Resumen

2.6.5 TEORÍA DE CONTEO

La teoría de conteo se basa en técnicas que nos proporcionan información de todas las maneras posibles en que ocurre un determinado evento, como son las combinaciones permutaciones y el diagrama de árbol.

La teoría de conteo incluye: Permutaciones, Combinaciones y diagramas de árbol.

Diagramas de árbol: es una herramienta utilizada para determinar todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Permutaciones: variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas.

Permutaciones con repetición:

Combinaciones: unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto.

$$PR_n^{a_1 \cdot a_2, \ldots, a_{k-1}!, a_k!} = \frac{n!}{a_1 \cdot a_2, \ldots, a_{k-1}! \cdot a_k!}$$

Combinaciones sin repetición:

$$Cn,k = \frac{Vn,k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Combinaciones con repetición:

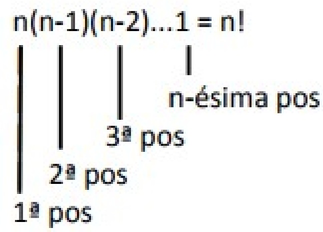
$$CR_{n,k} = CR_{n-1,k} + CR_{n,k-1} \qquad si \;\; k \neq 1, n \neq 1$$
$$CR_{1,k} = 1 \;\; y \;\; + CR_{n,1} = n$$

Ejercicios:

1.-Un grupo de 5 personas va a sentarse en fila para una foto. ¿Cuántas disposiciones lineales son posibles?

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1_a\,pos & 2_a\,pos & 3_a\,pos & 4_a\,pos & 5_a\,pos \end{array}$$

Cualquiera de las 5 personas puede ocupar la primera posición de la fila. Para la segunda posición podemos elegir entre 4 personas. Continuando de esta manera, sólo tenemos una persona para ocupar la quinta posición. Esto produce un total de 5.4.3.2.1 = 120 disposiciones posibles de las 5 personas. Se obtiene exactamente la misma respuesta si las posiciones se ocupan en otro orden (por ejemplo, 3ª posición, 1ª posición, 4ª, 5ª y 2ª).
En general, si existen n objetos distintos, el número de permutaciones para los n objetos es:



Pn = n! Se lee "permutaciones de n".

2.-En una bodega hay en un cinco tipos diferentes de botellas. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro botellas?

- •No importa el orden. Da igual que elija 2 botellas de anís y 2 de ron, que 2 de ron y 2 de anís.
- •Sí se repiten los elementos. Puede elegir más de una botella del mismo tipo.

$$CR_5^4 = \frac{(5+4-1)!}{4!(5-1)!} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$$

2.6.6 Principio de Pigeonhole

El principio del palomar(Pigeonhole, también conocido como el principio de la pichonera, principio de la cajonera de Dirichlet o el principio de la caja de zapatos) suele ser útil al responder la pregunta: ¿Hay un elemento que tiene una propiedad dada? Cuando se aplica con éxito el principio del palomar, sólo indica que existe el objeto; el principio no dice cómo encontrar el objeto ni cuántos objetos hay.

Primera forma: Si n palomas vuelan a los palomares y k < n, algunos palomares contienen al menos dos palomas.

Segunda forma: Si f es una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y y |X| > |Y|, entonces f(x1) = f(x2) para alguna x1 , x2 ∈ X, x1 diferente de x2.

Tercera forma: Sea f una función de un conjunto finito X a un conjunto finito Y. Suponga que |X| = n y |Y| = m. Sea k = [n/m]. Entonces hay al menos k valores a1 , . . . , ak ∈ X tal que

f(a1)=f(a2)=...=f(ak)

2.6.7 FUNCIONES GENERADORAS Y RELACIONES DE CONCURRENCIA.

Funciones generadoras

La resolución de problemas combinatorios no es una cuestión sencilla, pues no parecen existir métodos directos de resolución. Cada problema aparenta ser distinto a los demás, a pesar de que se resuelvan utilizando las mismas herramientas. Sea a0, a1, a2, . . . una sucesión de números reales. Llamamos función generadora de la sucesión {an}n≥0 a una función G(x) tal que:

$$G(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots .$$

Relaciones de concurrencia

Una relación de recurrencia para la sucesión a0 , a1 , . . . es una ecuación que relaciona an con ciertos predecesores a0 , a1 , . . . , an−1 . Las condiciones iniciales para una sucesión a0 , a1 , . . . son valores dados en forma explícita para un número finito de términos de la sucesión.