１次変換による行列の導入

科目名：数学特論

担当：久保

実教出版「新版 線形代数」

実施日

M3：6/20(木) 3 コマ目
I3：6/25(火) 1 コマ目
S3：6/25(火) 3 コマ目

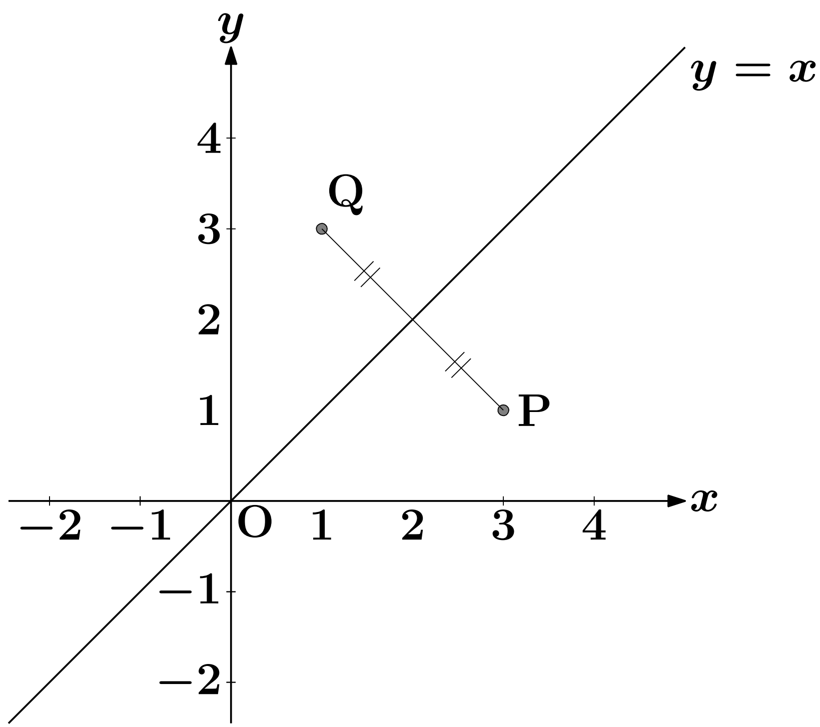
学習目標

- 1 次変換を行列で表現できる。
- 1 次変換により行列の積を考えることができる。

問題 1．

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)



問題 1．

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

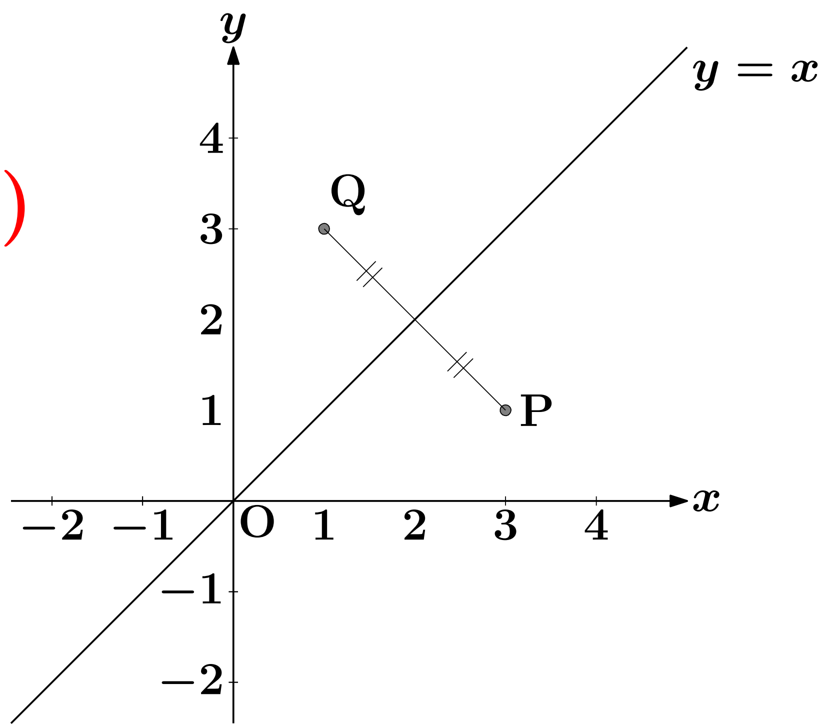
(答)

リンク

(https://kubo-yuge.github.io/)

の画像をクリックし，

点 P を動かしてみましょう。

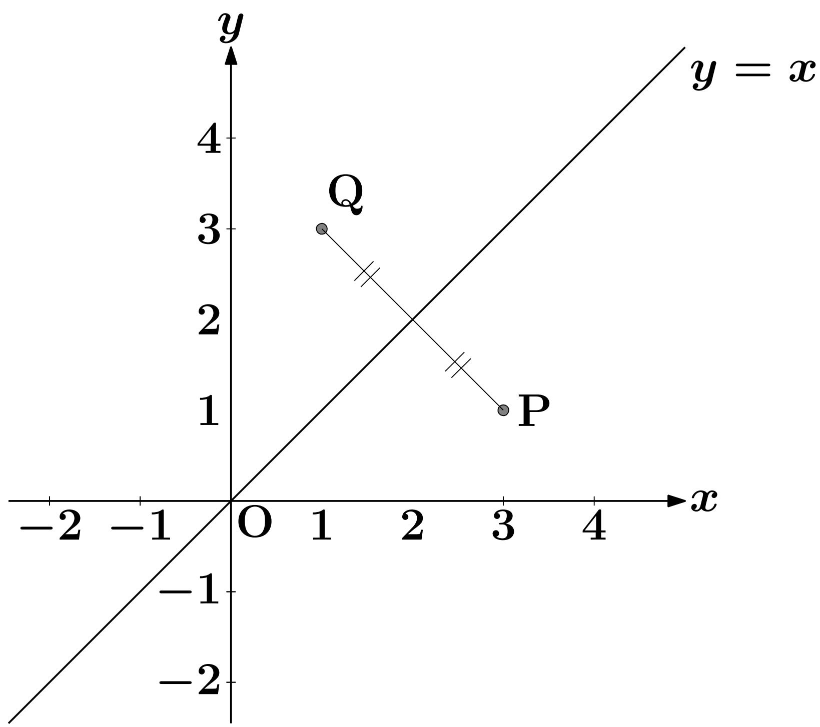


問題 1 .

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$



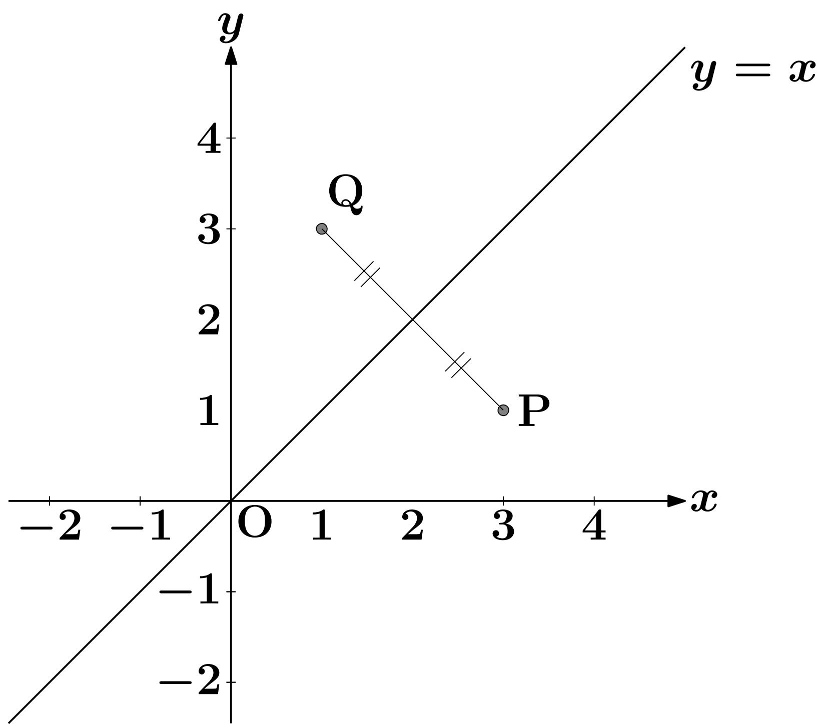
問題１.

　平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

※　この移動は１次変換です。これを f とし，f について考えることにする。



1次変換とは

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移す変換
$f : (x, y) \mapsto (x', y')$ において，
x', y' が定数項のない x, y の１次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

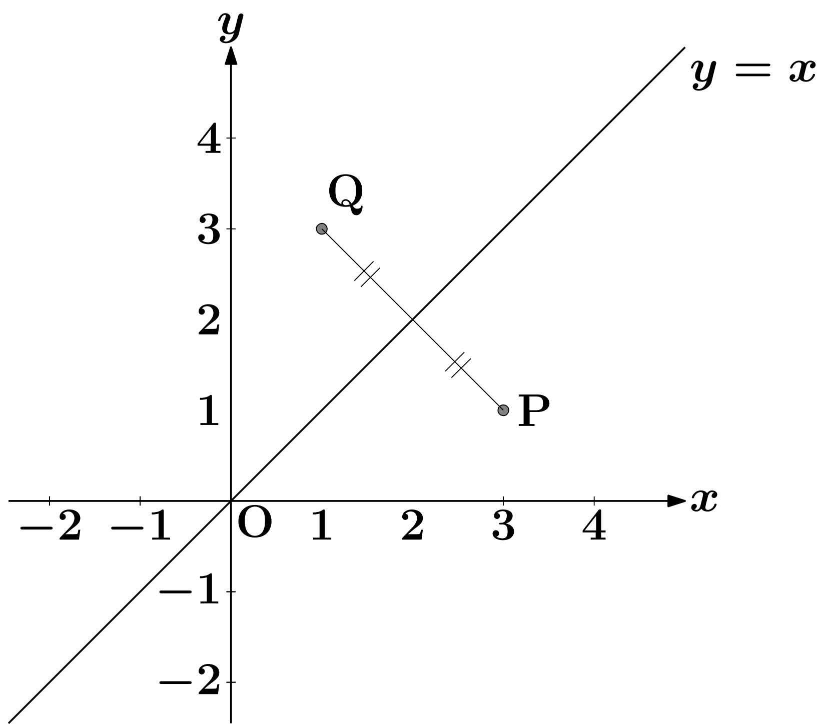
で表されるとき，この変換 f を**１次変換**または**線形変換**という。

問題 1 の f は 1 次変換である

問題 1 の f は，

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

だったが，

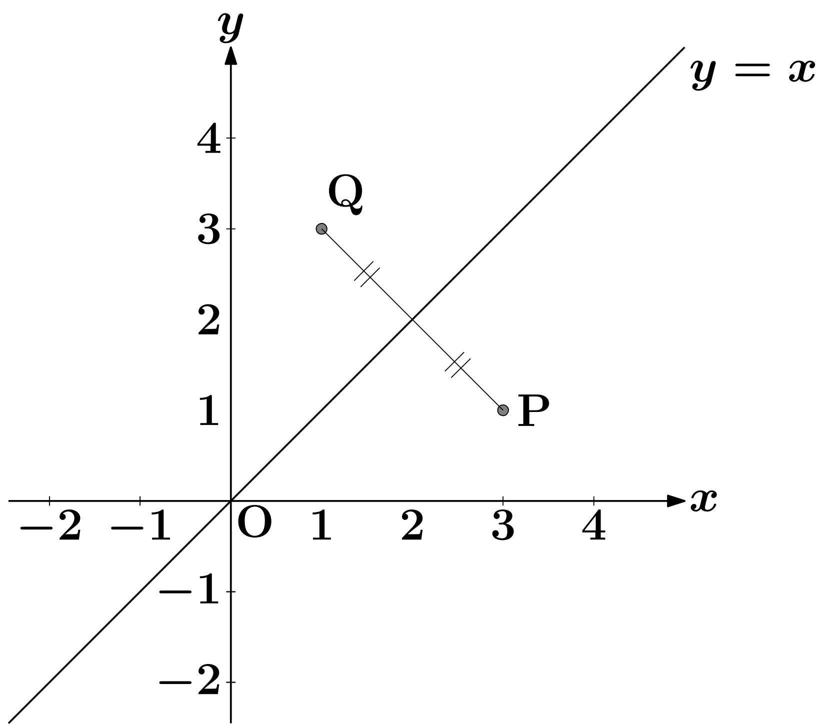


問題１の f は１次変換である

問題１の f は，

$$\begin{cases} x' = \quad y \\ y' = x \end{cases}$$

だったが，

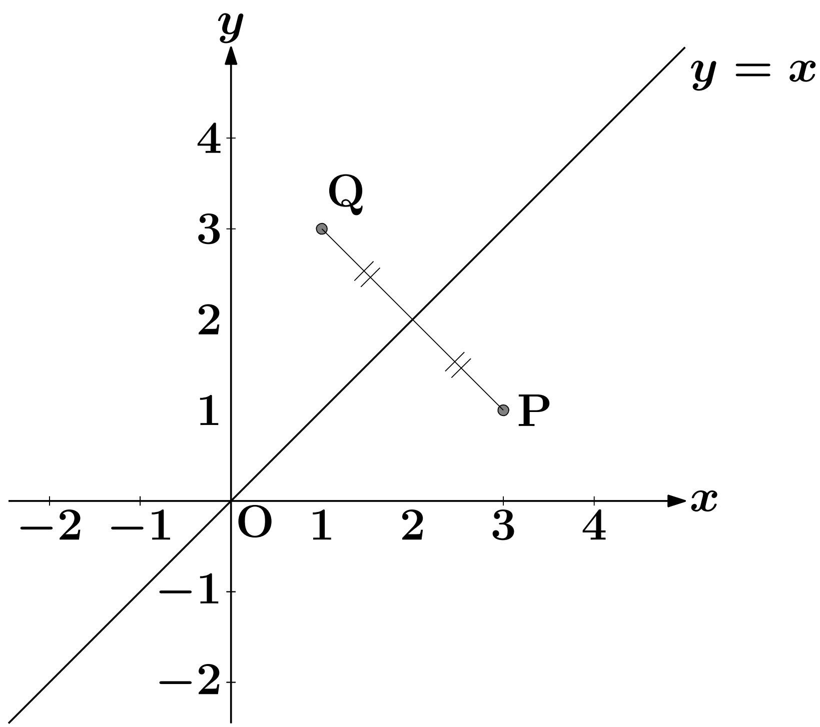


問題１の f は１次変換である

問題１の f は，

$$\begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases}$$

だったが，

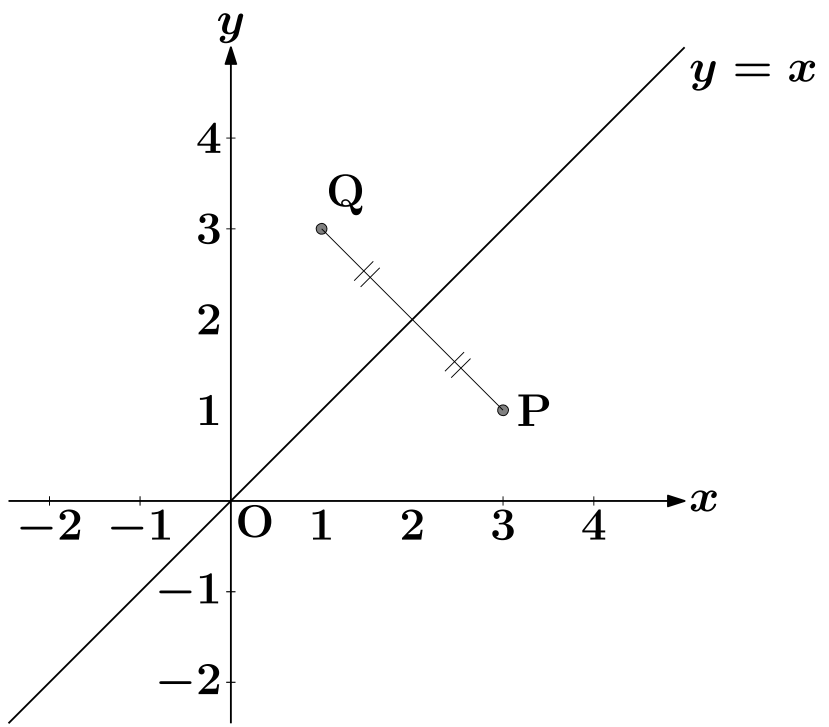


問題１の f は１次変換である

問題１の f は，

$$\begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases}$$

と書けるので，１次変換である。



１次変換 f を行列で表す（１）

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移す１次変換
$f : (x, y) \mapsto (x', y')$ が，

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

で表されるとき，

１次変換 f を行列で表す（１）

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移す１次変換

$f : (x, y) \mapsto (x', y')$ が，

$$\begin{cases} \boxed{x'} = \boxed{ax + by} \\ \boxed{y'} = \boxed{cx + dy} \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

$\downarrow$

１次変換 f を行列で表す（１）

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移す１次変換

$f : (x, y) \mapsto (x', y')$ が，

$$\begin{cases} \boxed{x'} = \boxed{ax + by} \\ \boxed{y'} = \boxed{cx + dy} \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

１次変換 f を行列で表す（１）

平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す１次変換

$f:(x,y)\mapsto(x',y')$ が，

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \quad (a,b,c,d\text{ は定数})$$

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

１次変換 f を行列で表す（1）

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ を点 $\mathrm{Q}(x', y')$ に移す１次変換

$f : (x, y) \mapsto (x', y')$ が，

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

というように列ベクトルで表す。

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて**係数行列**という。

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて係数行列という。

この式で表される１次変換 f に対し，

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて**係数行列**という。

この式で表される１次変換 f に対し，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて**係数行列**という。

この式で表される１次変換 f に対し，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \text{ を行列 } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

１次変換 f を行列で表す（２）

連立１次式

$$\begin{cases} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて**係数行列**という。

この式で表される１次変換 f に対し，

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を使って，

1次変換 f を行列で表す（2）

連立1次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

に対し，その係数を並べて**係数行列**という。

この式で表される1次変換 f に対し，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$ を行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を使って，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$ と表すこととする。

１次変換 f を行列で表す（３）

問題１の１次変換 f は，

$$\begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases}$$

と書けたから，f を表す行列 A は，

１次変換 f を行列で表す（３）

問題１の１次変換 f は，

$$\begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases}$$

と書けたから，f を表す行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

１次変換 f を行列で表す（３）

問題１の１次変換 f は，

$$\begin{cases} x' = 0x + 1y \\ y' = 1x + 0y \end{cases}$$

と書けたから，f を表す行列 A は，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

A を使って，点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ の f による移動先を求めてみよう。

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ のとき，

行列 A と列ベクトルの積

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

行列 A と列ベクトルの積

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

２つの列ベクトルを並べると，

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

２つの列ベクトルを並べると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ c & d \end{array}\right)$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

２つの列ベクトルを並べると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

行列 A と列ベクトルの積

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$ であったから，

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，点 $(1,0)$, $(0,1)$ の移動先は，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

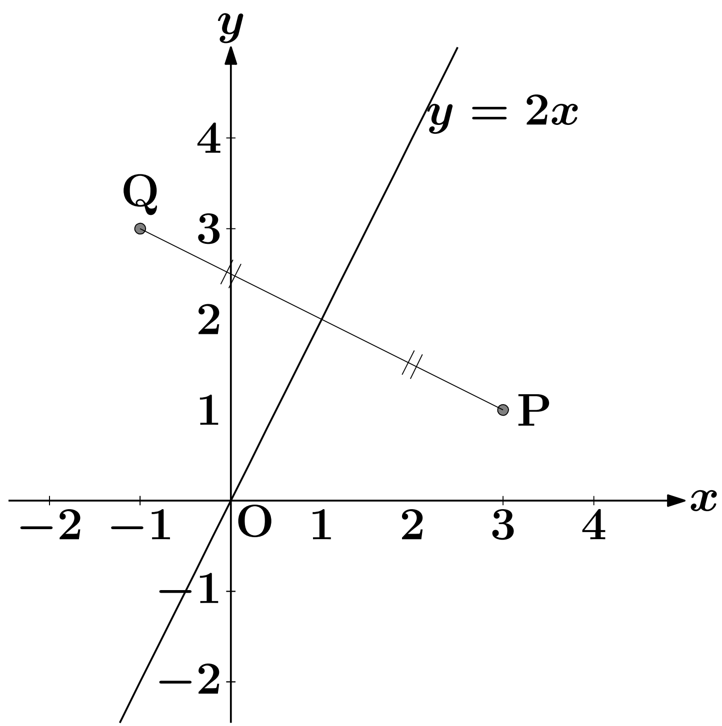
２つの列ベクトルを並べると，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdots (*)$$

問題 2.

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)



問題 2.

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

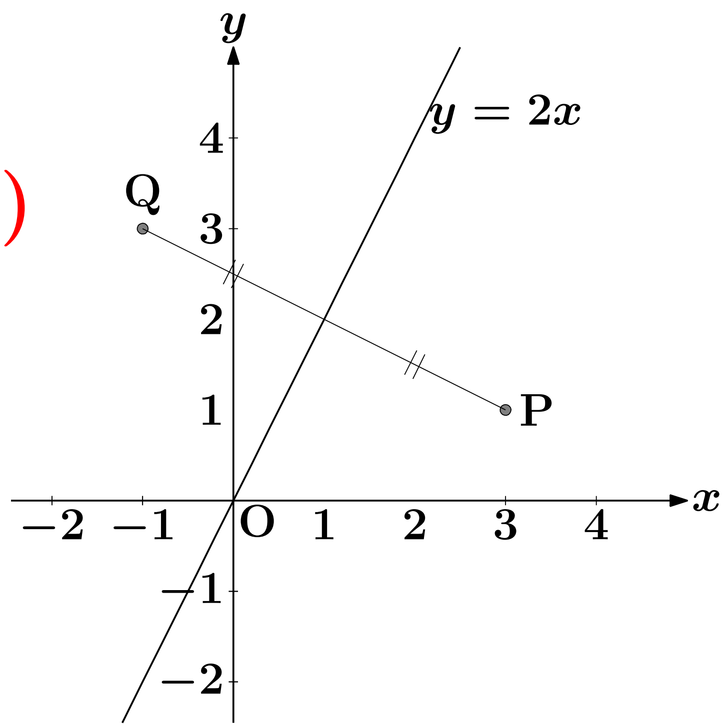
(答)

リンク

(https://kubo-yuge.github.io/)

の画像をクリックし，

点 P を動かしてみましょう。



問題 2.

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

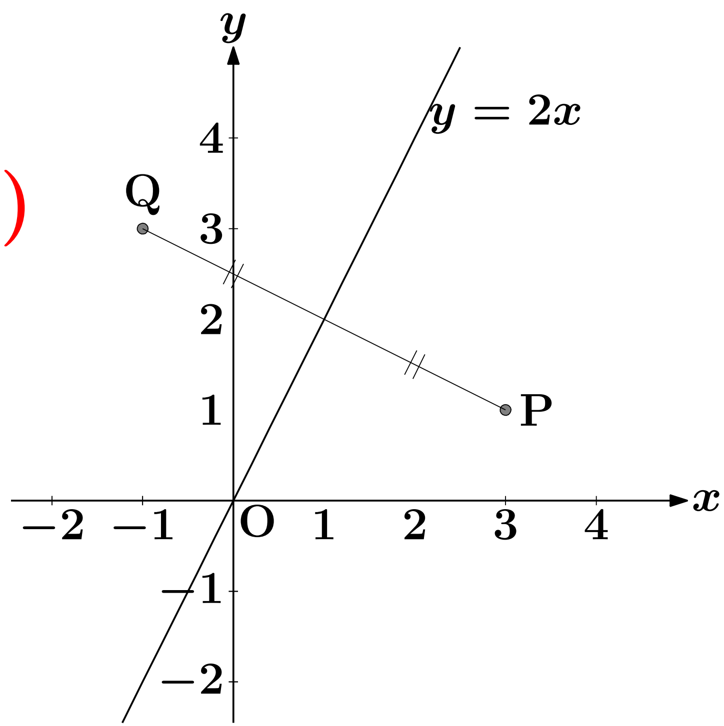
リンク

(https://kubo-yuge.github.io/)

の画像をクリックし，

点 P を動かしてみましょう。

どんな点 P 考えるといいかな。



問題 2.

平面上の点 P(x, y) が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を Q(x', y') とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

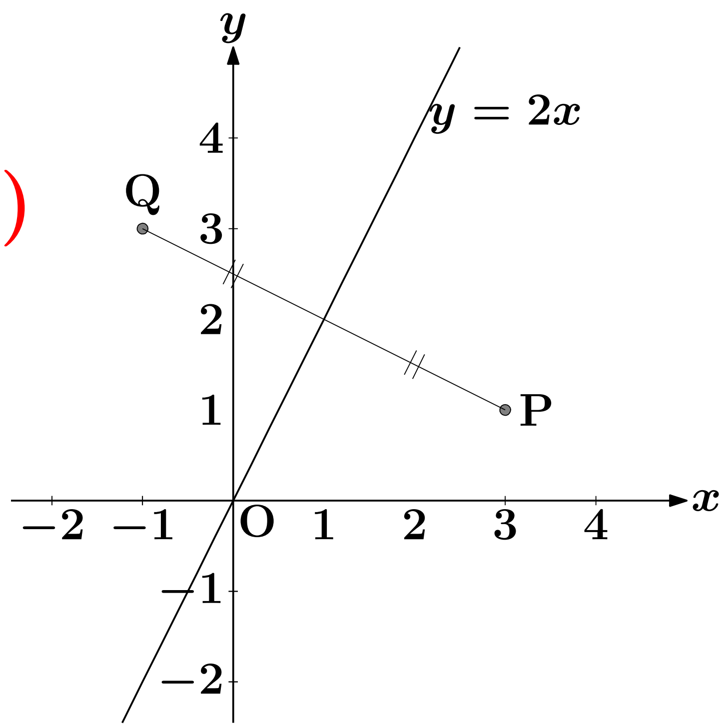
リンク

(https://kubo-yuge.github.io/)

の画像をクリックし，

点 P を動かしてみましょう。

点 P として，点 $(1, 0)$ と点 $(0, 1)$ を選んで，点 Q を見てみよう。

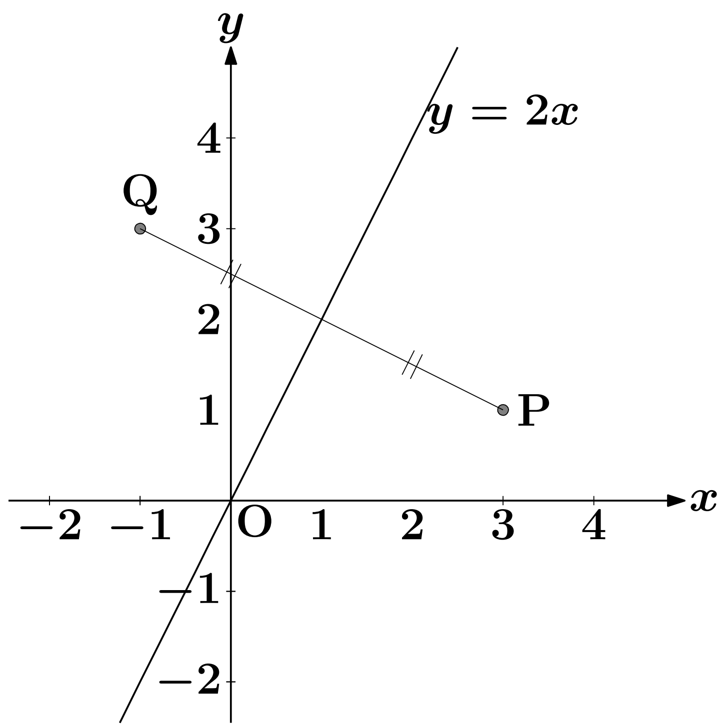


問題 2.

平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ が直線 $y = 2x$ に関する対称移動した点を $\mathrm{Q}(x', y')$ とするとき，x', y' を x, y の式で表せ。

(答)

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y \\ y' = \quad\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases}$$



まとめ

- 1 次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

まとめ

- 1 次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

まとめ

- 1 次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

まとめ

- 1 次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積