基本変形を用いて行列式を求める。

行列式の性質（ここで使うもの。※ページは，実教出版「新版 線形代数」）

p.103 例題 3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

p.104
正方行列 A について，$|A| = |{}^t A|$

p.106 **行列式の性質 [1]**
(I) 2 つの行 (列) を交換すると，行列式の符号が変化する。
(II) 2 つの行 (列) が等しい行列式の値は 0 になる。

例題 3 の発展 $(*)$：p.103 例題 3 と行 (列) の交換を組合わせる。
行列 A の (i,j) 成分 a_{ij} について，
i 行目の a_{ij} 以外の成分がすべて 0，または，j 列目の a_{ij} 以外の成分がすべて 0 であれば，
$|A| = (-1)^{i+j} \times a_{ij} \times D_{ij}$
※　D_{ij} は，A の (i,j) 小行列式 (p.113)

p.106 **行列式の性質 [2]**
(III) 2 つの行 (列) の成分に共通な因数は，行列式の因数としてくくりだせる。

p.109 **行列式の性質 [3]**
(IV) 1 つの行 (列) の各成分が 2 数の和として表されるとき，行列式は 2 つの行列式の和となる。
(V) 1 つの行 (列) を何倍かして，他の行に加えても行列式の値は変化しない。

計算例：p.109 練習 9(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{②+①\times(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{p.103 例題 3}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -17$

計算例：p.109 練習 9(2)

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} \underset{\boxed{3}+\boxed{1}\times 2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \underset{\text{p.103 例題 3}}{=} 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2 \times (-25) = -50$

計算例：p.110 練習 10(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 7 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+①\times(-2) \\ ③+①\times(-3)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{p.103 例題 3}}{=} 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= -1$

計算例：p.110 練習 10(2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} \underset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1) \\ ④+①\times(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{\text{p.103 例題 3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-1)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{p.103 例題 3}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3$$

計算例：p.110 練習 10(3)

$$
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}
\underset{\substack{①+②\times 2 \\ ④+②\times 3}}{=}
\begin{vmatrix} 0 & 5 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -8 & -9 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{①,② \\ \text{の交換}}}{=} -\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -8 & -9 \end{vmatrix}
\underset{\text{p.103 例題 3}}{=} -(-1)\times\begin{vmatrix} 5 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & -8 & -9 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\boxed{1}+\boxed{3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \\ -5 & -8 & -9 \end{vmatrix}
\underset{\substack{\text{例題 3} \\ \text{の拡張 }(*)}}{=} (-1)^2\times(-5)\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -5\times(4+25) = -145
$$

$(*)$ について

3 行目を順送りに上の行と交換して 1 行目まで移動してから，例題 3 を適用する。

計算例：p.110 練習 10(4)

$$
\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\underset{\substack{①+②\times 6 \\ ④+②\times 1}}{=}
\begin{vmatrix} 9 & 12 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{\text{行・列の} \\ \text{交換と例題 3}}}{=} (-1)^{2+4}\times(-1)\begin{vmatrix} 9 & 12 & 13 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}
\underset{①+③\times(-2)}{=} (-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{③+②\times 6}{=} (-1)\begin{vmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ 14 & 0 & 33 \end{vmatrix}
$$

$$
\underset{\substack{(2,2)\text{ 成分} \\ \text{を外へ}}}{=} (-1)\times(-1)^{2+2}\times(-1)\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 14 & 33 \end{vmatrix} = 5\times 33 - 7\times 14 = 67
$$

2 行目の成分が大きい値なのを避けるなら，

$$
\underset{③+①\times(-3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 12 \end{vmatrix} = 5\times 12 - (-1)\times 7 = 67
$$