2019年 後期中間試験の範囲
3年　数学特論 (久保)

行列の性質と行列の利用 (教科書 pp.76–79,pp.86–99)

- 逆行列
- 逆行列の性質
- 連立方程式と行列
- 行列の階数
- 行列の基本変形と逆行列
- 行列式（サラスの方法）

次の問も確認しておくこと。

教科書の節末問題
p.85 **4**, p.96 **1, 3, 4**

実教出版「新版 線形代数　演習」
67, 68, 69, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 95, 97, 100, 101, 106(1)

2019年　後期中間試験対策（数学特論：久保）

$\boxed{1}$　次の行列に逆行列が存在すれば，それを求めよ。逆行列が存在しないときには，× 印をつけよ。(授業中の課題「逆行列（2 次）」)

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{2}$　次の等式をみたす行列 X を求めよ。(授業中の課題「逆行列の利用（2 次）」)

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$　(4) $X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$　$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ をみたす列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めよ。

(授業中の課題「逆行列の利用（2 次）」)

$\boxed{4}$　次の行列の階数を答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　(6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$　行基本変形を用いて，次の行列 A の逆行列を求めたい。空白部分を埋めよ。

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき，行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & \\ 2 & -2 & 3 & \boxed{} \\ -1 & 1 & -1 & \end{array}\right)$ を

変形して，

$\left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{} & 1 & 2 & 3 \\ & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ となれば，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ である。

$\boxed{6}$　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ とする。

(1)　$AP = B$ となる行列 P を求めよ。

(2)　$QA = AB$ となる行列 Q を求めよ。

$\boxed{7}$　次の連立方程式の係数行列 A および拡大係数行列 B を答えよ。

(1) $\begin{cases} 3x+y-7z = 0 \\ 4x-y\ \ -z = 5 \\ \ \ x-y+2z = 2 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x \qquad +3z = 1 \\ 2x+3y+4z = 3 \\ x+3y\ \ +z = 2 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 7y = 6 \end{cases}$

$\boxed{8}$　次の連立方程式をガウスの消去法で解け。

(1) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x + 7y = 6 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ x + \ y = 2 \end{cases}$

$\boxed{9}$　次の行列式の値をサラスの方法で求めよ。

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$　(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$\boxed{10}$　次の行列が正則とならないような実数 k の値を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1-k & 2 \\ 1 & -k \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} k & -3 \\ 2 & k-5 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} k & 4 \\ 9 & k \end{pmatrix}$

2019年　後期中間試験対策（数学特論：久保）

解答例

$\boxed{1}$ (解答)

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$ (3) $\times$ (4) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(5) $\times$

$\boxed{2}$ (解答)

(1), (2) 共通に，$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ を利用し，

(3), (4) 共通に，$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ を利用する。

(1) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ (解答)

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\boxed{4}$ (解答)

(1) 2　(2) 1　(3) 2　(4) 1　(5) 3　(6) 2

$\boxed{5}$ (解答)

$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}$　※ 2 箇所とも

$\boxed{6}$ (解答)

(1) $P = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　(2) $Q = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{7}$ (解答)

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$

$\boxed{8}$ (解答)

(1) $x = 2, y = 1$　(2) $x = 10, y = -2$　(3) $x = 1, y = -1$

$\boxed{9}$ (解答)

(1) -5　(2) 0　(3) 3　(4) -29　(5) 0　(6) 34

$\boxed{10}$ (解答)

(1) $k = -1, 2$　(2) $k = 2, 3$　(3) $k = \pm 6$