1次変換による行列の導入

科目名:数学特論

担当:久保

実教出版「新版 線形代数」

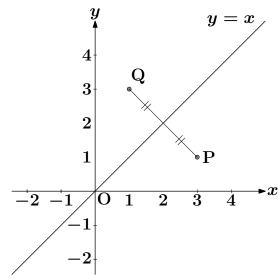
実施日

M3:6/20(木) 3 コマ目 I3:6/25(火) 1 コマ目 S3:6/25(火) 3 コマ目

学習目標

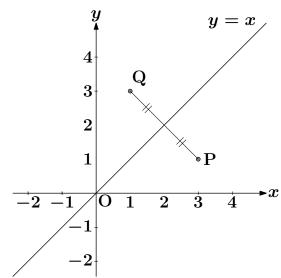
- 1次変換を行列で表現できる。
- 1次変換により行列の積を考えることができる。

平面上の点 P(x,y) が直線 y=x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)



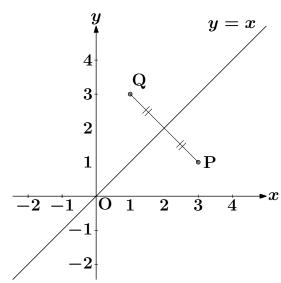
平面上の点 P(x,y) が直線 y=x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

リンク先の画像をクリックし, 点 P を動かしてみましょう。



平面上の点 P(x,y) が直線 y=x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

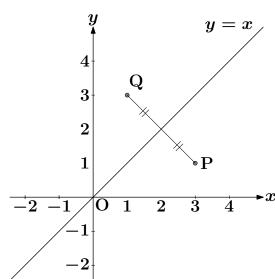
$$\left\{egin{array}{l} x'=y \ y'=x \end{array}
ight.$$



平面上の点 P(x,y) が直線 y=x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

$$\left\{egin{array}{l} x'=y\ y'=x \end{array}
ight.$$

% この移動は1次変換です。 これをfとし,fについて 考えることにする。



1次変換とは

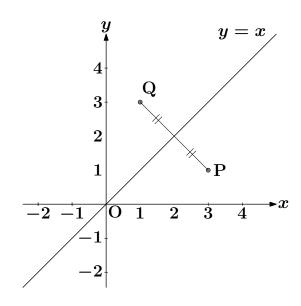
平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す変換 $f:(x,y)\mapsto (x',y')$ において,x',y' が定数項のないx,yの1次式 $\left\{egin{array}{l} x'&=ax+by\ y'&=cx+dy \end{array}\right.$ (a,b,c,dは定数)

で表されるとき,この変換 f を 1 次変換または線形変換という。

問題**1**の *f* は**1**次変換である

問題1のfは,

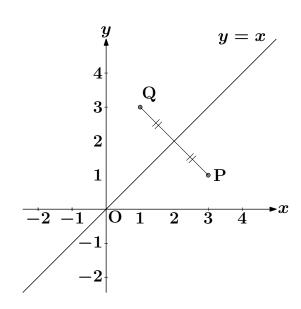
$$\left\{egin{array}{ll} x'=&y\ y'=&x \end{array}
ight.$$



問題**1**の *f* は**1**次変換である

問題1のfは,

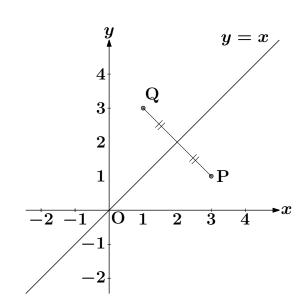
$$\left\{egin{array}{l} x'=0x+1y \ y'=1x+0y \end{array}
ight.$$



問題1の*f* は1次変換である

問題1の f は,

$$egin{cases} x' = 0x + 1y \ y' = 1x + 0y \ \end{pmatrix}$$
と書けるので,

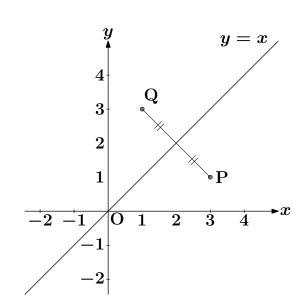


問題1の*f* は1次変換である

問題1の f は,

$$\left\{egin{array}{l} x'=0x+1y\ y'=1x+0y \end{array}
ight.$$

と書けるので,1次変換である。



平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す1次変換 $f:(x,y)\mapsto (x',y')$ が, $\begin{cases} x'&=ax+by\ y'&=cx+dy \end{cases}$ (a,b,c,d は定数)

1次変換 f を行列で表す(1)

平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す1次変換 $f:(x,y)\mapsto (x',y')$ が、 $\left\{egin{array}{c}x'=ax+by\\y'=cx+dy\end{array}\right.$ (a,b,c,dは定数)

 $\begin{bmatrix} g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ca & +ag \\ & & \end{bmatrix}$

で表されるとき,

1次変換 f を行列で表す(1)

平面上の点P(x,y)を点Q(x',y')に移す1次変換

$$f:(x,y)\mapsto (x',y')\, alla^{arkappa}$$
 ,

$$\left\{egin{array}{l} x' \ y' \ = \ cx+dy \end{array}
ight. \left(a,b,c,d$$
は定数)

で表されるとき、

$$egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$

平面上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を点 $\mathrm{Q}(x',y')$ に移す1次変換

$$f:(x,y)\mapsto (x',y')\, \mathcal{N}$$
 ,

$$\left\{egin{array}{ll} x' &= ax+by \ y' &= cx+dy \end{array}
ight. (a,b,c,d$$
は定数)

で表されるとき,

$$egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$

というように列ベクトルで表す。

1次変換fを行列で表す(2)

連立1次式

$$\left\{egin{array}{ll} x' &=& ax+by\ y' &=& cx+dy \end{array}
ight. \ (a,b,c,d$$
は定数)に対し,

1次変換fを行列で表す(2)

連立1次式

$$\left\{egin{array}{ll} x' &=& oldsymbol{a}x+oldsymbol{b}y\ y' &=& oldsymbol{c}x+oldsymbol{d}y \end{array}
ight. \left. egin{array}{ll} (a,b,c,d$$
は定数) $\left(a,b,c,d \right) \left(a,b,c,d \right) \left$

に対し、その係数を並べて係数行列という。

連立1次式

```
\left\{egin{array}{ll} x' &=& oldsymbol{a}x+oldsymbol{b}y\ y' &=& oldsymbol{c}x+oldsymbol{d}y \end{array}
ight. \left. egin{array}{ll} (a,b,c,dは定数)
```

に対し,その係数を並べて<mark>係数行列</mark>という。 この式で表される1次変換fに対し,

連立1次式

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} (a, b, c, d は定数)$$

に対し,その係数を並べて<mark>係数行列</mark>という。 この式で表される1次変換fに対し,

$$egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$

連立1次式

$$\left\{egin{array}{ll} x' &=& oldsymbol{a}x+oldsymbol{b}y\ y' &=& oldsymbol{c}x+oldsymbol{d}y \end{array}
ight. \left. egin{array}{ll} (a,b,c,d$$
は定数) $\left(a,b,c,d \right) \left(a,b,c,d \right) \left$

に対し,その係数を並べて<mark>係数行列</mark>という。 この式で表される1次変換fに対し,

$$egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$
 を係数行列 $egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix}$

連立1次式

$$\left\{egin{array}{ll} x' &=& oldsymbol{a}x+oldsymbol{b}y\ y' &=& oldsymbol{c}x+oldsymbol{d}y \end{array}
ight. \left. egin{array}{ll} (a,b,c,d$$
は定数) $\left(a,b,c,d \right) \left(a,b,c,d \right) \left$

に対し、その係数を並べて係数行列という。

この式で表される1次変換fに対し、

$$egin{pmatrix} egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$
 を係数行列 $egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix}$ を使って,

連立1次式

$$\left\{ egin{array}{ll} x' &=& oldsymbol{a}x+oldsymbol{b}y\ y' &=& oldsymbol{c}x+oldsymbol{d}y \end{array}
ight. \left. (a,b,c,d$$
は定数)

に対し、その係数を並べて係数行列という。

この式で表される1次変換fに対し、

$$egin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$$
 を係数行列 $\begin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix}$ を使って, $\begin{pmatrix} x' \ y' \end{pmatrix} = egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} \cdots$ $(*)$ と表すことする。

1次変換fを行列で表す(3)

問題1の1次変換fは,

$$\left\{egin{array}{ll} x'=0x+1y \ y'=1x+0y \end{array}
ight.$$
と書けたから, f を表す行列 A は,

1次変換fを行列で表す(3)

問題1の1次変換fは,

$$\left\{egin{array}{ll} x'=0x+1y \ y'=1x+0y \end{array}
ight.$$
と書けたから, f を表す行列 A は,

$$A=\left(egin{array}{cc} 0 & 1 \ 1 & 0 \end{array}
ight)$$
となる。

1次変換 f を行列で表す(3)

問題1の1次変換 ƒは,

$$\left\{egin{array}{ll} x'=0x+1y \ y'=1x+0y \end{array}
ight.$$
と書けたから, f を表す行列 A は,

$$A=\left(egin{array}{cc} 0 & 1 \ 1 & 0 \end{array}
ight)$$
となる。

行列 A を使って,点 (1,0),(0,1) の f による移動先を求めてみよう。

$$A=\left(egin{array}{c}a&b\c&d\end{array}
ight)$$
のとき,

$$A = \left(egin{array}{cc} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$
のとき,点 $\left(1,0
ight)$, $\left(0,1
ight)$ の移動先は,

$$A=\left(egin{array}{c}a&b\c&d\end{array}
ight)$$
のとき,点 $(1,0),\,(0,1)$ の移動先は,

$$\divideontimes$$
 式 $(*)$ より $\begin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \ cx+dy \end{pmatrix}$ を使う。

$$A=egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}$$
のとき,点 $(1,0),\,(0,1)$ の移動先は, $egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix} =$

$$st$$
 式 $(*)$ より $egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix} egin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$ を使う。

$$A=egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}$$
のとき,点 $(1,0),\,(0,1)$ の移動先は, $egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix} = egin{pmatrix} a\c&d\end{pmatrix}$

$$st$$
 式 $(*)$ より $egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix} egin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$ を使う。

$$A=\left(egin{array}{cc} a&b\ c&d \end{array}
ight)$$
のとき,点 $(1,0),\,(0,1)$ の移動先は, $\left(egin{array}{cc} a&b\ c&d \end{array}
ight)\left(egin{array}{cc} 1\ c \end{array}
ight)=\left(egin{array}{cc} a\ c \end{array}
ight),\,\left(egin{array}{cc} a&b\ c&d \end{array}
ight)\left(egin{array}{cc} 0\ 1 \end{array}
ight)=$

$$st$$
 式 $(*)$ より $egin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix} egin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = egin{pmatrix} ax + by \ cx + dy \end{pmatrix}$ を使う。

$$A=egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}$$
のとき,点 $(1,0),(0,1)$ の移動先は, $egin{pmatrix} a&b\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 0\c&d\end{pmatrix}egin{pmatrix} 1\c&d\end{pmatrix}$

$$\divideontimes$$
 式 $(*)$ より $\begin{pmatrix} a & b \ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \ cx+dy \end{pmatrix}$ を使う。

$$A = \left(egin{array}{cc} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$
のとき,点 $\left(1,0
ight)$, $\left(0,1
ight)$ の移動先は,

$$\left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 1 \ 0 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} a \ c \end{array}
ight) \,, \, \left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 0 \ 1 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} b \ d \end{array}
ight)$$

2つの列ベクトルを横に並べると,

$$A = \left(egin{array}{cc} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$
のとき,点 $\left(1,0
ight)$, $\left(0,1
ight)$ の移動先は,

$$\left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 1 \ 0 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} a \ c \end{array}
ight) \,, \, \left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 0 \ 1 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} b \ d \end{array}
ight)$$

2つの列ベクトルを横に並べると,

$$\left(egin{array}{c|c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c|c} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c|c} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$

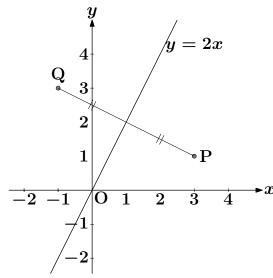
$$A = \left(egin{array}{cc} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$
のとき,点 $\left(1,0
ight)$, $\left(0,1
ight)$ の移動先は,

$$\left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 1 \ 0 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} a \ c \end{array}
ight) \,, \, \left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 0 \ 1 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} b \ d \end{array}
ight)$$

2つの列ベクトルを横に並べると,

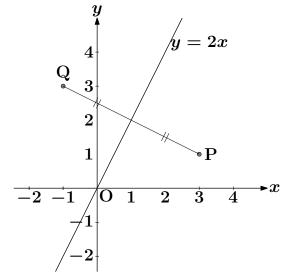
$$\left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{array}
ight) = \left(egin{array}{c} a & b \ c & d \end{array}
ight)$$

平面上の点 P(x,y) が直線 y=2x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)



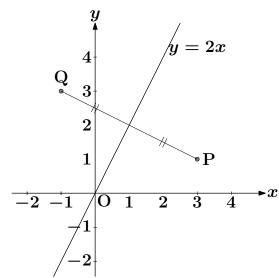
平面上の点 P(x,y) が直線 y=2x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

リンク先の画像をクリックし, 点 P を動かしてみましょう。



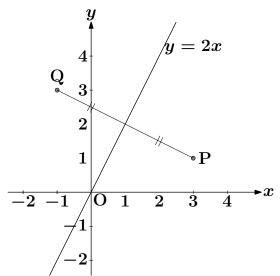
平面上の点 P(x,y) が直線 y=2x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

リンク先の画像をクリックし, 点 P を動かしてみましょう。 どんな点 P を考えるといいかな。



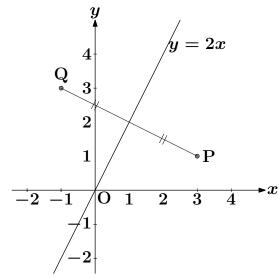
平面上の点 P(x,y) が直線 y=2x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

リンク先の画像をクリックし, 点Pを動かしてみましょう。 どんな点Pを考えるといいかな。 点Pとして,点 (1,0)と点 (0,1) を選んで,点 Qを見てみよう。



平面上の点 P(x,y) が直線 y=2x に関する対称移動した点を Q(x',y') とするとき,x',y' を x,y の式で表せ。 (答)

$$\left\{egin{array}{l} x'=-rac{3}{5}x+rac{4}{5}y\ y'=rac{4}{5}x+rac{3}{5}y \end{array}
ight.$$



- 1次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

- 1次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

- 1次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積

- 1次変換の定義
- 1 次変換を表す行列
- 行列の積