Graded homework Asymptotics

TEAM-Berger-Nussbaum

1.1) $\log_a(n)$ is $\Theta(\log_b(n))$ (bases are asymptotically irrelevant)

$\Rightarrow \log_a(n)$ is $O(\log_b(n)) \cap \Omega(\log_b(n))$

$\Rightarrow \underbrace{\log_a(n) \le c_1 \cdot \log_b(n)}_{\text{Big-O}}$ && $\underbrace{\log_a(n) \ge c_2 \cdot \log_b(n)}_{\text{Big-}\Omega}$

Big-O:

$\Rightarrow \log_a(n) \le \log_a(b) \cdot \log_b(n)$ // $c_1 = \log_a(b)$

$\Rightarrow \log_a(n) \le \log_b(n) \cdot \log_a(b)$ // Logarithm-law

$\Rightarrow \log_a(n) \le \log_a(b^{\log_b(n)})$ // Logarithm-law

$\Rightarrow \log_a(n) \le \log_a(n)$

$\Rightarrow$ <u>Always true</u>

Big-Ω:

$\Rightarrow \log_a(n) \ge \log_a(b) \cdot \log_b(n)$ // $c_2 = \log_a(b)$

$\Rightarrow \log_a(n) \ge \log_b(n) \cdot \log_a(b)$ // Logarithm-law

$\Rightarrow \log_a(n) \ge \log_a(b^{\log_b(n)})$ // Logarithm-law

$\Rightarrow \log_a(n) \ge \log_a(n)$

$\Rightarrow$ Always true

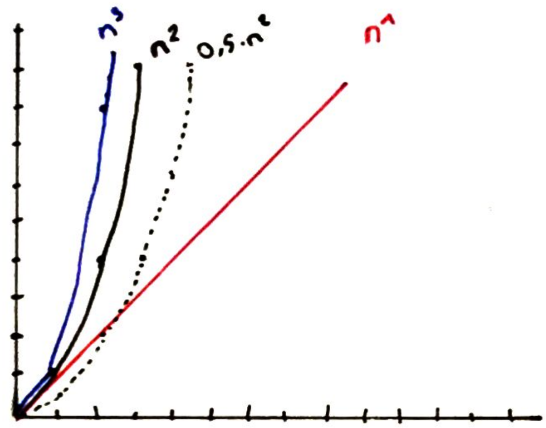
$\Rightarrow$ Both sides are always true, if c constants are chosen properly.

1.2) if $c_1 n^{c_2}$ is $\Theta(c_3 n^{c_4})$ then $c_2 = c_4$ (constant exponent are relevant)

$c_1 \cdot n^{c_2}$ is $O(c_3 \cdot n^{c_4}) \cap \Omega(c_3 \cdot n^{c_4})$

$\Rightarrow c_1 \cdot n^{c_2} \leq c_3 \cdot n^{c_4}$ && $c_1 \cdot n^{c_2} \geq c_3 \cdot n^{c_4}$

Skizze $c_1 = \text{Fix } 1$



Bemerkung:
Man sieht, dass wenn $c_3 \cdot n^{c_4}$ sowohl die obere, als auch die untere Schranke sein soll, muss $c_4 = c_2$ sein. Ansonsten ist es nicht möglich, dass die Gleichung beide Bedingungen erfüllt.

Begründung anhand von einem Beispiel

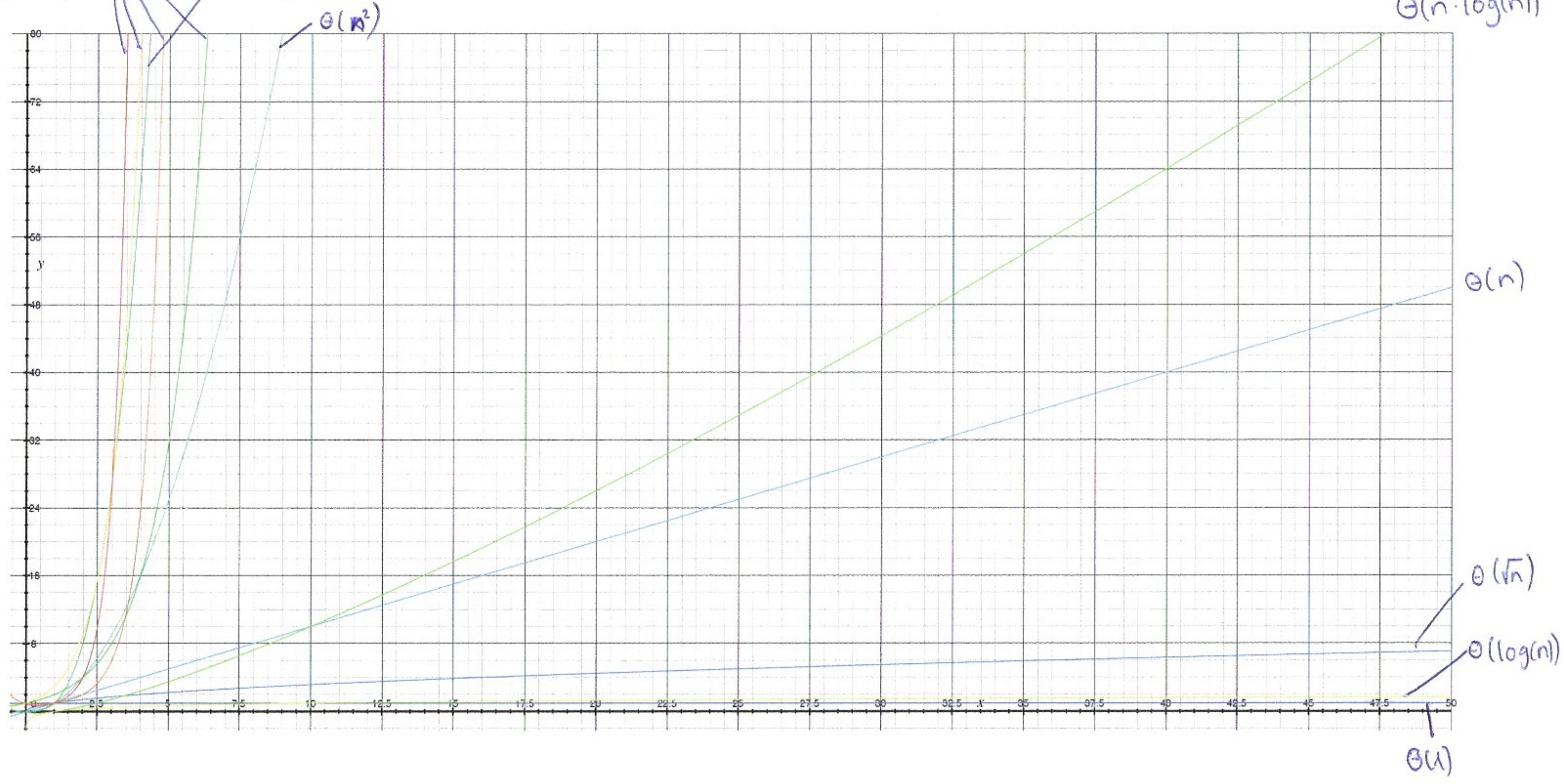
Wenn $f(n) = n^2$ & $g(n) = c_1 \cdot n^1$ (Also $c_2 != c_4$)
so existiert niemals ein c_1, so dass für alle n (→ bis in Unendlichkeit)
eine obere Schranke für n^2 existiert.

Wenn $f(n) = n^1$ & $g(n) = c_1 \cdot n^2$ (Also nochmals $c_2 != c_4$)
so existiert niemals ein c_1, so dass für n^1 eine untere Schranke existiert

$\Rightarrow c_2$ & c_4 müssen gleich sein. (Formell nicht bewiesen)
Jedoch grafisch & logisch erklärt

Graded homework – Aysmptotics

2) Verify the increasing ordering of these ACs



3) a) $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \frac{n^2+n}{2}$

$\Theta(n^2)$ complexity

b) $\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \quad (x \neq 1)$

$\Theta(c^n)$ complexity