レポート必答問題（すべて解いて最大 60 点）

- A4 サイズ（この紙と同じサイズ）の用紙にまとめること．
- ホチキスで左上をとめて提出すること．
- 以上を守れていないレポートは減点の可能性がある．

$\boxed{1}$ グラフ $G = (V, E)$ に対して，その 補グラフ $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ を

$$\overline{V} = V, \qquad \overline{E} = \binom{V}{2} \setminus E$$

と定める（つまり，補グラフとはもとのグラフの隣接関係を逆転させて定まるグラフである）．G を (n, k, λ, μ)-srg とする．このとき，G の補グラフ $\overline{G}$ も srg であり，そのパラメータが $(n, n-k-1, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda)$ であることを示したい．$\overline{G}$ の隣接行列を $\overline{A}$ とおき，次の手順にしたがって示せ．

(1) $\overline{A} = J - I - A$ であることを示せ．

(2) $\overline{A}J = (n-k-1)J$ であることを示せ．

(3) $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$ に $A = J - I - \overline{A}$ を代入し，$\overline{A}^2$ を $\overline{A}, I, J$ の一次結合で表せ．

(4) $\overline{G}$ が srg であり，そのパラメータが $(n, n-k-1, n-2k+\mu-2, n-2k+\lambda)$ であることを示せ．

$\boxed{2}$ Lemma 2.3 の証明に出てきた $D \neq 0$ を示したい，ただし $D = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$ である．次の手順にしたがって示せ．

(1) k, λ, μ の意味を考えることで $\mu \leq k$ と $\lambda \leq k - 1$ を示せ．

(2) もし $D = 0$ が成り立つならば $\mu = k$ が導かれることを示せ．

(3) もし $D = 0$ が成り立つならば $\lambda = \mu$ が導かれることを示せ．

(4) $D \neq 0$ であることを示せ．（$D = 0$ と仮定し，(i) と矛盾することを確認せよ．）

$\boxed{3}$ $(2k, k, 0, k)$-srg が $K_{k,k}$ に決まることを示したい．$(2k, k, 0, k)$-srg を G とおき，次の手順にしたがって示せ．

(1) $\overline{G}$ のパラメータを求めよ．

(2) $\overline{G}$ に対して Lemma 2.1 が適用できることを確認し，ある自然数 $m (\geq 2)$ が存在して $\overline{G} = mK_k$ であることを示せ．

(3) 両辺の頂点数を比較し m を決定せよ．さらに，ここから $G = K_{k,k}$ であることを導け．

$\boxed{4}$ $\boxed{3}$ と同様に計算し，$(3\lambda, 2\lambda, \lambda, 2\lambda)$-srg が $\overline{3K_\lambda}$ に決まることを示せ．

レポート選択問題（1問8点）

必答問題しか解答しなかった場合，減点等で 60 点に届かない可能性もあるので選択問題も何問か解いておこう．確実に 100 点が欲しい学生はたくさん解いておこう．

$\boxed{\text{A}}$ （第 1 回までの内容で解ける問題）

5 頂点の 3 正則グラフは存在するか？存在すればそれをかけ．存在しなければそれを証明せよ．また，6 頂点の 3 正則グラフは 2 種類ある．すべてかけ．そのふたつが「違うグラフである」と言える根拠も述べよ．

$\boxed{\text{B}}$ （第 2 回までの内容で解ける問題）

連結な 2 正則グラフがサイクルグラフに決まることを示せ．

$\boxed{\text{C}}$ （第 2 回までの内容で解ける問題）

完全 2 部グラフ $K_{m,n}$ の固有値を求めよ．隣接行列の階数を調べたり，グラフの固有値の性質を使うなどしてなるべく上手に計算してみよう．

$\boxed{\text{D}}$ （第 2 回までの内容で解ける問題）

グラフから connected という仮定を外したとき，授業で紹介した Perron–Frobenius の定理が成り立たないことを確かめよ．つまり，disconnected なグラフで最大固有値の重複度が 2 以上あるグラフを構成せよ．

$\boxed{\text{E}}$ （第 3 回までの内容で解ける問題）

強正則グラフは，パラメータ (n, k, λ, μ) として具体的な数字を指定したからといって必ず存在するとは限らない（存在する場合に一意的であるとも限らない）．例えば $(21, 16, 12, 11)$-srg は存在しない．このパラメータは Lemma 2.2 で示した等式 $k(k-\lambda-1) = (n-k-1)\mu$ を満たさないからである．一方，$(21, 16, 12, 12)$-srg は Lemma 2.2 で示した等式を満たすものの，このパラメータの srg も存在しない．このことを証明せよ．[*1]

$\boxed{\text{F}}$ （第 4 回までの内容で解ける問題）

Lemma 3.2 (1), つまり $C^2 = I$ を示せ．

[*1] 「第 3 回までの内容で解ける」というのがヒントである．強正則グラフの非存在の証明（存在する場合は構成）はパラメータによっては難しい．例えば $(69, 20, 7, 5)$-srg が存在するかしないかは現在のところ未解決である．

$\boxed{\text{G}}$ （第 5 回の内容に関連するがただの線形代数の問題）

複素数を成分とする n 次正方行列 A, B に対し $(AB)^* = B^*A^*$ が成り立つことを示せ．（ヒント：行列が等しいことは両辺の (i, j) 成分が等しいことを示せば良い．行列の積の定義にもとづいて

$$((AB)^*)_{i,j} = (B^*A^*)_{i,j}$$

を示してみよう.）

また，このことを使って正方行列 A, B がユニタリならば積 AB もユニタリであることを示せ.

$\boxed{\text{H}}$ （第 6 回までの内容で解ける問題）

3 つの数 $\sqrt{2}+\sqrt{3}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ が代数的整数かどうか調べよ.

$\boxed{\text{I}}$ （第 6 回までの内容で解ける問題）

r を有理数とする．$2\cos(r\pi)$ が代数的整数であることを示せ．また，$\cos(r\pi)$ はいつでも代数的整数となるか調べよ.

$\boxed{\text{J}}$ （第 7 回までの内容で解ける問題）

巡回行列について調べてまとめよ．それを使ってサイクルグラフ C_n の固有値を求めよ．さらに，C_n が周期的であることを固有値を使って証明せよ.

$\boxed{\text{K}}$ （第 7 回までの内容で解ける問題）

ハミンググラフ $H(d, q)$ の定義と固有値を調べよ（英語で Hamming graph と検索すると wikipedia が引っかかる)．それを使って $H(d, q)$ が周期的であるための必要十分条件が

$$(d, q) \in \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 2)\}$$

であることを示せ.

$\boxed{\text{L}}$ （第 7 回までの内容で解ける問題）

ジョンソングラフ $J(n, k)$ の定義と固有値を調べよ（英語で Johnson graph と検索すると wikipedia が引っかかる)．それを使って $J(n, k)$ が周期的であるための必要十分条件が

$$(n, k) \in \{(2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$$

であることを示せ.