\infty$ „zhusťuje". To nás vedie k domnienke, že f nie je na $\langle 0, \infty)$ rovnomerne spojitá. Všimnime si preto podrobnejšie dvojice bodov $(x_n, y_n) = \left(\sqrt{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$; zrejme $f(x_n) = -1$, $f(y_n) = 1$. Pretože $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0$, existuje pre každé $\delta > 0$ dvojica (x_n, y_n) taká, že $|x_n - y_n| < \delta$. Tým sme dokázali

$$\exists \varepsilon > 0 \quad (\varepsilon = 2) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_n \geqslant 0,\ y_n \geqslant 0 : |x_n - y_n| < \delta \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon ,$$

čo je negácia tvrdenia „f je rovnomerne spojitá na $\langle 0, \infty)$". Teda $\sin x^2$ nie je rovnomerne spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$.

249. Funkcia f je rovnomerne spojitá na ohraničenom intervale I práve vtedy, keď pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje spojitá po častiach lineárna funkcia φ taká, že pre všetky $x \in I$ platí $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$. Dokážte! (Spojitá funkcia φ definovaná na ohraničenom intervale I sa nazýva po častiach lineárna, ak existuje konečný počet po dvoch disjunktných intervalov $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tak, že $I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n = I$ a funkcie φ/I_i $(i = 1, \ldots, n)$ sú lineárne; tj. grafom je „lomená čiara".)

250. Pre funkciu F nájdite spojitú po častiach lineárnu funkciu f takú, aby pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$ platilo $|F(x) - f(x)| < 0{,}1$, ak:

1. $F(x) = x^2$, $\langle a, b\rangle = \langle -1, 1\rangle$;

2. $F(x) = \frac{1}{x}$, $\langle a, b\rangle = \langle \frac{2}{3}, 2\rangle$.

<u>Veta 6</u>. Funkcia spojitá na kompaktnej množine K je rovnomerne spojitá na K.

251. Rozhodnite, či je funkcia f rovnomerne spojitá na množine A:

1. $f(x) = \dfrac{x}{4 - x^2}$, $\quad A = \langle -1, 1\rangle$;

2. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $\quad A = (0, \pi\rangle$;

3. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad A = \langle 0, \infty)$;

4. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ak } x \in (0, \pi\rangle \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, $\quad A = \langle 0, \pi\rangle$;

5. $f(x) = x \sin x$, $\quad A = \langle 0, \infty)$;

6. $f(x) = \dfrac{x^6 - 1}{\sqrt{1 - x^4}}$, $\quad A = (-1, 1)$;

7. $f(x) = \ln x$, $\quad A = \langle 1, \infty)$.

Riešenie: 2. Na funkciu $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \in (0, \pi\rangle$ nemôžeme aplikovať vetu 6, pretože $D(f) = (0, \pi\rangle$ nie je kompaktná množina. Pomôžeme si nasledovne: funkciu f možno spojite dodefinovať v čísle 0, pretože 0 je bodom odstrániteľnej nespojitosti. Teda $f = f_1/(0, \pi\rangle$, kde funkcia f_1 je určená predpisom $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in (0, \pi\rangle \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$. Na kompakte $\langle 0, \pi\rangle$ je f_1 spojitá, a teda podľa vety 6 aj rovnomerne spojitá. Pretože zúženie rovnomerne spojitej funkcie je funkcia rovnomerne spojitá, je funkcia $\dfrac{\sin x}{x}$ rovnomerne spojitá na intervale $(0, \pi\rangle$.

252. Ak funkcia f je spojitá na intervale $\langle 0, \infty)$ a existuje konečná $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, tak f je rovnomerne spojitá na $\langle 0, \infty)$. Dokážte!

253_0. Každá spojitá periodická funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rovnomerne spojitá. Dokážte!

254. Nech funkcia f je definovaná na ohraničenom intervale (a, b), nech

1. $\lim\limits_{x \to b-} f(x) = +\infty$; $\qquad$ 2. $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$ neexistuje.

Potom f nie je rovnomerne spojitá na (a, b). Dokážte!

255. Spojitá funkcia f definovaná na ohraničenom intervale (a, b) je rovnomerne spojitá na (a, b) práve vtedy, keď existujú konečné $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-} f(x)$. Dokážte!

256. 1. Ak f je rovnomerne spojitá na ohraničenom intervale (a, b), tak f je na (a, b) ohraničená. Dokážte!

2. Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá a ohraničená na ohraničenom intervale, ale nie je tam rovnomerne spojitá!

3.4. Ďalšie príklady

257. Vyšetrite spojitosť nasledujúcich funkcií, určte charakter bodov nespojitosti:

1. $f(x) = (-1)^{[x^2]}$;
2. $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] \operatorname{sgn} \sin \left[\frac{\pi}{x}\right]$;
3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$;
4. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x \operatorname{arctg} (n \operatorname{ctg} x))$;
5. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$;
6. $f(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\ln (1 + e^{xt})}{\ln (1 + e^t)}$.

258. Určte číslo A tak, aby funkcia $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ak } x \in D(f) \\ A, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$ bola spojitá v bode 0:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}$;
2. $f(x) = x^x,\ x > 0$;
3. $f(x) = x \ln^2 x$.

259. Nech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Potom funkcia

$$F(x) = \begin{cases} -c, & \text{ak } f(x) < -c \\ f(x), & \text{ak } |f(x)| \leq c \\ c, & \text{ak } f(x) > c \end{cases}$$

je spojitá. Dokážte!

260. Zoraďme množinu $\mathbb{Q}$ do prostej postupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$; nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je daná postupnosť reálnych čísel. Definujme funkciu ψ (nazýva sa zovšeobecnená Riemannova funkcia) nasledovne:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ a_n, & \text{ak } x = q_n \end{cases}.$$

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak funkcia ψ je spojitá v každom iracionálnom čísle. Dokážte! Platí aj obrátená implikácia?

261. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{nx}{n+1}, & \text{ak } x = \dfrac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N} \text{ sú nesúdeliteľné} \\ |x|, & \text{ak } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

262. Nech $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Vyšetrite spojitosť funkcie

$$g(x) = \begin{cases} \sup\limits_{t \in \langle a, x)} f(t) - \inf\limits_{t \in \langle a, x)} f(t), & \text{ak } x \in (a, b\rangle \\ 0, & \text{ak } x = a \end{cases}.$$

263. 1. Nech je daná funkcia f, nech $x_0 \in D(f)$ a platí

$$\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0: \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Vyplýva z týchto predpokladov spojitosť funkcie f v bode x_0? Akú vlastnosť funkcie f popisuje uvedená podmienka?

2. Nech je daná funkcia f, nech platí

$$\forall x_0 \in D(f) \ \forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0: \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \Longrightarrow |x - x_0| < \delta .$$

Vyplýva z týchto predpokladov spojitosť funkcie f? Aká vlastnosť funkcie f je popísaná uvedenou podmienkou?

264. Možno tvrdiť, že funkcia $g \circ f$ je nespojitá v bode a, ak f nie je spojitá v bode $a \in D(f)$ a funkcia g je

1. spojitá na $\mathbb{R}$; 2. prostá a spojitá na $\mathbb{R}$?

265$_o$. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá je spojitá práve v bodoch množiny M, ak

1. $M = \{0\}$; 2. $M = \emptyset$;

3. $M = \mathbb{N}$; 4. $M = \left\{ \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N} \right\}$.

266. Zistite, či existuje bijekcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá nie je spojitá v žiadnom bode $x \in \mathbb{R}$.

267. Dokážte, že neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ existuje vlastná $\lim_{x \to a} f(x)$ a platí $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

268. 1. Ak pre funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ v každom bode $a \in \mathbb{R}$, tak množina $A := \{ x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq 0 \}$ je spočítateľná. Dokážte!

2. Neexistuje funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ktorá má v každom bode $a \in \mathbb{R}$ nevlastnú limitu. Dokážte!

269$_o$. Ak polynóm P párneho stupňa nadobúda aspoň jednu hodnotu, ktorá má opačné znamienko ako koeficient pri člene s najvyššou mocninou, tak P má aspoň dva reálne korene. Dokážte!

270$_o$. Ak je funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ spojitá, tak je konštantná. Dokážte!

271. Nech funkcia $f: \langle 0, \infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá a ohraničená a neexistuje $\lim_{x \to \infty} f(x)$. Potom existuje $A \in \mathbb{R}$, pre ktoré má rovnica $f(x) = A$ nekonečne veľa riešení. Dokážte!

272$_o$. Ak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $f(f(x)) = x$, tak existuje riešenie rovnice $f(x) = x$. Dokážte!

273. Ak $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá periodická funkcia s periódou T, tak existuje také $a \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f(a + \frac{T}{2}) = f(a)$. Dokážte!

274. 1$_o$. Inverzná funkcia k rýdzomonotónnej funkcii definovanej na intervale je spojitá. Dokážte!

2. Uveďte príklad prostej funkcie spojitej v bode 0, ktorej inverzná funkcia nie je spojitá v bode $f(0)$!

3. Uveďte príklad spojitej rýdzomonotónnej funkcie, ktorej inverzná funkcia nie je spojitá!

275_o. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je rovnomerne spojitá. Potom existujú čísla $a \geq 0$, $b \geq 0$ tak, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ platí $|f(x)| \leq a\,|x| + b$. Dokážte!

276. 1. Ak sú funkcie f, g rovnomerne spojité na ohraničenom intervale (a, b), tak sú tam rovnomerne spojité aj funkcie $f + g$, $f.g$. Dokážte!

2_o. Uveďte príklad funkcií f, g rovnomerne spojitých na intervale, ktorých súčin tam nie je rovnomerne spojitý.

277. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúceho tvrdenia: „Nech g je spojitá nekonštantná funkcia definovaná na intervale I, nech funkcia f je spojitá na intervale $g(I)$. Ak aspoň jedna z funkcií f, g je rovnomerne spojitá, tak aj funkcia $f \circ g$ je rovnomerne spojitá."

278. Popíšte funkcie, ktoré vyhovujú podmienke:

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, 0 < \delta < \varepsilon \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: |x - y| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(y) < \varepsilon$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}: x - y < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

4. DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIÍ JEDNEJ PREMENNEJ

4.1. Definícia derivácie

Hovoríme, že funkcia f (definovaná v okolí bodu a *)) má deriváciu v bode a ($a \in R$), ak existuje konečná $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ak existuje nevlastná $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, hovoríme, že funkcia f má nevlastnú (alebo nekonečnú) deriváciu v bode a. Hodnotu $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ v obidvoch týchto prípadoch označujeme $f'(a)$. Ak nás nezaujíma, či je $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ konečná alebo nekonečná, používame spoločný názov vlastná alebo nevlastná derivácia v bode a.

Pojmy derivácie sprava a nevlastnej derivácie sprava, resp. derivácie zľava a nevlastnej derivácie zľava dostaneme, ak v predchádzajúcich definíciách $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nahradíme limitou $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, resp. $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (v takom prípade stačí predpokladať, že definičný obor funkcie f obsahuje interval $\langle a, a + \varepsilon)$, resp. $(a - \varepsilon, a\rangle$ pre niektoré $\varepsilon > 0$). Hodnoty $\lim\limits_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, resp. $\lim\limits_{x \to a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ označujeme $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$.

Veta 1. Funkcia f (definovaná v okolí bodu $a \in R$) má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu $f'(a)$ práve vtedy, keď existujú $f'_+(a)$, $f'_-(a)$ a platí $f'_+(a) = f'_-(a)$. Hodnota $f'(a)$ sa pritom rovná spoločnej hodnote $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$.

Pojem derivácie ako funkcie sa vo všeobecnosti definuje nasledovne: Nech M je množina všetkých bodov definičného oboru $D(f)$, v ktorých má funkcia f deriváciu. Funkcia $f': M \to R$, ktorá každému bodu $a \in M$ priradí hodnotu $f'(a)$ derivácie funkcie f v bode a, sa nazýva derivácia funkcie f. V špeciálnych prípadoch, ktoré ilustruje nasledujúca poznámka, sa niekedy

---

*) tj. pre niektoré $\varepsilon > 0$ platí $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset D(f)$; pojmy derivácie a nevlastnej derivácie v bode a by bolo možné zaviesť aj za slabšieho predpokladu „$a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$" (odstránili by sa tým aj niektoré ťažkosti so zavedením pojmu derivácie ako funkcie), definícia predpokladajúca, že a je vnútorný bod množiny $D(f)$, je však v literatúre najčastejšia

pojem derivácie ako funkcie chápe širšie: ak definičným oborom funkcie f je niektorý z intervalov $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b)$, $(a, b\rangle$, pričom v jeho koncovom bode existuje jednostranná derivácia (v prvom prípade prichádzajú do úvahy body a, b, v druhom bod a, v treťom bod b), tak funkciu f' považujeme za definovanú aj v tomto bode, jej funkčnou hodnotou je hodnota príslušnej jednostrannej derivácie.

279. Výpočtom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ nájdite deriváciu funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = x^2$, $a = 0{,}1$;   2. $f(x) = 2 \sin 3x$, $a = \frac{\pi}{6}$;

3. $f(x) = 1 + 2 \ln x$, $a = 1$;   4. $f(x) = \arcsin x$, $a = 0$;

5. $f(x) = e^x$, $a = \ln 2$.

280. Ukážte, že funkcia f má v bode a nevlastnú deriváciu, ak:

1. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $a = 1$;   2. $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $a = 0$.

281. Výpočtom $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ nájdite $f'(x)$ a zistite definičný obor funkcie f', ak:

1. $f(x) = x^3 + 2x$;   2. $f(x) = x \sqrt[3]{x}$;

3. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$;   4. $f(x) = 2^{x+1}$;

5. $f(x) = \ln x$;   6. $f(x) = \operatorname{ctg} x + 2$;

7. $f(x) = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$;   8. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

282. Výpočtom príslušných limít nájdite $f'_+(a)$, $f'_-(a)$, ak:

1. $f(x) = |\cos x|$, $a = \frac{\pi}{2}$;   2. $f(x) = [x] \sin \pi x$, $a = 1$;

3. $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$, $a = 2$, $a = 3$.

283. Porovnaním hodnôt $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$ zistite, či existuje $f'(a)$, ak:

1. $f(x) = \begin{cases} x & \text{, ak } x < 0 \\ \ln(1 + x), & \text{ak } x \geq 0 \end{cases}$, $a = 0$;

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{ak } x \leq -1 \\ -2x, & \text{ak } x > -1 \end{cases}$, $a = -1$;

3. $f(x) = x\,|x|$, $a = 0$;   4. $f(x) = |\sin^3 x|$, $a = \pi$.

284. 1. Ak existuje vlastná derivácia funkcie f v bode 0, tak platí

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} .$$

Dokážte!

2. Rozhodnite, či z existencie $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ vyplýva existencia $f'(0)$; svoje tvrdenie dokážte!

285_0. Ak $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je derivácia nepárnej funkcie f, tak f' je párna funkcia. Dokážte! (Definíciu párnej a nepárnej funkcie pozri v pr. 146.)

Veta 2. Ak funkcie f, g majú derivácie v bode a, tak aj funkcie $c.f$ (c je reálna konštanta), $f + g$, $f - g$, $f.g$ majú v bode a derivácie a platí

$$(c.f)'(a) = c.f'(a) ,$$

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) ,$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a) ,$$

$$(f.g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a) .$$

Ak naviac $g(a) \neq 0$, majú v bode a deriváciu aj funkcie $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$ a platí

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)} ,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{g^2(a)} .$$

Veta 3. Ak funkcia f má deriváciu v bode a, funkcia g deriváciu v bode $f(a)$ a zložená funkcia $h = g \circ f$ je definovaná v okolí bodu a, tak h má v bode a deriváciu a platí

$$h'(a) = f'(a).g'(f(a)) .$$

(Analogické vety možno dokázať aj pre jednostranné derivácie.)

V nasledujúcej tabuľke sú derivácie základných elementárnych funkcií (c je reálna konštanta):

$c' = 0$, $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \quad (n \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

$(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, špeciálne $(e^x)' = e^x$,

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $x > 0$, špeciálne $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$,

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1 + x^2}$, $\quad (\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

Pre deriváciu hyperbolických funkcií platia nasledujúce vzorce

$(\mathrm{sh}\ x)' = \mathrm{ch}\ x$, $(\mathrm{ch}\ x)' = \mathrm{sh}\ x$,

$(\mathrm{th}\ x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $(\mathrm{cth}\ x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Ak pri hľadaní derivácie funkcie využívame len znalosť derivácií základných elementárnych funkcií a vety o derivácii súčtu, rozdielu, súčinu, podielu a zloženej funkcie, nazýva sa taký postup <u>tabuľkovým derivovaním</u>.

286. Nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = 2 + x - x^2$; 2. $y = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - x^{-\sqrt{5}}$;

3. $y = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$; 4. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt[3]{x^2}}$;

5. $y = (3x - 7)^{10}$; 6. $y = x\sqrt{1 + x^2}$;

7. $y = \dfrac{(1 - x)^p}{(1 + x)^q}$, $p > 1$, $q > 0$; 8. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}\,(x + \sqrt{1 + x^2})}$;

9. $y = \sqrt[13]{9 + 7\sqrt[5]{2x}}$; 10. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

287. Nájdite $f'(a)$, ak $f(x) = (x - a)\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkcia spojitá v bode a.

288. 1. Ukážte, že funkcia $f(x) = |x - a|\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia a $\varphi(a) \neq 0$, nemá deriváciu v bode a.

2. Ukážte, že funkcia $f(x) = |x - a|^{1+\varepsilon}\varphi(x)$, kde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená na $\mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$, má v bode a deriváciu $f'(a) = 0$.

289. Nájdite deriváciu funkcie

1. $y = x \cos x$; 2. $y = \dfrac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$;

3. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{tg}\ x}$; 4. $y = \sin^n x \cos nx$;

5. $y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$; 6. $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$;

7. $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{ctg}\ x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \mathrm{tg}\ x}$; 8. $y = \sqrt{1 + \mathrm{tg}\,(x^2 + x^{-2})}$.

290. Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$; 2. $y = e^{-x^2}$;

3. $y = e^x (x^2 - 2x + 2)$; 4. $y = 2^{\sin x^2}$;

5. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$;   6. $y = e^{ax} . \dfrac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

7. $y = (\frac{a}{b})^x (\frac{b}{x})^a (\frac{x}{a})^b$;   8. $y = (\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x)e^{-x}$.

291. Možno tvrdiť, že neexistuje $(f + g)'(a)$ (funkcie f, g sú definované v okolí bodu a), ak:
1. existuje vlastná $f'(a)$ a neexistuje $g'(a)$?
2. f má v bode a nevlastnú deriváciu a neexistuje $g'(a)$?
3. neexistuje $f'(a)$ ani $g'(a)$?

292. Nech f, g sú spojité funkcie definované na $\mathbb{R}$, $g'(a) = +\infty$, $f'(g(a)) > 0$. Potom existuje nevlastná derivácia funkcie $f \circ g$ v bode a. Dokážte!

Nájdite derivácie funkcií:

293. 1. $y = \log_3(\operatorname{tg} \frac{x}{2})$;   2. $y = \frac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

3. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$;

4. $y = \frac{1}{2} \ln (1 + x) - \frac{1}{4} \ln (1 + x^2) - \dfrac{1}{2 (1 + x)}$;

5. $y = x \ln (x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2}$;

6. $y = e^{\sqrt{\log_2(x^2 + x + 1)}}$;

7. $y = \dfrac{1}{\sin a} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{ctg} a \ . \ln \dfrac{1 + x \cos a}{1 - x \cos a}$;

8. $y = x (\sin (\ln x) - \cos (\ln x))$;

9. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln (\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}})$;

10. $y = \log_2 x \ . \log_3 x \ . \ln x$.

294. 1. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$;   2. $y = x \arcsin x$;

3. $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$;   4. $y = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

5. $y = x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1 + x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$;

6. $y = \ln (\arccos \frac{1}{\sqrt{x}})$;   7. $y = 3^{\operatorname{arctg} (2x + \pi)}$;

8. $y = \arcsin (\dfrac{\sin a \ . \sin x}{1 - \cos a \ . \cos x})$;

9. $y = x (\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1 - x^2} \arcsin x - 2x$;

10. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x\right)$.

295. 1. $y = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$; 2. $y = \frac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt[3]{(x + 2)^2} \sqrt{(x + 3)^3}}$;

3. $y = \sqrt[3]{\frac{\sin 3x}{1 - \sin 3x}}$, $x \in (0, \frac{\pi}{6})$; 4. $y = x^x$, $x > 0$;

5. $y = \sqrt[x]{x}$, $x > 0$; 6. $y = x^{x^2}$, $x > 0$;

7. $y = (\cos x)^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Riešenie: 1. Výpočet sa zjednoduší nasledujúcou úvahou: ak funkcia f má v bode a deriváciu a $f(a) \neq 0$, tak $(\ln |f|)'(a) = \frac{1}{f(a)} f'(a)$; odtiaľ možno vyjadriť

$$f'(a) = f(a).(\ln |f|)'(a) .$$

V našom prípade $y = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x}$, $(\ln |y|)' = (\ln |1 + x^2| - \frac{4}{3} \ln |x| - 7 \ln |\sin x|)' =$

$= \frac{2x}{1 + x^2} - \frac{4}{3x} - 7 \operatorname{ctg} x = \frac{2x^2 - 4}{3x (1 + x^2)} - 7 \operatorname{ctg} x$. Teda $y' = \frac{1 + x^2}{\sqrt[3]{x^4} \sin^7 x} . \left(\frac{2x^2 - 4}{3x (1 + x^2)} - \right.$

$\left. - 7 \operatorname{ctg} x\right)$.

4. Funkcie tvaru f^g (o funkcii f predpokladáme, že je nezáporná) možno derivovať na základe úvahy z riešenia pr. 295.1 alebo (čo je vlastne to isté) prepísať ich predpis do podoby $e^{g \,.\, \ln f}$ a takto zapísanú funkciu potom derivovať na základe viet o derivácii súčinu a zloženej funkcie.

V našom prípade $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} . (x \ln x)' = x^x (\ln x + 1)$.

296. Uveďte príklad funkcií f, g takých, že

1. neexistujú $f'(a)$ ani $g'(a)$, ale existuje vlastná $(f.g)'(a)$;
2. neexistuje $g'(a)$, ale existujú vlastné $f'(a)$ a $(f.g)'(a)$.

(Inšpiráciou môžu byť príklady 287 a 288.)

297. Nech $f: R \to R$ je spojitá funkcia, nech v bode a je $f(a) \neq 0$ a existuje nevlastná $f'(a)$. Potom funkcia $\frac{1}{f}$ má v bode a nevlastnú deriváciu $-f'(a)$. Dokážte!

298. Nech funkcia f je definovaná v okolí $O(a)$ bodu a, pričom pre všetky $x \in O(a)$ platí $|f(x) - f(a)| < K |x - a|$, kde K je kladná konštanta. Nech funkcia g má deriváciu v bode $f(a)$, $g'(f(a)) = 0$. Potom funkcia $g \circ f$ má deriváciu v bode a rovnú 0. Dokážte!

299. Nájdite derivácie funkcií:

1. $y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $0 \leq a < b$;

2. $y = \ln(1 + \sin^2 x) - 2\sin x \,.\, \operatorname{arctg}(\sin x)$;

3. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$;

4. $y = x\ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) - 2\sqrt{1 + x^2}\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + 2x$;

5. $y = \ln \frac{x + a}{\sqrt{x^2 + b^2}} + \frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$;

6. $y = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}$;

7. $y = x - \ln\sqrt{1 + e^{2x}} + e^{-x}\operatorname{arccotg} e^x$;

8. $y = \frac{3 - \sin x}{2}\sqrt{\cos^2 x - 2\sin x} + 2\arcsin x \,.\, \frac{1 + \sin x}{\sqrt{2}}$;

9. $y = e^{m \arcsin x}(\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x))$, $|x| < 1$;

10. $y = \ln\sqrt{x^2 - 2x\cos a + 1} + \operatorname{ctg} a \,.\, \operatorname{arctg}\frac{x - \cos a}{\sin a}$;

11. $y = |(x - 1)^2(x + 1)^3|$; 12. $y = [x]\ \sin^2 \pi x$;

13. $y = \begin{cases} 1 - x, & \text{ak } x < 1 \\ (1 - x)(2 - x), & \text{ak } x \in \langle 1, 2\rangle \\ -(2 - x), & \text{ak } x > 2 \end{cases}$;

14. $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{ak } |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \frac{x - 1}{2}, & \text{ak } |x| > 1 \end{cases}$;

15. $y = \ln(\operatorname{ch} x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$; 16. $y = \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$

17. $y = (\arcsin \sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$; 18 $y = x^{x^x}$;

19. $y = x^{\frac{2}{\ln x}} - 2x^{\log_x e} \,.\, e^{1 + \ln x} + e^{1 + \frac{2}{\log_x e}}$.

300. Ako treba vybrať koeficienty a, b, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ak } x \leq x_0 \\ ax + b, & \text{ak } x > x_0 \end{cases}$$

bola spojitá a mala deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$?

301. Ak funkcie $f_1, \dots, f_n$ majú deriváciu v bode a, tak $(f_1 . f_2 . \dots . f_n)'(a) = f_1'(a).f_2(a). \dots . f_n(a) + f_1(a).f_2'(a).f_3(a). \dots . f_n(a) + \dots + f_1(a). \dots . f_{n-1}(a).f_n'(a)$. Dokážte! Na základe toho nájdite $f'(0)$, ak $f(x) = x.(x-1). \dots . (x-1000)$.

302. Nech nezáporné funkcie f, g majú deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Nájdite deriváciu funkcie y, ak

1. $y = \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}$; 2. $y = \operatorname{arctg} \frac{f(x)}{g(x)}$;

3. $y = \log_{f(x)} g(x)$ $(f(x) > 1)$; 4. $y = f(x^2)$;

5. $y = f(\sin^2 x) + g(\cos^2 x)$; 6. $y = f(e^x).e^{f(x)}$.

303. Nájdite vzorce pre súčty:

1. $P_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$;

2. $Q_n(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots + (2n-1)x^{2n-2}$, $|x| \neq 1$;

3. $R_n(x) = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \dots + n^2x^{n-1}$, $x \neq 1$;

4. $T_n(x) = \cos x + 2\cos 2x + \dots + n \cos nx$, $x \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

304. Ako treba voliť číslo $\alpha \in \mathbb{R}$, aby funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin \frac{1}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$$

bola

1. spojitá v bode 0 ?
2. mala deriváciu v bode 0 ?
3. mala deriváciu, ktorá je spojitá v bode 0 ?

305. Možno použiť vetu o derivácii zloženej funkcie na výpočet derivácie funkcie $y = \sin^2(\sqrt[3]{x^2})$ v bode 0? Existuje táto derivácia?

306. Zostrojte funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby

1. definičným oborom jej derivácie bola množina $\{1, 2\}$;
2. bola rastúca, mala vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$ a pre každé $n \in \mathbb{Z}$ platilo $f'(n) = +\infty$;
3. mala deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$, funkcia f' bola nespojitá práve v bodoch množiny $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a aby platilo $f'(n) = a$ (a je dané reálne číslo) pre každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Veta 4. Ak funkcia f má v bode a deriváciu, tak f je v tomto bode spojitá.

307_o. Nech funkcia f má v bode a obidve jednostranné derivácie. Potom f je spojitá v bode a. Dokážte!

308. Uveďte príklad funkcie, ktorá je spojitá v každom bode množiny $\mathbb{R}$ a nemá vlastnú ani nevlastnú deriváciu v žiadnom bode množiny $\mathbb{N}$!

309. Uveďte príklad funkcie f takej, že $f'(a) = -\infty$ a
1. f je spojitá v bode a ;
2. a je bod nespojitosti 1. druhu funkcie f ;
3. a je bod nespojitosti 2. druhu funkcie f .

4.2. Derivácia inverznej funkcie

Veta 5. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$, rýdzomonotónna na intervale I, má deriváciu v bode a. Potom inverzná funkcia f^{-1} má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v bode $f(a)$, pričom platí

a/ ak $f'(a) \neq 0$, tak $(f^{-1})'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$;

b/ ak $f'(a) = 0$ a f je rastúca, tak $(f^{-1})'(f(a)) = +\infty$;

c/ ak $f'(a) = 0$ a f je klesajúca, tak $(f^{-1})'(f(a)) = -\infty$.

310. Nájdite deriváciu funkcie f^{-1} v bode b, ak
1. $f(x) = x + \frac{1}{5}x^5$, α/ $b = 0$, β/ $b = \frac{6}{5}$;
2. $f(x) = 2x - \frac{1}{2}\cos x$, $b = -\frac{1}{2}$;
3. $f(x) = 0{,}1\,x + e^{0{,}1\,x}$, $b = 1$;
4. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x > 1$, $b = 0$;
5. $f(x) = 2x^2 - x^4$, $x \in (0, 1)$, $b = \frac{3}{4}$.

Riešenie: 1 α/. Pretože $b = f(0)$ a $f'(x) = 1 + x^4$, je podľa vety 5 $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.
(Ako sa presvedčíme o rýdzej monotónnosti funkcie f, ukážeme neskôr - pozri vetu 11.)

311. Odvoďte vzorec pre deriváciu inverznej funkcie z vety o derivácii zloženej funkcie a stanovte predpoklady, za ktorých možno toto odvodenie vykonať!

312. Na základe vety o derivácii inverznej funkcie nájdite deriváciu funkcií
1. $f(x) = \arcsin x$;
2. $f(x) = \arccos x$;
3. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
4. $f(x) = \operatorname{arccotg} x$;
5. $f(x) = \ln x$.

313. Nech f je prostá spojitá funkcia definovaná na intervale $(-\varepsilon, \varepsilon)$, kde ε je dané kladné číslo, nech $f'(0) = \infty$, $f(0) = 0$. Potom funkcia f^{-1} má v bode 0 deriváciu rovnú 0. Dokážte!

4.3. Diferenciál

Hovoríme, že funkcia f (definovaná v okolí bodu a *)) má v bode a diferenciál (je diferencovateľná v bode a), ak existuje reálna konštanta A taká, že pre funkciu ω, definovanú vzťahom

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \omega(x)$$

platí $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\omega(x)}{x - a} = 0$.

Funkcia definovaná predpisom $y = A(x - a)$ sa v takom prípade označuje $df(a)$ a nazýva sa diferenciál funkcie f v bode a. Funkcia $df(a)$ sa zvyčajne zapisuje v tvare $df(a) = A\,dx(a)$ **), kde symbol $dx(a)$ (označujúci diferenciál funkcie $g(x) = x$ v bode a, tj. funkciu danú predpisom $y = x - a$) sa nazýva diferenciál nezávisle premennej.

Veta 6. Funkcia f je diferencovateľná v bode a práve vtedy, keď f má v bode a deriváciu; pritom platí $A = f'(a)$, kde A je konštanta z definície diferenciálu funkcie f v bode a.

Graf funkcie $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ je dotyčnicou v bode $(a, f(a))$ ku grafu funkcie f. Ak je funkcia f spojitá v bode a, pričom $f'(a)$ je nevlastná, je dotyčnicou v bode $(a, f(a))$ ku grafu funkcie f priamka $x = a$.

314. Nájdite dotyčnicu v bode A ku krivke $y = f(x)$, ak:

1. $f(x) = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$, α/ $A = (-1, 0)$, β/ $A = (2, 3)$;
2. $f(x) = |x - 1| \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $A = (0, 1)$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$, $A = (1, 0)$;
4. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, A je priesečník krivky $y = f(x)$ s hyperbolou $y = \dfrac{1}{1 + x}$.

315. Nájdite rovnicu tej dotyčnice k parabole $y = x^2 - 2x + 3$, ktorá je

1. rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$;
2. kolmá na priamku $x + y - 1 = 0$.

---

*) rovnako ako deriváciu v bode a možno aj diferenciál v bode a definovať za slabšieho predpokladu „$a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$"

**) písmeno a sa v zápisoch často vynecháva, preto sa možno stretnúť aj so zápisom $df = A\,dx$

316. 1. Aký musí byť vzťah medzi koeficientami a, b, c, aby sa parabola $y = ax^2 + bx + c$ dotýkala priamky $y = 0$?

2. Pre akú hodnotu parametra a sa parabola $y = ax^2$ dotýka krivky $y = \ln x$?

317. Pomocou derivácie a diferenciálu nezávisle premennej zapíšte df(a), ak funkcia f je daná predpisom:

1. $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
2. $f(x) = \sqrt{A^2 + x^2}$;
3. $f(x) = \ln(1 - x^2)$;
4. $f(x) = \dfrac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

318. Nech u, v, w sú kladné diferencovateľné funkcie, nájdite diferenciál funkcie y v bode a, ak

1. $y = u.v.w$;
2. $y = \dfrac{u}{v^2}$;
3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{w}$;
4. $y = \ln\sqrt{u^2 + v^2}$.

319. Pomocou diferenciálu odvoďte približné vzťahy pre výpočet nasledujúcich výrazov:

1. $\sqrt{a^2 + x^2}$ ($a > 0$, x dostatočne malé) ;
2. $\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ (x blízke 0) ;
3. $\operatorname{arctg}(1 + x)$ (x blízke 0) ;
4. $\sqrt[n]{a^n + x}$ ($a > 0$, x blízke 0) ;
5. $\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ (x blízke číslu $\frac{\pi}{2}$) .

Riešenie: 5. Funkcia daná predpisom $f(x) = \ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2})$ má v bode $\frac{\pi}{2}$ deriváciu $f'(\frac{\pi}{2}) = 1$, preto je podľa vety 6 diferencovateľná a možno ju teda písať v tvare $f(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2}) \cdot (x - \frac{\pi}{2}) + \omega(x) = (x - \frac{\pi}{2}) + \omega(x)$, kde $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\omega(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = 0$. Zanedbaním funkcie $\omega(x)$ dostaneme približný vzorec $\ln(\operatorname{tg}\frac{x}{2}) \approx (x - \frac{\pi}{2})$ pre x blízke číslu $\frac{\pi}{2}$. (Geometricky to znamená, že hodnoty funkcie f nahrádzame funkčnými hodnotami jej dotyčnice v bode $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $\omega(x)$ vyjadruje chybu, ktorej sa pri takomto nahradení dopúšťame.)

320. Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Potom sú nasledujúce dva výroky ekvivalentné:

a/ funkcia f je diferencovateľná v bode a ;

b/ existuje funkcia φ (s rovnakým definičným oborom ako f), ktorá je spojitá v bode a, pričom platí $f(x) = f(a) + \varphi(x)(x - a)$.

(Výrok b/ sa nazýva Čechova definícia diferenciálu.)

4.4. Derivácie vyšších rádov

Derivácie vyšších rádov definujeme rekurentne: Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$; označme $f^{(0)} := f$. Hovoríme, že funkcia f má n-tú deriváciu v bode a, resp. nevlastnú n-tú deriváciu v bode a, ak existuje derivácia, resp. nevlastná derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ v bode a. n-tú deriváciu v bode a aj nevlastnú n-tú deriváciu v bode a označujeme $f^{(n)}(a)$. (Analogicky sa definujú vlastné a nevlastné jednostranné n-té derivácie v bode a.) Derivácia funkcie $f^{(n-1)}$ sa nazýva n-tá derivácia funkcie f a označuje sa $f^{(n)}$. Okrem označení $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}, f^{(4)}, f^{(5)}, \ldots$ sa používajú aj označenia f', f'', f''', f'''' (alebo f^{IV}), $f^{V}, \ldots$.

Platia nasledujúce vzťahy:

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n}, & \text{ak } n \leqq m \\ 0, & \text{ak } n > m \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \qquad (e^x)^{(n)} = e^x$$

$$(\log_a x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n \ln^n a}, \; x > 0 \qquad (\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \; x > 0$$

Veta 7 (Leibnizov vzorec). Ak funkcie f, g majú n-tú deriváciu v bode a, tak existuje $(f.g)^{(n)}(a)$ a platí

$$(f.g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a).g^{(n-k)}(a) .$$

321. Nájdite y'', ak

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$;
2. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $y = e^{-x^2}$;
4. $y = (1+x^2)\,\mathrm{arctg}\, x$;
5. $y = x \ln x$;
6. $y = x(\sin \ln x + \cos \ln x)$.

322. Nájdite určené derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$, y^{VI}, y^{VII} ;
2. $y = (2x-7)^2(3x+7)^3$, y^{V}, y^{VI} ;
3. $y = \sqrt{x}$, $y^{(10)}$;
4. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$, $y^{(22)}$;

5. $y = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$, $y^{(13)}$;

6. $y = \sin 2x \cdot \cos 4x$, $y^{(15)}$;

7. $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x$, $y^{(10)}$.

Riešenie: 1. Funkcia y je polynóm 6. stupňa, teda $y = a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6$; nie je ťažké vypočítať, že $a_0 = 4$. Potom $y^{VI} = (a_0x^6 + a_1x^5 + \ldots + a_6)^{VI} = a_0(x^6)^{VI} + a_1(x^5)^{VI} + \ldots + a_5x^{VI} = 6!\, a_0 = 6!\, 4 = 2880$. $y^{VII} = 0$ (rád derivácie je vyšší ako stupeň polynómu).

5. Funkciu y možno zapísať v podobe, ktorá je pre derivovanie výhodnejšia:

$$y = \frac{2x + 1}{x^2 + x - 2} = \frac{2x + 1}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{(x + 2) + (x - 1)}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 2} .$$

Potom $y^{(13)} = ((x - 1)^{-1})^{(13)} + ((x + 2)^{-1})^{(13)} = (-1)^{13}\, 13!\, (x - 1)^{-14} + (-1)^{13}\, 13!\, (x + 2)^{-14} = -(13!)\left(\frac{1}{(x - 1)^{14}} + \frac{1}{(x + 2)^{14}}\right)$.

323. Pomocou Leibnizovho vzorca nájdite určené derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; $y^{(100)}$;

2. $y = x \ln x$; y^{V} ;

3. $y = x^2 \sin 2x$; $y^{(50)}$;

4. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1 - 3x}}$, y''' ;

5. $y = (x^2 - 2x) \cos 3x$, $y^{(101)}$;

6. $y = (x - \sin x)^2$, $y^{(16)}$;

7. $y = x \sin x \cos 2x$, $y^{(100)}$.

324_0. Ak funkcia f má derivácie až do rádu n, tak platí

$$(f(ax + b))^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax + b) .$$

Dokážte!

325. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = \ln (ax + b)$;
2. $y = \frac{1}{x(1 - x)}$;
3. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$;
4. $y = \frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}$;
5. $y = \sin^2 x$;
6. $y = \sin 3x \cos 5x$;

7. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$;   8. $y = \sin^2 ax \cos bx$.

326. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = (x - 1)\, 2^{x-1}$;   2. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1 + x}}$;

3. $y = x^2 \sin bx$;   4. $y = (x^2 + 2x + 2)\, e^{-x}$;

5. $y = x \log_2(1 - 3x)$;   6. $y = (3 - 2x)^2\, e^{2-3x}$.

327. Nájdite $f^{(n)}(0)$, ak:

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - 2x)(1 + x)}$;   2. $f(x) = x^2 e^{2x}$;

3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x}}$;   4. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$;

5. $f(x) = \arcsin x$;   6. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

7. $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)^2}$.

Riešenie: 6. Pretože $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, platí $(1 + x^2)\, f'(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. To znamená, že funkcia $(1 + x^2)\, f'(x)$ je na $\mathbb{R}$ konštantná, preto jej derivácie všetkých rádov sú rovné 0:

$$\left[(1 + x^2)\, f'(x)\right]^{(k)} = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}) .$$

Položme $k = n - 1$; pre $n = 2$ má uvedená rovnosť tvar

$$(1 + x^2)\, f''(x) + 2x\, f'(x) = 0 \qquad (*)$$

a pre $n \geqslant 3$ použitím Leibnizovho vzorca dostaneme

$$(1 + x^2)\, f^{(n)}(x) + 2\,(n - 1)\, x\, f^{(n-1)}(x) + (n - 1)(n - 2)\, f^{(n-2)}(x) = 0 .$$

(Až pre $k \geqslant 2$, tj. $n \geqslant 3$, obsahuje Leibnizov vzorec všetky nenulové derivácie funkcie $1 + x^2$, zápis prvej derivácie funkcie $(1 + x^2)\, f'(x)$ sa teda odlišuje od zápisu k-tej derivácie tejto funkcie pre $k \geqslant 2$, preto treba prípad $k = 1$ robiť samostatne.)

Ak v poslednej rovnosti položíme $x = 0$, dostávame pre $n \geqslant 3$

$$f^{(n)}(0) = -\,(n - 1)(n - 2)\, f^{(n-2)}(0) ,$$

čo je rekurentný vzťah pre vyjadrenie $f^{(n)}(0)$. Dosadením do predpisu pre f' dostaneme $f'(0) = 1$, z $(*)$ vychádza $f''(0) = 0$. Na základe toho môžeme matematickou indukciou dokázať, že $f^{(2k+2)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$ pre $k = 0, 1, 2, \dots$.

Poznámka: Predchádzajúca úvaha má (naštastie len zdanlivo) jeden nedostatok: ak chceme použiť Leibnizov vzorec na výpočet (n-1)-vej derivácie súčinu $(1 + x^2) . f'(x)$, treba sa najprv presvedčiť, že existujú (n-1)-vé derivácie funkcií $(1+x^2)$ a $f'(x)$ (tj. $(1 + x^2)^{(n-1)}$ a $f^{(n)}(x)$); to sme ale neurobili.

Dokázať, že existuje $(1 + x^2)^{(n-1)}$, je ľahké; zostáva teda dokázať existenciu $(\operatorname{arctg} x)^{(n)}$. (Návod: možno postupovať indukciou; z predpokladu, že $f^{(k-1)}$ je podielom polynómov P_{k-1} a Q_{k-1}, pričom Q_{k-1} nemá reálne korene, vyplýva na základe vety o derivácii podielu, že $f^{(k)}$ existuje a možno ju zapísať v tvare podielu polynómov P_k a Q_k, pričom Q_k nemá reálne korene.)

328_0. Dokážte, že funkcia definovaná predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\frac{1}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

($n \in \mathbb{N}$) má v bode 0 derivácie až do rádu n, ale nemá (n+1)-vú deriváciu v tomto bode.

4.5. Základné vety diferenciálneho počtu

Veta 8 (Rolle). Nech funkcia $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

(i) f je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle$;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná $f'(x)$;

(iii) $f(a) = f(b)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = 0$.

329. Nech funkcia f je spojitá na intervale (a, b), kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, nech pre každé $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná nenulová $f'(x)$. Potom f je prostá na intervale (a, b). Dokážte!

330. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ (to znamená, že existujú $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ definované na intervale $\langle a, b\rangle$) a má tam nulové hodnoty v n+1 bodoch. Potom existuje také $c \in (a, b)$, že $f^{(n)}(c) = 0$. Dokážte!

331. Ak sú všetky korene polynómu $P_n(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ ($a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$) reálne, tak aj jeho derivácie P_n', ..., $P_n^{(n-1)}$ majú len reálne korene.

(Komplexné číslo a sa nazýva m-násobný koreň polynómu P_n ($n \geq m$, $n, m \in \mathbb{N}$), ak možno P_n písať v tvare $P_n(x) = (x - a)^m Q_{n-m}(x)$, pričom číslo a nie je koreňom polynómu Q_{n-m}. Základná veta algebry hovorí, že súčet násobností navzájom rôznych komplexných koreňov polynómu sa rovná jeho stupňu. Teda polynóm P_n stupňa n má všetky korene reálne práve vtedy, keď súčet násobností jeho navzájom rôznych reálnych koreňov je n.)

332. Ukážte, že rovnica $x^3 - 3x^2 + 6x - 1 = 0$ má len jeden koreň, pričom tento koreň je prostý (prostými sa nazývajú jednonásobné korene polynómu).

333. Nech funkcia $f:(a, b) \to \mathbb{R}$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, je spojitá, má vlastnú alebo nevlastnú deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$ a nech $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x)$. Potom existuje $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = 0$. Dokážte!

334. Zostrojte funkciu f definovanú na intervale $\langle a, b \rangle$, pre ktorú $f(a) = f(b)$, pre každé $x \in (a, b)$ existuje vlastná $f'(x)$ a pre všetky $x \in (a, b)$ platí $f'(x) \neq 0$.

335. Funkcia $y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ nadobúda nulové hodnoty pre $a = -1$, $b = 1$, ale napriek tomu nemá v žiadnom bode intervalu $(-1, 1)$ nulovú deriváciu. Je to v rozpore s tvrdením Rolleho vety?

Veta 9 (Lagrangeova veta o strednej hodnote). Nech funkcia $f: \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ vyhovuje nasledujúcim podmienkam:

(i) f je spojitá ;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existuje vlastná alebo nevlastná $f'(x)$.

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

336. 1. Nech funkcia f je definovaná na intervale I, pričom v každom bode $x \in I$ platí $f'(x) = 0$. Potom funkcia f je konštantná na intervale I. Dokážte!

2. Uveďte príklad takej funkcie definovanej na otvorenej množine M, že $f' \equiv 0$ na M a f nie je konštantná na množine M!

337. Ukážte, že funkcie $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$ a $g(x) = \operatorname{arctg} x$ majú rovnaké derivácie v každom bode množiny $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Na základe toho odvoďte vzťah medzi funkciami f a g !

Riešenie: Derivovaním dostaneme $f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$. Označme $h := f - g$; potom $h'(x) = 0$ pre $x \in (-\infty, 1)$, $h'(x) = 0$ pre $x \in (1, \infty)$. Podľa výsledku príkladu 336 je teda funkcia h konštantná na intervale $(-\infty, 1)$ a konštantná na intervale $(1, \infty)$. Hodnotu konštanty na intervale $(-\infty, 1)$ nájdeme ako funkčnú hodnotu v niektorom vhodne zvolenom bode, napr. $k_1 = h(0) = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \dfrac{\pi}{4}$. Pretože výpočet $h(c)$ v niektorom $c \in (1, \infty)$ by bol komplikovanejší, pomôžeme si nasledujúcou úvahou: pretože $h(x) = k_2$ na intervale $(1, \infty)$, platí $k_2 = \lim\limits_{x \to 1+} h(x) = -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3}{4}\pi$. Celkovo teda

$$\operatorname{arctg} \frac{1 + x}{1 - x} - \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & , \text{ ak } x < 1 \\ -\dfrac{3}{4}\pi & , \text{ ak } x > 1 \end{cases} ,$$

čo môžeme prepísať do podoby $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-1) - \frac{\pi}{4}$, $x \neq 1$.

338. Dokážte rovnosti:

1. $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$;

2. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \langle -1, 1\rangle$;

3. $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$, $|x| \geqslant 1$;

4. $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$, $|x| \leqslant \frac{1}{2}$;

5. $\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

339. Nech funkcia f je definovaná na intervale I, nech pre každé $x \in I$ platí $f'(x) = k$ (k je reálna konštanta). Potom $f(x) = kx + b$. Dokážte!

340. Dokážte, že funkcia sgn x nie je deriváciou žiadnej funkcie!

341. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$, $x, y \in \mathbb{R}$;

2. $p\, y^{p-1}(x-y) \leqslant x^p - y^p \leqslant p\, x^{p-1}(x-y)$, ak $0 < y < x$, $p > 1$;

3_o $|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|$, $a, b \in \mathbb{R}$;

4. $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, ak $0 < b < a$.

Riešenie: 1. Pre $x = y$ uvedená nerovnosť zrejme platí. Ak $x<y$ (dôkaz pre $x>y$ by bol rovnaký), tak na intervale $\langle x, y\rangle$ funkcia $f(x) = \sin x$ vyhovuje predpokladom Lagrangeovej vety o strednej hodnote, podľa ktorej $\sin x - \sin y = (x-y)\cos c$ pre niektoré $c \in (x, y)$. Pretože $|\cos c| \leqslant 1$ pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$, je $|\sin x - \sin y| = |\cos c| . |x - y| \leqslant |x - y|$.

342. 1. Nech funkcia f má na ohraničenom alebo neohraničenom intervale (a, b) ohraničenú deriváciu f'. Potom f je rovnomerne spojitá na (a, b). Dokážte!

2_o. Ukážte, že funkcia $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ je rovnomerne spojitá na intervale (0, 1), ale nemá tam ohraničenú deriváciu!

343. Nech funkcia f, ktorá má v každom bode ohraničeného intervalu (a, b) deriváciu, nie je ohraničená na (a, b). Potom funkcia f' nie je ohraničená na (a, b). Dokážte!

344. Nech f, F sú funkcie definované na otvorenom intervale $I \subset \mathbb{R}$, f je spojitá a pre každé $x, y \in I$, $x < y$, existuje $z \in (x, y)$ tak, že $F(x) - F(y) = (x - y) f(z)$. Potom na intervale I platí $F' = f$. Dokážte!

345. Nech derivácia funkcie f je spojitá na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$. Možno tvrdiť, že pre každý bod $c \in (a, b)$ existuje interval $\langle \alpha, \beta\rangle \subset (a, b)$ taký, že $f'(c).(\beta - \alpha) = f(\beta) - f(\alpha)$?

Veta 10 (Cauchyho veta o strednej hodnote). Nech funkcie $f: \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ a $g: \langle a, b\rangle \to$ spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) f a g sú spojité na intervale $\langle a, b\rangle$;

(ii) v každom bode $x \in (a, b)$ existujú vlastná alebo nevlastná $f'(x)$ a vlastná $g'(x)$

Potom existuje bod $c \in (a, b)$, v ktorom platí

$$(f(b) - f(a))\, g'(c) = (g(b) - g(a))\, f'(c) .$$

Ak sú naviac splnené predpoklady

(iii) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 > 0$ pre každé $x \in (a, b)$;

(iv) $g(b) \neq g(a)$,

možno uvedenú rovnosť písať v tvare

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

346. Nájdite chybu v nasledujúcom „dôkaze" Cauchyho vety: „Nech funkcie f, g vyhovujú predpokladom (i), (ii), (iv) a nech $g'(x) \neq 0$ pre $x \in (a, b)$. Potom každá z funkcií f, g vyhovuje predpokladom Lagrangeovej vety o strednej hodnote, a teda platí $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$, $g(b) - g(a) = g'(c)\,(b - a)$ pre niektoré $c \in (a, b)$. Ak vydelíme prvú z týchto rovností druhou, dostaneme

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} ."$$

347. Nech funkcia f a jej derivácia sú definované na intervale $\langle 1, 2\rangle$. Potom existuje $c \in (1, 2)$ tak, že $f(2) - f(1) = \frac{c^2}{2} f'(c)$. Dokážte!

348. Nech funkcia f a jej derivácia f' sú definované na intervale $\langle a, b\rangle$, pričom $a.b > 0$. Dokážte, že potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$\frac{1}{a - b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(c) - c\, f'(c).$$

4.6. Vyšetrovanie niektorých vlastností funkcií pomocou diferenciálneho počtu

4.6.1. Monotónnosť

Veta 11. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale I a má deriváciu v každom jeho vnútornom bode. Potom

1. ak $f' > 0$ ($f' \geq 0$) vnútri intervalu I (tj. ak pre každý vnútorný bod x intervalu I platí $f'(x) > 0$ ($f'(x) \geq 0$)), tak f je rastúca (neklesajúca) na I ;

2. ak $f' < 0$ ($f' \leq 0$) vnútri intervalu I, tak f je klesajúca (nerastúca) na I.

349. Zistite, na ktorých intervaloch sú nasledujúce funkcie monotónne:

1. $y = 3x - x^3$;
2. $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$;
3. $y = x + \sin x$;
4. $y = x + |\sin 2x|$;
5. $y = \cos \dfrac{\pi}{x}$;
6. $y = \dfrac{x^2}{2^x}$;
7. $y = x^2 - \ln x^2$;
8. $y = \begin{cases} x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x\right), & \text{ak } x > 0 \\ 0, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$

350. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je rastúca na otvorenom intervale I a diferencovateľná v každom bode $x \in I$. Potom $f'(x) \geq 0$ pre každé $x \in I$. Dokážte!

351. Pre každý polynóm P_n stupňa $n \geq 1$ možno nájsť číslo $a > 0$ tak, že P_n je rýdzomonotónny na intervale $(-\infty, -a)$ a rýdzomonotónny na intervale (a, ∞). Dokážte!

Veta 12. Nech funkcie f, g sú n-krát diferencovateľné na intervale I, nech v bode $a \in I$ platí $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, ... , $f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a)$ (teda ak $n = 1$, predpokladáme len $f(a) = g(a)$). Potom

1. ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (a, \infty)$, tak $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (a, \infty)$ (pritom samozrejme predpokladáme, že $I \cap (a, \infty) \neq \emptyset$) ;

2a/ ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ a n je párne, tak $f(x) > g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$;

2b/ ak $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ a n je nepárne, tak $f(x) < g(x)$ pre všetky $x \in I \cap (-\infty, a)$ (pritom predpokladáme $I \cap (-\infty, a) \neq \emptyset$).

352. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $e^x > 1 + x$ pre $x \neq 0$;

2. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pre $x > 0$;

3. $\operatorname{tg} x > x$ pre $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

4. $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ pre $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

5. $x^{\alpha} - 1 > \alpha(x - 1)$ pre $\alpha \geqslant 2,\ x > 1$;

6. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x - a}$ pre $n > 1,\ x > a > 0$;

7. $1 + 2 \ln x \leqslant x^2$ pre $x > 0$.

353. Dokážte nerovnosť $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$ pre $x > -1$ a na jej základe rovnosť $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2$.

354. Nech M je konečná podmnožina intervalu $I = (a, b)$, kde $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, nech funkcia f je spojitá na I a má kladnú deriváciu v každom bode $x \in I \setminus M$. Potom f je rastúca na I. Dokážte!

(Všimnime si, že v predpokladoch tohto tvrdenia sa nehovorí nič o existencii derivácie v bodoch množiny M; teda funkcia f' môže byť definovaná v niektorých (alebo aj vo všetkých) bodoch množiny M, ale pripúšťa sa aj možnosť, že definičným oborom funkcie f' je len množina $I \setminus M$.)

355. Nech funkcie f, g sú diferencovateľné na intervale $\langle a, \infty)$, $f(a) > g(a)$ a nech pre všetky $x \in (a, \infty)$ platí $f'(x) \geqslant g'(x)$. Potom pre všetky $x \in \langle a, \infty)$ platí $f(x) > g(x)$. Dokážte!

356. Musí byť derivácia monotónnej funkcie monotónna?

4.6.2. Konvexnosť a konkávnosť. Inflexné body

Funkcia f sa nazýva rýdzo konvexná (konvexná) na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) < pf(x) + qf(y) \qquad (*)$$

$$(\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) \leqslant pf(x) + qf(y)\ ).$$

Funkcia f sa nazýva rýdzo konkávna (konkávna) na intervale $I \subset D(f)$, ak platí

$$\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) > pf(x) + qf(y)$$

$$(\forall x, y \in I,\ x \neq y \quad \forall p, q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) \geqslant pf(x) + qf(y)\ ).$$

(Geometricky možno výrok $(*)$ interpretovať takto: pre ľubovoľné 2 čísla $x, y \in I$, $x < y$, leží úsečka spájajúca body $(x, f(x))$ a $(y, f(y))$ nad grafom funkcie $f/(x, y)$.)

Veta 13. Nech funkcia f je spojitá na intervale I a dvakrát diferencovateľná v každom jeho vnútornom bode. Potom

1. ak $f'' > 0$ ($f'' \geqslant 0$) vnútri intervalu I, tak f je rýdzo konvexná (konvexná) na I ;
2. ak $f'' < 0$ ($f'' \leqslant 0$) vnútri intervalu I, tak f je rýdzo konkávna (konkávna) na I.

Vnútorný bod a množiny D(f) sa nazýva <u>inflexný bod funkcie f</u>, ak f má v bode a deriváciu a existuje $\varepsilon > 0$ tak, že funkcia f je rýdzo konvexná na jednej z množín $(a - \varepsilon, a\rangle$, $\langle a, a + \varepsilon)$ a rýdzo konkávna na druhej z nich.

<u>Veta 14</u>. Nech funkcia f je trikrát diferencovateľná v bode a a dvakrát diferencovateľná v niektorom jeho okolí. Ak $f''(a) = 0$, $f'''(a) \neq 0$, tak a je inflexný bod funkcie f.

Poznámka. Existujú aj iné definície rýdzej konvexnosti, rýdzej konkávnosti a inflexného bodu, ktoré nie sú ekvivalentné tu uvedeným. Všetky v matematickej literatúre používané definície týchto pojmov sú však volené tak, že vety 13 a 14 zostanú v platnosti.

357. Zistite, na ktorých intervaloch sú nasledujúce funkcie rýdzo konvexné, resp. rýdzo konkávne:

1. $y = 3x^2 - x^3$; 2. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$;

3. $y = x + \sin x$; 4. $y = \ln(1 + x^2)$;

5. $y = x \sin(\ln x)$; 6. $y = \sqrt[3]{|x|}$.

358. 1. Pre ktoré hodnoty $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ je bod $x = 0$ inflexným bodom funkcie $y = x^{\frac{p}{q}}$ (predpokladáme, že p, q sú nesúdeliteľné čísla) ?

2. Akým podmienkam musia vyhovovať koeficienty $a \neq 0$, b, c, aby krivka $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mala inflexné body?

3. Pre aké hodnoty parametra a je krivka $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ konvexná na $\mathbb{R}$?

359_o. Nech funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu (a, b), pričom f' je na (a, b) rastúca. Potom f je rýdzo konvexná na (a, b). Dokážte!

360. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1_o. $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ pre $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$, $n > 1$;

2. $\frac{1}{2}(e^x + e^y) > e^{\frac{x+y}{2}}$ pre $x \neq y$;

3. $x \ln x + y \ln y > (x + y) \ln \frac{x + y}{2}$ pre $x > 0$, $y > 0$, $x \neq y$;

4. $\frac{2}{\pi} x < \sin x$ pre $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

5_o. $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > 2 \operatorname{arctg} \frac{x + y}{2}$ pre $x \neq y$;

6. $x - 1 < \log_2 x$ pre $x \in (1, 2)$.

Riešenie: 2. Pretože $(e^x)'' = e^x > 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, je funkcia $f(x) = e^x$ rýdzo konvexná na $\mathbb{R}$;

teda platí

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y \quad \forall\, p > 0,\ q > 0,\ p + q = 1:\ f(px + qy) < pf(x) + qf(y).$$

Ak špeciálne zvolíme $p = q = \frac{1}{2}$, dostaneme

$$e^{\frac{x+y}{2}} = f(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y) < \tfrac{1}{2}\, f(x) + \tfrac{1}{2}\, f(y) = \tfrac{1}{2}\,(e^x + e^y), \quad x \neq y \ .$$

361. Ukážte, že neexistuje funkcia, ktorá je kladná na $\mathbb{R}$ a má v každom bode $x \in \mathbb{R}$ zápornú druhú deriváciu.

362. 1. Nech f je rýdzo konvexná a diferencovateľná na intervale I, nech $a \in I$. Potom na množine $I \setminus \{a\}$ leží graf funkcie f nad svojou dotyčnicou v bode a. Dokážte!

2_0. V inflexnom bode prechádza graf funkcie z jednej strany dotyčnice na druhú, tj. ak a je inflexný bod funkcie f, tak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že na jednej z množín $(a - \varepsilon, a)$, $(a, a + \varepsilon)$ leží graf funkcie f nad svojou dotyčnicou v bode $(a, f(a))$, na druhej z týchto množín leží pod ňou. Dokážte!

363. Nech

$$f(x) = \begin{cases} x^3(2 + \cos \frac{1}{x}), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases} .$$

Ukážte, že
1. f má deriváciu v bode 0 ;
2. graf funkcie f prechádza z jednej strany dotyčnice v bode $(0, 0)$ na jej druhú stranu ;
3. bod 0 napriek tomu nie je inflexný bod funkcie f.

Poznámka. Na vlastnostiach odvodených v pr. 362 sa zakladajú nasledujúce definície, odlišné od definícií používaných v tomto odstavci:

1. Funkcia f diferencovateľná na intervale I sa nazýva rýdzo konvexná (rýdzo konkávna) na I, ak pre každé $a \in I$ platí: na množine $I \setminus \{a\}$ leží graf funkcie f nad (pod) svojou dotyčnicou v bode $(a, f(a))$.

2. Bod a sa nazýva inflexný bod funkcie f, ak existuje konečná $f'(a)$ a graf funkcie f prechádza v bode a z jednej strany svojej dotyčnice na druhú.

Prvá z týchto definícií predstavuje užšie chápanie pojmov rýdzo konvexná a rýdzo konkávna funkcia (to sme tu nedokazovali, ale môžete to skúsiť sami), druhá naopak širšie chápanie pojmu inflexný bod (to ukazujú pr. 362 a 363).

4.6.3. E x t r é m y

Nech definičným oborom funkcie f je interval I. Hovoríme, že funkcia f má v bode a I lokálne maximum (lokálne minimum), ak existuje okolie O(a) bodu a tak, že platí

$$\forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap I:\ f(x) \leq f(a) \qquad (\forall x \in (O(a) \setminus \{a\}) \cap I:\ f(x) \geq f(a)).$$

Definíciu ostrého lokálneho maxima (ostrého lokálneho minima) dostaneme, ak v predchádzajúcej definícii zameníme znak $\leq$ ($\geq$) znakom $<$ ($>$). Lokálne maximá a lokálne minimá sa súhrnne nazývajú lokálnymi extrémami.

Veta 15. Ak funkcia f má lokálny extrém vo vnútornom bode a svojho definičného oboru, tak buď neexistuje vlastná ani nevlastná $f'(a)$, alebo $f'(a) = 0$.

Bod a sa nazýva stacionárny bod funkcie f, ak $f'(a) = 0$.

Pri hľadaní lokálnych extrémov funkcie $f: I \to R$ treba teda vyšetriť:

1. všetky jej stacionárne body ;
2. všetky body $a \in I$, v ktorých neexistuje $f'(a)$;
3. všetky body $a \in I$, ktoré nie sú vnútornými bodmi intervalu I.

Veta 16. Ak funkcia f je dvakrát diferencovateľná vo vnútornom bode a množiny D(f) a platí $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ ($f'(a) = 0$, $f''(a) < 0$), tak f má v bode a ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Veta 17. Nech funkcia f je n-krát ($n \geq 2$) diferencovateľná vo vnútornom bode a množiny D(f), nech $f'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0$, $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Ak n je párne a $f^{(n)}(a) > 0$ ($f^{(n)}(a) < 0$), tak funkcia f má v bode a ostré lokálne minimum (ostré lokálne maximum).

Ak n je nepárne, nemá funkcia f v bode a lokálny extrém.

364. Na základe vety 16 nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $f(x) = 2x^2 - x^4$; 2. $f(x) = \frac{3}{4} x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$,

3. $f(x) = e^x \sin x$.

365. Len použitím prvej derivácie nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$;

2. $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$; 3. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$;

4. $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; 5. $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

Návod: Stačí použiť úvahy analogické tejto: ak f je spojitá na (a, b), $f'(x) > 0$ pre všetky $x \in (a, c)$ (tj. f rastie na $(a, c\rangle$), $f'(x) < 0$ pre všetky $x \in (c, b)$ (tj. f klesá na $\langle c, b)$), tak f má v bode c lokálne maximum.

366. Zistite, či nasledujúce funkcie majú lokálny extrém v bode 0:

1. $y = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!}$; 2. $y = \sin x - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!}$.

367. Nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $y = |x^2 - 3x + 2|$; 2. $y = \sqrt[3]{x^2} - x^2$;

3. $y = x - \sqrt{3 - x}$; 4. $y = x\sqrt[3]{x - 1}$.

368. Rozhodnite, či existujú $m := \min\limits_{x \in A} f(x)$, $M := \max\limits_{x \in A} f(x)$; ak áno, nájdite ich:

1. $f(x) = x^2 - 4x + 6$, $A = \langle -1, 5\rangle$;

2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $A = \langle \frac{1}{100}, 100\rangle$;

3. $f(x) = 2\sqrt{x} + x$, $A = (0, 4\rangle$;

4. $f(x) = 2\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^2 x$, $A = \langle 0, \frac{\pi}{2})$;

5. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1 - x}$ $A = (0, 1)$;

6. $f(x) = \mathrm{arctg}\,\frac{1 - x}{1 + x}$, $A = \langle 0, 1\rangle$.

Návod: Ak funkcia f je spojitá na uzavretom ohraničenom intervale I, tak podľa vety 5 z kapitoly 3 existujú $\max\limits_{x \in I} f(x)$, $\min\limits_{x \in I} f(x)$; tieto čísla sú zrejme aj lokálnymi extrémami funkcie f/I. Preto ak chceme nájsť globálne extrémy funkcie f na intervale I, stačí zistiť funkčné hodnoty vo všetkých bodoch, v ktorých môže mať funkcia f/I lokálny extrém (tj. v stacionárnych bodoch, v krajných bodoch intervalu I a v tých bodoch, v ktorých neexistuje derivácia); najväčšie z týchto čísel je potom $\max\limits_{x \in I} f(x)$, najmenšie z nich je $\min\limits_{x \in I} f(x)$.

V prípade spojitej funkcie a nekompaktného intervalu I možno o existencii čísel $\max\limits_{x \in I} f(x)$, $\min\limits_{x \in I} f(x)$ často rozhodnúť na základe rastu a klesania funkcie f alebo jednoduchých úvah tohto typu: ak $f(c) = \max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} f(x)$ a $c \in (a, b)$, tak $f(c) = \max\limits_{x \in (a, b)} f(x)$.

369. Dokážte nerovnosti:

1. $|3x - x^3| \leqslant 2$ pre $x \in \langle -2, 2\rangle$;

2. $\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1 - x)^p \leqslant 1$ pre $x \in \langle 0, 1\rangle$, $p > 1$;

3. $\frac{2}{3} \leqslant \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leqslant 2$ pre $x \in \mathbb{R}$.

Riešenie: 1. Pretože $\max_{x \in \langle -2, 2\rangle} (3x - x^3) = 2$ a $\min_{x \in \langle -2, 2\rangle} (3x - x^3) = -2$, platia pre všetky $x \in \langle -2, 2\rangle$ nerovnosti $-2 \leq 3x - x^3 \leq 2$, tj. $|3x - x^3| \leq 2$. (Funkcia $3x - x^3$, $x \in \langle -2,2\rangle$ je diferencovateľná v každom bode intervalu $(-2, 2)$, má stacionárne body 1 a -1; preto jej maximum (minimum) nájdeme ako najväčšie (najmenšie) z čísel $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(-2) = 2$, $f(2) = -2$.)

370. 1. Ak polynóm P párneho stupňa má len jeden stacionárny bod, tak v ňom nadobúda lokálny extrém. Dokážte!

2_o. Ak polynóm nepárneho stupňa má práve dva stacionárne body, tak buď v obidvoch nadobúda lokálny extrém, alebo sú obidva inflexnými bodmi. Dokážte!

371. Môže mať diferencovateľná funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v dvoch susedných stacionárnych bodoch ostré lokálne maximum?

372. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x^2(2 + \cos \frac{1}{x}), & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

má v bode 0 ostré lokálne minimum, ale nie je klesajúca v žiadnom ľavom okolí bodu 0 ani rastúca v žiadnom pravom okolí bodu 0.

373. Nájdite rozmery toho valca vpísaného do gule s polomerom R, ktorý má 1. najväčší objem ; 2. najväčší povrch.

374. Na krivke $y = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$, nájdite bod, ktorého vzdialenosť od bodu $(1, \frac{5}{2})$ je najmenšia.

375. Nech krivka α je grafom diferencovateľnej funkcie f definovanej na otvorenej množine M. Nech je daný bod $(a, b) \notin \alpha$. Dokážte, že vzdialenosť medzi bodmi (a, b) a (x, f(x)) môže nadobúdať extrém len v smere normály[x] ku krivke α. (Teda presnejšie formulované: Označme d(x) vzdialenosť bodov (x, f(x)) a (a, b). Ak pre niektoré $c \in M$ platí $d(c) = \max\{d(x)\,;\, x \in M\}$ alebo $d(c) = \min\{d(x)\,;\, x \in M\}$, tak spojnica bodov (c, f(c)) a (a, b) je kolmá na dotyčnicu funkcie f v bode (c, f(c)).)

376. Pozorovateľ stojí oproti obrazu umiestnenému na vertikálnej stene, spodný okraj obrazu je a (cm) nad úrovňou pozorovateľových očí, horný okraj b (cm) nad touto úrovňou. V akej vzdialenosti od steny musí stáť pozorovateľ, aby uhol φ, pod ktorým vidí obraz, bol najväčší?

---

[x] Normála v bode (c, f(c)) je priamka prechádzajúca bodom (c, f(c)) a kolmá na dotyčnicu grafu funkcie f v tomto bode.

4.7. L´Hospitalovo pravidlo

Veta 18. Nech

1. funkcie f, g sú diferencovateľné v niektorom prstencovom okolí $O^*(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^*$;

2. $\forall\ x \in O^*(a)$: $g'(x) \neq 0$;

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ alebo $\lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$;

4. existuje vlastná alebo nevlastná $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Analogické tvrdenia možno sformulovať aj pre jednostranné limity.)

377. Nech funkcie f, g sú definované v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, nech $f(a) = g(a) = 0$, nech existujú vlastné $f'(a)$ a $g'(a) \neq 0$. Potom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$. Dokážte!

378. Nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$;

3. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$; 4. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a > 0,\ n \in \mathbb{N})$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - x}{x \operatorname{tg} x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x + x^3 \cos \frac{\pi}{x}}{x^2}$.

Riešenie: 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} \overset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}}}{3x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\dfrac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - 4x^2}}{\sqrt{1 - 4x^2}\,\sqrt{1 - x^2}}}{x^2} \overset{(2)}{=} \dfrac{2}{3} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}\,\sqrt{1 - x^2}} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - 4x^2}}{x^2} \overset{(3)}{=}$

$$\overset{(3)}{=} \frac{2}{3} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{4x}{\sqrt{1-4x^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{2x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0} \left(\frac{4}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \overset{(4)}{=} 1 .$$

(1) ide o neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$, skúsime preto použiť l'Hospitalovo pravidlo (tj. vetu 18); predpoklady 1 - 3 sú zrejme splnené, splnenie predpokladu 4 preveríme až ďalším výpočtom, rovnosť (1) má teda zatiaľ podmienený charakter: ak ukážeme existenciu limity na jej pravej strane, tak bude existovať aj limita vľavo a bude platiť (1) (ak zistíme, že limita vpravo neexistuje, neboli sme oprávnení použiť l'Hospitalovo pravidlo);

(2) výraz na ľavej strane je opäť typu $\frac{0}{0}$, skôr než však skúsime znova použiť vetu 18, upravíme limitovanú funkciu („bezhlavým" používaním l'Hospitalovho pravidla sa výpočet často viac skomplikuje než zjednoduší), využijeme, že $\lim_{x \to 0} \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-4x^2} = 1$, a vetu 18 použijeme len pri výpočte druhej z limít vpravo (predpoklady 1, 2, 3 sú opäť zrejme splnené);

(3) táto rovnosť je podmienená podobne ako rovnosť (1);

(4) z existencie tejto limity vyplýva, že použitie l'Hospitalovho pravidla bolo v obidvoch prípadoch oprávnené, a teda všetky uvedené rovnosti skutočne platia.

379. Nájdite limity:

1. $\lim_{x \to 1} \ln x \ln(1-x)$;
2. $\lim_{x \to 0} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x$;
3. $\lim_{x \to \infty} x \left(\pi - 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$;
4. $\lim_{x \to 0} x^n \ln x \quad (n \in \mathbb{N})$.

Návod: Ak súčin $f.g$, ktorý je neurčitým výrazom typu $0.\infty$, prepíšeme do tvaru podielu $\frac{f}{1/g}$ alebo $\frac{g}{1/f}$, dostaneme neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$ alebo $\frac{\infty}{\infty}$, ktorého limitu môžeme skúsiť vypočítať pomocou l'Hospitalovho pravidla.

380. Nájdite limity:

1. $\lim_{x \to 0+} x^x$;
2. $\lim_{x \to 0+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$;
3. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$;
4. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$;
5. $\lim_{x \to 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x$.

Návod: Funkciu f^g, ktorá je neurčitým výrazom typu 0^0, $(+\infty)^0$ alebo 1^∞, môžeme prepísať do tvaru $e^{g \ln f}$; exponent $g \ln f$ je potom neurčitým výrazom typu $0.\infty$, pri výpočte jeho limity môžeme postupovať ako v pr. 379 (v prípade neurčitých výrazov typu 1^{∞} je však často výhodnejšie prepísať ich do tvaru $\left[(1 + (f - 1))^{\frac{1}{f-1}}\right]^{(f-1).g}$ a postup z pr. 379 použiť pri výpočte limity funkcie $(f - 1).\,g$, ktorá je neurčitým výrazom typu $0.\infty$).

381. Nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Návod: Ak chceme použiť l´Hospitalovo pravidlo pri výpočte limít neurčitých výrazov typu $\infty - \infty$, musíme predovšetkým funkciu $f - g$ napísať v tvare podielu. Vo všeobecnosti to možno dosiahnuť nahradením funkcie $f - g$ funkciou $\dfrac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g.f}}$ (tá je neurčitým výrazom typu $\frac{0}{0}$), v jednotlivých prípadoch však často možno nájsť jednoduchší postup.

382. Možno použiť l´Hospitalovo pravidlo pri výpočte týchto limít:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg} x - 1}$?

383. Limitu funkcie $f(x) = \dfrac{1 + x + \frac{\sin 2x}{2}}{\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) e^{\sin x}}$ v bode $+\infty$ budeme hľadať dvoma spôsobmi:

1. použitím l´Hospitalovho pravidla dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos 2x}{e^{\sin x}(1 + \cos 2x) + \cos x\, e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cos^2 x}{2\, e^{\sin x} \cos^2 x + \cos x\, e^{\sin x}(x + \sin x \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 \cos x}{e^{\sin x}} \cdot \frac{1}{x + \cos x\,(2 + \sin x)} \overset{(\ast)}{=} 0$$

(v prvom kroku sme zderivovali čitateľ aj menovateľ, v treťom sme limitovaný zlomok rozšírili výrazom $\frac{1}{\cos x}$); pretože $\lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$ a funkcia $\cos x \,.\, (2 + \sin x)$ je zdola ohraničená, je $\lim\limits_{x\to\infty} (x + \cos x\,(2 + \sin x)) = +\infty$, a teda $\lim\limits_{x} \dfrac{1}{x + \cos x\,(2 + \sin x)} = 0$, funkcia $\dfrac{2 \cos x}{e^{\sin x}}$ je ohraničená, preto platí $(\ast)$;

2. platí $f(x) = \frac{1}{e^{\sin x}}\left(1 + \frac{1}{x + \sin x \cos x}\right)$, pritom funkcia v zátvorke má v bode $+\infty$ limitu 1, funkcia $\frac{1}{e^{\sin x}}$ nemá v bode $+\infty$ limitu (to možno ľahko dokázať pomocou Heineho definície limity), preto neexistuje ani $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^{\sin x}}\left(1 + \frac{1}{x + \sin x \cos x}\right)$.

Pretože sme dospeli k rôznym výsledkom, je aspoň jeden z týchto postupov nesprávny. Ktorý to je a v čom spočíva chyba?

384. 1. Nech funkcia f je definovaná v okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech v každom bode $x \in O(a) \setminus \{a\}$ existuje vlastná $f'(x)$ a nech f je spojitá v bode a. Ak existuje (vlastná alebo nevlastná) $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$, tak existuje $f'(a)$ a platí $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$. Dokážte!

2. Nájdite $f'(a)$, ak:

a/ $f(x) = \sin^2 \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$; b/ $f(x) = \arcsin x$, $a = 1, -1$;

c/ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{ak } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$.

4.8. Taylorov polynóm

Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$. Potom Taylorovým polynómom stupňa n funkcie f v bode a sa nazýva polynóm (v premennej x)

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n .$$

Ak špeciálne $a = 0$, používa sa namiesto názvu Taylorov polynóm označenie Maclaurinov polynóm.

Veta 19. Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$ a T_n je jej Taylorov polynóm stupňa n v bode a, tak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - a)^n} = 0 .$$

(Rozdiel $f - T_n$ sa nazýva zvyšok Taylorovho polynómu stupňa n funkcie f v bode a.)

Nech funkcia g je definovaná v niektorom rýdzom okolí bodu $a \in \mathbb{R}^*$ a nenadobúda tam nulové hodnoty. Znakom $o(g)$ budeme označovať triedu všetkých funkcií f takých, že

1. ich definičný obor obsahuje niektoré rýdze okolie bodu a ;
2. platí $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Namiesto zápisu $f \in o(g)$ sa používa zápis $f = o(g)$. (Pokiaľ by z kontextu nebolo jasné, ktorého $a \in \mathbb{R}^*$ sa vzťah $f = o(g)$ týka, používa sa zápis $f = o(g)$ $(x \to a)$.) Zápis $f = h + o(g)$ treba chápať nasledovne: funkcia f je súčtom funkcie h a niektorej funkcie z triedy $o(g)$.

Ak funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, patrí podľa vety 19 zvyšok jej Taylorovho polynómu stupňa n v bode a do triedy $o((x - a)^n)$, možno teda písať

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n) ;$$

tento zápis sa nazýva Taylorovým vzorcom so zvyškom v Peanovom tvare.

V nasledujúcich príkladoch budeme používať tieto tvrdenia (v zápisom všade vynechávame $x \to 0$; m, n sú prirodzené čísla):

1. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^n)$, tak $f(x) + g(x) = o(x^n)$;
2. ak $m > n$ a $f(x) = o(x^m)$, tak $f(x) = o(x^n)$;
3. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $f^m(x) = o(x^{m.n})$;
4. ak $f(x) = o(x^n)$, tak $x^m . f(x) = o(x^{m+n})$;
5. ak $f(x) = o(x^n)$ a $g(x) = o(x^m)$, tak $f(x).g(x) = o(x^{m+n})$.

Uvedené implikácie budeme zapisovať nasledovne:

1. $o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$;
2. $o(x^m) = o(x^n)$ pre $m > n$;
3. $o^m(x^n) = o(x^{m.n})$;
4. $x^m . o(x^n) = o(x^{m+n})$;
5. $o(x^n).o(x^m) = o(x^{m+n})$.

Používanie týchto zápisov vyžaduje istú opatrnosť: pretože ide o symbolické vyjadrenie implikácií, nemožno (na rozdiel od skutočných rovností) tieto „rovnosti" čítať sprava doľava.

385. Na základe výpočtu príslušných derivácií zostrojte Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak

1. $f(x) = \sqrt{x + 1}$, $a = -\frac{1}{2}$, $n = 4$;
2. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $n = 3$;
3. $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$, $a = 0$, $n = 5$;
4. $f(x) = \frac{1}{2x + 3}$, $a = -1$, n ľubovoľné ;
5. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $a = \frac{\pi}{4}$, n ľubovoľné .

386. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v bode $a \in \mathbb{R}$, nech existujú čísla $A_0, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$f(x) = A_0 + A_1(x - a) + \dots + A_n(x - a)^n + o((x - a)^n) .$$

Potom $A_0 + A_1(x - a) + \dots + A_n(x - a)^n$ je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Dokážte!

V nasledujúcich príkladoch využijeme tvrdenie z pr. 386 a znalosť Maclaurinových polynómov týchto funkcií (možno ich zostrojiť výpočtom príslušných derivácií):

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$;

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$ *);

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$;

IV. $\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$;

V. $\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$;

VI. $(1 + x)^\alpha = 1 + \quad x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{(\alpha - 1) \dots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n + o(x$

$(\alpha \in \mathbb{R})$.

387. Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\frac{x}{7}}$;
2. $f(x) = e^{x^2}$;
3. $f(x) = \cos x^3$;
4. $f(x) = x^2 \ln (1 + x)$;
5. $f(x) = \frac{1}{2 + 3x^2}$;
6. $f(x) = x^3 \sin 3x$.

Riešenie: 2. Pretože funkcia e^{x^2} má derivácie všetkých rádov v bode 0 (vyplýva to matematickou indukciou z viet o derivácii súčtu, súčinu a zloženej funkcie), existuje jej Maclaurinov polynóm ľubovoľného stupňa. Jeho koeficienty nebudeme hľadať derivovaním funkcie e^{x^2}, namiesto toho použijeme tento postup:

Ak označíme $R_n(z)$ zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa n funkcie e^z, tak pre každé $z \in \mathbb{R}$ platí

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + R_n(z) , \qquad (*)$$

---

*) pretože $\sin^{(2n)}(0) = 0$, majú Maclaurinov polynóm stupňa $2n - 1$ a Maclaurinov polynóm stupňa $2n$ rovnaký tvar, preto aj zvyšok Maclaurinovho polynómu stupňa $2n - 1$ funkcie sin patrí do triedy $o(x^{2n})$; podobná poznámka platí o funkcii cos

pritom podľa vety 19 je $\lim\limits_{z\to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$, tj. $R_n(z) = o(z^n)$.

Ak položíme $z = x^2$, z (*) vyplýva: pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + R_n(x^2) \ ,$$

pritom $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R_n(x^2)}{x^{2n}} = 0$ (vyplýva to z vety o limite zloženej funkcie a z toho, že $\lim\limits_{z\to 0} \frac{R_n(z)}{z^n} = 0$), teda $R_n(x^2) = o(x^{2n})$. Podľa tvrdenia z pr. 386 je preto $1 + x^2 + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}$ Maclaurinov polynóm stupňa 2n funkcie e^{x^2}.

(Priamo z definície Maclaurinovho polynómu vyplýva: ak z Maclaurinovho polynómu stupňa k $(k \geq 2)$ funkcie f vynecháme člen obsahujúci x^k, dostaneme Maclaurinov polynóm stupňa k-1 funkcie f. Teda Maclaurinov polynóm stupňa 2n-1 funkcie e^{x^2} je $1 + x^2 + \dots + x^{2n-2}/(n-1)!$)

4. Ak rovnosť

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-3} \frac{x^{n-2}}{n-2} + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

vynásobíme x^2, dostaneme

$$x^2 \ln(1 + x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \dots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2} + (-1)^{n-2} \frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n).$$

Funkcia $(-1)^{n-2} \frac{x^{n+1}}{n-1} + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+2}}{n} + x^2 o(x^n)$ patrí do triedy $o(x^n)$, preto môžeme písať:

$$x^2 \ln(1 + x) = x^3 - \frac{x^4}{2} + \dots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2} + o(x^n) \ ,$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $x^3 - \frac{x^4}{2} + \dots + (-1)^{n-3} \frac{x^n}{n-2}$ je Maclaurinov polynóm stupňa n $(n \geq 3)$ funkcie $x^2 \ln(1 + x)$. Zrejme Maclaurinovými polynómami stupňa 1 a 2 sú funkcie identicky rovné 0.

388. Nájdite Maclaurinove polynómy stupňa n funkcií:

1. $f(x) = e^{\sin^2 x}$, $n = 4$;
2. $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3\sin x}$, $n = 3$;
3. $f(x) = \ln^3(1 - \frac{x}{2})$, $n = 3$;
4. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $n = 4$;
5. $f(x) = \cos x \,.\, \ln(1 + x)$, $n = 5$.

Riešenie: 1. Ak do rovnosti

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + R(z)$$

(R označuje zvyšok Maclaurinovho polynómu) dosadíme $z = \sin^2 x$, dostaneme

$$e^{\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + R(\sin^2 x) \ , \qquad (*)$$

pritom $R(\sin^2 x) = o(x^4)$ (pretože $R(z) = o(z^2)$, je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{R(\sin^2 x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{R(\sin^2 x)}{\sin^4 x} =$ $= 1 \cdot \lim\limits_{z\to 0} \frac{R(z)}{z^2} = 0$).

Pomocou rovností $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, $\sin x = x + o(x)$ môžeme (*) prepísať a upraviť nasledovne:

$$\left.\begin{aligned} e^{\sin^2 x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2 + \frac{(x + o(x))^4}{2} + o(x^4) = \boxed{1} + \Big(\boxed{x^2} + \\ &+ \frac{x^6}{3!\,3!} + o^2(x^3) \boxed{- \frac{2x^4}{3!}} + 2xo(x^3) - \frac{2x^3 o(x^3)}{3!} \Big) + \Big(\boxed{x^4} + 4x^3 o(x) + 6x^2 o^2(x) + \\ &+ 4xo^3(x) + o^4(x) \Big) + o(x^4) \,. \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Všetky sčítance okrem vyznačených patria do $o(x^4)$, patrí tam teda aj ich súčet. Rovnosť (**) preto môžeme písať

$$e^{\sin^2 x} = 1 + x^2 + \left(1 - \frac{2}{3!}\right) x^4 + o(x^4),$$

čo podľa tvrdenia z pr. 386 znamená, že $1 + x^2 + \frac{2}{3} x^4$ je Maclaurinov polynóm stupňa 4 funkcie $e^{\sin^2 x}$.

Poznámka. Zo záveru uvedeného postupu vyplýva, že stupne Maclaurinových polynómov funkcií e^z a $\sin^2 x$ sme volili tak, aby v (**) všetky sčítance, ktoré nemajú tvar αx^m, $m = 0, 1, \dots$ (medzi ne patrí aj funkcia $R(\sin^2 x)$) boli z triedy $o(x^4)$.

Všimnite si tiež, že hoci pravá strana rovnosti (**) obsahuje dokonca polynóm 6. stupňa, nemôžeme tvrdiť, že tento polynóm je Maclaurinovým polynómom 6. stupňa funkcie $e^{\sin^2 x}$; z nášho postupu totiž nevyplýva, že by súčet zvyšných členov na pravej strane rovnosti (**) patril do $o(x^6)$.

389. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak:

1. $f(x) = e^{x^2 + 2x - 1}$, $a = -1$; 2. $f(x) = x^2 e^{-2x}$, $a = -1$;

3. $f(x) = (1 + x^2) \ln\sqrt{1 + x}$, $a = 0$;

4. $f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$, $a = 0$; 5. $f(x) = \dfrac{x + 5}{2x - 4}$, $a = -\dfrac{1}{10}$;

6. $f(x) = \ln(x^2 - 7x + 12)$, $a = 1$.

Návod: Substitúciou $x - a = t$ možno hľadanie Taylorovho polynómu funkcie f v bode a previesť na hľadanie Maclaurinovho polynómu funkcie $g(t) := f(t + a)$.

390. Pomocou Taylorových polynómov nájdite nasledujúce limity:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, x - \sin x}{x^3}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^3) - 2\sin x + 2x\cos x^2}{\mathrm{tg}\, x^3}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)}{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}$.

Riešenie: 2. Funkciu v čitateli napíšeme v tvare $\alpha x^m + o(x^m)$, kde $\alpha \neq 0$ (tj. z tých jej Maclaurinových polynómov, ktoré nie sú identicky rovné 0, vyberieme polynóm najnižšieho stupňa); to isté urobíme v menovateli.

V našom prípade

$$\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right) = -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4) ,$$

$$\sin x^4 = x^4 + o(x^4) .$$

Potom

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sin x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{o(x^4)}{x^4}}{1 + \frac{o(x^4)}{x^4}} = -\frac{1}{12}$$

(rovnosť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{o(x^4)}{x^4} = 0$ vyplýva z definície symbolu $o(x^4)$).

391. Nájdite $f^{(k)}(0)$, ak:

1. $f(x) = e^{-x^2}$, $k = 60$; 2. $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$, $k = 32$.

Veta 20. Nech je daná funkcia f, nech funkcia $f^{(n)}$ je definovaná a spojitá v niektorom okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech pre každé $x \in O(a) \setminus \{a\}$ existuje vlastná $f^{(n+1)}(x)$. Nech T_n je Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a. Potom

1. pre každé $x \in O(a)$, $x > a$ ($x \in O(a)$, $x < a$) existuje číslo $\vartheta(x) \in (a, x)$ ($\vartheta(x) \in (x, a)$) také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

(tzv. Lagrangeov tvar zvyšku);

2. pre každé $x \in O(a)$, $x > a$ $(x \in O(a),\ x < a)$ existuje číslo $\vartheta(x) \in (a, x)$ $(\vartheta(x) \in (x, a))$ také, že

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta(x))}{n!}(x - a)(x - \vartheta(x))^n$$

(tzv. Cauchyho tvar zvyšku).

392. Odhadnite absolútnu chybu Δ nasledujúcich približných vzorcov:

1. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{10}}{10!}$, $x \in \langle 0, 1\rangle$;

2. $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$, $|x| \leqslant 0{,}5$;

3. $\sqrt{1 + x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$, $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

393. Pre $x \geqslant 0$ dokážte nasledujúce nerovnosti:

1_o. $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$;

2. $e^x \leqslant 1 + x + \frac{x^2 e^x}{2}$;

3_o. $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

4.9. Použitie diferenciálneho počtu pri zostrojovaní grafov funkcií

Pri zostrojovaní grafu funkcie f postupujeme spravidla nasledovne:

1. určíme $D(f)$;

2. nájdeme všetky hodnoty x, pre ktoré $f(x) = 0$ (tj. priesečníky grafu funkcie f s osou Ox) ;

3. vyšetríme spojitosť funkcie f a jej správanie sa v bodoch nespojitosti ;

4. zistíme, na ktorých intervaloch je f monotónna, a nájdeme body, v ktorých nadobúda lokálne extrémy ;

5. vyšetríme konvexnosť a konkávnosť funkcie f, nájdeme inflexné body ;

6. nájdeme asymptoty grafu funkcie (definíciu asymptoty pozri ďalej).

Zostrojenie grafu funkcie f môžu uľahčiť niektoré jej špeciálne vlastnosti: pri párnej alebo nepárnej funkcii stačí zostrojiť graf funkcie $f/D(f) \cap \langle 0, +\infty)$, v prípade periodickej funkcie f graf funkcie $f/\langle a, a + T\rangle \cap D(f)$, kde $a \in D(f)$ a T je niektorá perióda funkcie f.

(Nech je daná funkcia f, nech $a \in R$ je hromadný bod množiny $D(f) \cap (a, +\infty)$ (množiny $D(f) \cap (-\infty, a)$). Ak existuje $\lim_{x \to a+} f(x)$ $(\lim_{x \to a-} f(x))$ a je nevlastná, nazýva sa priamka $x = a$ asymptotou bez smernice grafu funkcie f.

Nech bod $+\infty$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Priamka $y = kx + q$ sa nazýva asymptota so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$, ak $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - q) = 0$.

Analogicky sa definuje asymptota so smernicou grafu funkcie f v bode $-\infty$.

Veta 21. Nech bod $+\infty$ je hromadný bod definičného oboru funkcie f. Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou grafu funkcie f v bode $+\infty$ práve vtedy, keď:

1. existuje konečná $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ a platí $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$;

a

2. existuje konečná $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx)$ a rovná sa číslu q.

Analogická veta platí pre asymptotu so smernicou grafu funkcie f v bode $-\infty$.)

Zostrojte grafy nasledujúcich funkcií:

394. $y = 3x - x^3$;

395. $y = \frac{x^4}{(1 + x)^3}$;

396. $y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$;

397. $y = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}$;

398. $y = x\sqrt{|x^2 - 1|}$;

399. $y = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$;

400. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;

401. $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$;

402. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x + 1}}$;

403. $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x$;

404. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$;

405. $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$;

406. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

407. $y = x \operatorname{arctg} x$;

408. $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$;

409. $y = (x + 2) e^{\frac{1}{x}}$;

410. $y = \arccos \frac{1 - x}{1 - 2x}$;

411. $y = x^x$.

4.10. Ďalšie príklady

412$_o$. Funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa nazýva rastúca v bode a, ak existuje také jeho okolie $O(a)$, že platí

$$\forall\, x, y \in O(a):\ x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y)\ .$$

Ak existuje $f'(a)$ a platí $f'(a) = +\infty$ alebo $f'(a) > 0$, tak f je rastúca v bode a. Dokážte!

413. Nech funkcie f, g sú definované v okolí bodu a, nech $g(a) = 0$, g má deriváciu v bode a, f je spojitá v bode a. Potom existuje derivácia funkcie $f.g$ v bode a. Dokážte!

414. Ak spojitá funkcia f definovaná v okolí bodu a nemá deriváciu v bode a, pričom $f(a) \neq 0$, tak funkcia f^n nemá deriváciu v bode a pre žiadne $n \in \mathbb{N}$. Dokážte!

415$_o$. Dokážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,\ \text{ak } x = 0 \\ \dfrac{1}{n^2} & ,\ \text{ak } \dfrac{1}{n+1} \leq |x| < \dfrac{1}{n} \end{cases}\ .$$

má deriváciu v bode 0.

416$_o$. Ak $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je ohraničená nekonštantná periodická funkcia, tak funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x\ \varphi(\frac{1}{x}) & ,\ \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & ,\ \text{ak } x = 0 \end{cases}$$

je spojitá v bode 0, ale nemá tam vlastné ani nevlastné jednostranné derivácie.

417. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ má deriváciu v každom bode $x \in \mathbb{R}$. Rozhodnite o pravdivosti nasledujúcich tvrdení:

1. Nutnou podmienkou pre periodičnosť f' je periodičnosť f.

2. Postačujúcou podmienkou pre periodičnosť f' je periodičnosť f.

418. Nech funkcia f má v bode $a \in \mathbb{R}$ navzájom rôzne konečné jednostranné derivácie. Uveďte nutnú a postačujúcu podmienku pre existenciu derivácie funkcie f^2 v bode a !

419. Vyjadrite derivácie nasledujúcich funkcií pomocou derivácií funkcií φ_{kj} ($k = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$):

1. $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{kj}(x)$; 2. $\displaystyle\prod_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kj}(x)$.

420. Dokážte nasledujúci vzorec pre deriváciu funkcionálneho determinantu n-tého rádu (pritom predpokladáme, že funkcie $f'_{11}, \dots, f'_{kl}, \dots, f'_{nn}$ majú rovnaký definičný obor M):

$$\begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & \dots & f_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f'_{k1} & \dots & f'_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$$

Na základe toho nájdite derivácie nasledujúcich funkcií:

1. $F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}$; 2. $F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}$.

421. Uveďte príklady nekonštantných spojitých funkcií f a g takých, že

1. neexistuje $f'(a)$, funkcia g má deriváciu v bode $f(a)$ a zložená funkcia $g \circ f$ má deriváciu v bode a ;

2. existuje vlastná $f'(a)$, neexistuje $g'(f(a))$ a funkcia $g \circ f$ má deriváciu v bode a ;

3. neexistuje $f'(a)$ ani $g'(f(a))$, ale existuje vlastná derivácia funkcie $g \circ f$ v bode a.

422. Ak funkcia f definovaná v okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ má a funkcia $|f|$ nemá deriváciu v bode a, tak $|f|$ má v bode a navzájom rôzne jednostranné derivácie. Dokážte!

423. Nech $a \in \mathbb{R}$ je dané nenulové číslo. Skonštruujte prostú funkciu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby platilo: $f(0) = 0$, $f'(0) = a$, funkcia f^{-1} nemá deriváciu v bode 0. (Aby sme čitateľovi uľahčili požadovanú konštrukciu, budeme v tomto príklade - a len v ňom - chápať pojem derivácie širšie: v nami používanej definícii derivácie v bode a nahradíme podmienku „f definovaná v okolí bodu a" podmienkou „$a \in D(f)$ je hromadný bod množiny $D(f)$".)

424. Nech f je inverzná funkcia k funkcii $y = x + x^5$. Nájdite $f''(0)$!

425. Nájdite $y^{(n)}$, ak:

1. $y = \cos^3 x$; 2. $y = \cos^4 x$;

3. $y = (2x - 1)\, 2^{3x}\, 3^{2x}$; 4. $y = x \ln (x^2 - 3x + 2)$;

5. $y = e^x \sin x$.

426. Nájdite $f^{(n)}(a)$, ak $f(x) = (x - a)\, \varphi(x)$, pričom funkcie φ aj $\varphi^{(n-1)}$ sú definované a spojité na niektorom okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ $(n \geq 2)$.

427_0. Nech funkcia f má v každom bode $x \in \mathbb{R}$ druhú deriváciu a nech pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$af''(x) + bf'(x) + cf(x) = 0$$

($a \neq 0$, b , c sú reálne konštanty). Potom funkcia f má v každom bode $x \in \mathbb{R}$ derivácie všetkých rádov. Dokážte!

428_0. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ ak } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ ak } x = 0 \end{cases}$$

má derivácie všetkých rádov v bode 0.

429. Nech funkcia g má ohraničenú deriváciu definovanú na $\mathbb{R}$. Potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že funkcia $f(x) = x + \varepsilon\, g(x)$ je prostá na $\mathbb{R}$. Dokážte!

430. Nech $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, nech $\sum\limits_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j+1} = 0$. Potom polynóm $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ má aspoň jeden koreň v intervale $(0, 1)$. Dokážte!

431. Ak $a^2 - 3b < 0$, tak rovnica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ má práve jeden koreň, tento koreň je naviac prostý. Dokážte!

432. Ukážte, že všetky korene Legendrovho polynómu $P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!} \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n)}$ sú reálne a ležia v intervale $(-1, 1)$.

433. Ak sú všetky korene mnohočlena $x^n + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ reálne, tak $a_2 \leqslant 0$. Dokážte!

434_o. Ak polynóm P_n má tvar $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_kx^k - (a_{k+1}x^{k+1} + \dots + a_nx^n)$, kde $a_i \geqslant 0$ $(i = 0, \dots, n)$, pričom aspoň jeden z koeficientov $a_0, \dots, a_k$ a aspoň jeden z koeficientov $a_{k+1}, \dots, a_n$ sú nenulové (v takom prípade hovoríme, že koeficienty majú jednu zmenu znamienka), tak P_n má najviac jeden kladný koreň. Dokážte!
(Návod: sporom, uvažujte funkciu $x^{-k} P_n(x)$, jej derivácia nemá zmenu znamienka, teda nemá kladné korene, čo je spor s Rolleho vetou.)

435. Dokážte, že počet kladných koreňov polynómu nie je väčší než počet zmien znamienok jeho koeficientov (pričom nulové koeficienty sa nezapočítavajú)!

436_o. Ukážte, že rovnica $x^5 - 2x^4 - x^2 - 5 = 0$ má práve jeden reálny koreň.

437. Čo možno povedať o funkcii $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ak $f^{(n)}(x) = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$?

438. Nech funkcia f má spojitú monotónnu deriváciu f' definovanú na intervale (a, b), nech $x_0 \in (a, b)$, $f(x_0) = 0$. Potom $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{f'(x)} = 0$. Dokážte!

439_o. Nech funkcia f má deriváciu v každom bode intervalu $(0, \infty)$, pričom $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$; nech $g(x) := f(x+1) - f(x)$, $x > 0$. Potom $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$. Dokážte!

440_o. Nech funkcia f má spojitú deriváciu definovanú na $\mathbb{R}$. Potom pre každý ohraničený interval $I \subset \mathbb{R}$ existuje číslo $K > 0$ tak, že platí

$$\forall\, x, y \in I: \ |f(x) - f(y)| \leqslant K\, |x - y|$$

(funkcia s takouto vlastnosťou sa nazýva lipschitzovsky spojitá na intervale I).

441. Existuje funkcia $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, ktorá má deriváciu v každom bode $x \in (0, \infty)$, pričom platí $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = 1$?

442_o. Nech $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ pre $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Podľa vety o strednej hodnote platí $x^2 \sin \frac{1}{x} = x\,(2c \sin \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c})$, odtiaľ $\cos \frac{1}{c} = 2c \sin \frac{1}{c} - x \sin \frac{1}{x}$, kde $0 < c < x$. Ak

$x \to 0$, tak aj $c \to 0$. Z poslednej rovnosti potom dostávame $\lim\limits_{c \to 0} \cos \frac{1}{c} = 0$. Ale je známe, že $\lim\limits_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$ neexistuje. Objasnite tento paradox!

443_o. Nech funkcia f je spojitá a nekonštantná na intervale $\langle a, b \rangle$, má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$ a platí $f(a) = f(b)$. Potom existujú body $c_1, c_2 \in (a, b)$ tak, že $f'(c_1) > 0$, $f'(c_2) < 0$. Dokážte!

444. Nech funkcia je spojitá a nelineárna na intervale $\langle a, b \rangle$ a má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$, v ktorom $|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$. Dokážte!

445. Nech prostá funkcia $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ má deriváciu v každom bode $x \in (a, b)$. Potom derivácia funkcie f^{-1} je definovaná na hustej podmnožine množiny $D(f^{-1})$. Dokážte! (Množina $A \subset \mathbb{R}$ sa nazýva hustá v neprázdnej množine $B \subset \mathbb{R}$, ak $A \subset B$ a každý bod $b \in B$ je hromadným bodom množiny A.)

446. Nech funkcia f aj jej derivácia sú definované na intervale $\langle a, b \rangle$, $a.b > 0$, nech $f(a) = f(b)$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(a) - f(c) = c.f'(c)/2$. Dokážte!

447. Dokážte nasledujúce nerovnosti:

1. $\frac{\ln x}{x - 1} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}$ pre $x > 0$, $x \neq 1$ 2. $(1 + \frac{1}{x})^x < e < (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ pre $x > 0$;

3. $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ pre $x > 0$, $y > 0$, $0 < \alpha < \beta$.

448_o. Nech funkcia f je diferencovateľná v každom bode intervalu $(0, \infty)$ a $\inf\limits_{x \in (0, \infty)} f'(x) > 0$. Potom $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

449. 1_o. Nech funkcia $f: \langle a, +\infty) \to \mathbb{R}$ je spojitá, nech $f(a) < 0$ a $f'(x) > k > 0$ pre všetky $x > a$. Potom funkcia f je kladná na intervale $\langle a - \frac{f(a)}{k}, \infty)$ a rovnica $f(x) = 0$ má v intervale $\langle a, a - \frac{f(a)}{k})$ práve jeden koreň. Dokážte!

2_o. Ukážte, že jediný kladný koreň rovnice $x^3 + px - q = 0$ $(p > 0, q > 0)$ leží v intervale $(0, \frac{q}{p})$.

3. Nech funkcie f, g sú spojité na $\langle a, +\infty)$, nech $f(a) - g(a) = A < 0$ a nech pre všetky $x > a$ platí $f'(x) - g'(x) > p > 0$. Potom pre všetky $x \geqslant a - \frac{A}{p}$ platí $f(x) > g(x)$. Dokážte!

450. Nech funkcia f je rastúca v každom bode otvoreného intervalu I, tj. nech platí

$$\forall a \in I \quad \exists\, O(a) \quad \forall x, y \in O(a) \cap I: x < a < y \Rightarrow f(x) < f(a) < f(y) \quad .$$

Potom funkcia f je rastúca na intervale I. Dokážte!

451. Ukážte, že funkcia

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ak } x = 0 \end{cases}$$

je

1. rastúca v bode $x = 0$;

ale

2. nie je rastúca na žiadnom okolí tohto bodu.

452. Nech je daný ohraničený interval I a jeho podmnožina M, pričom žiadny vnútorný bod intervalu I nie je hromadným bodom množiny M. Ak funkcia f je spojitá na intervale I a má zápornú deriváciu v každom bode $x \in I \setminus M$, tak f je klesajúca na I. Dokážte!

453. Dokážte Jensenovu nerovnosť: Ak funkcia f je konvexná na intervale I; $x_1, \ldots, x_n \in I$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sú kladné čísla a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, tak

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) .$$

454. Dokážte nerovnosti:

1. $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^2}$, kde $x_1, \ldots, x_n$ sú kladné čísla ;

2. $\sqrt[n]{x_1 . x_2 . \ldots . x_n} \leqslant \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, kde $x_1, \ldots, x_n > 0$;

3. $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^r \leqslant n^{r-1} (\alpha_1^r + \ldots + \alpha_n^r)$ pre $r > 1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$.

455_o. Každý polynóm stupňa $2k + 1$ $(k \in \mathbb{N})$ má aspoň jeden inflexný bod. Dokážte!

456. Párny polynóm (tj. polynóm, ktorý je párnou funkciou) s kladnými koeficientami nemá inflexné body. Dokážte!

457_o. Nech funkcia f je dvakrát diferencovateľná na intervale $\langle a, \infty)$, $f(a) = A > 0$, $f'(a) < 0$ a nech pre všetky $x > a$ platí $f''(x) < 0$. Potom rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň v intervale (a, ∞), Dokážte!

458. Ak funkcia f je konvexná na intervale $\langle a, b \rangle$, tak f je spojitá na (a, b) a má vlastné jednostranné derivácie v každom bode $c \in (a, b)$. Dokážte!

459. Dokážte, že v inflexnom bode nemôže mať funkcia lokálny extrém!

460_o. Rozhodnite, či existuje funkcia f, ktorej druhá derivácia je spojitá na $\mathbb{R}$ a ktorá na ľubovoľnom intervale $I \subset \mathbb{R}$ nie je konvexná a nie je konkávna.

461. Nech funkcia $f: I \to \mathbb{R}$ je prostá a spojitá na intervale I. Ak f je konvexná na I alebo konkávna na I, tak f^{-1} je konvexná na f(I) alebo konkávna na f(I). Dokážte!

462_o. Nech funkcia f je konvexná a nie je rýdzo konvexná na intervale I. Potom existuje interval $I_1 \subset I$, na ktorom je funkcia f lineárna (tj. existujú konštanty $a, b \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = ax + b$ pre všetky $x \in I_1$). Dokážte!

463. Nájdite všetky lokálne extrémy funkcií:

1. $y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$; 2. $y = (x + 1)^n e^{-x}$, $n \in \mathbb{N}$;

3. $y = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})\, e^{-x}$; 4. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|}(\sqrt{2} + \sin\frac{1}{x}) & , \text{ak } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ak } x = 0 \end{cases}$

464. Dokážte nerovnosti:

1. $x^m (a - x)^n \leqslant \dfrac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$ pre $m > 0,\ n > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant a$;

2. $\dfrac{x + a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leqslant \sqrt[n]{x^n + a^n} \leqslant x + a$ pre $x > 0,\ a > 0,\ n > 1$.

465. Sud tvaru valca stojaci na vodorovnej rovine je do výšky H naplnený vodou. V akej hĺbke x pod hladinou treba do steny suda urobiť otvor, ak má voda dostreknúť najďalej? (Rýchlosť vytekajúcej vody sa podľa Torricelliho zákona rovná $\sqrt{2gh}$, kde h je hĺbka otvoru pod hladinou.)

466. K rieke šírky a (m) sa pod pravým uhlom pripája kanál šírky b (m). Aká je najväčšia dĺ... plavidiel, ktoré môžu z rieky vplávať do kanála (šírku plavidiel zanedbávame) ?

467. Nájdite nasledujúce limity použitím l'Hospitalovho pravidla:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \arcsin x^2}{x\cos x - \sin x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^3 (1 + x)}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x \,.\, \ln(1 + x)}{\sqrt{x}}$; 4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{x^n - e^x}$, $n \in \mathbb{N}$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$;

7. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x - 1}$; 8. $\lim\limits_{x\to 0} (x^{x^x} - 1)$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty} (x^{\frac{7}{8}} - x^{\frac{6}{7}} \ln^2 x)$; 10. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1} \,.\, \dfrac{\ln(e^x + x)}{x})$;

11. $\lim\limits_{x\to\infty} ((x + a)^{1 + \frac{1}{x}} - x^{1 + \frac{1}{x+a}})$.

468. Nech $f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$, $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$. Potom $0 = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$; napriek tomu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ neexistuje. Dokážte! Prečo použitie l'Hospitalovho pravidla vedie k nesprávnemu výsledku?

469. Nájdite Taylorov polynóm stupňa n funkcie f v bode a, ak

1. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^3)^2}$, $a = 0$; 2. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{2 + x}{2 - x}}$, $a = 0$, $n = 2m + 1$;

3. $f(x) = (x + 3)\, e^{3x^2 + 18x}$, $a = -3$; 4. $f(x) = \log_2 (3x^2 - 24x + 50)$, $a = 4$;

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt[3]{x\,(2 - x)}}$, $a = 1$;

6. $f(x) = x \,.\, \sin (x^2 + 2x + 2) \,.\, \cos (x^2 + 2x)$, $a = -1$.

470. Nájdite Maclaurinov polynóm stupňa n funkcie f, ak:

1. $f(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$; 2. $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

3. $f(x) = \arccos x$.

(Návod: Najprv zostrojte Maclaurinov polynóm funkcie f'.)

471. Dokážte, že e je iracionálne číslo.

472. Nech funkcia f je n-krát diferencovateľná v okolí $O(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}$, nech funkcia f má v bode a nenulovú (n+1)-vú deriváciu. Každému bodu $x \in O(a)$ priraďme číslo $\vartheta(x) \in (0, 1)$ tak, aby platilo

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a + \vartheta(x)(x-a))}{n!} (x - a)^n .$$

Potom $\lim\limits_{x \to a} \vartheta(x) = \dfrac{1}{n + 1}$. Dokážte!

473. Pomocou Taylorových polynómov nájdite limity:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin (\sin x) - x \sqrt[3]{1 - x^2}}{x^5}$; 2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(x - \ln (1+x) + \cos x e^{-x} \right)^{\frac{1}{x^3}}$; 4. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right)$;

5. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5} \right)$; 6. $\lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{3}{2}} \left(\sqrt{x + 1} + \sqrt{x - 1} - 2\sqrt{x} \right)$.

474. Nech funkcia f je dvakrát spojite diferencovateľná na intervale $\langle 0, 1 \rangle$ (to znamená, že funkcie f', f'' sú spojité na intervale $\langle 0, 1 \rangle$), nech $f(0) = f(1) = 0$ a nech existuje $M > 0$ také, že pre všetky $x \in (0, 1)$ platí $|f''(x)| \leq M$. Potom pre každé $x \in (0, 1)$ platí $|f'(x)| \leq M/2$. Dokážte!

475. Nech funkcia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovateľná v každom bode $x \in \mathbb{R}$, nech funkcie f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ sú ohraničené na množine $\mathbb{R}$. Označme $M_k := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$, $k = 0, 1, 2$. Potom:

1. $M_1^2 \leq 4\, M_0 M_2$; 2. $M_1^2 \leq 2\, M_0 M_2$.

Dokážte!

476. Zostrojte grafy nasledujúcich kriviek:

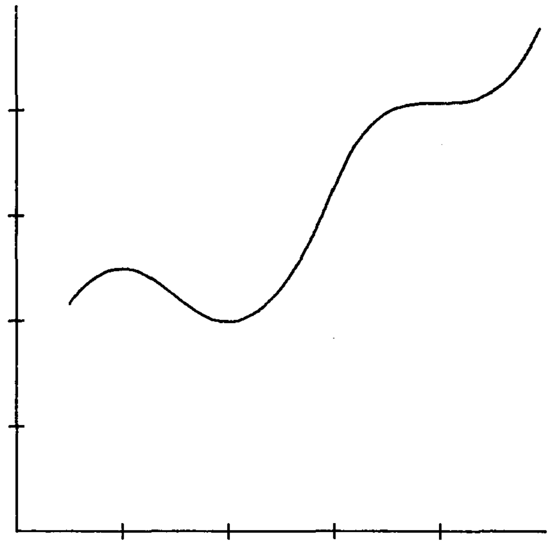
1. $y = e^{-2x} \sin^2 x$; 2. $y^3 = 6x^2 - x^3$;

3. $y^2 = x^4(x + 1)$; 4. $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3 + x}}$;

5. $y^2 = \dfrac{x^2(1 - x)}{(1 + x)^2}$, $x > -5$.

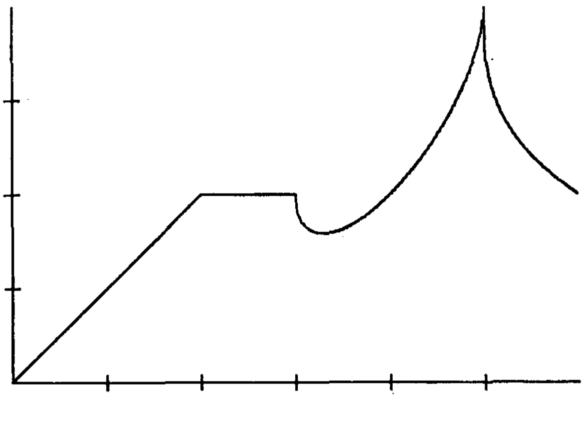
477. Načrtnite graf funkcie f', ak je daný graf funkcie f:

1.



Obr. 3

2.



Obr. 4

478$_o$. Načrtnite graf funkcie f v okolí bodu a, ak

1. $a = 3$, $f(3) = 1$, $f'(3) = f''(3) = f'''(3) = 0$, $f^{(4)}(3) < 0$;

2. $a = -1$, $f(-1) = -2$, $f'(-1) = 1$, $f''(-1) = 0$, $f'''(-1) > 0$.